Mathematische Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik

und unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

I. Cursus
Brief I.

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Preis pro Brief
Mark 1.—.

Verlag der **Bibliographisch-artistischen Anstalt** zu Leipzig.

Einführung in das Studium der Mathematik.

Man hat in der letzten Zeit oft gestritten, welche unter den Wissenschaften den hervorragendsten Platz unter dem jedem Gebildeten unumgänglich nöthigen Wissen verdiene. Der Eine will die alten Sprachen und die Geschichte, der Andere die modernen Sprachen, der Dritte die Mathematik und die Naturwissenschaften zum Mittelpunkte des Studiums machen. Jede dieser Richtungen kann für ihre Ansichten schwer wiegende Gründe anführen; aber wie auch der Streit entschieden wird, sicherlich muß man der Mathematik und den Naturwissenschaften mindestens eine bevorzugte Stellung einräumen.

Die Geschichte macht uns mit den Geschicken unserer Vorfahren bekannt und läßt uns einen Blick in die Zukunft thun. Die alten Sprachen lehren uns einen Homer und Vergil kennen, sie bringen uns die Entwicklung der modernen Sprachen zum Verständniß, sie sind durch ihren grammatischen Bau eine unübertreffliche practische Denklehre. Die neueren Sprachen endlich führen uns über die Grenzen unseres engern Vaterlandes hinaus und ermöglichen uns den Verkehr mit anderen Nationen, dessen der Handel, die Industrie und Wissenschaft so dringend bedürfen. Fragen wir aber nun, welchen Wissenschaften wir die großen Fortschritte unserer Cultur verdanken, so muß die Antwort unbedingt lauten: den Naturwissenschaften und der Mathematik. Die Naturwissenschaften haben uns nicht nur ganz neue Gebiete eröffnet, welche unsere Altvordern nicht kannten, sondern sie haben unserer Zeit auch eine ganz neue Gestalt gegeben. Die Kenntniß der Wärmelehre hat die Dampfmaschine, die Kenntniß des Elektromagnetismus den Telegraphen und das Telephon geschaffen. Zu solcher Bedeutung hätten die Naturwissenschaften nicht gelangen können ohne die wirksame Hilfe der Mathematik. Blicken wir in ein gutes naturwissenschaftliches Buch, so werden wir sehen, daß sich eine mathematische Formel an die andere reiht. Die Gesetze der Natur werden in die exacte Sprache der Mathematik gekleidet, und dann werden die Folgerungen gezogen, welche sich ohne mathematische Behandlung nicht übersehen lassen. Die Fortschritte der Mathematik sind zugleich Fortschritte der Naturwissenschaften. Die letzteren blühen, weil die erstere durch die neuen Methoden des Cartesius und Leibniz eine Höhe erreicht hat, welche von den Alten gar nicht geahnt wurde.

Mit Hilfe mathematischer Rechnung construirt man das Mikroskop. Durch das Mikroskop erschließt sich unseren Augen die kleine Welt, wir verfolgen die Entwicklung der winzigen Organismen, welche den Milzbrand und typhus recurrens erzeugen, welche die Gährung beim Backen, die Essigbildung und den Proceß der Fäulniß verursachen. Mit dem Teleskop

bringen wir in die große Welt, wir sehen Tausende von Sternen, die den unbewaffneten Augen verborgen bleiben.

Durch die Mathematik bestimmt man die Bahnen, die Größe, das Gewicht und die Entfernung der Planeten. Der Neptun, der äußerste unter den Planeten, ist ohne Beobachtung durch mathematische Rechnung entdeckt worden. Leverrier, Professor in Paris, hat aus den Störungen, welche die Bahnen der anderen Planeten zeigten, die Größe, Bahn und Stellung eines neuen Planeten abgeleitet; der Astronom Galle in Berlin hatte das beste Fernrohr zu seiner Verfügung, er sah an die bezeichnete Stelle des Himmels und entdeckte den Neptun. Nie vorher und nachher hat die Wissenschaft einen so großen Triumph gefeiert!

Eine große Stufe der Vollkommenheit mußte die Mathematik erreichen, ehe sie der Kenntniß der Natur und dem Culturfortschritte so weitgehende Dienste leisten konnte. Um so mehr zu bedauern ist es, daß sie nicht Gemeingut der Gebildeten geworden ist. In unseren Gymnasien, welchen unter den höheren Unterrichtsanstalten die meisten Berechtigungen zuerkannt sind, wird sie stiefmütterlich behandelt; man möchte sie am liebsten aus dem Unterrichtsplan verbannt wissen. Zwar theilen die Naturwissenschaften auf den Gymnasien dasselbe Schicksal, aber es ist mit Erfolg versucht worden, ihre Errungenschaften durch gediegene verständliche Lectüre dem Publicum zugänglich zu machen; hingegen ist die genaue Kenntniß der Mathematik auf einige Lehrer und Fachleute beschränkt, gerade so wie im Mittelalter die Wissenschaft auf die enge Klause weniger Mönche beschränkt war. Das ist um so unverständlicher, als nicht blos die Disciplinen der Naturwissenschaft, die Mechanik, Akustik, Optik, Wärmelehre u. s. w., sondern außer der Sprachforschung alle modernen Wissenschaften sich auf Mathematik gründen oder sie wenigstens in den Bereich ihrer Theorien zu ziehen suchen. Auf mathematische Berechnungen gestützt, führt man jetzt die schwierigsten Bauten aus, die Ufer reißender Ströme verbindet man durch kunstvolle Brücken, meilenlange Tunnel bricht man durch hartes Gestein, und sogar unter dem Meere hinweg (Canal la manche) soll eine Eisenbahn geführt werden. Außer der Baukunst nennen wir den Maschinenbau, die Kriegswissenschaft, die Nautik, die Feldmeßkunst, die Forstwissenschaft. Ja man ist bestrebt, die Mathematik in die Volkswirthschaft und Philosophie einzuführen. Der große Philosoph Herbart hat versucht, den Kampf und die Bewegung der Vorstellungen zu berechnen. Freilich leiden seine Ableitungen an Fehlern, aber er hat Nachfolger gefunden, und heute ist eine der bedeutendsten Errungenschaften der modernen Psychologie ein mathematisches Gesetz, welches das Verhältniß des äußern Reizes zur Empfindung festsetzt.

Am Eingange der Akademie in Athen, in welcher der große Philosoph Plato lehrte, standen die Worte: „Kein der Mathematik Unkundiger trete in mein Haus!" Dieselben Worte muß jetzt die moderne Wissenschaft Demjenigen zurufen, der in ihr Haus eintreten will.

Aber sehen wir ganz ab von den Wissenschaften! Wohin das Auge blickt, wird gemessen, gerechnet, Größe und Inhalt bestimmt. Der Maurer und der Zimmermann veranschlagen die Kosten eines Baues, der Böttcher bestimmt den Inhalt der Gefäße, ja jeder Handwerker, möge er Eisen oder Kupfer, Holz oder Stein, Leder oder Papier verarbeiten, muß rechnen und messen, wenn er nicht durch unnützes Probiren Material, Zeit und Arbeitskraft vergeuden will. Der Landmann vermißt seine Felder, er schätzt die Kosten einer Drainirung und eines Abzugsgrabens, und bestimmt den Ertrag und Werth seiner Aecker und Wiesen. Der Kaufmann berechnet seinen Gewinn, Netto- und Bruttopreise, der Banquier den Discont, der Rentier seine Zinsen, und der Vertreter des Staates und der Gemeinde sinnt und rechnet, auf welche Weise die Ausgaben vermindert, die Einnahmen vermehrt werden können. Je mehr die Cultur sich hebt, je größer die Bedürfnisse werden, um so mehr wird weise Berechnung erfordert. Und sollen diese Berechnungen mechanisch ausgeführt werden, nach einer auswendig gelernten Regel, ohne Kenntniß der Ursachen des Verfahrens, mit anderen Worten: ohne mathematische Bildung? Liegt da nicht die Gefahr nahe, daß diese mechanischen Regeln mit einander verwechselt werden und daß sich ein Gefühl der Unsicherheit ausbilde?

Und diesem practischen Nutzen steht der geistige Gewinn nicht nach. Wird doch jeder, welcher durch die Beschäftigung mit der Mathematik die räumlichen Gebilde kennt, in der Außenwelt, die ihn umgiebt, mehr sehen als ein Anderer, dem mathematische Kenntnisse fehlen. Allen Gestalten, welche sein Auge erblickt, wird er ein größeres Interesse entgegenbringen, denn es sind in seiner Seele schon Vorstellungen vorhanden, welche das neu Ge-

sehene in sich aufnehmen, oder wie der philosophische Ausdruck heißt: ihm appercipirend entgegenkommen. Man hat zweitens nicht mit Unrecht bemerkt, daß die Ordnung und Genauigkeit, welche in der Mathematik herrscht, den Sinn für alles Geordnete und Geregelte, kurz gesagt, für das ästhetisch Schöne fördere und erzeuge. Wer durch die Mathematik Freude an schönen Gestalten gewinnt, wird mit ganz anderen Gefühlen die Säulen und Thürme eines schönen Bauwerkes betrachten als der trockene Gelehrte, welcher bei der Erklärung der griechischen und lateinischen Classiker alles Interesse für die sichtbare Außenwelt verloren hat. Am schwersten fällt aber der Gewinn in's Gewicht, welchen Jedermann aus den mathematischen Studien für das logische Denken schöpft. Zu allen Zeiten hat man die Mathematik die beste Schule des Denkens genannt. In der That! Ihre sicheren und unanfechtbaren Schlüsse schulen das Denken, und die Beschäftigung mit mathematischen Aufgaben erzeugt eine gewisse Beweglichkeit des Geistes, sowie die Kraft und den Muth, sich mit eigenem Nachdenken an Probleme heranzuwagen, die man sonst gläubig Anderen überlassen hat.

Unter diesen Umständen muß bei allen mehr oder weniger Gebildeten der Wunsch, ja das Bedürfniß entstehen, in die Mathematik eingeführt zu werden oder das vorhandene Wissen zu bereichern und die Lücken auszufüllen. Diese Lust und dieses Bedürfniß ist auch vorhanden. Zugleich ist aber auch allgemein das Vorurtheil verbreitet, daß die Mathematik nur wenigen Menschen zugänglich, den meisten verschlossen sei. Man glaubt, daß Diejenigen mit besonderem Talente von der Natur ausgestattet seien, welche den Zugang zur Mathematik finden. Wir müssen fragen: ist diese Ansicht berechtigt, und wodurch ist sie entstanden?

Ganz gewiß wird die Natur ihre Gaben in besonders reichlichem Maße auf Diejenigen ausgestreut haben, welche zu den vorzüglichen Mathematikern zählen; das ist in der Mathematik gerade so wie in den anderen Wissenschaften. Daß aber eine ganz besondere Begabung zum Studium der Mathematik gehöre, wird täglich durch Diejenigen widerlegt, welche anfangs glaubten, unfähig zur Mathematik zu sein, aber die doch Erhebliches leisteten, wenn sie mit Fleiß und Ausdauer an's Werk gingen. Die Meisten werden von dem mathematischen Studium durch einen Umstand zurückgeschreckt, welcher allerdings im Wesen der Mathematik begründet ist. Beim mathematischen Unterricht muß der Schüler dem Vortrage des Lehrers mit ununterbrochener Aufmerksamkeit folgen; überhört er einige Worte, versteht er einen Satz nicht ganz richtig, so ist sogleich der Faden zerrissen, und weil in der Mathematik alle Sätze innerlich zusammengehören, ein Satz sich auf dem andern aufbaut, so ist dann das Verständniß für alles Folgende verloren. Der Schüler wird dadurch ein schwacher Mathematiker, und Eltern wie Bekannte sagen, er habe kein Talent zur Mathematik. Dem wunden Punkte kann leicht abgeholfen werden. Man muß dem Schüler ein Lehrbuch in die Hand geben, das ihn in den Stand setzt, die Lücken in seinem Wissen auszufüllen. Es darf freilich nicht wie die Compendien unserer Gymnasien ein bloßes Gerippe bieten, das den Lehrer des Dictats überheben soll. Nicht zur Bequemlichkeit des Lehrers, sondern für die Bedürfnisse des Schülers muß das Lehrbuch geschrieben sein; es muß ihm den Lehrer vollständig ersetzen. Dann bietet das Studium nach einem Buche gegenüber dem mündlichen Unterricht bedeutende Vortheile. Der Schüler läuft nicht Gefahr, Worte zu überhören und dem Gedankengange nicht folgen zu können. Bei dem eigenthümlichen Charakter der Mathematik wird ein gutes, ausführliches Lehrbuch den Lehrer nicht blos ersetzen, sondern übertreffen.

Das sind die Erwägungen, denen die vorliegenden mathematischen Unterrichts-Briefe ihre Entstehung verdanken. Die mathematischen Briefe werden den Schülern höherer Lehranstalten willkommen sein, ganz besonders aber den Vielen, welche ohne die helfende Hand eines Lehrers durch Selbst-Studium auf einem einfachen und sichern Wege die Lücken in ihren mathematischen Kenntnissen ergänzen wollen. Sie werden willkommen sein dem Officier, dem Lehrer, dem Förster, dem Bergmann, dem Feldmesser, dem Mechaniker, dem Optiker, dem Seemann, dem Maurer und Zimmermann, ja, wir möchten sagen: jedem Gebildeten.

Alle unsere Schüler werden mit verschiedenen Bedürfnissen an uns herantreten. Der Eine will ganz von vorn anfangen, der Andere will sich in der Geometrie und Stereometrie, der Dritte in der Arithmetik und Trigonometrie, der Vierte in der Differential- und Integralrechnung, der Fünfte in der Statik und Dynamik vervollkommnen. Allen diesen Ansprüchen werden wir genügen. Es ist nicht nöthig, daß sich Jemand sämmtliche Unterrichts-

Briefe kaufe, wenn er nur einen Theil studiren will. Zu diesem Zwecke werden wir die mathematischen Unterrichts-Briefe in drei Curse theilen. Schon der erste Cursus wird den Schüler zu einer solchen Stufe mathematischer Ausbildung erheben, daß er im Stande sein wird, den Anforderungen vieler Berufskreise vollständig zu genügen; er wird beispielsweise nach beendigtem Studium desselben jenes mathematische Wissen besitzen, welches zum Examen des Einjährig-Freiwilligen der deutschen Armee und Marine nöthig ist. Der zweite Cursus wird den Schüler in ähnlicher Weise zur Ablegung der Maturitätsprüfung, des Mittelschul- und Steuermanns-Examens und anderer Prüfungen befähigen. Durch den dritten Cursus endlich wird der Schüler in die höhere Mathematik eingeführt; namentlich Polytechniker und Bauacademiker werden darin das für ihre Prüfungen Erforderliche finden. Jeder der drei Curse bildet für sich ein zusammenhängendes Ganze; ja auch innerhalb der einzelnen Curse sind die Disciplinen[1]) so bearbeitet, daß sie von Denjenigen vollständig verstanden werden, welche sich die nothwendigen Vorkenntnisse bereits auf einem andern Wege erworben haben. So ist innerhalb des ersten Cursus die Planimetrie, sowie die Arithmetik und Algebra, im zweiten die Trigonometrie und Stereometrie, im dritten die analytische Geometrie, die Infinitesimalrechnung und die Mechanik ohne Mühe für sich lostrennbar.

Wir geben im Folgenden eine Uebersicht der drei Curse:

A. I. Cursus.
  1) Planimetrie I. Theil.
  2) Arithmetik und Algebra I. Theil.
  3) Planimetrie II. Theil.

B. II. Cursus.
  1) Trigonometrie (ebene).
  2) Stereometrie.
  3) Trigonometrie (sphärische).
  4) Algebra II. Theil.
  5) Planimetrie III. Theil.

C. III. Cursus.
  1) analytische Geometrie.
    a) der Ebene.
    b) des Raumes.
  2) Infinitesimalrechnung.
    a) Differentialrechnung.
    b) Integralrechnung.
  3) Mechanik.
    a) Statik.
    b) Dynamik.

[1]) Einzelwissenschaften.

Wenngleich es nun möglich ist, die einzelnen Abtheilungen der mathematischen Unterrichts-Briefe für sich zu studiren, so rathen wir dem Schüler doch dringend, mit dem ersten Briefe zu beginnen. Er wird sich auf keinem Gebiete der Mathematik heimisch fühlen können, wenn er nicht die Anfangsgründe sicher in sich aufgenommen hat. Die mathematische Wissenschaft ist eine Leiter, auf der jede Sprosse betreten werden muß, wenn man oben anlangen will. Dafür entschädigt aber ihr Studium den Ausharrenden auch auf das Reichste.

Für den ersten Cursus werden wir gar keine mathematischen Vorkenntnisse voraussetzen. Der Anfänger wird von den ersten Elementen bis zur Statik und Dynamik geführt werden. Immer wird der Verfasser die Bedürfnisse des Lernenden vor Augen haben; Klarheit und Deutlichkeit sollen seine Haupttugenden sein. Von dem bisher gebräuchlichen Lehrgange wird er öfter abweichen. Die Aufgabe, den Schüler ohne die helfende Hand des Lehrers an's Ziel zu bringen, macht diese Abweichungen nöthig. Bei den ersten Elementen ist der Verfasser mehr auf die Anschauung zurückgegangen als es sonst zu geschehen pflegt. Weit entfernt, die Darstellung dadurch zu verflachen, glaubt er nur auszuführen, was zahlreiche Mathematiker und Philosophen als den einzig richtigen Weg bezeichnet haben. Es ist ebenso unmöglich, über die Grundeigenschaften des Raumes ohne Anschauung sich klar zu werden, als Aussagen über ein Thier zu machen, das man noch nicht gesehen hat. Darum ist, was viele Lehrbücher bei den ersten Elementen als Beweis geben, nichts als Erklärung der Anschauung.

In den ersten Briefen werden wir zuweilen die strenge Euklid'sche Methode verlassen, weil wir das Warum und Weshalb nicht erörtern dürfen, bevor der Schüler das Was gehörig in sich aufgenommen hat.

Großes Gewicht werden wir auf die Aufgaben legen. So weit als thunlich, sollen sie den practischen Bedürfnissen des Lebens entnommen werden. Durch sie soll das schon gebotene Material beständig wiederholt und dadurch gesichert werden.

So mögen denn diese sorgfältig durchgearbeiteten Unterrichts-Briefe dem Publicum übergeben werden! Mögen sie recht viel Nutzen stiften, das Studium der Mathematik fördern und den Lernenden, der sich ihnen anvertraut, zu dem gewünschten Ziele führen!

Historische Einleitung.

Wer sich mit einer Wissenschaft beschäftigen will, wünscht auch die Männer kennen zu lernen, denen sie ihre Entstehung und Entwickelung verdankt. Deshalb schicken wir jedem Cursus einen kurzen geschichtlichen Abriß voraus, den wir unsere Schüler nach Beendigung des Cursus noch einmal zu lesen bitten, weil ihnen dann die mathematischen Begriffe geläufiger sein werden.

Es wird berichtet, daß die Inder, Chaldäer und Chinesen schon in den ältesten Zeiten astronomische Beobachtungen und Messungen angestellt haben. Daraus läßt sich schließen, daß die Mathematik bei ihnen über die ersten Anfangsgründe hinausgeführt war. Die eigentliche Wiege der mathematischen Wissenschaft stand jedoch an den Ufern des Nil. Der alljährlich über seine Ufer hinaustretende Strom machte es nöthig, die verwüsteten Ländereien immer wieder von Neuem zu vermessen. Eine aufgefundene Papyrusrolle läßt es wahrscheinlich erscheinen, daß bei dieser Vermessung der Felder die Aegypter auf die Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaft geführt wurden. Daher hieß die Mathematik auch erst Feld- und Erdmeßkunst — auf griechisch Geometrie — ein Wort, welches jetzt die Lehre von den räumlichen Figuren bezeichnet. Bei den großartigen Bauten der Aegypter, den Pyramiden, den Palästen und Canälen, mußte sich auch, abgesehen von der Theilung der Felder, eine Art practischer Mathematik nothwendig entwickeln.

Die mathematischen Kenntnisse der Aegypter brachte ungefähr um's Jahr 600 vor Chr. der Milesier Thales nach Griechenland. Von seinen Leistungen wird berichtet, daß er Anwendungen der Congruenzsätze gemacht und sogar die Höhe einer Pyramide aus ihrem Schatten berechnet habe. Man nennt den Thales in der Regel den Vater der Philosophie; mit demselben Rechte könnte man ihn als Vater der wissenschaftlichen Mathematik preisen. Seine Schüler Anaximander und Anaximenes wirkten in seinem Sinne weiter.

Eine tiefer gehende Ausbildung erhielt die Mathematik durch Pythagoras, der um 570 vor Chr. in Unteritalien lebte. Durch seine Vorliebe für mathematische Studien ließ er sich zu der irrigen Lehre hinreißen, daß man in den Formen und Zahlen das Wesen der Dinge zu sehen habe, aber dieser Irrthum wurde für die Mathematik fruchtbar; sie wurde künftig nicht blos mehr wegen des Nutzens und der practischen Anwendbarkeit betrieben. Weil man sie von einem höhern Gesichtspunkte aus auffaßte, gewann sie einen Werth an sich und nahm den Charakter einer Wissenschaft an. Bekannt ist der nach Pythagoras benannte Lehrsatz, daß im rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten sei. Als Pythagoras diesen wichtigen Satz entdeckt hatte, soll er vor Freude den Göttern eine Hekatombe (hundert Rinder) geopfert haben, weshalb, wie Heine scherzhaft bemerkt, „jetzt alle Ochsen zittern, wenn eine neue Wahrheit gefunden wird". Wir wissen, daß Pythagoras auch schon die Aehnlichkeitssätze gekannt und den Grund zur Zahlentheorie gelegt hat.

Unter den vielen Schülern des großen Meisters ist der bedeutendste Hippokrates, welcher in der Mitte des 5. Jahrhunderts wirkte, und nicht mit dem berühmten Arzte gleichen Namens zu verwechseln ist. Er beschäftigte sich namentlich mit dem Kreise, und wir dürfen annehmen, daß durch ihn die Planimetrie zu einem fast völligen Abschluß gelangt ist. Was dem Secundaner unserer höhern Schule noch Mühe und Schwierigkeiten bereitet, ist schon von den alten Griechen in der Mitte des 5. Jahrhunderts vor Chr. entdeckt und wissenschaftlich begründet worden.

Die Stereometrie (die Lehre von den Körpern) wurde auch von Hippokrates nicht gefördert; erst dem großen athenischen Philosophen Plato war es vorbehalten, zur Untersuchung der regelmäßigen körperlichen Figuren, der Kugel, des Cylinders, der Pyramide und des Kegels anzuregen. Weil Plato die mathematische Erkenntniß für eine gute Vorbereitung zur Philosophie hielt, so munterte er seine Schüler zum Studium der Mathematik auf. Es ist schon erwähnt, daß am Eingange der Akademie, in welcher der große Philosoph lehrte, die Worte geschrieben waren: Kein der Mathematik Unkundiger komme in mein Haus. Unter den Schülern Plato's hat Menaichmos die größten Verdienste, welcher durch den Kegel Ebenen legte und die Kegelschnitte, die Parabel, Ellipse und Hyperbel fand.

So wurde denn ein Lehrsatz nach dem andern entdeckt und ein Gebiet nach dem andern enthüllt. Aber diese Entdeckungen wurden nicht gesammelt und nicht in ein orga-

nisches Ganze verwoben. Sie existirten nur in den Geistern ihrer Entdecker und der Wenigen, welchen sie von diesen überliefert waren. Die philosophischen Schulen des Plato und Aristoteles boten zwar die ersten Sammelpunkte für das vielfach zerstreute Material, aber es fehlte noch an einem Lehrbuche, welches die vorhandenen Bausteine zu einem einheitlichen Gebäude zusammenfügte, welches als Einführung in die Wissenschaft und als Grundlage für die ferneren Fortschritte dienen konnte.

Ein solches Lehrbuch wurde spät geschrieben; erst als Alexander, der große Macedonier, gestorben[1]) und sein schnell erobertes Weltreich unter seine Feldherren vertheilt war. In Aegypten wurden die Ptolemäer Nachfolger Alexander's. Wie selten ein Herrscherhaus, haben sie für Kunst und Wissenschaft gesorgt. Sie bauten in ihrer Hauptstadt Alexandria die berühmte Bibliothek und zogen die gelehrtesten Männer der damaligen Zeit an ihren Hof, unter ihnen auch den berühmten Mathematiker Euklides. Dort in Alexandria schrieb Euklides seine unübertrefflichen Elemente. Das gesammte mathematische Wissen der Griechen ist darin mit bewundernswürdiger Systematik geordnet und in vorzüglicher Weise zusammengestellt. Euklid's Elemente sind ein Werk aere perennius,[2]) um ein Wort des Horaz zu gebrauchen; es war bis in die neueste Zeit als Lehrbuch auf unseren höheren Unterrichtsanstalten eingeführt. Wie kein anderes Buch ist es erfolgreich für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften gewesen. Nachdem durch Euklides ein so herrliches Fundament gelegt war, konnte der weitere Bau schnell und sicher erfolgen. Die gewaltige Anregung, die von ihm ausging, ließ die bedeutendsten Astronomen und Mathematiker erstehen — den Aristarchos, Eratosthenes, Archimedes, Apollonius und Hipparchos. Wir wollen sie unter dem Namen der alexandrinischen Schule zusammenfassen, denn mit Ausnahme des Archimedes lebten sie alle in Alexandria, das bis zur Eroberung durch die Araber der Hauptsitz der Wissenschaften blieb.

Aristarchos und Eratosthenes sind weniger durch mathematische als durch astronomische Leistungen ausgezeichnet. Eratosthenes hat zum ersten Male versucht, nach einer vollkommen richtigen Methode den Umfang der Erde zu bestimmen.

---

[1]) 323 vor Chr. [2]) Erz überdauernd.

Den Archimedes hätten wir ebenso wie die Anderen in Alexandria zu suchen, wenn er nicht ein Verwandter des syracusanischen Königs Hieron gewesen wäre, dessen Liebe zu den Wissenschaften ihn in Syracus festhielt. Archimedes ist der Schöpfer der höhern Geometrie und Mechanik. Er wendet bei seinen Rechnungen eine Methode an, die mit der im 17. Jahrhundert entdeckten Integralrechnung nahe verwandt ist. Wenn man die mathematischen Schriften des genialen Griechen liest, so glaubt man unwillkürlich, einen Mathematiker der Neuzeit vor sich zu haben. Eine seiner bedeutendsten Leistungen ist die Entdeckung des unter dem Namen Archimedisches Princip bekannten Gesetzes, daß jeder Körper in einer Flüssigkeit so viel von seinem Gewichte verliert als die verdrängte Flüssigkeit wiegt. Anlaß zur Entdeckung soll der Auftrag des Königs Hieron gegeben haben, zu untersuchen, ob eine für ihn gefertigte Krone aus echtem Golde gearbeitet sei. Archimedes nahm ein Stück Gold, welches in der Luft ebenso schwer war wie die Krone, und wog beides, Gold und Krone, im Wasser. Da sich jetzt die Krone leichter zeigte als das Gold, so schloß er, daß sie unmöglich aus reinem Golde gemacht sei. Weitere leichte Erwägungen führten ihn zu dem oben genannten Gesetz. Bekannt ist auch die Theilnahme des Archimedes an der Vertheidigung des von den Römern belagerten Syrakus. Durch kunstvolle Maschinen soll er die Anstrengungen der Belagerer drei Jahre lang fruchtlos gemacht haben. So wird berichtet, daß er durch Brennspiegel die Kriegsflotte der Römer in Brand gesteckt habe. Nach der Einnahme von Syrakus drang ein römischer Krieger in das Arbeitszimmer des Archimedes, der vertieft in seine Arbeiten die Gegenwart des Römers gar nicht bemerkte. Empört über solche Gleichgiltigkeit, tödtete der grausame Krieger den genialsten Mathematiker des Alterthums! (212 vor Chr.)

Mehr noch als Archimedes ist von Euklides Apollonius angeregt worden, welcher die Theorie der Kegelschnitte ausbildete und die griechische Geometrie auf den Höhepunkt brachte. Ebenso wie Euklides hat er in Alexandria gelebt und zwar unter Ptolemaios Philopator um's Jahr 240 vor Chr. Was die Griechen nach Apollonius in der Geometrie geleistet haben, ist nur der unmittelbare Ausfluß seiner Schöpfungen.

Die fortlaufende Reihe der großen Astronomen und Mathematiker schließt Hipparchos,

welcher in der Mitte des zweiten Jahrhunderts vor Chr. lebte und als vortrefflicher Astronom bekannt ist. Schon während er lebte, machte sich der römische Einfluß in Aegypten geltend. Später gewannen die Römer die Weltherrschaft; der römische Geist wurde herrschend und erstickte die theoretische Behandlung der Mathematik. Die Römer waren Practiker, sie trieben die Wissenschaft um des Nutzens willen, und liebten darum die angewandte Mathematik. Es gab unter ihnen bedeutende Baumeister und Mechaniker, aber in der reinen Mathematik wurde sehr wenig geleistet.

Nur in der römischen Kaiserzeit sind zwei leuchtende Sterne zu erwähnen, die aber nicht im Stande waren, andere Geister zur wissenschaftlichen Forschung hinzureißen. Der erste ist der Astronom Ptolemaios, dessen Blüthe in die Zeit von 125—160 nach Chr. fällt — der zweite ist der Mathematiker Diophantos, welcher in der Mitte des vierten Jahrhunderts nach Chr. unter der Regierung des Kaisers Julian lebte.

Diophantos ist der Begründer der Algebra. Eine Art Gleichungen, die wir im zweiten Cursus kennen lernen werden, hat von ihm ihren Namen erhalten.

Beide Männer wirkten in Alexandria, welches der Hauptsitz der Wissenschaften blieb, bis diese Metropole griechischer Bildung von dem Kalifen Omar im Jahre 640 nach Chr. erobert wurde. Die berühmte Bibliothek, in der die Schätze des Alterthums aufgespeichert lagen, soll damals verbrannt worden sein[1]), da Omar meinte, „wenn die Bücher nur das enthielten was im Koran stehe, so seien sie unnütz, wenn sie aber etwas Anderes enthielten, so seien sie schädlich, in jedem Falle also zu verbrennen."

Den folgenden Theil der Geschichte der Mathematik wollen wir kurz fassen, denn es entstehen jetzt diejenigen Disciplinen, welche wir im zweiten und dritten Cursus behandeln werden.

Als die Araber ihre Religion mit Feuer und Schwert verbreitet hatten, dachten sie anders wie Omar, und wandten sich den Künsten des Friedens zu. Die Erzeugnisse griechischen Geistes wurden von ihnen in's Arabische übersetzt. Sie waren Hüter der classischen Wissenschaft, während die christlichen Gelehrten, mit spitzfindigen Zänkereien beschäftigt, keinen Sinn für die Errungenschaften heidnischen Geistes hatten. Erst nach Erfindung der Buchdruckerkunst finden wir unter den Christen bedeutende Mathematiker, die in Italien die Algebra, in Deutschland die schon von den Arabern in den Grundzügen aufgestellte Trigonometrie förderten. In Italien lösten Tartaglia, Cardano und Ferrari die Gleichungen dritten und vierten Grades, und Vieta führte die Buchstabenrechnung ein. In Deutschland sind Regiomontan und Purbach zu nennen; die Astronomen übergehen wir.

Eine ganz neue Epoche beginnt für die Mathematik mit Cartesius, dem genialen Begründer der analytischen Geometrie. Es schien, daß die Geometrie schon durch Apollonius ihren Abschluß erreicht habe, als ihr Cartesius durch Einführung seiner neuen Methode ein unerschöpfliches Gebiet eröffnete, an dem Gegenwart und Zukunft bis in ferne Zeiten ihre Geisteskräfte erproben können. Cartesius lebte am Anfange des 17. Jahrhunderts. Schon das Ende desselben Jahrhunderts brachte eine Schöpfung, die noch bedeutender war als die des Cartesius. Newton und Leibniz erfanden die Infinitesimal-Rechnung. Mit Hilfe derselben wurde die Mathematik durch Männer wie Euler, Lagrange, Laplace, Gauß, Jacobi, Cauchy zu der Vollkommenheit geführt, die wir jetzt an ihr bewundern.

[1]) Die Angabe, daß der Kalif Omar (651 nach Chr.) ein halbes Jahr lang mit den Büchern der Bibliothek die öffentlichen Bäder heizen ließ, scheint jedoch spätere Erdichtung zu sein, da schon am Anfang des 5. Jahrhunderts der Geschichtschreiber Orosius, der die Bibliothek besuchte, nur noch leere Schränke vorfand. Die Bibliothek dürfte vielmehr bereits während der im Jahre 389 stattgehabten Unruhen durch den Pöbel der Stadt vernichtet worden sein.

Studien-Plan.

Wer ohne die leitende Hand des Lehrers als Autodidakt sich die Erlernung der Mathematik zur Aufgabe stellt, muß an sich selbst das Amt des Lehrers üben. Deshalb empfehlen wir zur strengsten Beobachtung Jedem, der sich mit diesen Unterrichts-Briefen beschäftigt, nachstehende Verhaltungsvorschriften.

1) Gründlichkeit mache sich der

Schüler zur ersten Pflicht; er überschlage nichts, halte nichts für unwichtig oder umgehbar. Mit jeder Lection beschäftige er sich auf das Eingehendste. In der Mathematik hängt ein Glied mit dem andern zusammen. Jeder Beweis stützt sich auf die vorhergehenden Lehrsätze, das Vorhergehende ist immer das Fundament für das Folgende. Wie wir schon oben bemerkt haben, wird sich der Schüler auf jeder Stufe erst heimisch fühlen, wenn ihm der vorher durchstudirte Theil vollständig in Fleisch und Blut übergegangen ist. Uebung ist die beste Lehrmeisterin, und Wiederholung bietet die einzige Sicherheit dafür, daß das Gedächtniß treu bewahrt was der Geist klar erfaßt hat. Durch die Aufgaben, die wir stellen, werden wir beständig den ganzen schon gebotenen Stoff wiederholen; bemerkt aber trotzdem der Schüler, daß ihm eine Lection fremd zu werden beginnt, so müssen wir ihm eine Wiederholung recht sehr an's Herz legen.

2) Der Schüler präge die mit fetter Schrift gedruckten Sätze genau seinem Gedächtniß ein; das Beste ist, wenn er sie auswendig lernt. Es werden diese Sätze beständig gebraucht, und durch wörtliche Einprägung wird sich der Schüler die spätere Arbeit bedeutend erleichtern. Er wird sich außerdem an die mathematische Sprache gewöhnen, die kurz und präcis und dabei doch klar und treffend sein muß.

3) Der Schüler verwende immer großen Fleiß auf die Lösung der Aufgaben. Nicht die Aufnahme und Einprägung des mathematischen Stoffes allein macht den Mathematiker. Der Schüler muß den gelernten Stoff selbständig verwerthen können, denn sonst ist sein Wissen todtes Capital, welches ihm keinen Nutzen bringt und wenig Freude macht. Es ist der schönste Genuß, durch eigenes Nachdenken richtige Resultate zu erzielen, und diesen Genuß wird der Schüler haben, wenn ihm die Lösung einer schwierigen mathematischen Aufgabe gelungen ist.

4) Wir werden am Ende eines jeden Briefes Fragen stellen, welche der Schüler gewissenhaft beantworten muß. Indem er sich dadurch den Inhalt des ganzen Briefes noch einmal in's Gedächtniß zurückruft, wird er auf die beste Weise für den folgenden Unterrichts-Brief vorbereitet werden.

5) Der Schüler richte sich ein Heft ein, in welches er die Antworten auf die von uns gestellten Fragen und die Lösungen der Aufgaben einträgt. Er schreibe darin recht übersichtlich und setze immer unter und neben einander, was unter und neben einander gehört. Es muß in dem Hefte diejenige Ordnung herrschen, welche das Studium der Mathematik so sehr erleichtert.

Die Lösungen der gestellten Aufgaben und die Beantwortung der an ihn gerichteten Fragen wird der Schüler immer im nächsten Brief finden, doch nehme er niemals den folgenden Brief zur Hand ehe der vorangegangene gründlich erfaßt und durchgearbeitet ist. Er wird dadurch das anregende Studium der Mathematik immer lieber gewinnen, während er sonst sich vor einen Berg stellt, den er nicht zu erklimmen im Stande sein wird.

Sollte dem Schüler trotzdem etwas unklar bleiben, so bitten wir ihn, deshalb brieflich bei uns anzufragen; wir werden gern und jeder Zeit bereit sein, über alle den Unterricht betreffenden Fragen unentgeltlich Auskunft zu ertheilen. Wir bitten noch, diese Briefe, mit Beischluß einer Franco-Marke zur Rücksendung, an die Verlagshandlung der Mathematischen Unterrichts-Briefe „Bibliographisch-artistische Anstalt zu Leipzig" franco einzusenden, welche deren Erledigung prompt veranlassen wird.

Und nun zur Sache!

Es hängt keine Krone so fest und so hoch,
Der muthige Springer erreichet sie doch.
(Schiller.)

Segen ist der Mühe Preis!
(Schiller.)

Lection 1.

A. Die Aufgabe der Planimetrie.

§ 1. Der Ausgangspunkt der Unterrichts-Briefe. Die Mathematik ist die Lehre von den Größen und Größenverhältnissen. Diese Erklärung ist sehr allgemein, aber sie entspricht ganz dem allgemeinen Charakter unserer Wissenschaft. Mit dem Namen Mathematik bezeichnet man nämlich nicht eine einzige, sondern mehrere, freilich eng mit einander zusammenhängende Disciplinen, z. B. die Geometrie, die Arithmetik und Algebra, die Trigonometrie, die Differential- und Integralrechnung. Die Namen aller dieser Disciplinen anzuführen, hätte nur dann einen Zweck, wenn es möglich wäre, dem Anfänger klar zu machen, welche Ziele sie verfolgen und wie sie sich von einander unterscheiden. Wer aber die Aufgaben der mathematischen Einzelwissenschaften und ihre Unterschiede verstehen will, muß sich schon einen reichen Schatz mathematischer Kenntnisse erworben haben. Bei unseren Schülern setzen wir aber keine mathematische Vorbildung voraus; darum müssen wir es auch unterlassen, schon an dieser Stelle die einzelnen Disciplinen der Mathematik zu besprechen; vielmehr werden wir den Schüler sogleich in eine derselben hineinführen. Wir könnten die Arithmetik[1]) oder die Geometrie[2]) zum Ausgangspunkte wählen; die Arithmetik beschäftigt sich mit den Zahlengrößen, die Geometrie mit den räumlichen Gebilden. In der ersten dieser Wissenschaften, der Arithmetik, müssen wir abstracte, schwer verständliche Begriffe behandeln; dagegen können wir in der Geometrie Alles, womit wir uns befassen, anschaulich darstellen. Durch die Anschauung erhalten aber die geometrischen Vorstellungen einen bestimmten, festen Inhalt, so daß sie selbst vom Anfänger leicht verglichen und in anderer Weise verarbeitet werden können. Aus diesem Grunde beginnen wir mit der Geometrie und lassen die Arithmetik erst folgen, wenn der Schüler in seinen geometrischen Kenntnissen eine Hilfe bei der Auffassung der arithmetischen Vorstellungen besitzen wird.

---

[1]) Lehre von den Zahlengrößen. [2]) Lehre von den räumlichen Größen.

§ 2. Der Gegenstand der Geometrie. Die räumlichen Gebilde, welche die Geometrie behandelt, zerfallen in **Körper, Flächen, Linien** und **Punkte**.

In dem Raume, der uns umgiebt, nehmen wir Körper wahr. An diesen Körpern, welche man **materielle** oder **physische** nennt, kann man zweierlei Eigenschaften unterscheiden:

1) Diejenigen, welche uns über den **Stoff** des Körpers unterrichten, z. B. die Farbe, der Geruch, die Härte u. s. w.

2) Die **Gestalt** und die **Größe**.

Die ersten, die stofflichen Eigenschaften, berücksichtigt die Geometrie nicht; es ist ihr gleichgiltig, ob der Körper roth oder grün, gläsern oder silbern ist. Sie sieht von diesen Eigenschaften vollständig ab und unterwirft nur die Gestalt und die Größe, oder mit anderen Worten, den begrenzten leeren Raum, welchen der materielle Körper einnimmt, ihrer Betrachtung. Nicht der wahrgenommene knöcherne Würfel, nicht die wahrgenommene Billardkugel wird in der Geometrie untersucht, sondern der begrenzte leere Raum, welcher übrig bleibt, wenn man sich den Stoff fortdenkt, aus welchem der Würfel oder die Billardkugel gearbeitet ist. Also:

Der geometrische Körper ist der begrenzte leere Raum, welchen der materielle Körper einnimmt.

Wenn wir künftig von „Körper" sprechen, so verstehen wir darunter immer den geometrischen Körper.

An einem Körper unterscheidet man Länge, Breite und Höhe (Dicke).

Die Grenzen eines Körpers nennt man **Flächen**, und die gesammte Begrenzung heißt die Oberfläche. **Den Flächen kommt keine Dicke zu,** denn sie sind nicht Theile des Körpers, sondern dessen Grenzen. Sie lassen sich darum nicht durch ein dünnes Blatt Papier oder geschlagenen Kupfers veranschaulichen. Solche Blättchen haben immer eine bestimmte Dicke und sind darum als Körper anzusehen; nur ihre Seiten sind Flächen.

Die Grenzen der Flächen sind **Linien**. Die Fläche jedes Ackerstückes hat zur Grenze eine Linie, die in der Regel durch einen Zaun

oder eine Furche angedeutet wird. Eine Linie darf nicht als Theil einer Fläche aufgefaßt werden; sie hat darum keine Breite. Eine Linie ist ohne Dicke und Breite; sie hat nur eine einzige Ausdehnung, **die Länge.**

Die Grenzen der Linien sind **Punkte.** Den Punkten fehlt auch die Ausdehnung der Länge. Sie sind ausdehnungslose Stellen im Raume. Gewöhnlich sprechen wir von Punkten, wenn wir das Papier mit der Feder oder die Schiefertafel mit dem Griffel berühren. Indessen diese Tinten- und Kreidepunkte sind nicht mathematische Punkte, sondern kleine materielle Körper, welche unter dem Mikroskop betrachtet eine recht ansehnliche Breite, Dicke und Länge haben. Sie deuten uns nur die Stellen im Raume an, an denen sich die mathematischen Punkte befinden sollen.

§ 3. Entstehung der räumlichen Gebilde durch Bewegung. Bei der vorhergehenden Auseinandersetzung sind wir vom Körper zum Punkt herabgestiegen. Wir wollen jetzt den umgekehrten Weg wählen und vom Punkte ausgehen.

Bewegt man einen Punkt, so entsteht eine **Linie.** Man zeichnet Linien, indem man mit dem Stifte auf der Schiefertafel oder mit der Federspitze auf dem Papier entlang fährt. Eigentlich sind die so erzeugten Linien länglich gestreckte Körper, und unter dem Mikroskop sehen sie kleinen Gebirgszügen ähnlich. Man muß eben von ihrer Dicke und Breite absehen und nur die Richtung der Bewegung (die Länge) in Betracht ziehen, um zum Begriffe der mathematischen Linie zu gelangen.

Durch Bewegung einer Linie entsteht eine **Fläche.** Wir sehen eine Fläche entstehen, wenn die Hausfrau mit der Schneide des Messers durch das Brod fährt.

Bewegt man eine Fläche, so entsteht ein **Körper.** Man kann einen Würfel erzeugen, wenn man die untere Fläche, auf welcher der Würfel ruht, an der Seitenkante entlang führt. Wir können also

die Linie die Bahn des fortbewegten Punktes,
die Fläche die Bahn der fortbewegten Linie,
den Körper die Bahn der fortbewegten Fläche nennen.

§ 4. Die Eintheilung der Geometrie in Planimetrie[1]) und Stereometrie[2]). Uns interessiren zunächst die Flächen. Man theilt sie in **krumme** und in **ebene** Flächen ein. Den genauen mathematischen Unterschied der beiden Flächenarten anzugeben, müssen wir uns vorläufig noch versagen. Wir wenden uns an die schon vorhandenen räumlichen Vorstellungen unserer Schüler. Krumm sind z. B. die Oberflächen einer Kegelkugel, eines Apfels, einer Linse, die Fläche einer Chausséewalze u. s. w. Unvollkommen eben ist die Oberfläche des ruhenden Wassers, die Fläche des gewöhnlichen Spiegels und des Schreibpapiers, und die Platte eines Tisches. Eine vollkommen ebene Fläche darf weder Erhöhungen noch Vertiefungen haben. In der Natur sind aber kleine Unebenheiten immer vorhanden; sogar auf der Fläche eines schön polirten Metallspiegels wechseln Erhöhungen und Vertiefungen mit einander ab, die nur zu klein sind, um vom Auge bemerkt zu werden.

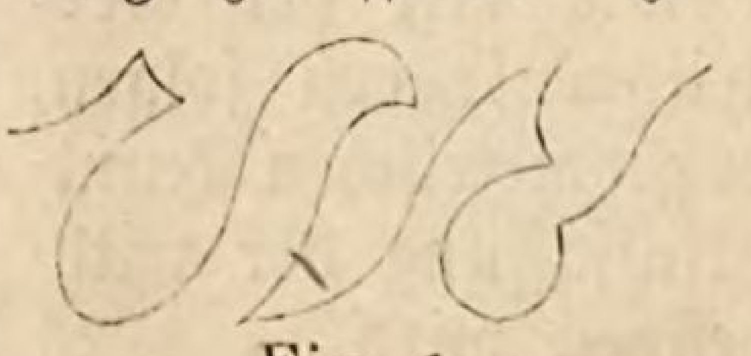
Eine vollkommen ebene Oberfläche würde alle Lichtstrahlen, von denen sie getroffen wird, regelmäßig zurückwerfen; sie wäre darum selbst unsichtbar, könnte aber als unübertrefflicher Spiegel dienen.

Die Eintheilung der Flächen in ebene und krumme hat den Anlaß zu einer Eintheilung der Geometrie gegeben. Von Alters her unterscheidet man die ebene Geometrie oder **Planimetrie** von der körperlichen Geometrie oder **Stereometrie.**

Die ebene Geometrie oder Planimetrie behandelt die Figuren, welche in einer **Ebene** (ebene Fläche) construirt werden können. Da wir die Fläche des Papiers als eben betrachten, so gehören die Figuren 1, 2, 3, 4 und 5 in das Gebiet der Planimetrie.

Die körperliche Geometrie oder Stereometrie untersucht die räumlichen Gebilde, welche **nicht** in einer Ebene liegen, wie etwa die krummen Oberflächen (z. B. die Kugeloberfläche) und die Körper.

§ 5. Aufgabe der elementaren Planimetrie. Wir wenden uns zunächst der Planimetrie zu. Die ebenen Figuren, welche in der Planimetrie betrachtet werden, zeigen die mannigfachsten Gestalten (Fig. 1, 2, 3, 4, 5). Einige derselben scheinen keinem Gesetze zu gehorchen und jeder mathematischen Behandlung zu spotten z. B. Fig. 1; andere Gebilde dagegen zeigen eine solche Ordnung und Regelmäßigkeit, daß wir uns zur Untersuchung ihrer Eigenschaften angeregt fühlen. Solche Untersuchungen sind meist sehr schwierig und nur bei einer beschränk-


Fig. 1.

[1]) Planimetrie heißt Messung ebener Figuren.
[2]) Stereometrie heißt Messung der Körper.

ten Anzahl ebener Figuren ausführbar. So bewegen sich die Planeten in krummen Linien, welche man Ellipsen nennt (Fig. 2). Obwohl nun die Ellipsen noch zu den weniger complicirten Linien gehören, so ist doch lange Zeit verflossen, ehe eine zweckmäßige Methode zu ihrer Untersuchung entdeckt wurde. Auch uns werden erst im dritten Cursus die mathematischen Hilfsmittel zu Gebote stehen, um die Eigenschaften der Ellipse ohne große Schwierigkeiten aufzufinden. Im ersten Cursus beschäftigen wir uns mit der **elementaren Planimetrie,** welche nur diejenigen Figuren behandelt, die mit **Lineal** und **Zirkel** construirt werden können.

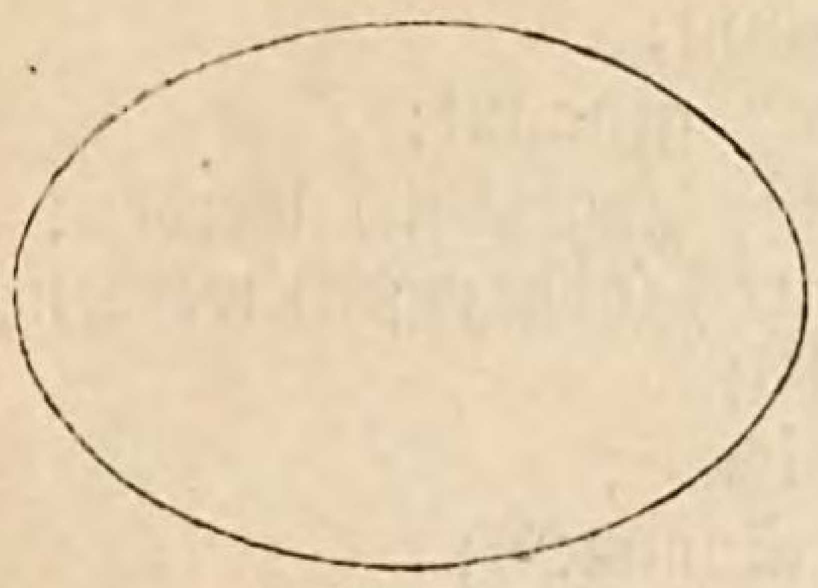


Fig. 2.

Mit dem Lineal zeichnet man gerade Linien und geradlinige Figuren, z. B. Dreiecke (Fig. 3). Mit dem Zirkel zeichnet man Kreise (Fig. 4). Mit beiden Instrumenten lassen sich die verschiedensten Figuren construiren, welche eine Verbindung von Kreis und Linie darstellen z. B. Fig. 5.

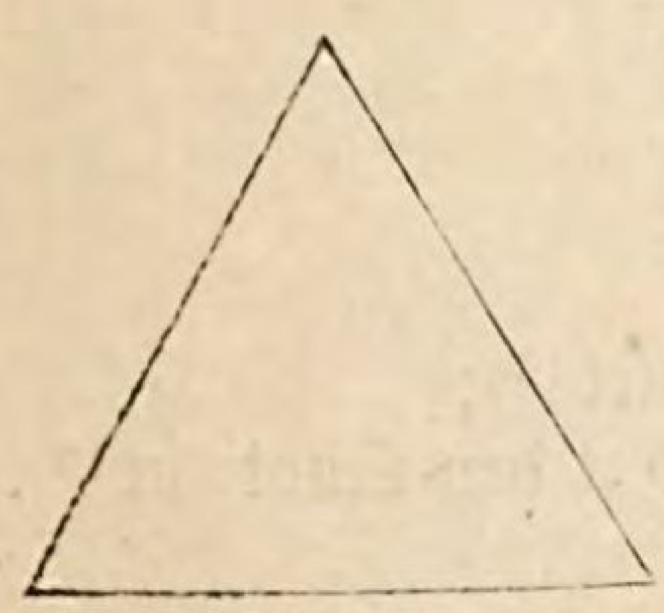


Fig. 3.

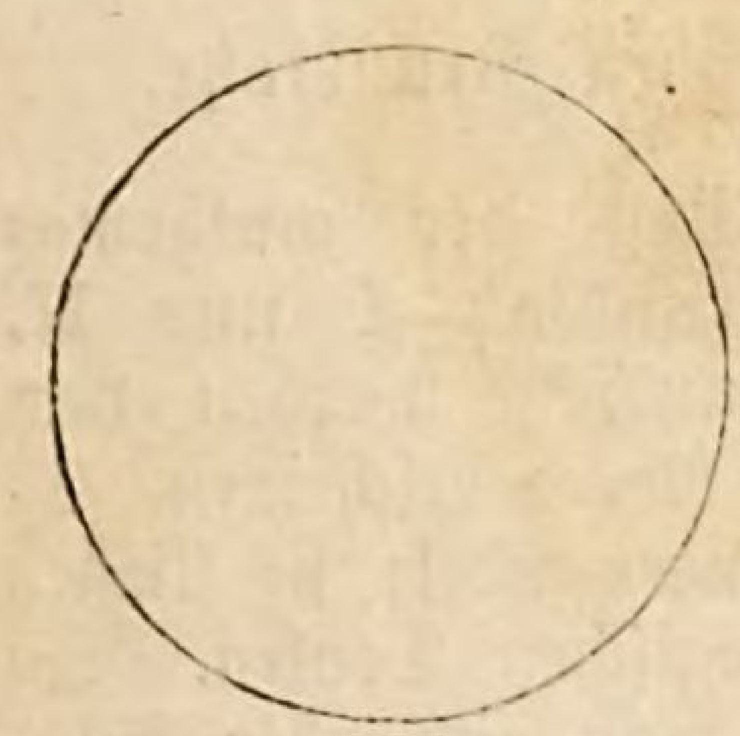


Fig. 4.

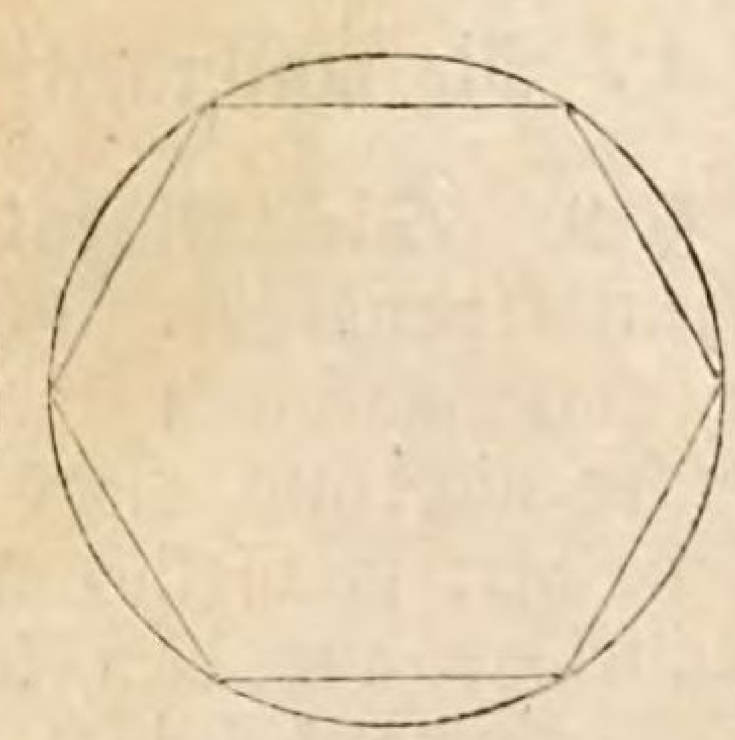


Fig. 5.

Die elementare Planimetrie hat nun die Aufgabe:

1) die **Eigenschaften** dieser Figuren aufzusuchen;
2) die Berechnung ihres **Inhaltes** zu lehren;
3) anzugeben, wie sie mit Hilfe von Lineal und Zirkel **construirt** werden können.

Ehe wir zu den geometrischen Gebilden selbst übergehen, wollen wir die Schüler noch mit einigen mathematischen Zeichen und mit den sogenannten Grundsätzen bekannt machen.

B. Die mathematischen Zeichen.

§ 6. Die Bedeutung der mathematischen Zeichen. Das Gleichheitszeichen. Die Sprache der Mathematik muß kurz sein; zu viele Worte müssen vermieden werden, weil sonst die Uebersicht verloren geht. Deshalb ersetzt man die sprachlichen Wendungen, deren man sich oft bedienen muß, durch Abkürzungen, die in Strichen und Punkten bestehen. Man nennt diese Abkürzungen mathematische Zeichen. Vorläufig möge sich der Schüler davon folgende einprägen:

= ist das **Gleichheitszeichen**. Es bedeutet „gleich", „ebenso groß wie", „ebenso viel wie".

8 m[1]) = 800 cm[2]) wird gesprochen: 8 Meter sind gleich 800 Centimetern; oder: 8 Meter sind ebenso groß wie 800 Centimeter.

8 Mk.[3]) = 800 Pf.[4]) heißt in Worten: 8 Mark sind gleich 800 Pfennig; oder: 8 Mark sind ebenso viel wie 800 Pfennig.

a und b sind zwei gerade Linien, welche gleich groß sind. (siehe untenstehende Figuren.)

a b

Es ist also, wenn wir das Gleichheitszeichen anwenden, a = b; in Worten: die gerade Linie a ist ebenso groß wie die gerade Linie b.

Aufgaben. Was heißt in Worte gekleidet: 1) 4 Schock = 240 Stück, 2) 5 m = 50 dm[5]), 3) 3 Mk. = 300 Pf., 4) 3 dm = 30 cm?

Zwei durch ein Gleichheitszeichen mit einander verbundene Größen nennt man eine **Gleichung**. 8 m = 800 cm, 8 Mk. = 800 Pf., a = b sind also Gleichungen. Man unterscheidet bei einer Gleichung die **rechte** und die **linke Seite.** In 8 m = 800 cm ist 8 m die linke, 800 cm die rechte Seite. Es ist gestattet, bei einer Gleichung **beide Seiten** mit einander zu **vertauschen**. Statt 8 m = 800 cm kann man 800 cm = 8 m setzen, denn es ist offenbar gleichgiltig, ob man sagt: 8 Meter sind gleich 800 Centimetern, oder: 800 Centimeter sind gleich 8 Metern.

---

[1]) m bedeutet Meter. [2]) cm bedeutet Centimeter; ein Meter hat 100 Centimeter. [3]) Mk. = Mark. [4]) Pf. = Pfennig. [5]) dm bedeutet Decimeter; ein Meter hat 10 Decimeter.

§ 7. Das Additions- und Subtractionszeichen.

$+$ ist das Zeichen der Addition[1] (des Zuzählens, Zusammenzählens);
$-$ ist das Zeichen der Subtraction[2] (des Abziehens);
$+$ wird „und" oder „plus"[3] gesprochen und „Pluszeichen" genannt;
$-$ wird „weniger" oder „minus"[4] gesprochen und „Minuszeichen" genannt;
$+$ bedeutet: die folgende Größe soll zu der vorhergehenden addirt[5] (zugezählt) werden;
$-$ bedeutet: die folgende Größe soll von der vorhergehenden subtrahirt[6] (abgezogen) werden;
$3 + 7 = 10$ heißt in Worten: 3 und (oder plus) 7 ist gleich 10;
$8 - 5 = 3$ heißt in Worten: 8 weniger (oder minus) 5 ist gleich 3;
In $3 + 7 = 10$ sind 3 und 7 die Summanden[7] und 10 die Summe[8];
In $8 - 5 = 3$ ist 8 der Minuend[9], 5 der Subtrahend[10] und 3 die Differenz[11].

Aufgaben. Wie wird gesprochen:

1) $19 + 7 = 26$, 2) $13 + 14 = 27$, 3) $8 + 5 = 13$, 4) $25 - 15 = 10$, 5) $19 - 6 = 13$, 6) $28 - 11 = 17$?

Der Schüler möge zugleich die Summanden, Summen, Minuenden, Subtrahenden und Differenzen angeben.

§ 8. Das Multiplications- und Divisionszeichen.

$\times$ ist das Zeichen der Multiplication[12] (des Vervielfältigens);
$:$ ist das Zeichen der Division[13] (des Theilens);
$\times$ wird gesprochen: „mal";
$:$ wird gesprochen: „dividirt[14] durch";
$2 \times 3 = 6$ heißt in Worten: 2 mal 3 ist gleich 6;
$10 : 5 = 2$ heißt in Worten: 10 dividirt durch 5 ist gleich 2;
In $2 \times 3 = 6$ nennt man 2 und 3 die Factoren[15] und 6 das Product[16];
In $10 : 5 = 2$ nennt man 10 den Dividendus[17], 5 den Divisor[18] und 2 den Quotient[19].

Als Multiplicationszeichen bedient man sich statt des liegenden Kreuzes ($\times$) in der Regel eines einfachen Punktes (.), weil das liegende Kreuz ($\times$) zu leicht mit dem Additionszeichen ($+$) verwechselt werden kann. Statt 2×3 kann man also schreiben $2 . 3$; ebenso $3 . 4 = 12$ statt $3 \times 4 = 12$, und $2 . 7 = 14$ statt $2 \times 7 = 14$.

Als Divisionszeichen wird oft statt der beiden Punkte (:) ein wagerechter Strich (Bruchstrich) gebraucht. Statt $10 : 5$ kann man also schreiben $\frac{10}{5}$; ebenso $\frac{6}{2} = 3$ statt $6 : 2 = 3$, und $\frac{15}{3} = 5$ statt $15 : 3 = 5$.

Aufgaben. Wie wird gesprochen:
1) $3 \times 6 = 18$, 2) $4 \times 5 = 20$, 3) $3 \times 10 = 30$, 4) $8 : 4 = 2$, 5) $12 : 3 = 4$, 6) $60 : 12 = 5$?

Der Schüler setze ferner statt $\times$ und : die beiden anderen Zeichen (. und —) und nenne die Factoren, Producte, Dividenden, Divisoren und Quotienten.

C. Die mathematischen Grundsätze.

§ 9. Die Bedeutung der mathematischen Grundsätze. Grundsatz I und II.

Die mathematischen Grundsätze werden dem Schüler nicht als etwas Neues erscheinen. Er hat sie oft, ja täglich angewendet; sie fließen unmittelbar aus dem logischen Denken. In der Mathematik bringt man sich aber Alles zum Bewußtsein was man vornimmt und sich vorstellt, und darum auch die folgenden Denkgesetze, die sich der Schüler als Grundsätze oder Axiome einprägen muß:

---

[1]) Addition kommt her von dem lateinischen Worte additio, das Hinzufügen (Zuzählen). [2]) Subtraction von subtractio, das Abziehen. [3]) plus vom lateinischen plus, mehr. [4]) minus vom lateinischen minus, weniger. [5]) addiren vom lateinischen addere (hinzufügen, zuzählen). [6]) subtrahiren von subtrahere, abziehen. [7]) Summand ist eine Abkürzung von numerus summandus, die zu summirende Zahl. [8]) Summe kommmt her von summa, das Höchste, die Summe. [9]) Minuend ist eine Abkürzung von numerus minuendus, die zu vermindernde Zahl. [10]) Subtrahend ist eine Abkürzung von numerus subtrahendus, die abzuziehende Zahl. [11]) Differenz kommt her von differentia, der Unterschied. [12]) Multiplication kommt von multiplicatio, die Vervielfältigung. [13]) Division von divisio, Theilung. [14]) dividiren von dividere, theilen. [15]) Factor von factor, wörtlich: der Macher. [16]) Product von productum, das Hervorgebrachte. [17]) Dividend ist eine Abkürzung für numerus dividendus, die zu theilende Zahl. [18]) Divisor kommt von divisor, der Theiler. [19]) Quotient von quotiens, wie oft.

I. Jede Größe ist sich selbst gleich.

5 und 7 sind Zahlengrößen; folglich ist nach Grundsatz I $5 = 5$ und $7 = 7$.

Der Satz, daß jede Größe sich selbst gleich sei, wird dem Schüler überflüssig und befremdlich erscheinen. Wir vergleichen sonst nur zwei verschiedene Gegenstände mit einander, etwa zwei an verschiedenen Orten stehende Häuser oder Bäume; wir sagen von den Häusern oder Bäumen, sie seien gleich, wenn sie mit Ausnahme des Ortes, den sie im Raume einnehmen, in allen ihren Merkmalen übereinstimmen. In der Mathematik ist es aber oft nöthig, eine Größe mit sich selbst zu vergleichen, etwa eine 5 mit der 5, wenn diese Größe (die 5) zu verschiedenen Zeiten oder bei verschiedenen Gelegenheiten in Rechnung gezogen wird. Die Vergleichung ergiebt dann, daß wir in allen diesen Fällen eine gleiche Größe verwendet haben, daß die 5 immer der 5 gleich oder mit anderen Worten: daß die 5 sich selbst gleich sei. Verallgemeinert man diesen Gedanken, so ergiebt sich der Satz: Jede Größe ist sich selbst gleich.

II. Zwei Größen sind gleich, wenn sie beide einer dritten gleich sind.

Wir wollen diesen Grundsatz an einem Beispiel erläutern. Nehmen wir an, wir hätten gehört, daß die Zahl der Soldaten in einem bairischen Regimente der Zahl der Soldaten gleich sei, welche in einem preußischen Regimente dienen. Ein anderes Mal hätten wir erfahren, daß auch ein sächsisches Regiment dieselbe Zahl der Soldaten aufzuweisen habe wie ein preußisches. Wir haben hier zwei Größen, nämlich die Zahl der Soldaten in einem bairischen und die Zahl derselben in einem sächsischen Regimente, von welchen wir wissen, daß sie einer dritten Größe, nämlich der Zahl der Soldaten in einem preußischen Regimente gleich sind. Wir werden nun unbedenklich schließen, daß auch die beiden ersten Größen, nämlich die Zahl der Soldaten in einem sächsischen und die Zahl derselben in einem bairischen Regimente, einander gleich seien.

Wählen wir noch ein anderes Beispiel! Es sind 100 Decimeter gleich 10 Metern; ebenso sind 1000 Centimeter gleich 10 Metern. Wir haben hier wieder zwei Größen (100 Decimeter und 1000 Centimeter), welche beide einer dritten Größe (10 Metern) gleich sind. Nach Grundsatz II können wir also schließen, daß auch die beiden ersten Größen (100 Decimeter und 1000 Centimeter) einander gleich seien.

Wir wollen diesen Schluß in eine mathematische Form kleiden:

Es sind $100\ dm = 10\ m$
$1000\ cm = 10\ m$
Folglich $100\ dm = 1000\ cm$

Der **Strich**, welchen der Schüler zwischen der zweiten und dritten Gleichung sieht, bedeutet schon an und für sich **„folglich"**. Wenn man diesen Strich gezogen hat, so braucht man nicht noch „folglich" oder ähnliche Wörter wie „also", „mithin", „daher", „somit", „darum", „deswegen", „deshalb" u. s. w. hinzuzufügen.

Wir geben noch die folgenden vier Beispiele:

1) Es sind 200 Dg[1] $= 2000$ gr[3])
4 Pfd.[2] $= 2000$ gr
(Folglich) 200 Dg $= 4$ Pfd.

2) Es sind $10\ dm = 100\ cm$
$1\ m = 100\ cm$
$10\ dm = 1\ m$

3) Es ist $3 + 9$[4] $= 12$
$6 + 6 = 12$
$3 + 9 = 6 + 6$

4) Es ist $20 - 12 = 8$
$13 - 5 = 8$
$20 - 12 = 13 - 5$

Aufgaben. Der Schüler ziehe ähnliche Schlüsse aus folgenden Gleichungspaaren:

1) $200\ dm = 20\ m$ 2) 100 Dg $= 1000$ gr
$2000\ cm = 20\ m$ 2 Pfd. $= 1000$ gr
3) $20\ dm = 200\ cm$ 4) $8 + 5 = 13$
$2\ m = 200\ cm$ $10 + 3 = 13$
5) $12 - 8 = 4$ 6) $9 + 6 = 15$
$10 - 6 = 4$ $10 + 5 = 15$

§ 10. Grundsatz III und IV.

III. Gleiches zu Gleichem addirt (zugefügt) **giebt Gleiches.** Diesen Grundsatz wollen wir wieder durch Beispiele erläutern.

Erstes Beispiel. Denken wir uns, wir hätten zwei Stück Zeug (das eine wollen wir a, das andere b nennen), welche beide gleich viel Meter messen (a 60 Meter und b 60 Meter). An jedes

---

[1]) Dg bedeutet Dekagramm; ein Dekagramm ist gleich 10 Gramm. [2]) Pfd. bedeutet Pfund; ein Pfund ist gleich 500 Gramm. [3]) gr bedeutet Gramm. [4]) $3 + 9$, ebenso $6 + 6$, $20 - 12$, $13 - 5$, ist als eine Größe aufzufassen.

der beiden Stücke nähen wir ein gleiches Stück an (an a 40 Meter und an b 40 Meter), mit anderen Worten: wir addiren zu a und b gleiche Stücke (von 40 Meter). Dann erhalten wir zwei neue Stücke von gleicher Meterzahl (a mißt 100 und b mißt 100).

Zweites Beispiel. Ein Vater habe zwei Töchter; der einen (Anna) habe er 10 Kronen, der andern (Bertha) 100 Mark zur Beschaffung ihrer Wintergarderobe gegeben. 1 Krone ist soviel wie 10 Mark; 10 Kronen sind also gleich 100 Mark; mithin haben sie beide gleichviel erhalten. Nehmen wir an, diese Summe habe nicht gereicht, und der Vater habe sich darum genöthigt gesehen, seiner einen Tochter (Anna) 3 Kronen und der andern (Bertha) 30 Mark, also beiden gleichviel, zuzulegen. Dann sind der einen (Anna) 13 Kronen, der andern (Bertha) 130 Mark gegeben worden. Da 13 Kronen gleich 130 Mark sind, so haben sie beide auch im Ganzen gleichviel bekommen.

In mathematischen Zeichen:

10 Kronen = 100 Mk.
3 Kronen = 30 Mk.

10 Kr. + 3 Kr. = 130 Mk.
oder 13 Kr. = 130 Mk.

Die folgenden Beispiele wollen wir sogleich in die mathematische Form bringen.

1) Es sind 5 m = 500 cm
10 m = 1000 cm [1])

5 m + 10 m = 500 cm + 1000 cm
oder 15 m = 1500 cm.

2) Es sind 500 l[2]) = 5 hl[3])
300 l = 3 hl

500 l + 300 hl = 5 hl + 3 hl
oder 800 l = 8 hl.

3) Es sind 10 dm = 100 cm
1 dm = 10 cm

10 dm + 1 dm = 100 cm + 10 cm
oder 11 dm = 110 cm.

Aufgaben. Die vorhergehenden Ausführungen werden den Schüler befähigen, die folgenden Gleichungspaare nach Grundsatz III zu behandeln.

1) 6 m = 600 cm
7 m = 700 cm

2) 300 l = 3 hl
400 l = 4 hl

3) 20 dm = 200 cm
2 dm = 20 cm

4) 3 m = 30 dm
5 m = 50 dm

5) 2 Mk. = 200 Pf.
8 Mk. = 800 Pf.

IV. Gleiches von Gleichem subtrahirt (abgezogen) giebt Gleiches.

Zur Erläuterung dieses Grundsatzes mögen die folgenden Beispiele dienen.

Der Schüler denke sich, er habe zwei Schüsseln mit Eiern vor sich stehen (die eine heiße a, die andere b); in beiden mögen gleich viel Eier liegen (in a 80 und in b 80). Werden nun aus jeder Schüssel gleichviel Eier herausgenommen (aus a 30 und aus b 30), so bleiben in jeder gleichviel Eier zurück (in a 50 und in b 50). Setzen wir für „herausnehmen“ den mathematischen Ausdruck „subtrahiren“, so können wir sagen: Wir haben von gleichviel Eiern gleichviel subtrahirt und dabei gleichviel übrig behalten.

Nehmen wir ein anderes Beispiel!

Zwei Buchhalter desselben Geschäftes (von welchen wir den einen a, den andern b nennen wollen) mögen gleichviel Mark monatlichen Gehaltes beziehen (a 150 Mark und b 150 Mark). Weil das Geschäft schlecht geht, sei der Besitzer genöthigt, bei beiden das Gehalt um gleichviel Mark zu verringern (a 50 Mark und b 50 Mark monatlich abzuziehen); dann bekommen die beiden Buchhalter wieder gleichviel Mark in jedem Monat (a 100 Mark und b 100 Mark). Gleichviel Mark (Gleiches) von gleichviel Mark (von Gleichem) abgezogen (subtrahirt) sind (giebt) gleichviel Mark (Gleiches).

Wenn der Schüler die im letzten Satze in Klammern beigefügten Wörter zu einem Satze zusammenstellt, so hat er den Grundsatz IV.

Noch ein Beispiel!

Ein Schnittwaarenhändler möge zwei Stück Seidenzeug von gleicher Beschaffenheit und gleicher Breite besitzen (das eine heiße a, das andere b). Die Länge des einen (a) möge er nach Metern, die des andern (b) nach Centimetern bestimmt und dabei gefunden haben, daß a 3 Meter und b 300 Centimeter mißt. Da 3 Meter gerade soviel sind wie 300 Centimeter, so sind die beiden Seidenstücke gleich lang. Von a verkaufe er nun 1 Meter und von b 100 Centimeter, also gleichviel, dann wird er von a 2 Meter und von b 200 Centimeter, mithin wieder gleichviel

[1]) Der Strich bedeutet wieder „folglich“. [2]) l bedeutet Liter. [3]) hl bedeutet Hektoliter; ein Hektoliter ist gleich 100 Litern.

übrig behalten. Die Schlüsse des letzten Beispiels wollen wir in eine mathematische Form bringen:

Es sind 3 m = 300 cm
1 m = 100 cm

nach Gr. IV 3 m — 1 m = 300 cm — 100 cm
oder 2 m = 200 cm

Die folgenden Beispiele geben wir gleich in mathematischer Fassung.

1) Es sind 12 m = 120 dm
8 m = 80 dm

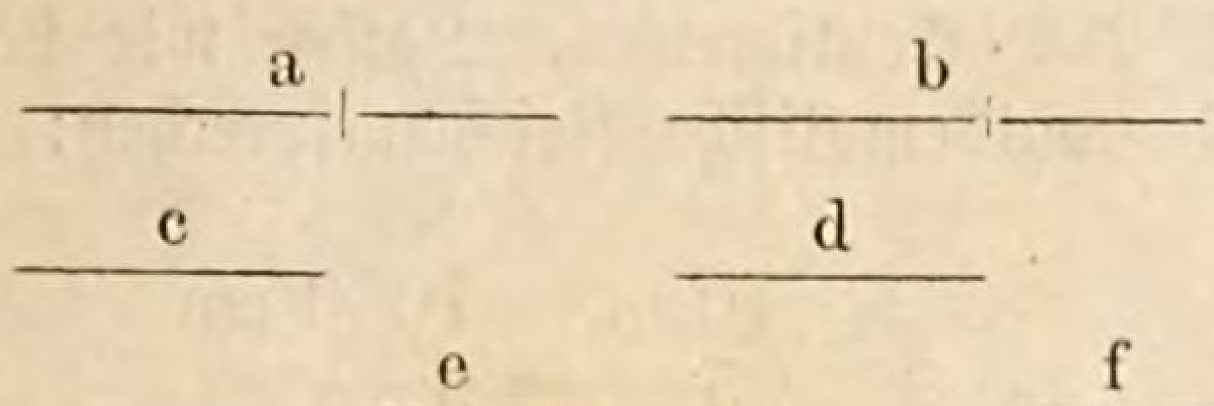
nach Gr. IV 12 m — 8 m = 120 dm — 80 dm

2) Es sind 9 Mk. = 900 Pf.
5 Mk. = 500 Pf.[1]

9 Mk. — 5 Mk. = 900 Pf. — 500 Pf.
oder 4 Mk. = 400 Pf.

3) Es sind 60 dm = 600 cm
30 dm = 300 cm

60 dm — 30 dm = 600 cm — 300 cm
oder 30 dm = 300 cm

4)


Wie der Schüler aus den Figuren sieht, sind die Buchstaben a, b, c, d, e, f Bezeichnungen für gerade Linien, und zwar soll die Linie a ebenso lang sein wie die Linie b und die Linie c ebenso lang wie die Linie d. Die Linie e erhält man, wenn man c von a und die Linie f, wenn man d von b abzieht.

Es ist also a = b
c = d

nach Gr. IV a — c = b — d
oder e = f

Aufgaben. Der Schüler behandle nach den vorstehenden Anweisungen die folgenden Gleichungspaare:

1) 5 m = 500 cm
3 m = 300 cm

2) 7 Mk. = 700 Pf.
4 Mk. = 400 Pf.

3) 8 dm = 80 cm
2 dm = 20 cm

4) 10 m = 100 dm
6 m = 60 dm

5) 900 hl = 9 kl
800 hl = 8 kl.

---

[1]) Was bedeutet der Strich? (Siehe S. 14, Note 1.)

§ 11. Grundsatz V und Grundsatz VI.

V. Gleiches mit Gleichem multiplicirt (vervielfältigt) **giebt Gleiches.**

Ein Vater möge seinen beiden Söhnen (Fritz und Carl), welche das Gymnasium besuchen, gleichviel Mark Taschengeld monatlich geben (Fritz 5 Mark und Carl 5 Mark). Später als sie das Gymnasium verlassen haben, zahlt der Vater beiden 4mal so viel wie früher (Fritz 4mal so viel und Carl 4mal so viel), oder mit anderen Worten: er multiplicirt die Anzahl der Mark, welche vorher das Taschengeld seiner Söhne bildeten, bei beiden mit der gleichen Zahl 4 (bei Fritz mit 4 und bei Carl mit 4). Sie erhalten dann wieder gleichviel Mark (Fritz 20 Mark und Carl 20 Mark).

Erst hatten sie Gleiches (Fritz 5 Mark und Carl 5 Mark); das Gleiche wurde mit Gleichem multiplicirt (bei Fritz mit 4 und bei Carl mit 4); dann hatten sie wieder Gleiches (Fritz 20 Mark und Carl 20 Mark).

Zweites Beispiel. Zwei Bauern einer Gemeinde (den einen wollen wir Schulze und den andern Müller nennen) hatten vor zehn Jahren gleichviel Mark Steuern zu entrichten (Schulze 50 Mark und Müller 50 Mark). Jetzt haben sie beide 3mal so viel Steuern zu bezahlen (Schulze 3mal so viel und Müller 3mal soviel), mit anderen Worten: bei beiden ist die Anzahl der Mark, welche sie früher an Steuern erlegten, mit der gleichen Zahl 3 multiplicirt worden. Sie haben nun auch wieder gleich viel zu zahlen (Schulze 150 Mark und Müller 150 Mark).

Gleiches (bei Schulze 50 Mark und bei Müller 50 Mark) multiplicirt mit Gleichem (bei Schulze mit 3 und bei Müller mit 3) giebt Gleiches (bei Schulze 150 Mark und bei Müller 150 Mark).

Drittes Beispiel. Ein Kaufmann A möge 200 Liter, ein anderer B 2 Hektoliter Wein jährlich absetzen. A und B verkaufen mithin gleichviel, denn 200 Liter sind gerade so viel wie 2 Hektoliter. Wenn die Geschäfte gleichmäßig gehen, haben sie beide nach 5 Jahren 5mal so viel abgesetzt wie in einem Jahre, A also 1000 Liter, B 10 Hektoliter, denn wir erhalten den fünfjährigen Umsatz, wenn wir den jährlichen mit 5 multipliciren, also bei A 200 Liter mit 5 und bei B 2 Hektoliter mit 5.

A und B verkaufen jährlich Gleiches (A 200 Liter und B 2 Hektoliter); das Gleiche wird multiplicirt mit Gleichem (200 Liter mit 5, und 2 Hektoliter mit 5), es ergiebt sich

dabei wieder Gleiches (1000 Liter sind gleich 10 Hektolitern).

In mathematischen Zeichen:

Es sind 200 l = 2 hl
5 = 5 nach Gr. I.
nach Gr. V $5 \times 200\,l = 5 \times 2\,hl$
oder 1000 l = 10 hl.

Wir geben noch folgende Beispiele:

1) 4 m = 400 cm
3 = 3 nach Gr. I.
nach Gr. V $3 \times 4\,m = 3 \times 400\,cm$
oder 12 m = 1200 cm

2) 2 Mk. = 200 Pf.
4 = 4
2×4 Mk. = 4×200 Pf.
oder 8 Mk. = 800 Pf.

3) 13 m = 130 dm
2 = 2
$2 \times 13\,m = 2 \times 130\,dm$
oder 26 m = 260 dm

Aufgaben. Der Schüler löse den obigen Beispielen gemäß die folgenden Aufgaben:

1) 300 l = 3 hl
2 = 2

2) 3 m = 300 cm
5 = 5

3) 5 Mk = 500 Pf.
4 = 4

4) 7 m = 70 dm
8 = 8

5) 9 dm = 90 cm
10 = 10

VI. Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches.

Erstes Beispiel. Nehmen wir an, zwei Brüder (A und B), welche beim Tode ihrer Eltern gleichviel geerbt haben (A 30 000 Mark und B 30 000 Mark), hätten den größten Theil ihres Vermögens durch gewagte Speculationen verloren. Sie mögen noch beide den dritten Theil der geerbten Summe besitzen (A den dritten Theil und B den dritten Theil), d. h. mathematisch ausgedrückt: die Anzahl der Mark, welche sie geerbt haben, sei durch die gleiche Zahl 3 dividirt (getheilt), bei A durch 3 und bei B durch 3. Dann beträgt ihr Vermögen wieder gleichviel Mark (bei A 10 000 Mark und bei B 10 000 Mark).

A und B besaßen Gleiches (A 30 000 Mark und B 30 000 Mark); das Gleiche wurde dividirt durch Gleiches (bei A durch 3 und bei B durch 3), sie besitzen dann wieder Gleiches (A 10 000 Mark und B 10 000 Mark).

Zweites Beispiel. Eine Mutter möge ihren beiden Kindern (wir wollen sie Dora und Willy nennen) während der Kirschenzeit täglich gleichviel Kirschen geben, (Dora 40 Kirschen und Willy 40 Kirschen). Später möge sie ihnen davon nur den vierten Theil verabreichen, d. h. sie möge bei beiden die 40 Kirschen durch die gleiche Zahl 4 dividiren (bei Dora durch 4 und bei Willy durch 4). Die beiden Kinder erhalten auch dann gleich viel Kirschen (Dora 10 und Willy 10).

Sie hatten erst Gleiches (D. 40 Kirschen und W. 40 Kirschen); das Gleiche dividirt durch Gleiches (bei D. durch 4 und bei W. durch 4) gab wieder Gleiches (bei D. 10 Kirschen und bei W. 10 Kirschen).

Drittes Beispiel. 10 Meter sind ebenso groß wie 1000 Centimeter. Wir wollen diese beiden Größen durch die gleiche Zahl 5 dividiren. Wenn wir 10 Meter durch 5 dividiren, erhalten wir 2 Meter, und 1000 Centimeter, durch 5 dividirt, ergeben 200 Centimeter. Wir haben also wieder Gleiches, denn 2 Meter sind gleich 200 Centimetern. Lassen wir statt der Worte mathematische Zeichen sprechen:

10 m = 1000 cm
5 = 5
nach Gr. VI 10 m : 5 = 1000 m : 5
oder 2 m = 200 cm

Wir lassen noch drei Beispiele in mathematischer Form folgen:

1) 4 hl = 400 l
2 = 2
nach Gr. VI 40 hl : 2 = 400 l : 2
oder 2 hl = 200 l.

2) 24 m = 240 dm
6 = 6
24 m : 6 = 240 m : 6
oder 4 m = 40 dm.

3) 18 dm = 180 cm
9 = 9
$\frac{18\,dm}{9} = \frac{180\,cm}{9}$[1])
oder 2 dm = 20 cm.

---

[1]) Wir haben bei Nr. 3 eine andere Schreibweise für „dividirt durch“ gewählt, als bei den drei vorhergehenden Beispielen. siehe § 8.

Aufgaben. Der Schüler behandle die folgenden Gleichungspaare den obigen Beispielen gemäß.

1) 18 m = 1800 cm
   6 = 6

2) 14 hl = 1400 l
   7 = 7

3) 15 dm = 150 cm
   5 = 5

4) 36 m = 360 dm
   9 = 9

5) 8 Mk = 800 Pf.
   4 = 4

D. Die gerade Linie.

§ 12. Die Definition und der Lehrsatz. Jeder unserer Schüler wird die gerade Linie und den Kreis kennen; er wird die gerade Linie nicht mit einer krummen und den Kreis nicht mit einem Dreieck verwechseln. Aber wenn wir ihn aufforderten, genau anzugeben, was er unter einer geraden Linie oder einem Kreise verstehe, so würde er wahrscheinlich eine Antwort geben, welche einen Mathematiker nicht befriedigt. In der Mathematik darf man sich nämlich mit einem oberflächlichen Vorstellungsbilde nicht begnügen, sondern die Begriffe, welche man verwendet, müssen genau festgestellt und in ihre Merkmale zerlegt werden, damit man später aus ihnen beweiskräftige Schlüsse ziehen kann.

Wird ein mathematischer Begriff z. B. die gerade Linie oder der Kreis in dieser Weise bestimmt, so sagt man von ihm: er wird **„definirt"**[1]) oder es wird eine **„Definition"** von ihm gegeben.

Eine Definition ist also eine Begriffsbestimmung.

Noch mit einem andern Namen müssen wir den Schüler bekannt machen, bevor wir auf die gerade Linie näher eingehen.

In der Planimetrie werden die Eigenschaften der ebenen Figuren untersucht. Diese Eigenschaften werden in Sätzen ausgesprochen, welche man **Lehrsätze** nennt. Die gesammten Lehrsätze, gehörig geordnet, bilden das System der Planimetrie.

Jeder Lehrsatz muß bewiesen werden, entweder dadurch, daß man auf die Nöthigung hinweist, welche in der Anschauung liegt, oder dadurch, daß man auf die Grundsätze und die früheren Lehrsätze zurückgeht.

§ 13. a. Die Definition der geraden Linie und der Entfernung. Vom Punkte A zum Punkte B (Fig. 6) können wir auf den verschiedensten Wegen gelangen z. B. über C, D, E und F. Wenn wir diese Wege mit einander vergleichen, so finden wir, daß sie nicht gleich lang sind.

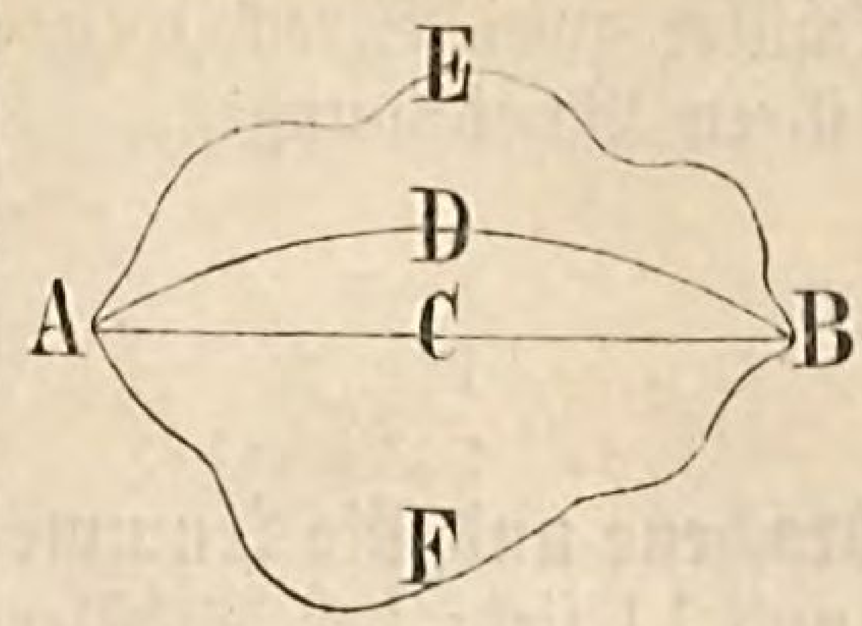


Fig. 6.

Nicht blos die Wege über D, E und F sind länger als der Weg über C, sondern auch alle anderen, welche sich die Phantasie des Schülers erdenken kann. Der Weg über C ist also der kürzeste Weg zwischen den beiden Punkten A und B. Diesem „kürzesten Wege" wollen wir den Namen „gerade Linie" geben.

Definition I. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

Statt **„gerade Linie"** zu sagen, gebraucht man auch einfach das Wort **„Gerade"**.

Wenn man von der **Entfernung** der beiden Punkte A und B (Fig. 6) spricht, so versteht man darunter die Länge des kürzesten Weges zwischen den beiden Punkten oder mit anderen Worten **die Länge der geraden Linie**, welche zwischen den beiden Punkten gezogen werden kann.

Definition II. Die Entfernung zweier Punkte von einander ist gleichbedeutend mit der Länge der geraden Linie, welche die beiden Punkte verbindet.

In Fig. 6 ist also die Länge der Geraden AB zugleich die Entfernung zwischen den beiden Punkten A und B.

§ 13. b. Die Bezeichnung der geraden Linie. Man kann sich eine Gerade **unbegrenzt** d. h. nach beiden Seiten hin in's Unendliche verlängert denken. In diesem Falle pflegt man sie mit **einem großen** Buchstaben zu benennen. In Figur 7 deutet A eine solche unbegrenzte Gerade an; wir können davon nur



Fig. 7.

ein kleines Stück zeichnen, die Verlängerungen nach beiden Seiten hin muß die Phantasie des Schülers hinzufügen.

Ist eine Gerade **begrenzt**, so nennt man sie häufig eine **Strecke**. Eine Strecke wird entweder mit **einem kleinen** Buchstaben bezeichnet, oder mit **zwei großen** Buchstaben, welche an die Grenzpunkte der Strecke gesetzt werden; die beiden Figuren 8

[1]) „definiren" kommt her von dem lateinischen „definire" begrenzen, und „Definition" von „definitio" die Begrenzung.

und 9 zeigen dem Schüler zwei Strecken (begrenzte Gerade) mit ihren Bezeichnungen.



Fig. 8.



Fig. 9.

§ 13. c. Die gebrochene und die krumme Linie. In Figur 10 und 11 sieht der Schüler zwei begrenzte gerade Linien (Strecken) c und d.



Fig. 10.



Fig. 11.

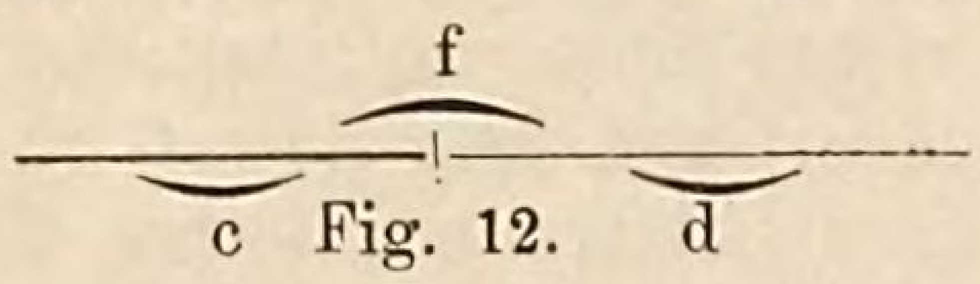
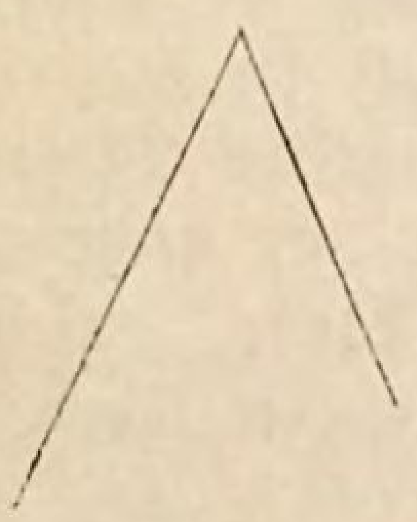


Fig. 12.

Diese beiden Geraden haben wir in Figur 12 so aneinander gefügt, daß sie eine neue Gerade f bilden. Wir können sie aber auch so zusammensetzen, daß sie nicht in einer Geraden liegen, sondern (Figur 13a) einen ähnlichen Anblick gewähren wie ein gebrochener Stock, dessen beide Seiten noch an einigen Holzfasern zusammenhängen. Die Linie, welche dann entsteht, wird (vom gebrochenen Stocke) eine **„gebrochene Linie“** genannt. Man kann auch mehr als zwei Gerade zu einer gebrochenen Linie zusammenfügen. In Fig. 13b wird von e, f, g, h, i eine „gebrochene Linie“ gebildet; dieselbe gleicht einem mehrmals gebrochenen Stocke.


Fig. 13a.

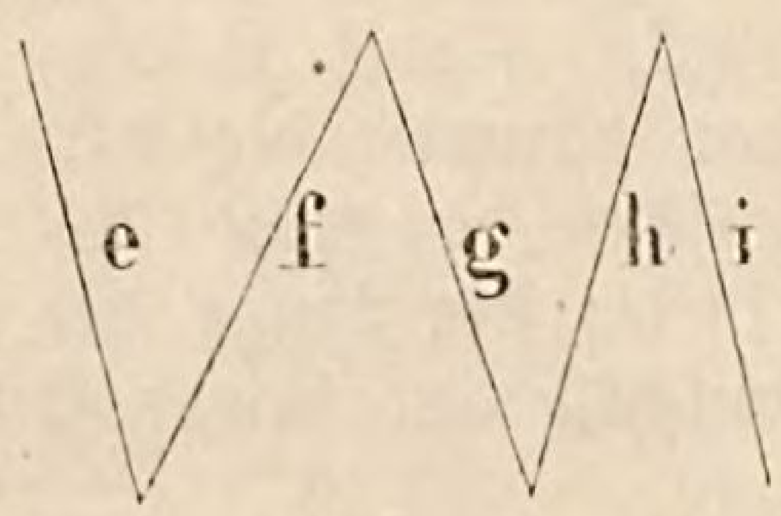


Fig. 13b.

Definition III. Eine Linie, welche aus mehreren Geraden so zusammengesetzt ist, daß dieselben nicht wieder eine gerade Linie bilden, heißt eine gebrochene Linie.

Wir wollen uns jetzt zu den krummen Linien wenden.

Definition IV. Alle Linien, welche nicht zu den geraden und gebrochenen gehören, werden krumme Linien genannt.

Von den unendlich vielen krummen Linien, welche es in der Natur giebt und welche sich der Schüler durch eigene Phantasiethätigkeit selbst vorstellen kann, werden wir in der elementaren Planimetrie nur den Kreis behandeln. Wir haben von anderen krummen Linien schon die Ellipse genannt, eine Linie, welche von der Erde bei ihrem Lauf um die Sonne beschrieben wird, aber, wie wir schon erwähnt haben, erst im dritten Cursus untersucht werden kann.

§ 14. Congruente und incongruente krumme Linien. Ein Lehrsatz über die gerade Linie.

Wenn wir die krummen Linien mit einander vergleichen, so finden wir unter ihnen viele, welche auf keine Weise so auf einander gelegt werden können, daß sie sich vollständig decken[1]) (in allen ihren Punkten zusammenfallen). Wie man z. B. in Figur 14 die beiden krummen Linien a und b drehen und wenden mag, man wird sie niemals zur völligen Deckung bringen. Man sagt von solchen Linien, sie seien **incongruent**[2]).

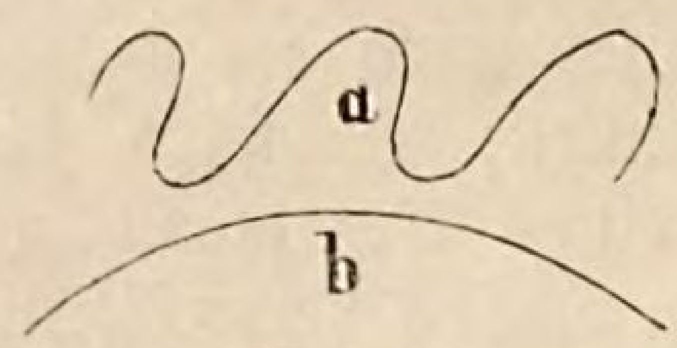


Fig. 14.

Dagegen giebt es auch krumme Linien, welche ganz zusammenfallen, wenn sie in die geeignete Lage gebracht werden. Wenn man in Fig. 15 die krumme Linie d nach oben schiebt, so läßt sich leicht bewirken, daß c und d sich vollständig decken. Solche Linien, welche man ganz zur Deckung bringen kann, nennt man **congruent**. c und d sind also congruent.

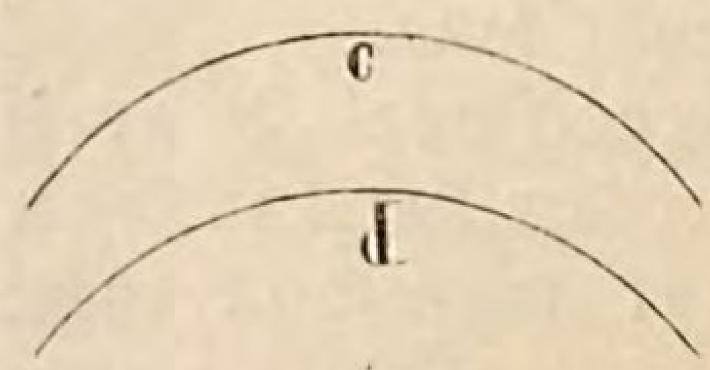


Fig. 15.

Indessen nur bei ganz bestimmten Lagen fallen die congruenten krummen Linien zusammen. Es ist immer möglich, sie so über einander zu legen, daß sie **zwei** Punkte mit einander gemein haben, sich aber durchaus nicht ganz decken. Die beiden congruenten Linien c und d, welche wir aus Figur 15 schon kennen, fallen in Fig. 16 nicht zusammen, obwohl sie sich in den zwei Punkten A und B schneiden. Ganz anders steht es mit geraden Linien. Nehmen wir an, zwei

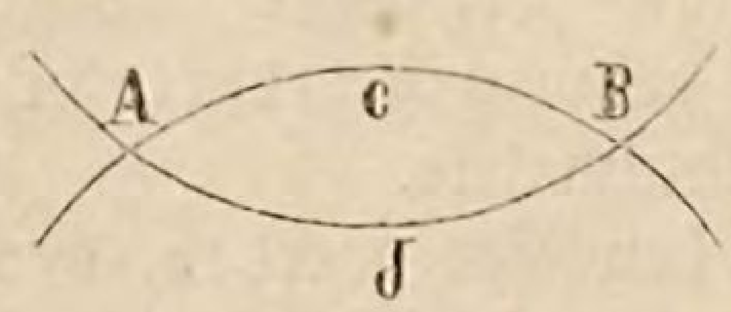


Fig. 16.

¹) Sich decken und zusammenfallen sind Ausdrücke, welche für einander gebraucht werden. ²) congruent heißt auf deutsch „zusammenfallend“ von dem lateinischen congruens, incongruent heißt „nicht-zusammenfallend“.

begrenzte Gerade hätten ihre Endpunkte mit einander gemein, dann würde jede von ihnen der kürzeste Weg zwischen den Endpunkten sein. Nun ist nach der Natur unserer Raumanschauung zwischen zwei Punkten nur ein kürzester Weg denkbar, also müssen die beiden begrenzten Geraden eins sein, d. h. zusammenfallen. Wenn wir nun von den beiden Geraden wissen, daß sie zwei Punkte mit einander gemeinsam haben, welche nicht ihre Endpunkte sind, so können wir zunächst gemäß den eben angestellten Betrachtungen folgern, daß diejenigen Strecken sich decken, welche die gemeinsamen Punkte verbinden. Durch diese Strecken ist aber die Richtung der anderen Theile unserer beiden Geraden vollständig bestimmt; diese anderen Theile müssen also ebenfalls zusammenfallen. Wir haben also

Lehrsatz I. Zwei gerade Linien fallen ganz zusammen, wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben.

§ 15. Das Zeichnen gerader Linien. Das Visiren. Wie wir schon erwähnt haben, zeichnet man gerade Linien mit Hilfe eines Lineals. Der Landmann, Gärtner und Bauhandwerker bedient sich zu diesem Zwecke häufig einer straff gezogenen Schnur. Will z. B. der Zimmermann einen geraden Strich auf einem Balken markiren, so läßt er einen an den beiden Endpunkten des Balkens fest angezogenen Bindfaden, der mit Kreide eingerieben ist, durch „Schnippen" anschlagen.

Eine häufig angewandte Methode, die gerade Richtung festzustellen, ist das **Visiren**. Um dem Schüler eine Erklärung des Visirens zu geben, müssen wir noch einige Vorbemerkungen machen.

Alle Lichtstrahlen, mögen sie nun von der Sonne oder von Gegenständen herkommen, welche ihr Licht erst von der Sonne empfangen, pflanzen sich in geraden Linien fort. Treffen die Strahlen, die von einem Körper ausgehen, auf dem geradlinigen Wege zu unserem Auge auf ein Hinderniß, so bleibt darum dieser Körper für uns unsichtbar. In Figur 17 stelle a ein menschliches Auge, b eine feste Wand und c eine Billardkugel dar. Da die gerade Linie, welche c mit a verbindet, durch die Wand b unterbrochen wird, kann das Auge a die Kugel c nicht bemerken. Auch was hinter unserem Rücken vorgeht, vermögen wir nicht zu sehen, weil von dorther keine geradlinigen Strahlen in unser Auge gelangen können.

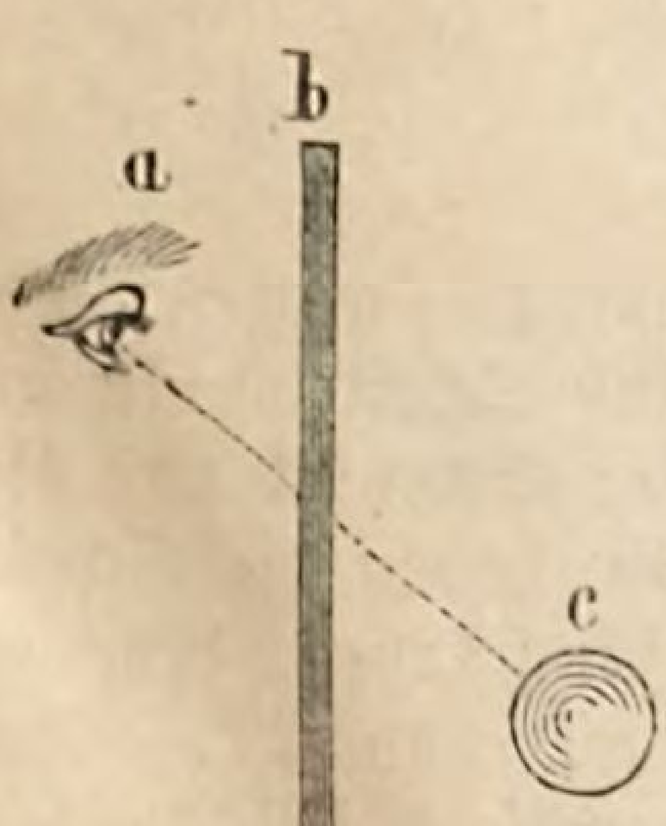


Fig. 17.

Wir wollen uns nun vorstellen, wir hätten drei Lineale a, b und c so an einander gefügt, wie es die folgende Figur (18) zeigt, und durch b und c kleine Löcher B und C gebohrt. Wenn wir jetzt das linke Auge schließen und mit dem rechten so durch die Oeffnung B blicken, daß wir auch durch C hindurchsehen, so

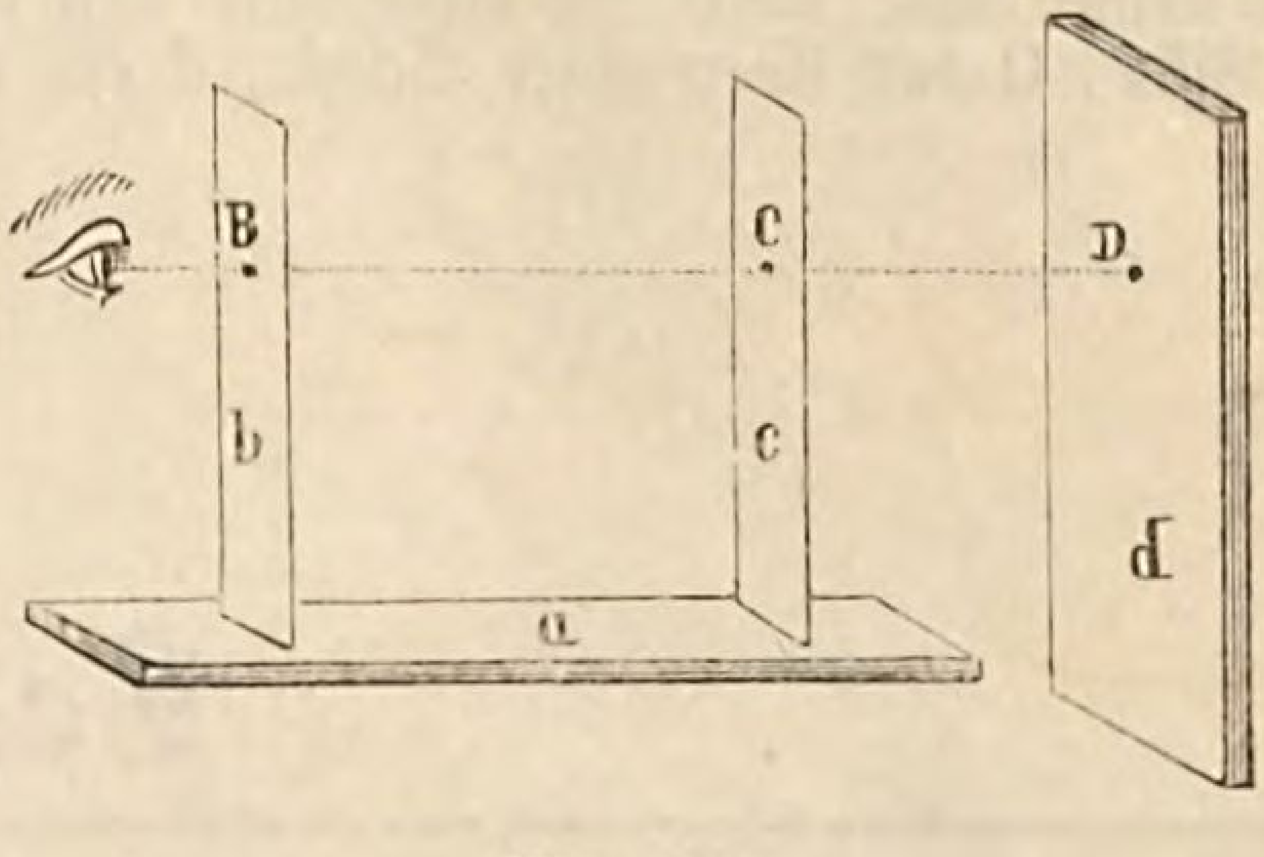


Fig. 18.

werden wir von dem Gegenstande d nur die Stelle D wahrnehmen, welche von der Geraden BC getroffen wird, denn nur von dieser Stelle können die Lichtstrahlen durch die Oeffnungen B und C geradlinig zum Auge kommen. Die Strahlen, welche von den anderen Punkten des Gegenstandes d ausgehen, werden auf ihrem Wege von den Linealen b und c zurückgehalten. Von dem Gegenstande d ist also nur der Punkt D sichtbar, welcher von der Geraden BC durchschnitten wird. Es ist **darum die Vorrichtung Fig. 18 ein geeignetes Mittel, durch das Auge an irgend einem Dinge einen Punkt aufzufinden, welcher mit den beiden Punkten B und C in einer Geraden liegt.** Man nennt diese Vorrichtung (Fig. 18) ein **Diopter**, BCD **die Visirlinie und sagt, das Auge visire den Punkt D.** Es giebt noch andere Arten des Visirens, welche sich ebenfalls vermittelst des Gesetzes, daß der Lichtstrahl sich geradlinig fortpflanzt, erklären lassen.

Wir wollen z. B. die Oeffnungen B und C durch zwei kleine Stahlstückchen ersetzen und die Lineale entfernen. (Fig. 19.) Das Auge möge nun

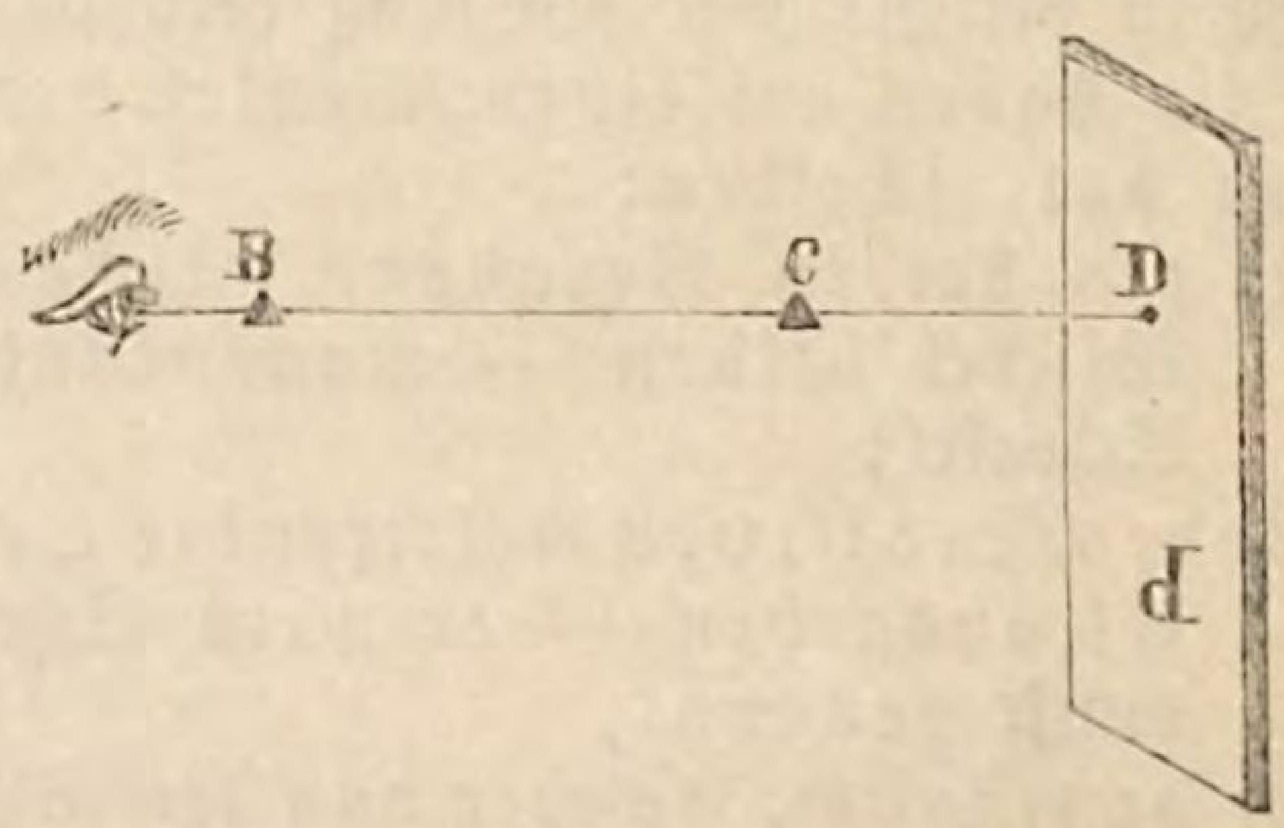


Fig. 19.

auf das Stahlstückchen B in der Richtung BC blicken, dann werden die Strahlen, welche von dem Stahlstückchen C ausgehen, das Auge nicht erreichen, weil sie in B auf ihrem geradlinigen Wege ein Hinderniß finden[1]); ebenso wenig werden die Strahlen von D aus zum Auge gelangen, denn sie werden auf ihrem Wege schon von C aufgehalten. Von dem Gegenstande d ist also der Fleck D unsichtbar, während die Umgebung des Fleckes wahrgenommen wird. **Durch die Vorrichtung Fig. 19 ist man also**

[1]) Will man also nach der Richtung BC blicken, so muß man das Auge so auf B richten, daß man C nicht sieht.

wieder im Stande, durch das Auge an dem Gegenstande d **den Punkt** D **aufzusuchen, welcher mit** B **und** C **in einer Geraden liegt.** Auch in diesem Falle nennt man BCD die Visirlinie. Ist nun B das Visir, C das Korn einer Büchse, d ein Hirsch, D die Stirn des Hirsches, und gehört das Auge einem Jäger, so sagt man, der Jäger **ziele** nach der Stirn des Hirsches. **Das Zielen ist also nur eine besondere Art des Visirens.** Auch beim Zielen sucht man einen Punkt, der mit zwei anderen eine Gerade bildet.

11. IV. 10.

Halb vollendete schon, wer muthig begann.
(Horaz.)

Lection 2.

A. Der Winkel. Der rechte und der gestreckte Winkel.

§ 16. Die Schenkel, der Scheitelpunkt und der Winkelraum.

Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen ausgehen, bilden einen Winkel.

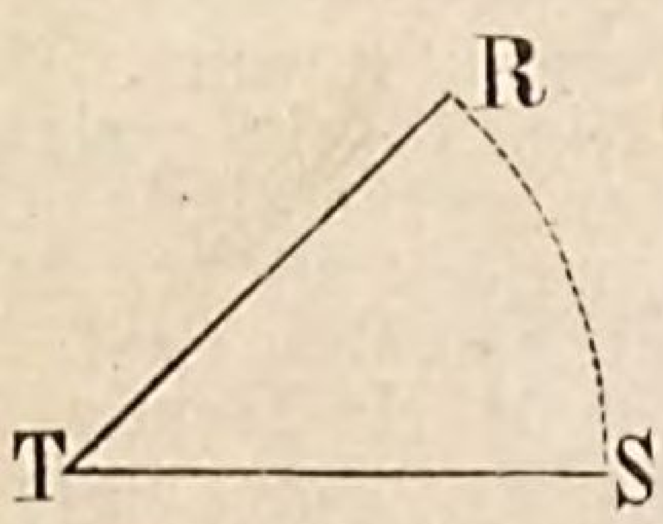


Fig. 1.

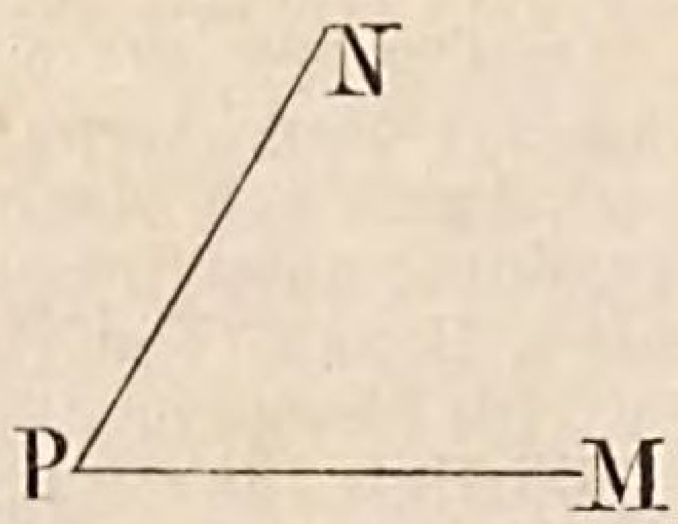


Fig. 2.

Der Schüler sieht in Figur 1 und 2 zwei Winkel, denn sowohl Punkt T wie Punkt P ist Ausgangspunkt zweier geraden Linien, welche in verschiedener Richtung verlaufen.

Wir haben bei einem Winkel dreierlei zu unterscheiden:

1) die beiden Geraden, welche den Winkel bilden — man nennt sie **Schenkel;**
2) den Punkt, von welchem die Schenkel ausgehen — er wird **Scheitelpunkt** genannt;
3) den Raum, welcher von den Schenkeln eingeschlossen wird — er heißt der **Winkelraum.**

In Figur 1 sind TS und TR die Schenkel und T der Scheitelpunkt, in Figur 2 sind PM und PN die Schenkel, und P ist der Scheitelpunkt. Ueber den Winkelraum werden wir weiter unten ausführlich sprechen.

§ 17. Bezeichnung der Winkel. Gewöhnlich setzt man bei einem Winkel an den Scheitelpunkt und an die Endpunkte der (gezeichneten) Schenkel einen großen Buchstaben (siehe Fig. 1 und 2). Will man den Winkel benennen, so giebt man alle drei Buchstaben an, stellt aber dabei den Buchstaben am Scheitelpunkt zwischen die beiden anderen.

In Fig. 1 und 2 stehen an den Scheitelpunkten die Buchstaben P und T. Der Winkel links wird darum mit STR, oder RTS, und der Winkel rechts mit MPN oder NPM bezeichnet.

Es giebt auch noch eine andere Bezeichnung für Winkel. Man setzt nämlich häufig einen kleinen Buchstaben in die Oeffnung zwischen den Schenkeln (siehe Fig. 3, 4 und 5).

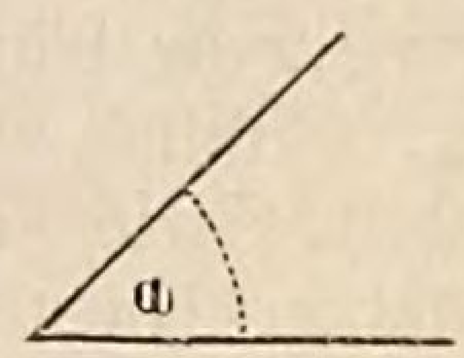


Fig. 3.

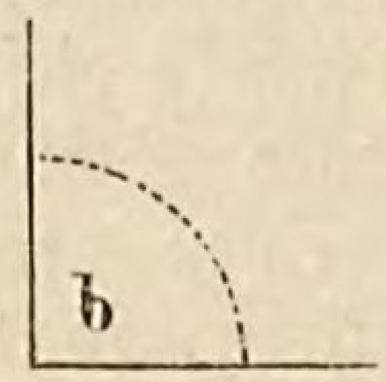


Fig. 4.

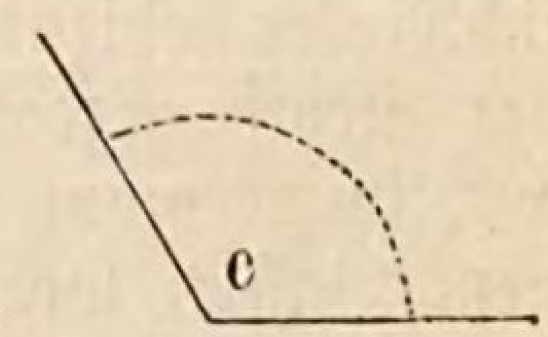


Fig. 5.

Das **Zeichen** für das Wort Winkel ist $\angle$.
$\angle$ STR (Fig. 1) wird gesprochen Winkel STR.
$\angle$ a (Fig. 3) wird gesprochen Winkel a.
$\angle$ c (Fig. 5) wird gesprochen Winkel c.

Aufgaben. Der Schüler bezeichne die

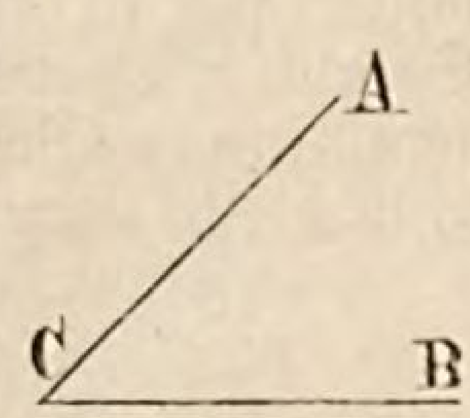


Fig. 6.

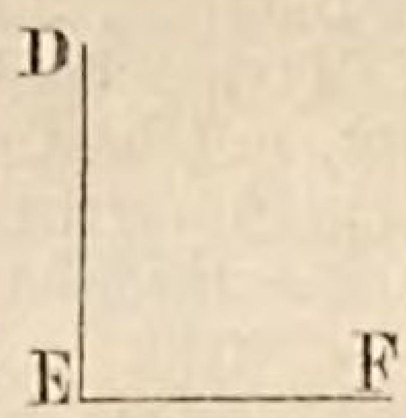


Fig. 7.

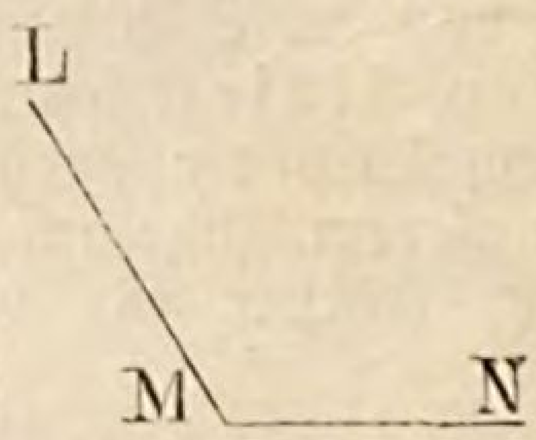


Fig. 8.

Winkel in Fig. 6, 7 und 8 mit drei großen Buchstaben und gebe Schenkel und Scheitelpunkte an.

§ 18. Die Länge der Schenkel und die Größe des Winkels. Wir haben die Schenkel mit zwei großen Buchstaben benannt z. B. bei $\angle$ STR mit ST und RT. Der Schüler wird deswegen gemäß § 13b denken, daß er sich unter den Schenkeln begrenzte gerade Linien vorzustellen habe, und daß die großen Buchstaben die wirklichen Endpunkte der Schenkel bezeichnen. Er wird zu dieser

Meinung um so eher kommen als wir ja wirklich die Schenkel als begrenzte Gerade gezeichnet haben. Dem ist aber nicht so. Der Schenkel hat vielmehr nur an der einen Seite einen Endpunkt (am Scheitelpunkt), nach der andern Seite hin ist er als vollkommen unbegrenzt also als unendlich lang anzusehen.

In Fig. 1 hat man also TS über S hinaus, TR über R hinaus, in Fig. 2 PM über M hinaus, PN über N hinaus bis in's Unendliche verlängert zu denken. Man kann allerdings den Schenkel nicht zeichnen, ohne ihm eine bestimmte wahrnehmbare Länge zu geben; es ist aber vollkommen gleichgiltig, wie lang er gezeichnet wird. **Die Länge des gezeichneten Schenkels ist auf die Eigenschaften des Winkels ohne allen Einfluß.**

Unter dem Winkelraum versteht man den Raum, welchen die Schenkel einschließen. Da dieselben unendlich lang sind, so hat man (Fig. 1) den Winkelraum nicht etwa als die ebene Fläche aufzufassen, welche von TS, TR und der punktirten Linie RS begrenzt wird; es ist vielmehr das ganze Stück der Ebene, welche sich zwischen den bis in's Unendliche verlängerten Schenkeln befindet, als Winkelraum anzusehen.

Die Größe des Winkelraumes oder, wie man sich kurz auch ausdrückt, **des Winkels,** hängt deswegen **nicht von der Länge der gezeichneten Schenkel ab.**

Ein Winkel wird vielmehr um so kleiner, je mehr sich die Schenkel einander nähern. Er wird um so größer, je mehr sich die Schenkel von einander entfernen.

Die Schenkel des Winkels a (Fig. 3) sind einander näher als die des Winkels b (Fig. 4); deshalb ist a kleiner als b. Aus demselben Grunde ist auch Winkel b kleiner als Winkel c. (Fig. 5.)

Man kann einen Winkel allmälig alle Größenstadien durchlaufen lassen, indem man folgendermaßen verfährt:

Den einen Schenkel AB lege man fest hin (Fig. 9); den andern AC, der anfangs mit AB zusammenfallen mag, drehe man im Sinne des Uhrzeigers (wie der Pfeil andeutet) um den Punkt A herum, so daß er allmälig die Lagen AC_1, AC_2, AC_3, AC_4 annimmt. Je weiter die Drehung fortgesetzt wird, um so größer wird der Winkel BAC.

§ 19. Der gestreckte und der rechte Winkel. Man kann den Schenkel AC soweit drehen, daß AB und AC eine gerade Linie bilden. (Fig. 9.) Dann erhält man einen gestreckten Winkel.

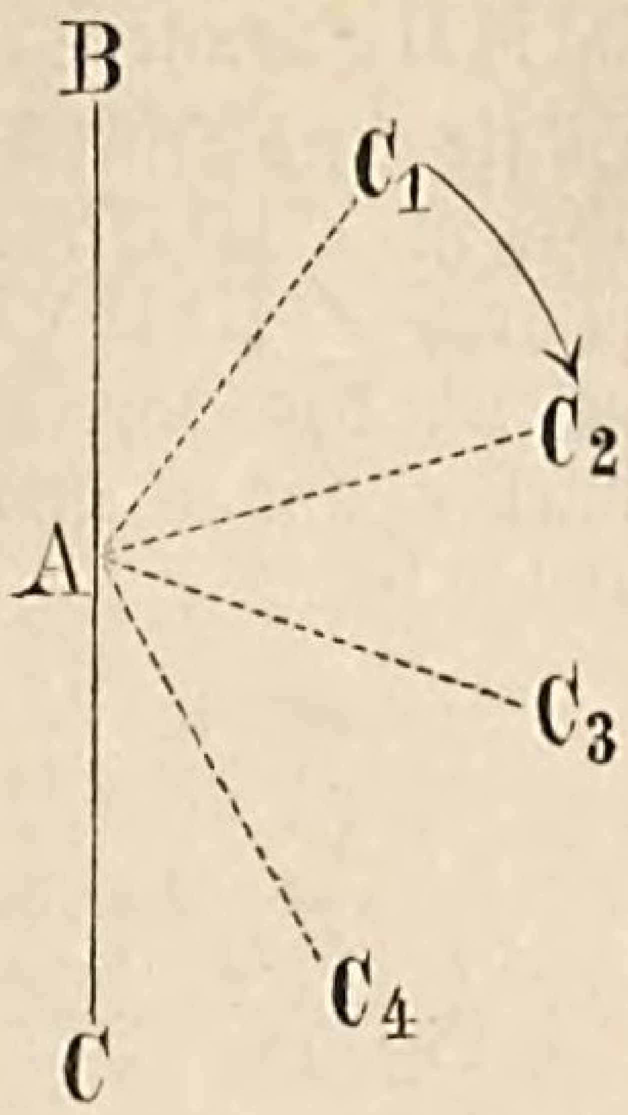


Fig. 9.

Definition I. Ein gestreckter Winkel ist ein solcher Winkel, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden.

Daß sich ein Winkel durch die Drehung eines Schenkels allmälig vergrößert, können wir täglich bei unseren Taschenuhren bemerken. Zu diesem Zwecke muß man sich den Mittelpunkt M des Zifferblattes (Fig. 10) mit der XII durch einen geraden Strich verbunden denken und dann den Winkel beobachten, welchen der große Zeiger mit diesem Strich bildet.

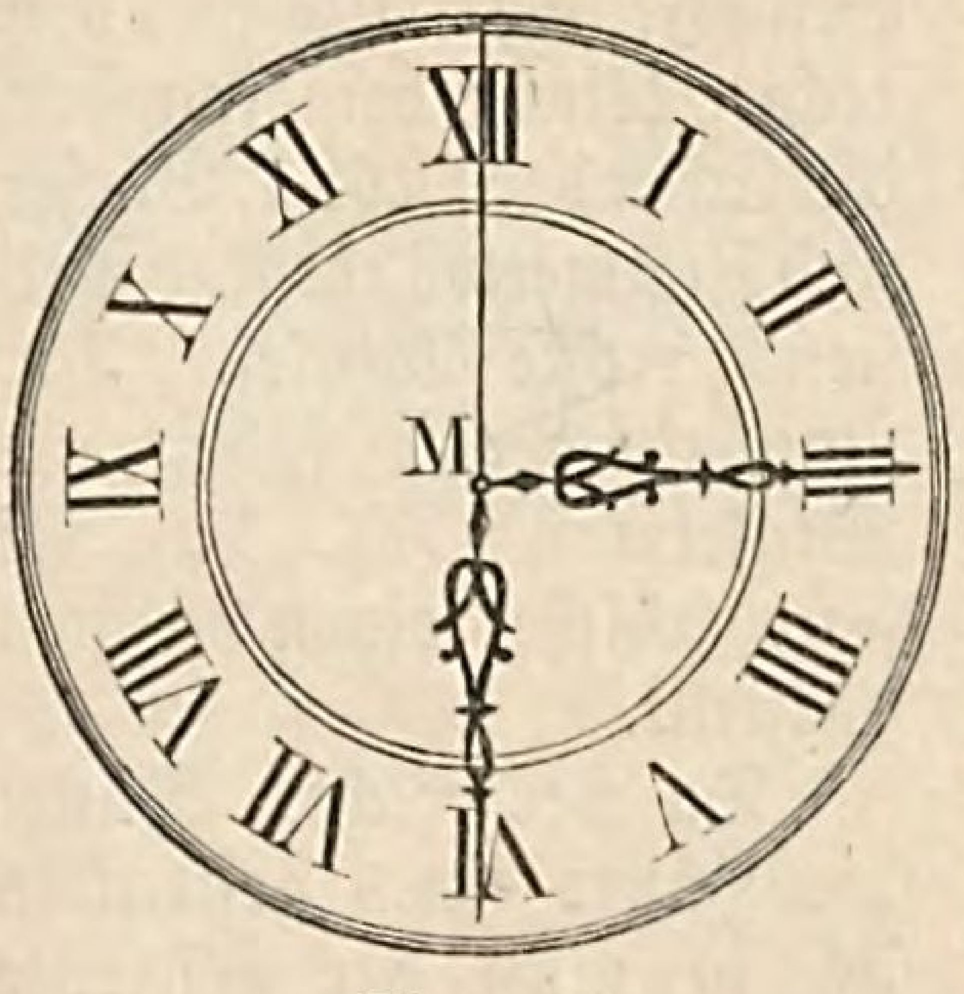


Fig. 10.

Wenn sich der Zeiger bewegt, so verändert sich auch der Winkel, welchen er mit der Geraden MXII einschließt. Dieser Winkel wird um so größer, je weiter sich der Zeiger bewegt. Steht der Zeiger auf der II, so ist der Winkel kleiner als wenn er sich bis zur III, IV, V gedreht hat. Ist er bis zur VI gelangt, so liegt er mit dem Strich in einer geraden Linie, und wir haben einen gestreckten Winkel. Die Hälfte eines gestreckten Winkels wird der Zeiger mit dem Strich einschließen, wenn er zur Hälfte der VI, also zur III gekommen ist.

Den Winkeln, welche die **Hälfte eines gestreckten** bilden, hat man einen besondern Namen gegeben. Nämlich:

Definition II. Die Hälfte eines gestreckten Winkels nennt man einen rechten Winkel.

Wenn der große Zeiger sich bis zur III gedreht hat, so bildet er also mit dem festen Striche MXII (Fig. 10) einen rechten Winkel. Wir wollen für diesen Winkel eine mathematische Bezeichnung suchen. Sein Scheitelpunkt heißt M. An den Endpunkten seiner Schenkel stehen statt der großen Buchstaben die Zahlen XII und III. Diese Zahlen mögen auch bei der Bezeichnung des Winkels an die

Stelle der Buchstaben treten. Nach § 17 werden wir ihn dann ∠ XII M III nennen.

∠XII M III ist die eine Hälfte eines gestreckten Winkels; die andere Hälfte ist ∠ III M VI. Nach Definition II ist darum auch ∠ III M VI ein rechter Winkel. Außerdem sieht der Schüler in Fig. 11 die rechten Winkel a und b und in Fig. 12 den rechten Winkel ABC.

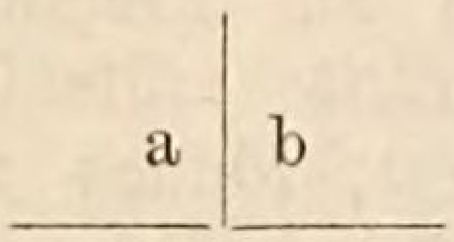


Fig. 11.

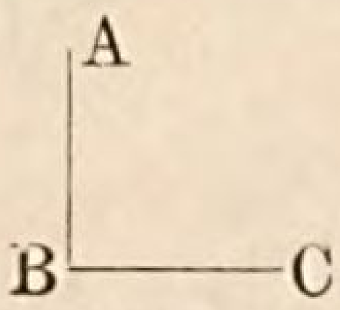
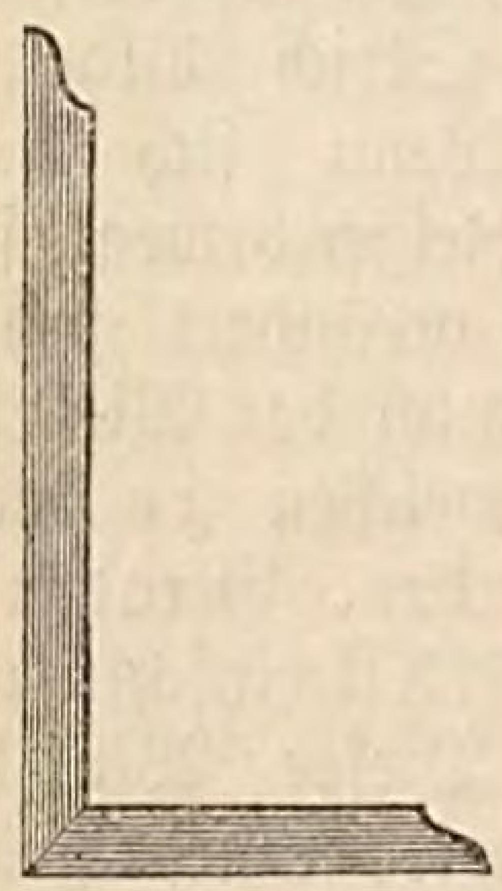


Fig. 12.

Statt „rechter Winkel" zu sagen, bedient man sich auch einfach des Ausdrucks „Rechter", geschrieben R.

Wir sehen „Rechte", wohin das Auge blickt. Beim Fensterkreuze sind vier rechte Winkel bei einander, die Ecken der Möbel, Bücher und Zimmerwände sind meistens rechte Winkel. Der Bauhandwerker führt ein Winkelmaß (Fig. 13) bei sich, welches einen Rechten darstellt.


Fig. 13.

Da der rechte Winkel die Hälfte eines gestreckten ist, so muß der gestreckte Winkel gleich zwei Rechten sein. Daher der

Lehrsatz I. Der gestreckte Winkel ist gleich zwei Rechten.

In Fig. 9 ist ∠ BAC, in Fig. 10 ∠ XII M VI, in Fig. 14 ∠ DEF und in Fig. 15 ∠ PMN ein gestreckter Winkel. Alle diese gestreckten Winkel sind gleich 2 Rechten. In Zeichen: 1) ∠ BAC = 2 R 3) ∠ DEF = 2 R
2) ∠ XII M VI = 2 R 4) ∠ PMN = 2 R



Fig. 14.

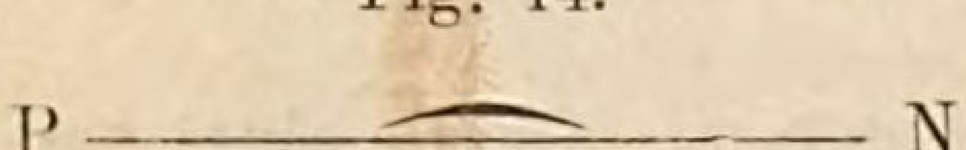


Fig. 15.

Aufgaben. Der Schüler suche unter den Figuren 16, 17, 18, 19 die gestreckten und die rechten Winkel heraus. Die gestreckten Winkel setze er gleich 2 Rechten, indem er sich dabei, wie wir es bei den eben aufgestellten Gleichungen gethan haben, der mathematischen Zeichen bedient.

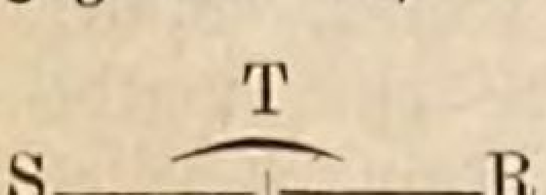


Fig. 16.

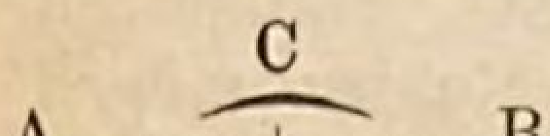


Fig. 17.

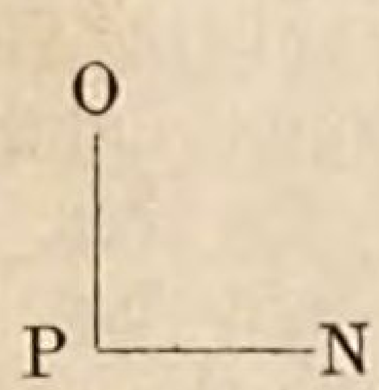


Fig. 18.

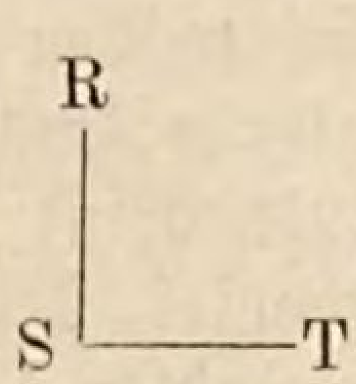


Fig. 19.

§ 20. Definition der Wörter „senkrecht" und „lothrecht". Die verticale Richtung.

AB bildet mit BC einen rechten Winkel (Fig. 20); man sagt in diesem Falle, AB **stehe auf** BC und BC **stehe auf** AB **senkrecht** oder **lothrecht**.

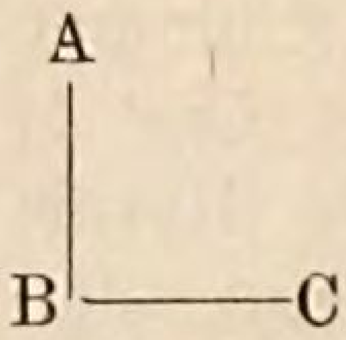


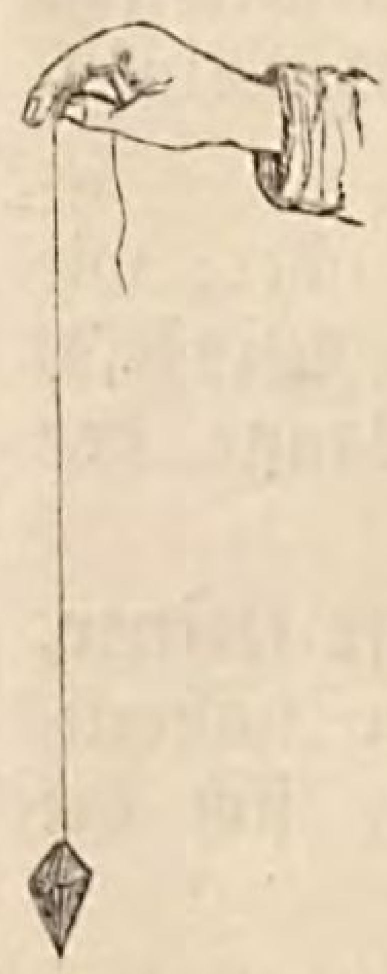
Fig. 20.

Definition III. Wenn zwei gerade Linien mit einander einen rechten Winkel bilden, so steht die eine auf der andern senkrecht (oder lothrecht).

In Fig. 10 ist Winkel XII M III ein Rechter, darum steht XII M auf III M und III M auf XII M senkrecht.

Aufgaben. Der Schüler gebe an, welche gerade Linien in Fig. 18 und Fig. 19 auf einander senkrecht stehen.

Ursprünglich hatten die Wörter **senkrecht** und **lothrecht** einen andern Sinn. Sie bezeichneten die Richtung des Senkbleis oder Lothes, eines Instrumentes, dessen sich die Bauhandwerker häufig bedienen. Es besteht (Fig. 21) aus einem Faden und einem Stückchen Blei, welches an dem Faden hängt. Hält man den Faden an seinem oberen Ende mit der Hand fest, so nimmt er in Folge der Schwere des Bleistückes eine ganz bestimmte Richtung an, die man auch jetzt oft senkrecht oder lothrecht nennt; wir wollen sie mit **vertical**[1]) bezeichnen.


Fig. 21.

Wir nennen senkrecht oder lothrecht jede Gerade, die mit einer andern rechte Winkel bildet, gleichviel, ob sie die Richtung des Bleilothes hat oder nicht. Das Prädicat senkrecht kommt ihr aber nur zu in Bezug auf jene bestimmte andere, mit der sie rechte Winkel einschließt. AB steht auf BC senkrecht, aber nicht auf BD. (Fig. 22).

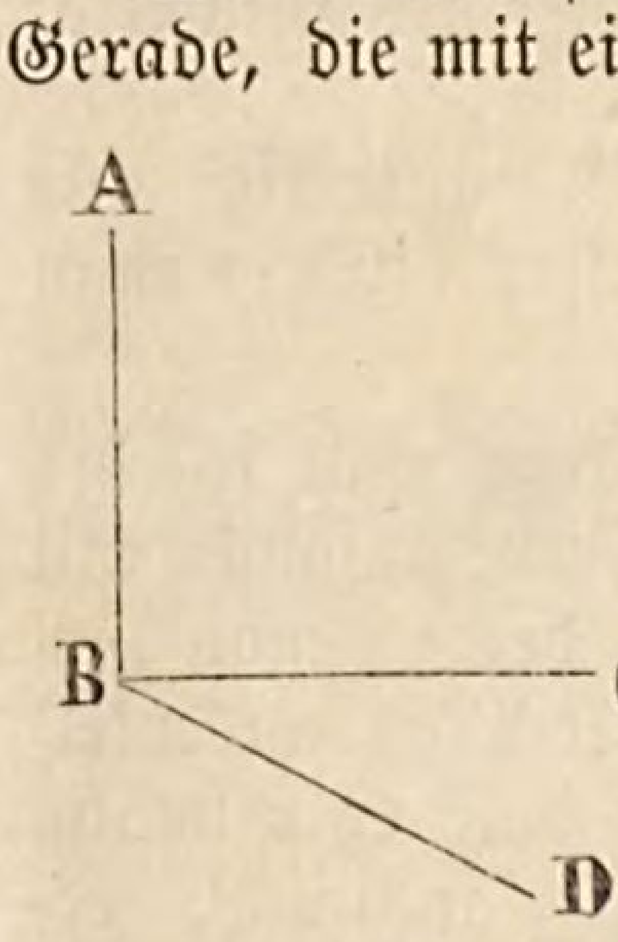


Fig. 22.

Die verticale Richtung des Senkbleis schlagen frei

---

[1]) Vertical kommt her von dem Lateinischen vertex, der Scheitel. Die Richtung vom Scheitel bis zur Sohle ist vertical; daher der Name.

fallende Körper ein; wir sehen sie auch an gut gewachsenen Bäumen. Die Mauern eines Gebäudes müssen vertical gebaut sein, wenn sie fest stehen sollen. Ob sie dieser Anforderung entsprechen, untersucht der Maurer, indem er das Senkblei an beiden Seiten der Mauer herabhängen läßt. Vertical hängt auch das Pendel oder Perpendikel einer Uhr, wenn es nicht hin und her schwingt, sondern in Ruhe ist. Man sagt darum statt vertical auch **perpendikulär.**

Wir haben uns die verticale Richtung am Lothe zur Anschauung gebracht. Da der Faden des Lothes in einer geraden Linie herabhängt, könnte der Schüler meinen, daß man nur gerade Linien mit dem Worte vertical bezeichne, indessen man nennt so auch Ebenen, welche durch die verticale Gerade gelegt sind. Man kann sich eine solche verticale Ebene leicht versinnbildlichen, wenn man ein Blatt Papier an den Faden des Bleiloths hält. Verticale Ebenen sind auch die Innen- und Außenflächen derjenigen Mauern, welche nach dem Lothe gebaut sind.

§ 21. Die horizontale Richtung. Wenn wir am Ufer eines großen Sees oder am Meere stehen und soweit sehen, wie unser Gesichtskreis oder Horizont reicht, so haben wir vor uns eine weite Ebene, welche man eine Horizontalebene nennt. Im kleinern Maßstabe kann der Schüler eine solche Horizontalebene erhalten, wenn er in ein größeres Gefäß irgend eine Flüssigkeit, also etwa Wasser, Spiritus oder Quecksilber hineingießt, **denn die Oberfläche einer jeden Flüssigkeit hat eine horizontale Lage.** Mehr oder weniger unvollkommene Horizontalebenen sind die Platten der Tische, die Fußböden und Decken der Stuben, die meisten Aecker und Wiesen u. s. w. Alle geraden Linien, durch welche eine horizontale Ebene gelegt werden kann, nennt man horizontale Gerade. Als eine solche horizontale Gerade kann man den **Waage**balken[1]) auffassen, wenn er sich im Zustande des Gleichgewichts befindet, also wenn die eine Waagschale ebenso schwer belastet ist, wie die andere, darum spricht man auch oft von **waagerechten** statt von horizontalen geraden Linien.

[1]) Wir meinen nur diejenigen Waagebalken, welche eine gerade Linie darstellen. Jetzt werden die Waagebalken, theils damit sie schöneres Aussehen erhalten, theils damit sie den Anforderungen der Physik entsprechen, so vielfach durchbrochen und verziert, daß von einer Geraden bei ihnen nichts mehr zu bemerken ist.

Die horizontale Richtung bildet mit der verticalen einen Winkel von bestimmter Größe. Um diesen Winkel kennen zu lernen, wollen wir uns vorstellen, wir hätten auf die Oberfläche einer Flüssigkeit (in einem größern Gefäße) ein Blatt Papier gelegt. Dieses Blatt Papier stellt dann eine Horizontalebene dar, weil die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Lage hat. Wir wollen nun ein Loth so herabhängen lassen, daß die Spitze des Bleistückchens das Papier berührt; ferner wollen wir durch den Berührungspunkt auf dem Papier gerade Linien ziehen. Diese geraden Linien sind horizontal, weil sie in einer Horizontalebene liegen; den Faden des Lothes dagegen haben wir als eine verticale Gerade anzusehen. Betrachten wir nun die Winkel, welche der Faden[1]) des Lothes mit den horizontalen Geraden des Papiers bildet, so finden wir, daß sie alle einem Rechten gleich sind. Daher der

Lehrsatz II. Jeder Winkel, welcher von einer verticalen und einer horizontalen Geraden eingeschlossen wird, ist ein Rechter.

Auf diesem Satze beruht die **Setzwaage**, ein Instrument, durch welches man prüft, ob eine Ebene horizontal sei.

Der Schüler wird die Setzwaage schon oft in der Hand eines Bauhandwerkers gesehen haben.

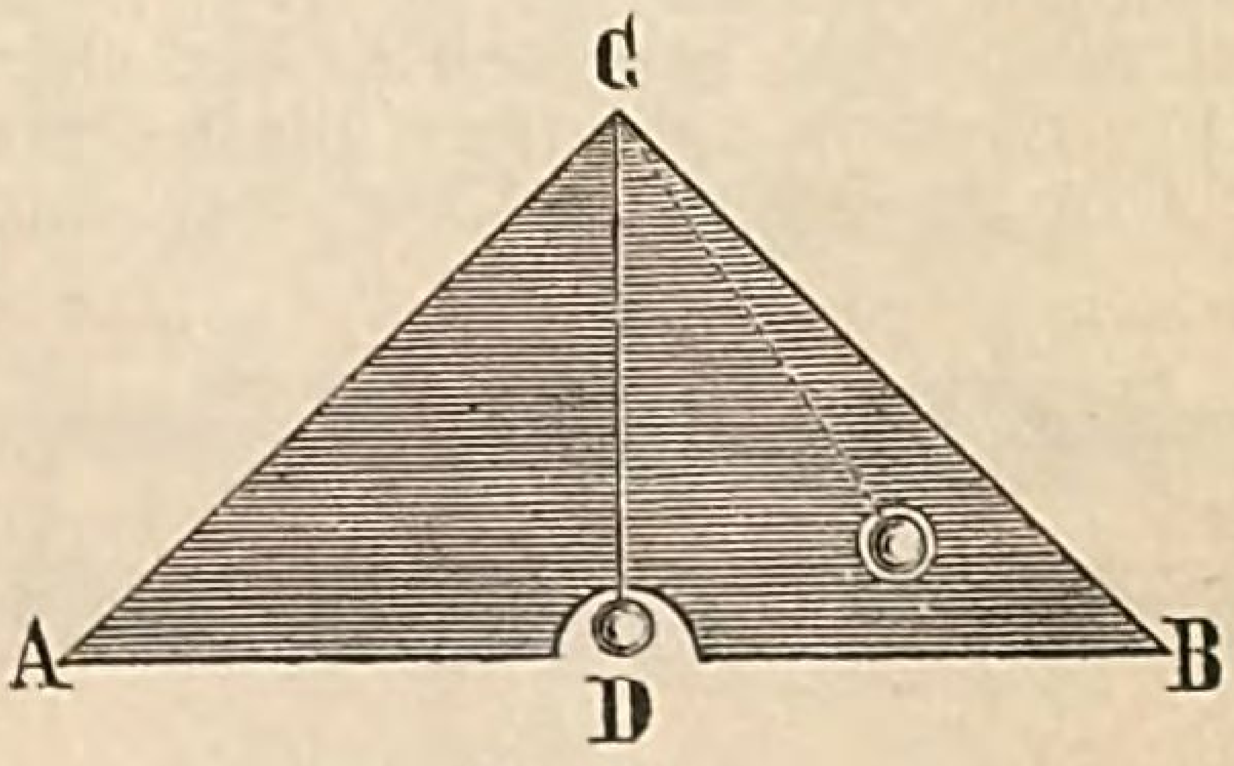


Fig. 23.

Fig. 23 giebt die Vorderansicht derselben. Der dreieckförmige Theil der Setzwaage ist aus Holz gearbeitet. Von der Spitze C bis zur untern Kante AB ist eine Rinne eingeschnitten, welche mit AB rechte Winkel bildet, ferner hängt von der Spitze C ein Loth herab, dessen Bleistückchen in der Aushöhlung D Platz findet. Steht nun die Setzwaage auf einer horizontalen Fläche (etwa auf der horizontalen Platte eines Tisches), so muß auch AB horizontal sein. Nach dem vorhergehenden Satze muß dann der verticale Faden des Lothes mit AB rechte Winkel bilden; er muß also in die Rinne hinein-

[1]) Das Ende des Fadens ist um das Bleistückchen vom Papier entfernt; man muß sich den Faden also bis zur Papierebene verlängert denken, wenn er mit den horizontalen Geraden derselben rechte Winkel bilden soll.

fallen. Stellt man die Setzwaage auf eine schiefe Ebene, etwa auf eine schiefe Mauer, so wird der Faden nach rechts oder links ausschlagen.

Um die horizontale Richtung festzustellen, bedient man sich auch der **Libelle**[1]), eines Instrumentes, welches in mehrfacher Form hergestellt wird. Zunächst wollen wir die **Dosenlibelle** beschreiben, welche beim Feldmessen Verwendung findet. (Fig. 24a zeigt die Dosenlibelle und Fig. 24b einen Durchschnitt derselben, welchen man erhält, wenn man sie von oben nach unten, mit anderen Worten vertical durchschneidet).

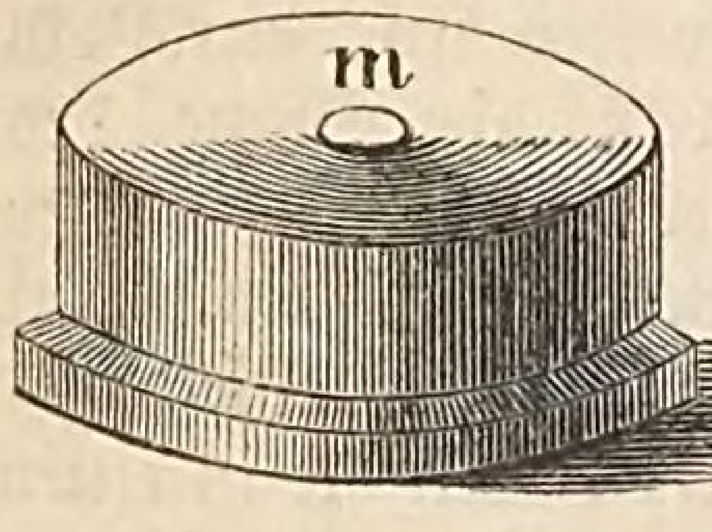


Fig. 24a.

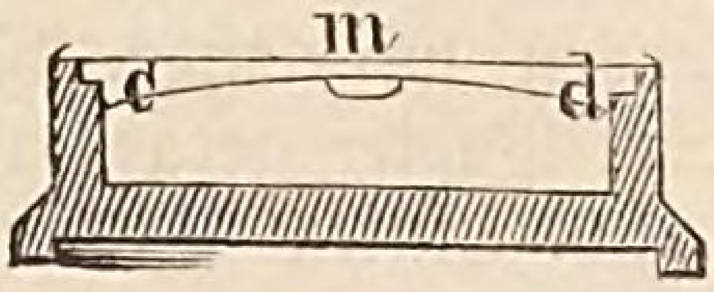


Fig. 24b.

Der Hauptbestandtheil der Dosenlibelle ist eine Dose aus Messing, welche gewöhnlich $1^1/_2$ cm hoch ist und 25 cm im Umfang hat. Diese Dose ist oben mit einer Glasplatte cd (Fig. 24b) verschlossen, die nach dem Innern der Dose zu etwas hohl ist. Die Dose ist mit Spiritus gefüllt bis auf einen kleinen Raum, in dem Luft bleibt. Die Luft ist leichter als der Spiritus; darum steigt die Luftblase an den höchsten Punkt der Dosenlibelle, also, wenn dieselbe horizontal steht, an die Stelle m, wenn sie auf eine schiefe Ebene gestellt wird, an einen andern Punkt, der bei der Stellung, welche die Dosenlibelle inne hat, gerade der höchste ist. Aus dem Orte, an welchem sich die Luftblase befindet, kann man also erkennen, ob die Ebene, auf der die Dosenlibelle steht, horizontal ist oder nicht.

Die verbreitetste und ursprünglichste Form der Libelle sieht der Schüler in Figur 24c. Die dort

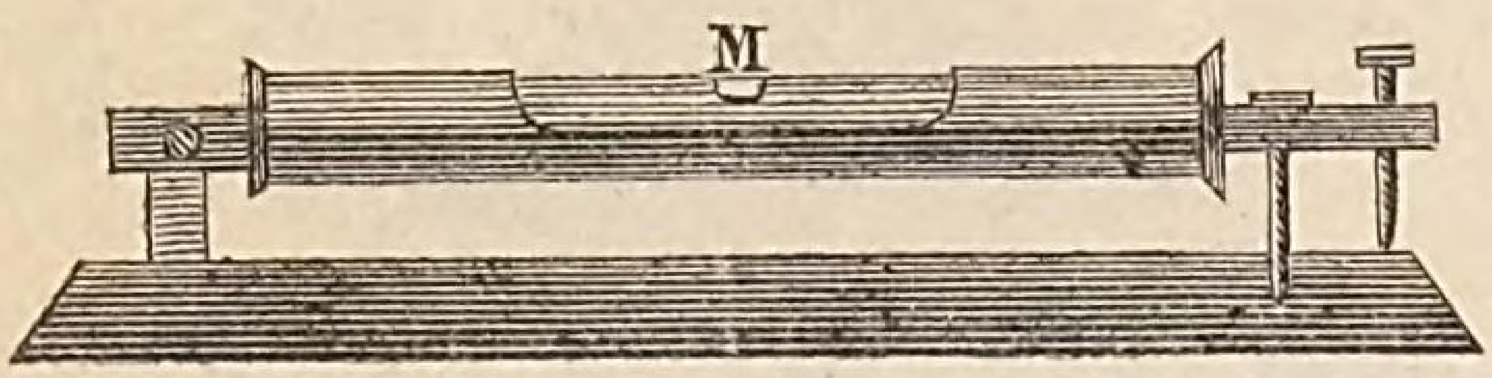


Fig. 24c.

dargestellte Libelle besteht aus einer an beiden Enden geschlossenen Glasröhre, welche bis auf eine kleine Luftblase mit Wasser gefüllt ist. Liegt die Röhre horizontal, so steht die Blase genau in der Mitte beim Punkte M. Neigt man die Röhre ein wenig, so wird die Blase nach der Seite hin verschoben, und zwar nach derjenigen Seite hin, welche höher liegt. Um die Glasröhre vor dem Zerbrechen zu schützen, umkleidet man den größten Theil derselben mit Messing.

§ 22. Das Zeichnen der verticalen und horizontalen Linien. Die Flächenstücke, welche annähernd so horizontal sind wie z. B. eine Wiese oder ein Teich, lassen sich durch Zeichnung leicht auf das Papier übertragen. So läßt sich ein Teich, der uns rund erscheint, als Kreisfläche darstellen. Die Lage dieser Flächenstücke wird nicht unrichtig aufgefaßt, weil das Zeichenblatt gewöhnlich auch eine horizontale Lage hat. Soll aber ein Gebilde aufgezeichnet werden, bei welchem auch die verticale Richtung vertreten ist, etwa die Frontseite eines Hauses, so müssen wir die Frage aufwerfen, welche Stelle auf dem horizontalen Papier die verticale Richtung einnehmen solle. Man ist nun dahin übereingekommen, die verticalen Linien so zu zeichnen, daß sie in Wirklichkeit vertical sind, wenn man das Zeichenblatt an die Wand hängt oder durch Drehung um die untere Grenzkante aus der horizontalen Lage in die verticale überführt. Die verticalen Linien werden also mit den Seitenkanten des Papiers, die horizontalen mit der obern und untern Kante gleichlaufend sein. Wenn man z. B. die Wand eines Hauses darstellen will, so zeichnet man zuerst die horizontale Grundlinie a (Fig. 25), dann die verticalen Seitenkanten b und d u. s. w. a und c sind horizontal, b und d sind vertical.

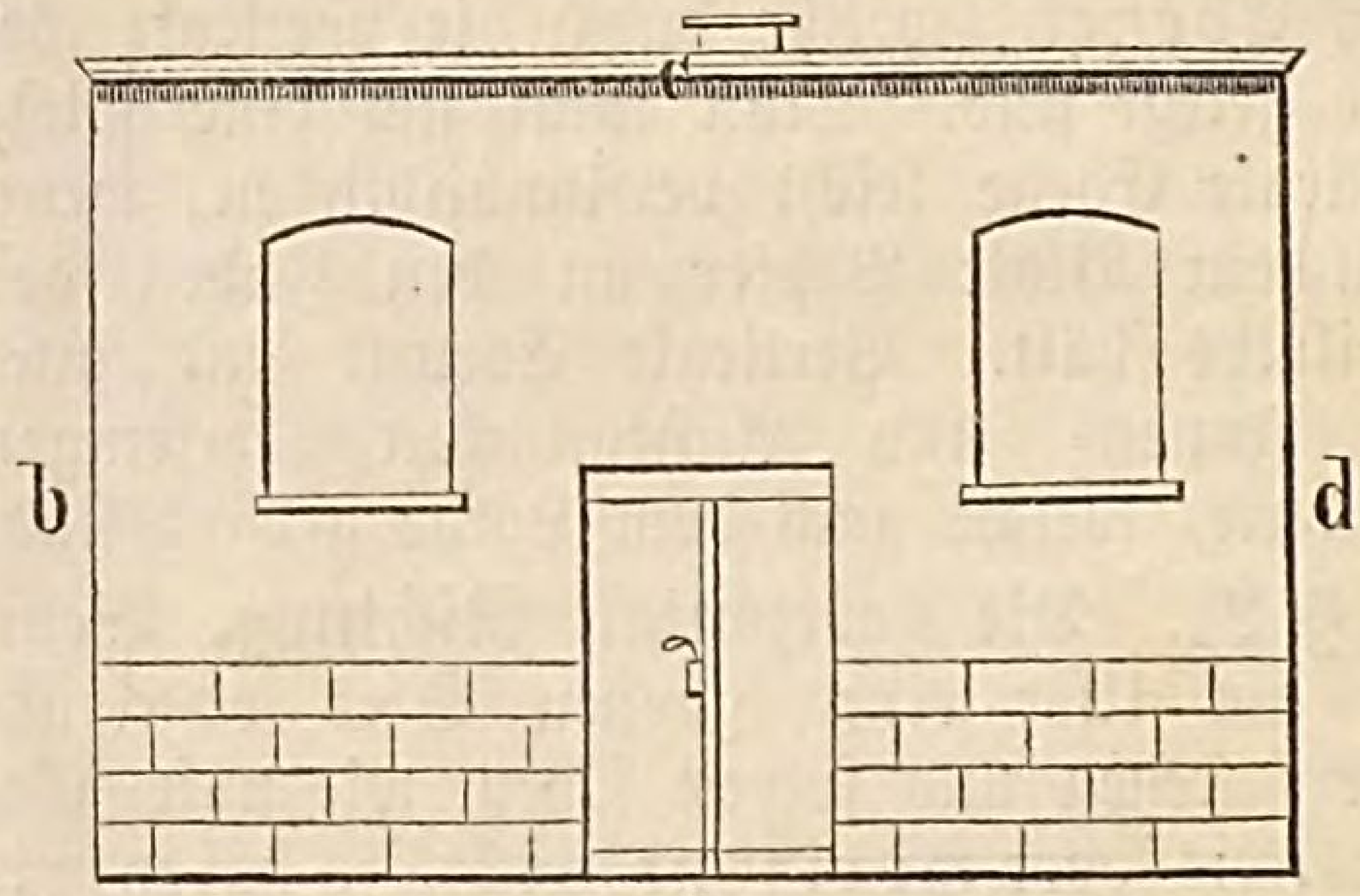


Fig. 25.

§ 23. a. Die Verschiedenheit der verticalen Richtungen auf der Erdkugel. Das Senkblei, welches uns die verticale Richtung veranschaulicht, strebt auf geradem Wege zum Mittelpunkte der Erde zu gelangen. Es wird wie alle anderen schweren Körper von der Erde angezogen mit einer Kraft, welche man sich im Mittelpunkte der Erdkugel gleichsam concentrirt denken darf. Die Fig. 26 stelle einen

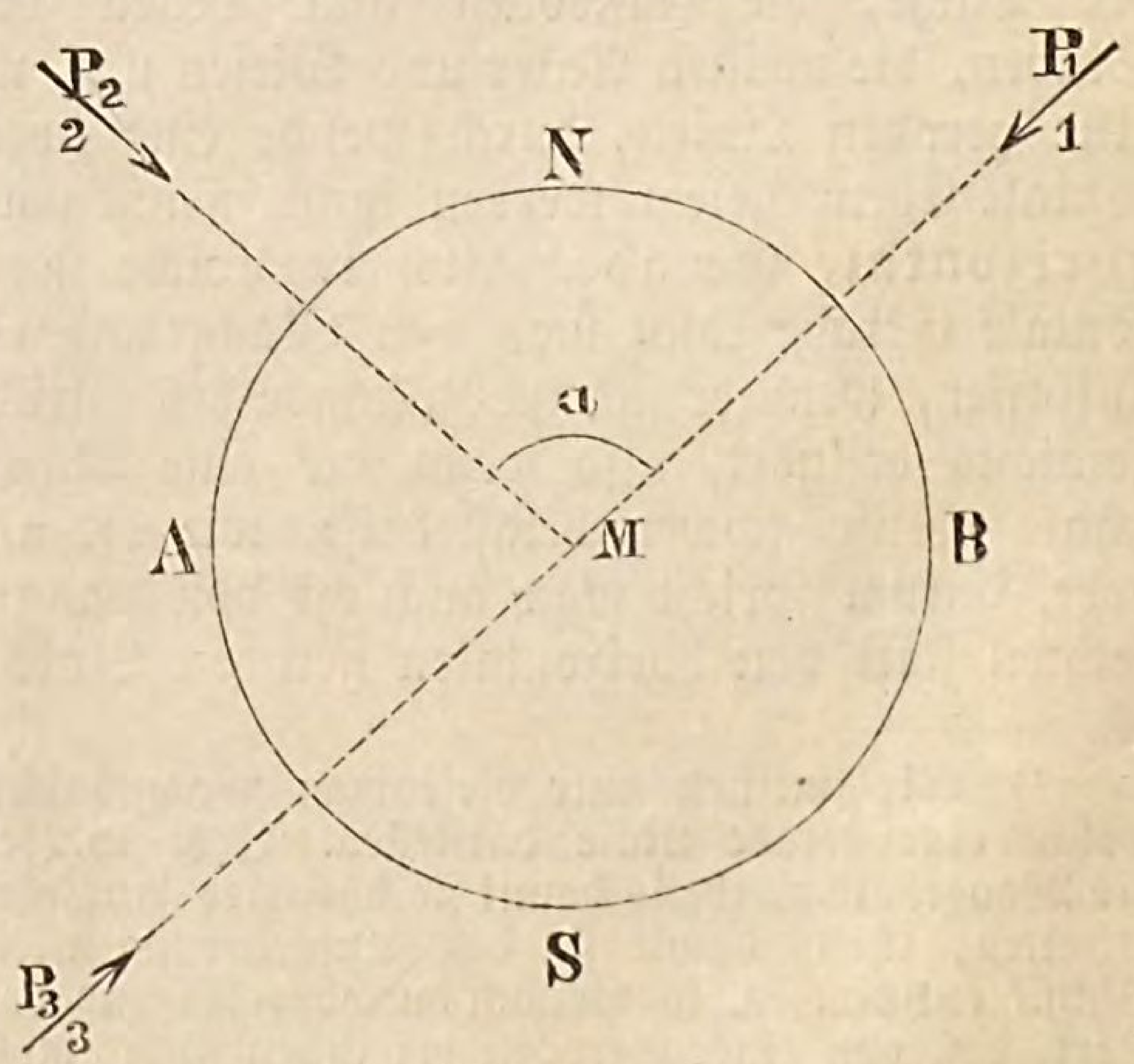


Fig. 26.

[1]) Libelle heißt kleine Waage und hängt zusammen mit libra (die Waage).

Durchschnitt durch die Erdkugel dar, N sei der Nordpol, S der Südpol, A und B zwei Punkte des Aequators und M der Mittelpunkt der Erde. Denken wir uns nun, an dem Orte P_1 sei ein Bleiloth aufgehängt, so wird der Faden die Richtung des Pfeiles 1 annehmen, weil ja das ganze Loth in dieser Richtung vom Punkte M angezogen wird. Das Loth im Punkte P_2 wird wie der Pfeil 2, das Loth im Punkte P_3 wie der Pfeil 3 hängen.

Im Punkte P_1 ist also P_1M, im Punkte P_2 dagegen P_2M und im Punkte P_3 ist P_3M die Verticale[1]). Die beiden Verticalen P_1M und P_2M bilden mit einander den Winkel a, bei P_3M und P_1M sind die beiden Pfeile geradezu einander entgegengesetzt. Demnach haben die Lothe auf allen Punkten der Erde eine verschiedene Richtung; wir bemerken bei der Größe der Erde freilich diese Verschiedenheit nicht, wenn die Beobachtungsorte nicht viele Meilen weit von einander entfernt sind.

§ 23. b. Die Verschiedenheit der horizontalen Richtung auf der Erde. Da die horizontale Richtung mit der verticalen immer einen rechten Winkel bildet, so muß sie ebenso verschieden sein wie die verticale Richtung. Zum Orte P_1 (Fig. 27) gehört die

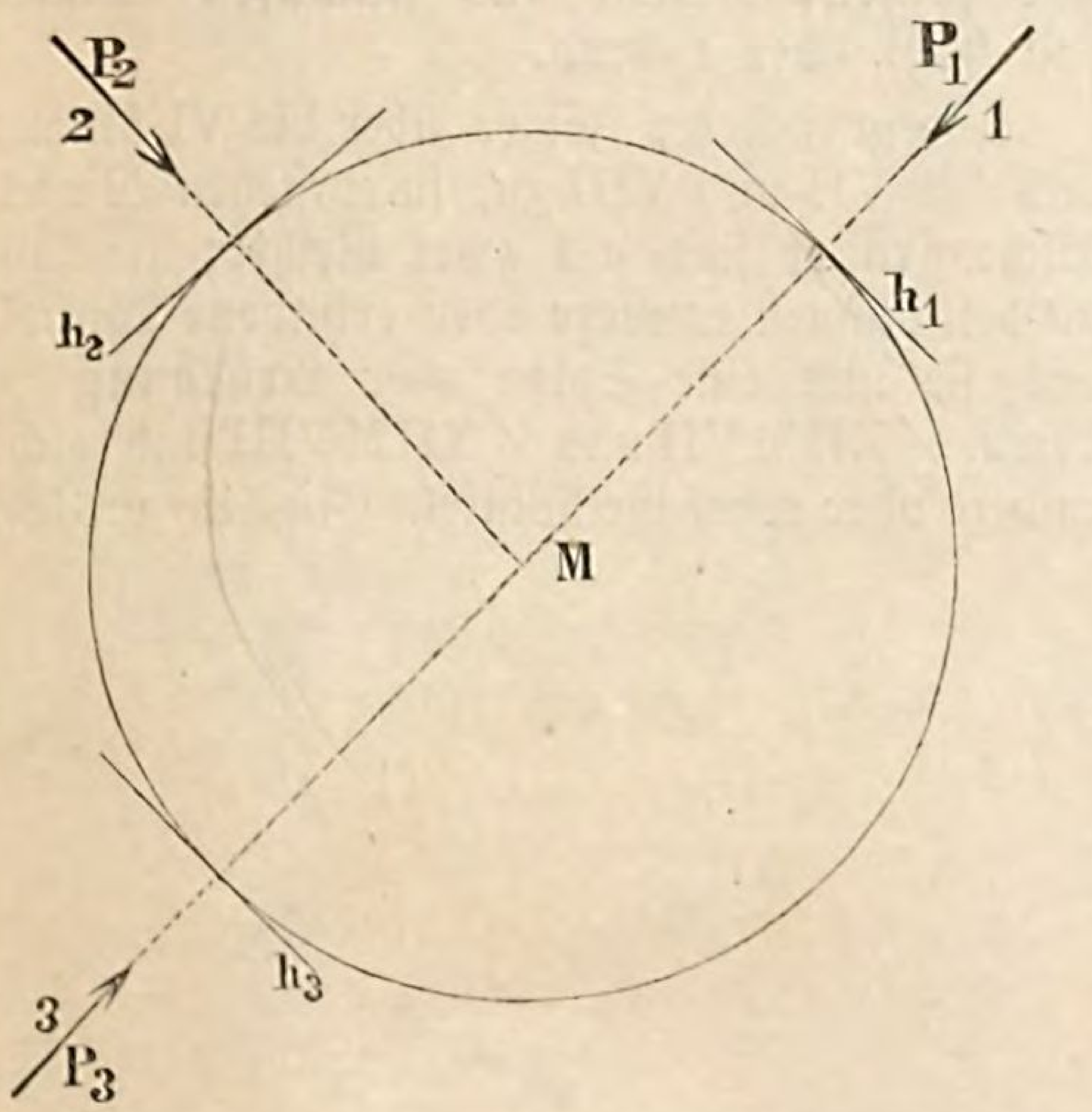


Fig. 27.

Horizontale h_1, zum Orte P_2 die Horizontale h_2 und zum Orte P_3 die Horizontale h_3. Die drei horizontalen Geraden haben, wie der Schüler sogleich bemerkt, eine ganz verschiedene Lage.

Wir haben früher die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit immer eine Horizontalebene genannt. Das ist indessen nicht ganz richtig. Das Meer bildet vielmehr den größten Theil der Kugeloberfläche der Erde, es ist mithin in großer Ausdehnung betrachtet nicht eben, sondern krumm. Ebenso steht es bei anderen Flüssigkeiten in größeren Gefäßen[2]), indessen, bei der Größe der Erde, ist die Krümmung so gering, daß man sie nicht zu beachten braucht, wenn man nur Strecken von geringer Ausdehnung betrachtet.

[1]) „Verticale" gleichbedeutend mit „verticale Linie". [2]) Bei kleineren Gefäßen kommen andere physikalische Gesetze in Betracht.

B. Die spitzen, stumpfen, concaven und convexen Winkel.

§ 24. Die spitzen und die stumpfen Winkel. In dem vorigen Abschnitt ließen wir einen Winkel nach und nach verschiedene Größen annehmen, indem wir den einen Schenkel festlegten und den andern um den Scheitelpunkt herumbewegten. Wir erläuterten dieses Verfahren, indem wir auf das Zifferblatt der Uhr hinwiesen. Als festen Schenkel sahen wir, wie der Schüler noch wissen wird, einen Strich an, welchen wir uns vom Mittelpunkte M des Zifferblattes nach der XII gezogen dachten (Fig. 28), als beweglichen Schenkel den großen Zeiger der Uhr und als Scheitelpunkt den Mittelpunkt M des Zifferblattes.

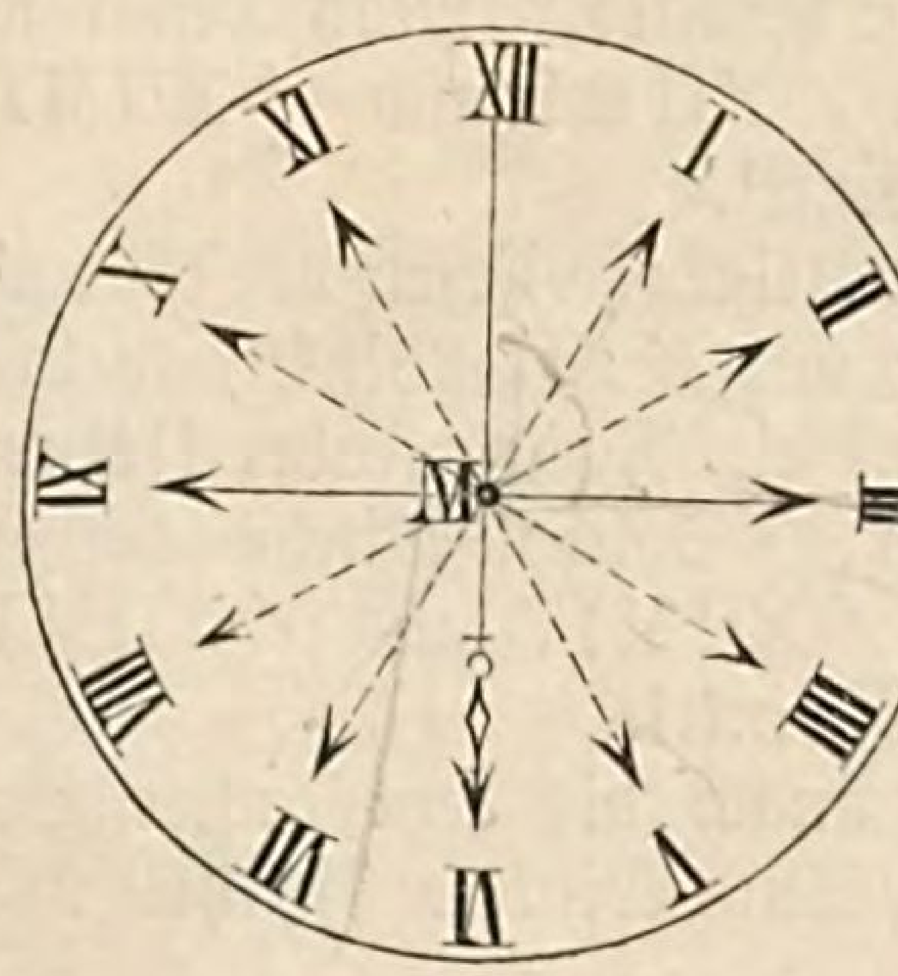


Fig. 28.

Wir werden dieses Hilfsmittel noch weiter beibehalten. Aber bevor wir wieder die Drehung des Zeigers zu beobachten beginnen, wollen wir erst noch einmal den Blick des Schülers auf Fig. 28 lenken.

Die Ziffer XII, der Mittelpunkt M und die Ziffer VI liegen in einer geraden Linie; nach § 19 Def. I ist daher ∠ XII M VI gleich einem Gestreckten[1]). Wir haben von diesem Winkel schon § 19 gesprochen, aber dort nicht berücksichtigt, daß die Bezeichnung „∠ XII M VI" zweideutig ist. Wie am besten aus Fig. 29 hervorgeht, kann man unter „∠ XII M VI" erstens ∠ a auf der rechten Seite der Geraden XII M VI, und zweitens ∠ b auf der linken Seite derselben Geraden verstehen. Sowohl auf ∠ a wie auf ∠ b paßt die Definition I § 19; darum ist jeder dieser beiden Winkel gleich einem Gestreckten oder nach § 19 Lehrsatz I doppelt so groß wie ein Rechter. Theilen wir nun ∠ XII M VI auf der rechten Seite (also ∠ a) in zwei Hälften[2]), so

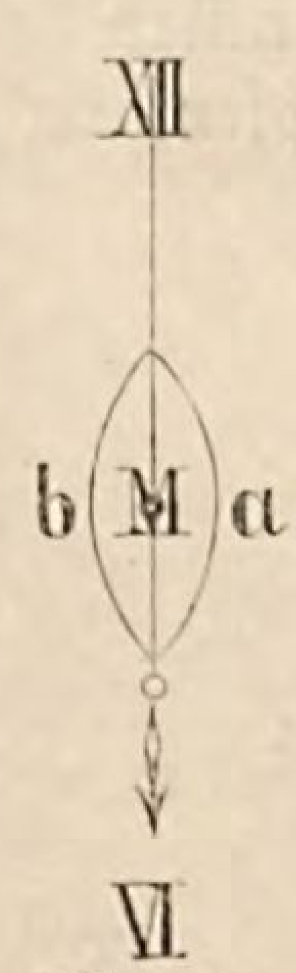


Fig. 29.

[1]) „Gestreckter" ist gleichbedeutend mit „gestreckter Winkel". [2]) Gerade in der Mitte zwischen der Ziffer XII und der Ziffer VI (Fig. 28) liegt auf der

erhalten wir die beiden rechten Winkel XIIMIII und IIIMVI. Halbiren wir ∠ XIIMVI auf der linken Seite (also ∠ b) so entstehen (Fig. 28) die beiden Rechten ∠ XIIMIX und ∠ VIMIX, so daß wir in Fig. 28 vier Rechte haben ∠ XIIMIII, ∠ IIIMVI, ∠ VIMIX und ∠ IXMXII.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir den Zeiger seine Bewegung beginnen lassen. Hat er sich bis zur III gedreht, so schließt er mit dem festen Striche MXII einen rechten Winkel ein. Ist er bei der VI angelangt, so bildet er mit MXII einen gestreckten oder zwei rechte Winkel.

Während sich der Zeiger von der XII bis zur III fortbewegt, entstehen Winkel, welche **kleiner** sind als ein **Rechter.** Man nennt sie **spitze** Winkel; z. B. ∠ XIIMI und ∠ XIIMII sind solche spitze Winkel.

Befindet sich der Zeiger zwischen der III und der VI, so bildet er mit MXII Winkel, welche zwar **größer** sind als ein **Rechter**, aber **kleiner** als ein **Gestreckter.** Solche Winkel heißen **stumpfe** Winkel. ∠ XIIMIV und ∠ XIIMV sind z. B. stumpfe Winkel.

Wir kennen demnach bis jetzt außer den rechten und gestreckten Winkeln **spitze** und **stumpfe** Winkel.

Wenn wir die spitzen und stumpfen Winkel definiren, so erhalten wir:

Definition IV. Ein spitzer Winkel ist ein solcher Winkel, welcher kleiner ist als ein Rechter.

Definition V. Ein stumpfer Winkel, ist ein solcher Winkel, welcher größer ist als ein Rechter und kleiner als ein Gestreckter.

Aufgaben. Der Schüler möge unter den folgenden Winkeln die spitzen, stumpfen, rechten und gestreckten heraussuchen.

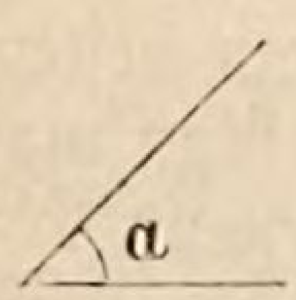


Fig. 30.

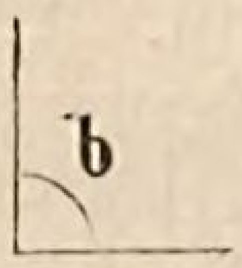


Fig. 31.

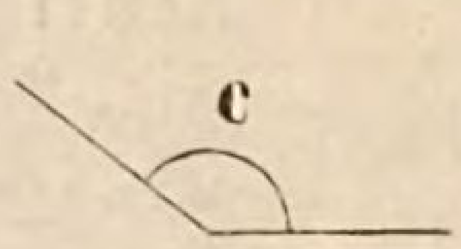


Fig. 32.

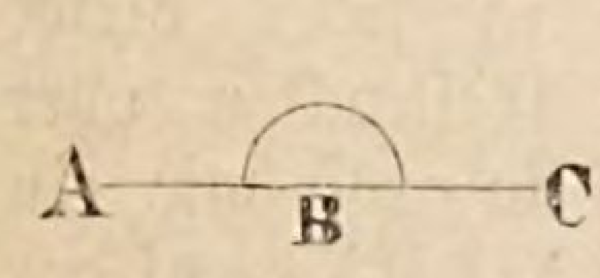


Fig. 33.

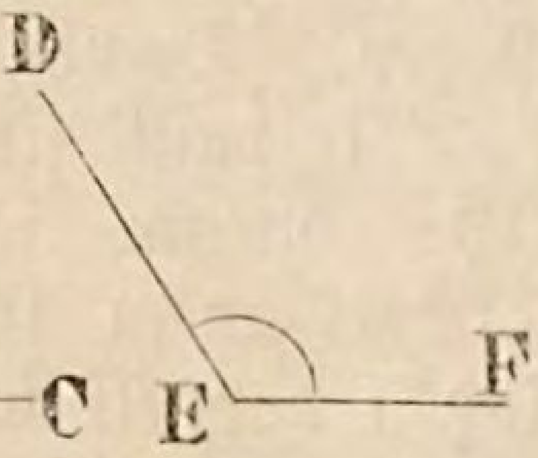


Fig. 34.

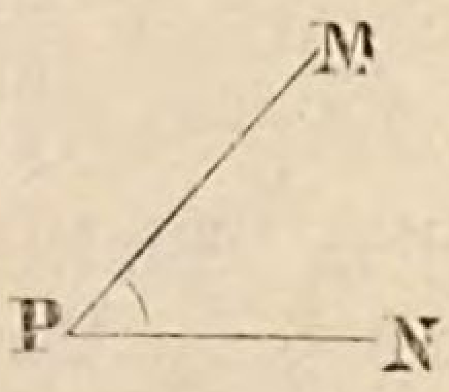


Fig. 35.

rechten Seite die III und auf der linken die IX. Es sind deswegen ∠ XIIMIII und ∠ IIIMVI auf der rechten und ∠ VIMIX und ∠ IXMXII auf der linken Seite die Hälften von ∠ XIIMVI.

§ 25. Convexe und concave Winkel.

Je weiter der Zeiger sich dreht, um so größer werden die Winkel, welche er mit dem Striche MXII einschließt. Es ist ∠ XIIMIII größer als ∠ XIIMII und ∠ XIIMIV größer als ∠ XIIMIII.

Bevor der Zeiger zur VI gekommen ist, sind alle Winkel **kleiner** als ein **Gestreckter.** Sie schließen dann (Fig. 36 u. 37) zwischen ihren

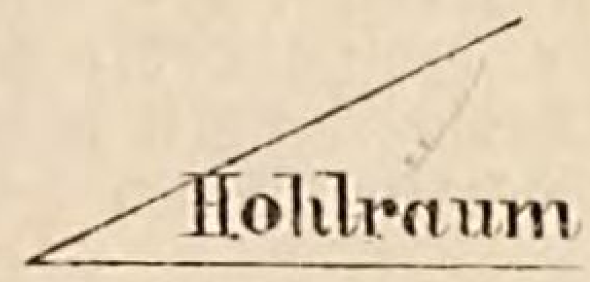


Fig. 36.

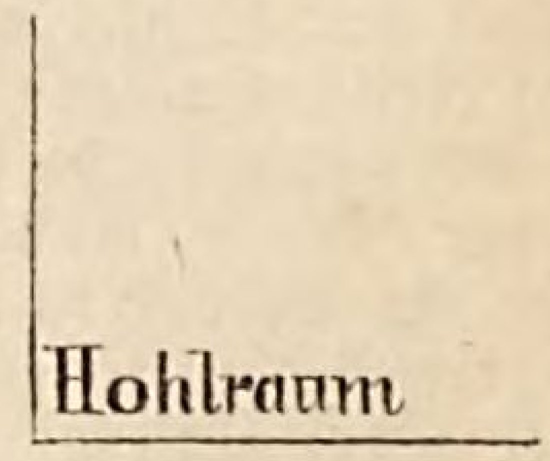


Fig. 37.

Schenkeln einen **Hohlraum** ein, und werden deswegen **hohle** oder **concave** Winkel genannt. **Alle spitzen, rechten und stumpfen Winkel sind hohl oder concav.**

Bewegt sich der Zeiger über die VI hinaus nach der VII und VIII zu, so entstehen Winkel, welche **größer** sind als **zwei Rechte;** sie führen den Namen **convexe** oder **erhabene** Winkel, weil sie uns eine Spitze oder **Erhebung** zu kehren. ∠ XIIMVII und ∠ XIIMVIII sind solche convexe oder erhabene Winkel. (Fig. 38 u. 39.)



Fig. 38.

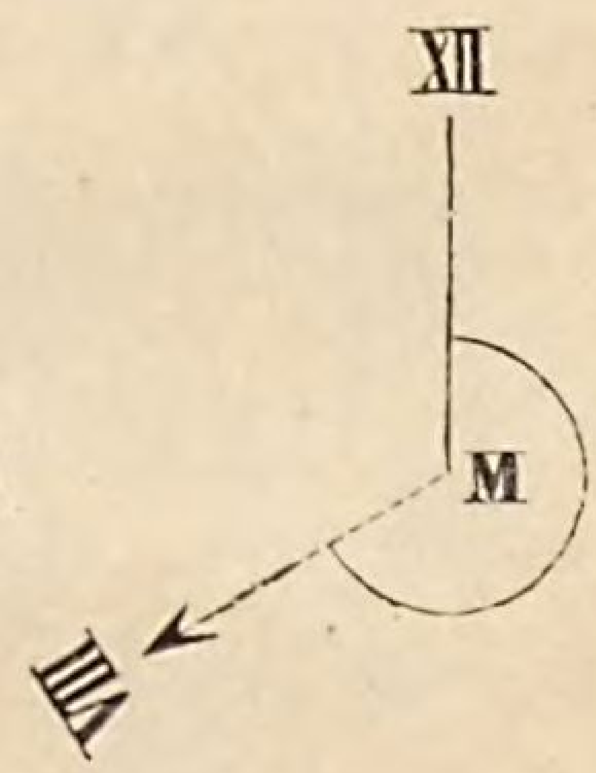


Fig. 39.

Ist der Zeiger bis zur IX gelangt, so haben wir den convexen Winkel XIIMIX (Fig. 40), welcher gleich 3 Rechten ist. Wird die Drehung des Zeigers noch weiter fortgesetzt, so erhalten wir die convexen Winkel XIIMX, XIIMXI und schließlich XIIMXII, (Fig. 41), welcher 4 Rechte umfaßt.

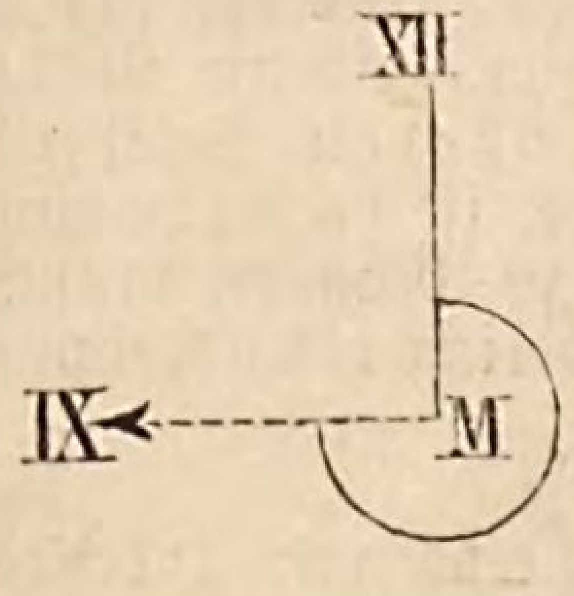


Fig. 40.

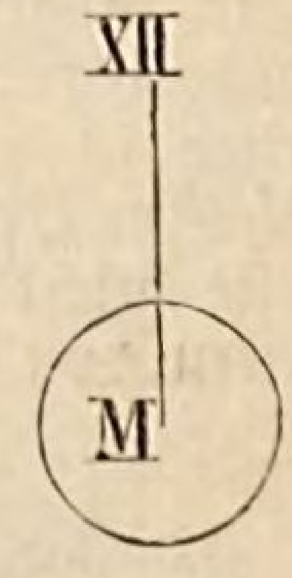


Fig. 41.

Wir wollen jetzt die concaven und convexen Winkel definiren:

Definition VI. Ein concaver Winkel ist ein solcher, welcher kleiner ist als ein gestreckter.

Definition VII. Ein convexer Winkel ist ein solcher, welcher größer ist als ein gestreckter.

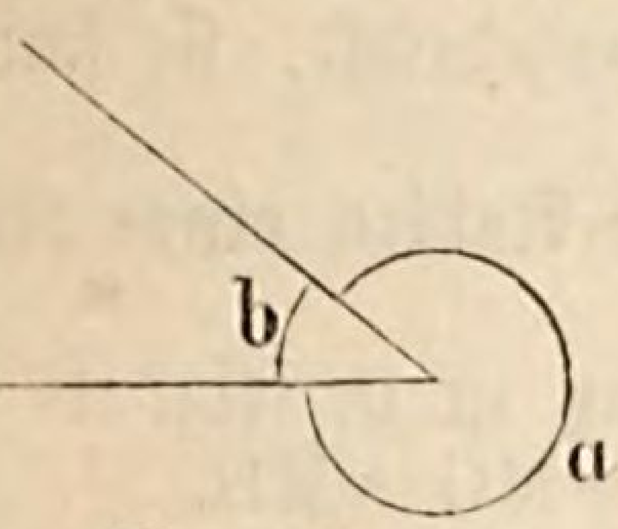


Fig. 42.

Zu jedem convexen Winkel gehört ein concaver; zum convexen Winkel a der concave Winkel b (Fig. 42). Ebenso können wir keinen concaven Winkel zeichnen, ohne einen convexen mit construirt zu haben.

Wenn man vom Winkel BAC (Fig. 43) spricht, so weiß man gar nicht, ob man darunter den concaven Winkel d oder den convexen e verstehen soll. Da wir in der Planimetrie selten von convexen Winkeln zu handeln haben, wollen wir die Festsetzung treffen, daß in zweifelhaften Fällen immer der concave gemeint sei.

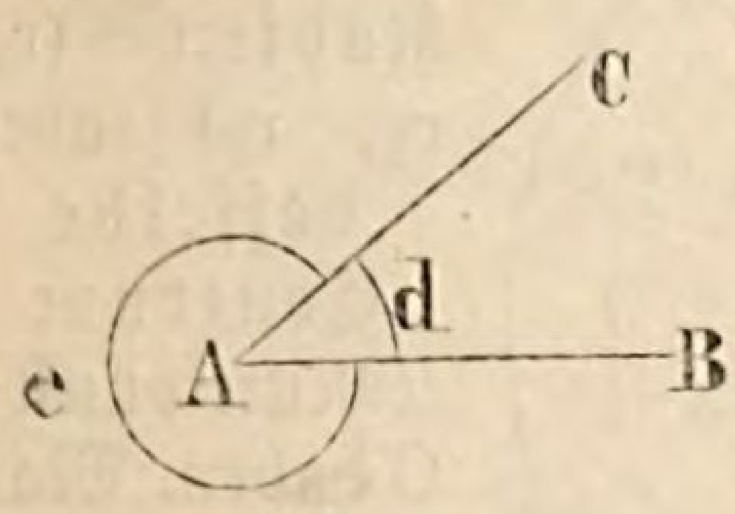


Fig. 43.

Aufgaben. Der Schüler gebe in den folgenden Figuren die concaven und convexen Winkel an.

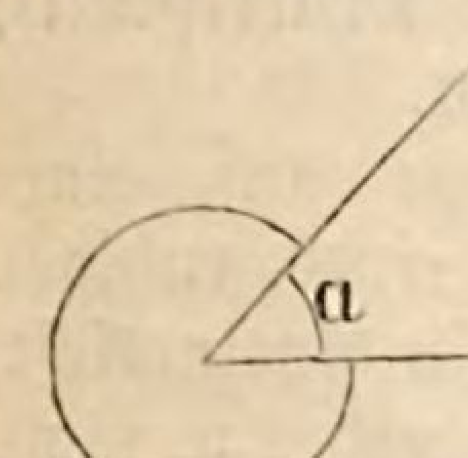


Fig. 44.

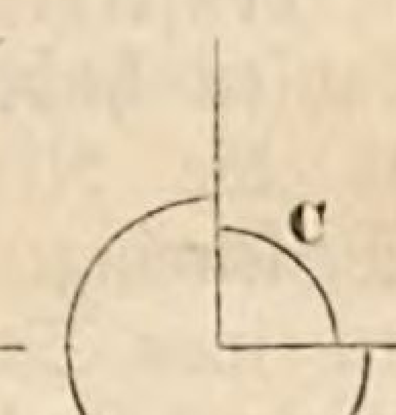


Fig. 45.

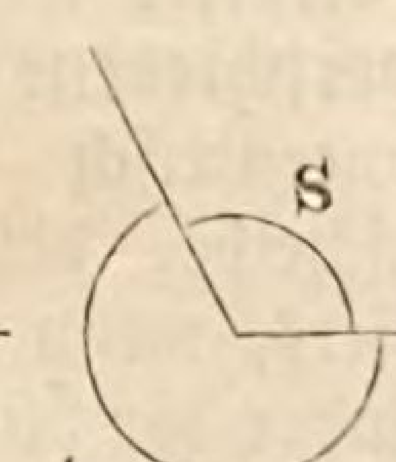


Fig. 46.

§. 26. Ueberblick über den Abschnitt B. Den Inhalt des ganzen Abschnittes wollen wir noch einmal in einer andern Aufeinanderfolge wiederholen. Wir haben den Mittelpunkt M des Zifferblattes mit der Ziffer XII durch eine feste, unverrückbare Gerade verbunden und die Winkel betrachtet, welche der große Zeiger bei seiner Bewegung mit dieser unverrückbaren Geraden einschließt. Wenn der Zeiger auf der VI angelangt ist, bildet er mit der Geraden MXII einen gestreckten Winkel. Alle Winkel, welche kleiner sind als ein Gestreckter, nannten wir hohl oder concav, und alle die, welche größer sind als ein Gestreckter, nannten wir erhaben oder convex. Also:

Die Winkel zerfallen in concave, gestreckte und convexe Winkel.

Die concaven Winkel werden noch weiter eingetheilt. Indem man vom rechten Winkel ausgeht, scheidet man sie in spitze, rechte und stumpfe Winkel. Alle Winkel, welche kleiner sind als ein Rechter, heißen spitz, und alle Winkel, welche größer sind als ein Rechter, heißen stumpf. Also:

Die concaven Winkel werden in spitze, rechte und stumpfe Winkel eingetheilt.

C. Der Kreis und die geraden Linien am Kreise.

§ 27. a. Die Definition des Kreises. Der Mittelpunkt. Der Radius.

Wie der Schüler aus dem § 5 der ersten Lection weiß, werden in der elementaren Planimetrie die ebenen Figuren behandelt, welche mit Hilfe von Zirkel und Lineal construirt werden können. Von den geradlinigen Figuren, zu deren Construction man das Lineal gebraucht, haben wir schon die gerade Linie und den Winkel besprochen; wir wenden uns jetzt zu der krummen Linie, welche mit Hilfe des Zirkels gezeichnet wird, nämlich zum **Kreise**.

Bisher haben wir den Schüler weder mit der Entstehung, noch mit den Eigenschaften des Kreises bekannt gemacht. Trotzdem haben wir mehrmals Kreise bei unseren Auseinandersetzungen benutzt, hatte doch z. B. der Durchschnitt durch die Erde, an dem wir die Verschiedenheit der verticalen Richtungen auf unserer Erdkugel zur Anschauung brachten, die Gestalt eines Kreises. Indessen, wir durften wohl ohne Scheu bei unserem Schüler die Bekanntschaft mit der kreisförmigen Gestalt voraussetzen, sieht er sie doch stündlich an den Rändern der Geldmünzen, an den Rädern der Wagen und an den Ringen seiner Finger. Mit jeder neuen Stunde beginnt der große Zeiger der Uhr von Neuem die Drehung von der XII aus; und, wenn eine Stunde verflossen ist, hat seine Spitze eine Kreislinie durchlaufen. Betrachten wir den Weg der Zeigerspitze genauer, denn die Eigenschaften dieses Weges sind zugleich Eigenschaften der Kreislinie. Wir werden sofort bemerken, daß alle Punkte desselben um die Länge des großen Zeigers vom Stifte in der Mitte des Zifferblattes entfernt sind; sie haben also alle von einem festen

Punkte gleiche Entfernung. Demgemäß haben wir die

Definition. Die Kreislinie ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind.

Wir haben erst von einem Kreise und dann von einer Kreislinie gesprochen. Der Schüler wird nun die Frage an uns richten wollen, ob diese beiden Wörter etwas von einander Verschiedenes bezeichnen. In der That, im gewöhnlichen Leben versteht man unter dem Kreise nicht die Kreislinie, sondern die Fläche, welche von der Kreislinie eingeschlossen wird. **Für den Mathematiker** dagegen **ist** der Kreis keine Fläche, sondern eine Linie; für ihn ist **Kreis und Kreislinie** ein und **dasselbe**. Wir können darum die obige Definition auch so aussprechen

Definition VIII. Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind.

Den festen Punkt nennt man den **Mittelpunkt** oder das **Centrum;** man pflegt ihn entweder mit M (von **M**ittelpunkt) oder mit C (von **C**entrum) zu bezeichnen.

Die geraden Linien, welche den Mittelpunkt mit den Kreispunkten verbinden, heißen **Radien**[1]) oder **Halbmesser.**

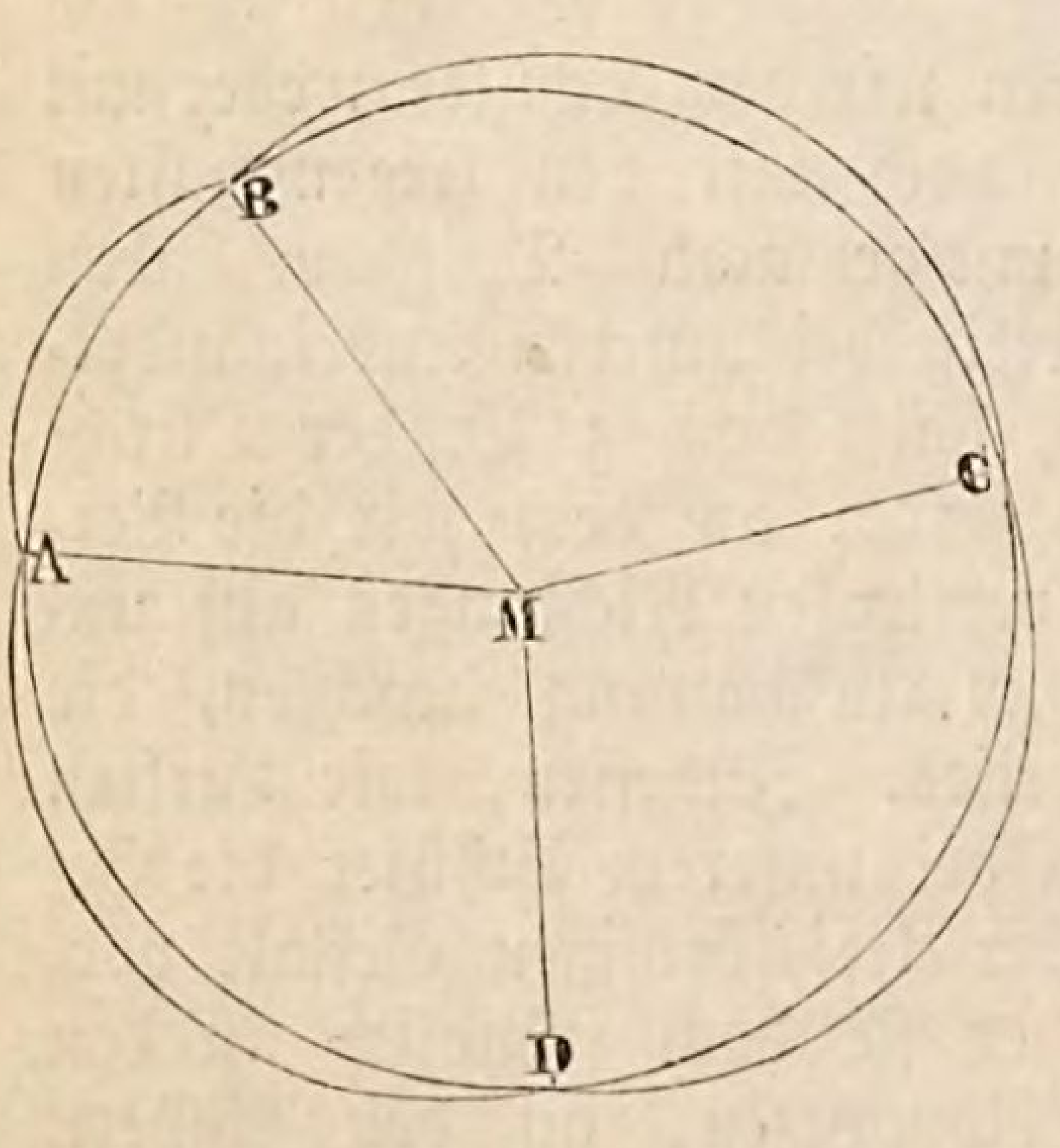


Fig. 47.

M ist in Fig. 47 der Mittelpunkt und MA, MB, MC und MD sind Radien.

Bei dem Kreise, welchen die Zeigerspitze der Uhr beschreibt, können wir den Stift in der Mitte des Zifferblattes als Mittelpunkt und den Zeiger als Radius, bei dem Wagenrade die Buchse als Mittelpunkt und die Speichen als Radien ansehen. Der Schüler darf es freilich mit diesen Beispielen nicht zu genau nehmen, denn der Stift, die Buchse, der Zeiger und die Speichen sind keine Punkte und Linien, sondern materielle Körper.

Wir wollen jetzt über die Radien einen Lehrsatz aufstellen. Nach der Definition des Kreises sind die Entfernungen der einzelnen Kreispunkte vom Mittelpunkte einander gleich. Gemäß § 13 a Def. II sind diese Entfernungen gleichbedeutend mit der Länge der Radien. Die Radien eines Kreises sind also gleich lang, oder kürzer ausgedrückt, sie sind einander gleich.

Lehrsatz III. Die Radien eines Kreises sind einander gleich.

Nach diesem Lehrsatz ist in Fig. 47

$$MA = MB = MC = MD.$$

§ 27. b. Concentrische Kreise. Der Schüler blicke auf Fig. 48. Er sieht dort mehrere Kreise, welche zwar verschiedene Radien (r_1, r_2, r_3) aber dasselbe Centrum (Mittelpunkt) C haben. Man nennt solche Kreise **concentrisch.**

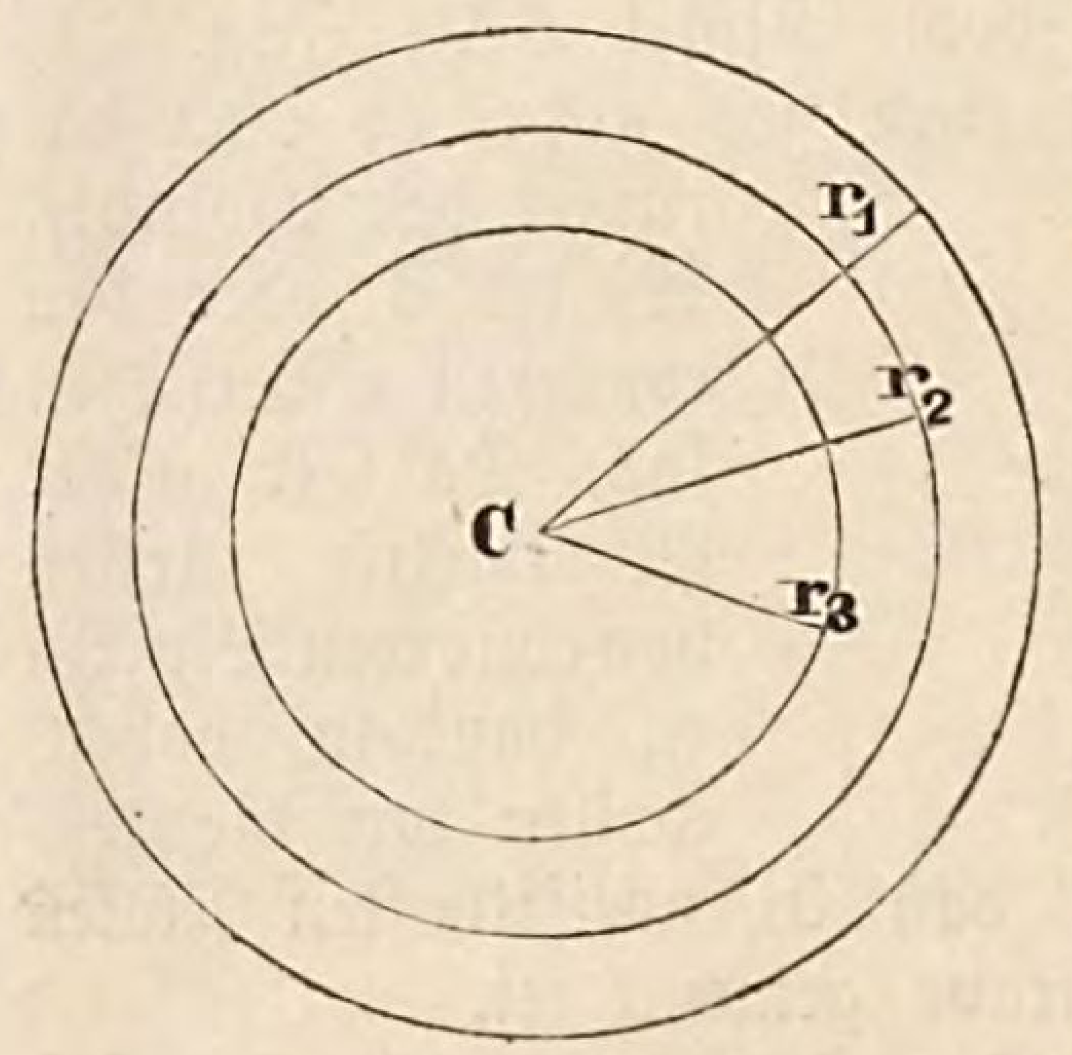


Fig. 48.

Definition IX. Concentrische Kreise sind solche Kreise, welche denselben Mittelpunkt, aber verschiedene Radien haben.

Concentrisch sind die Ringe auf einer Schießscheibe, die Wellenringe eines ruhigen Gewässers, wenn man einen Stein hineinwirft, die Ränder der Ringe eines Kochherdes u. s. w.

§ 28. Das Zeichnen der Kreise. Wie wir schon öfter erwähnt haben, zeichnet man Kreise gewöhnlich mit einem Zirkel. Die eine Zirkelspitze wird fest in das Zeichenpapier eingesteckt, sie bestimmt den Ort des Kreismittelpunktes; mit der andern Spitze wird die Kreislinie beschrieben. Der Abstand der beiden Spitzen ist gleich dem Radius des Kreises, welcher mit dem Zirkel gezeichnet wird. Will man einen großen Kreis construiren, etwa ein kreisförmiges Gartenbeet herrichten, so kann man sich eines Zirkels nicht bedienen. Man nimmt dann am besten eine an beiden Enden mit Schlingen versehene Schnur und steckt das eine Ende vermittelst eines Stäbchens fest, welches man durch die Schlinge hindurchschiebt. Durch die

[1]) Man spricht von mehreren Radien, aber von einem Radius. Radius ist ein lateinisches Wort, welches auf deutsch „Strahl" heißt. Die Radien des Kreises sind die „Strahlen", welche vom Kreismittelpunkt ausgehen.

Schlinge des andern Endes schiebt man ein zweites Stäbchen, darauf zieht man die Schnur straff und beschreibt mit dem zweiten Stäbchen die Kreislinie. Statt der Schnur kann man auch eine an beiden Enden durchbohrte Stange verwenden.

§ 29a. Der Kreisbogen. Die Theile des Kreises (der Kreislinie) nennt man **Kreisbogen.**

In Fig. 47 sind AB, BC, CD und DA Kreisbogen; in Fig. 49 sind EF, GH, ST

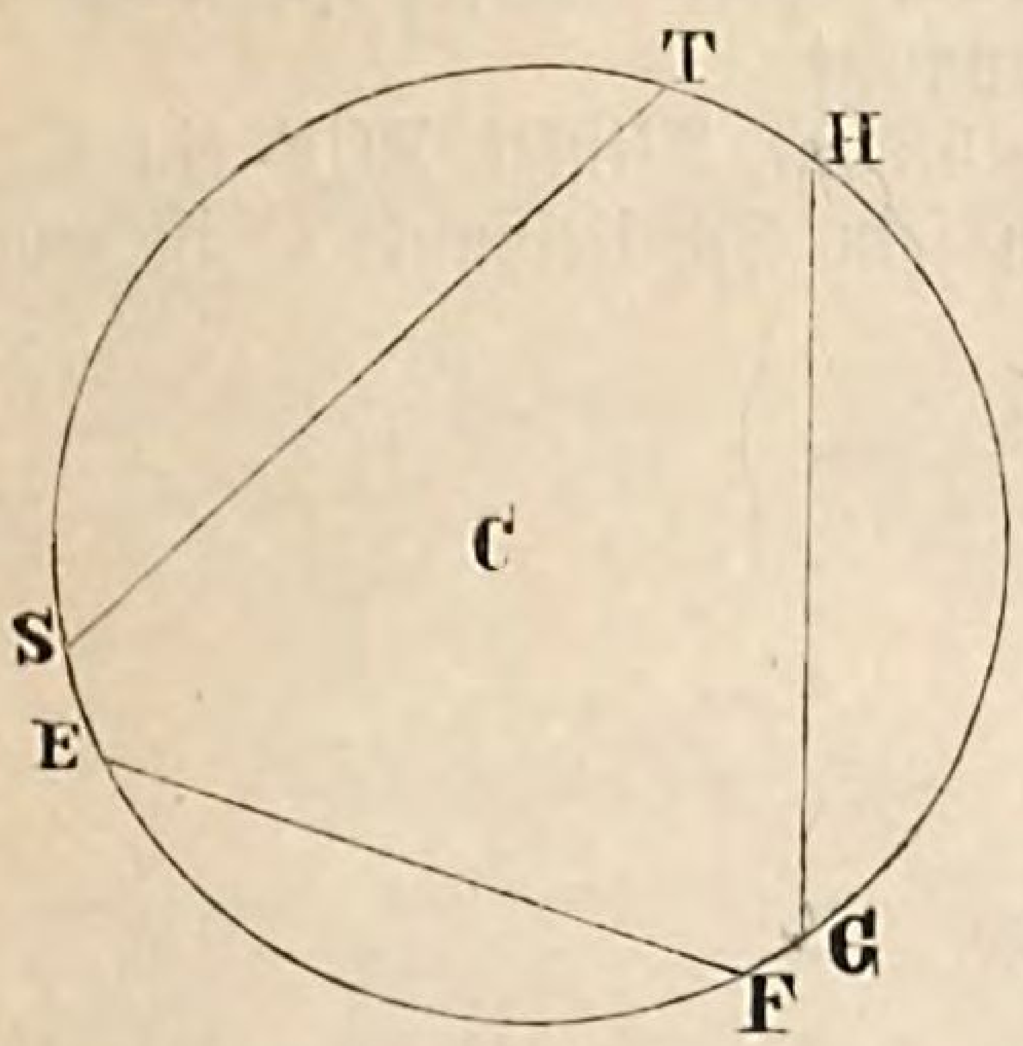


Fig. 49.

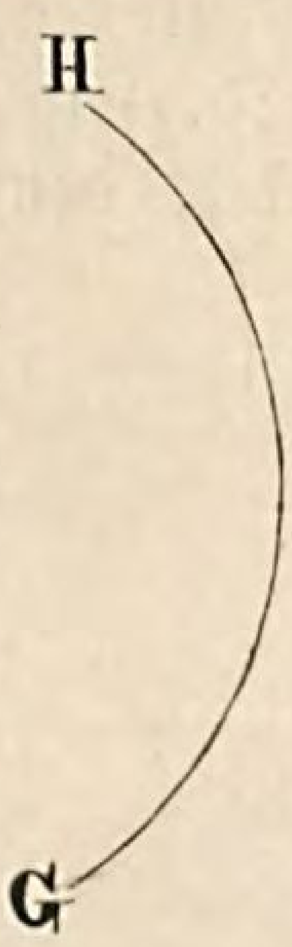


Fig. 50.

Kreisbogen. In Fig. 50 sieht der Schüler den Kreisbogen GH, abgegrenzt von dem übrigen Theil des Kreises.

§ 29b. Die Sehne, der Durchmesser. Eine gerade Linie, welche zwei Punkte eines Kreises mit einander verbindet, heißt eine **Sehne.**

In Fig. 49 sind EF, GH, ST Sehnen. Mit denselben Buchstaben haben wir vorher auch die entsprechenden Kreisbogen benannt. Durch die bloße Angabe der Grenzpunkte ist also nicht genau bestimmt, ob der Kreisbogen oder die Sehne gemeint sei. Um diese Zweideutigkeit aufzuheben, pflegt man über EF, GH, ST u. s. w. einen Bogen zu setzen, wenn man einen Kreisbogen, und einen geraden Strich, wenn man die Sehne bezeichnen will.

$\widehat{AB}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{FG}$, bedeuten die Kreisbogen,

$\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, bedeuten die entsprechenden Sehnen.

Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgeht, wird ein **Durchmesser** genannt.

In Fig. 51 sind $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{DG}$ Durchmesser.

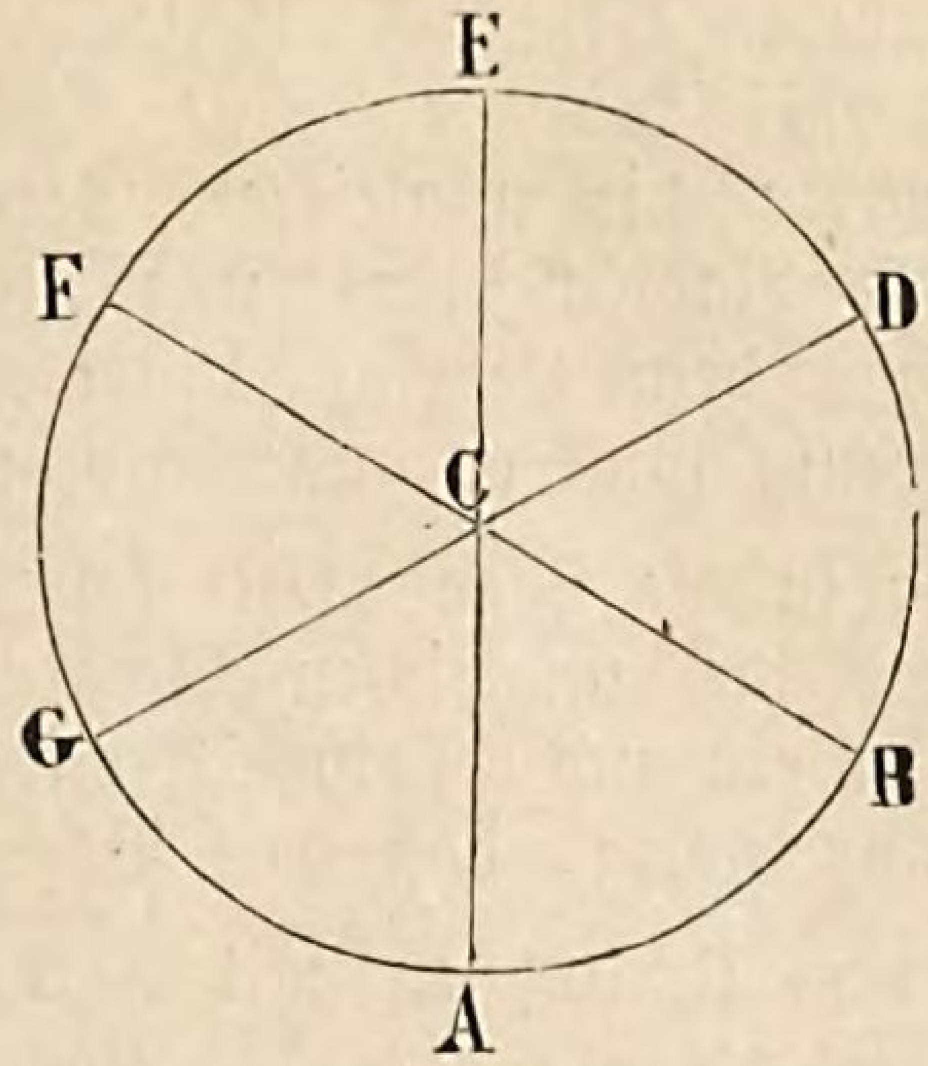


Fig. 51.

Wir wollen jetzt den Schüler mit zwei Lehrsätzen bekannt machen, welche den Durchmesser betreffen.

In Fig. 52 ist AB ein Durchmesser. AB ist zusammengesetzt aus den beiden Radien AC und BC. Weil nun diese beiden Radien nach Lehrsatz III einander gleich sind, so ist der Durchmesser AB doppelt so groß wie AC und auch doppelt so groß wie BC, überhaupt doppelt so groß wie ein Radius. Wir haben daher den

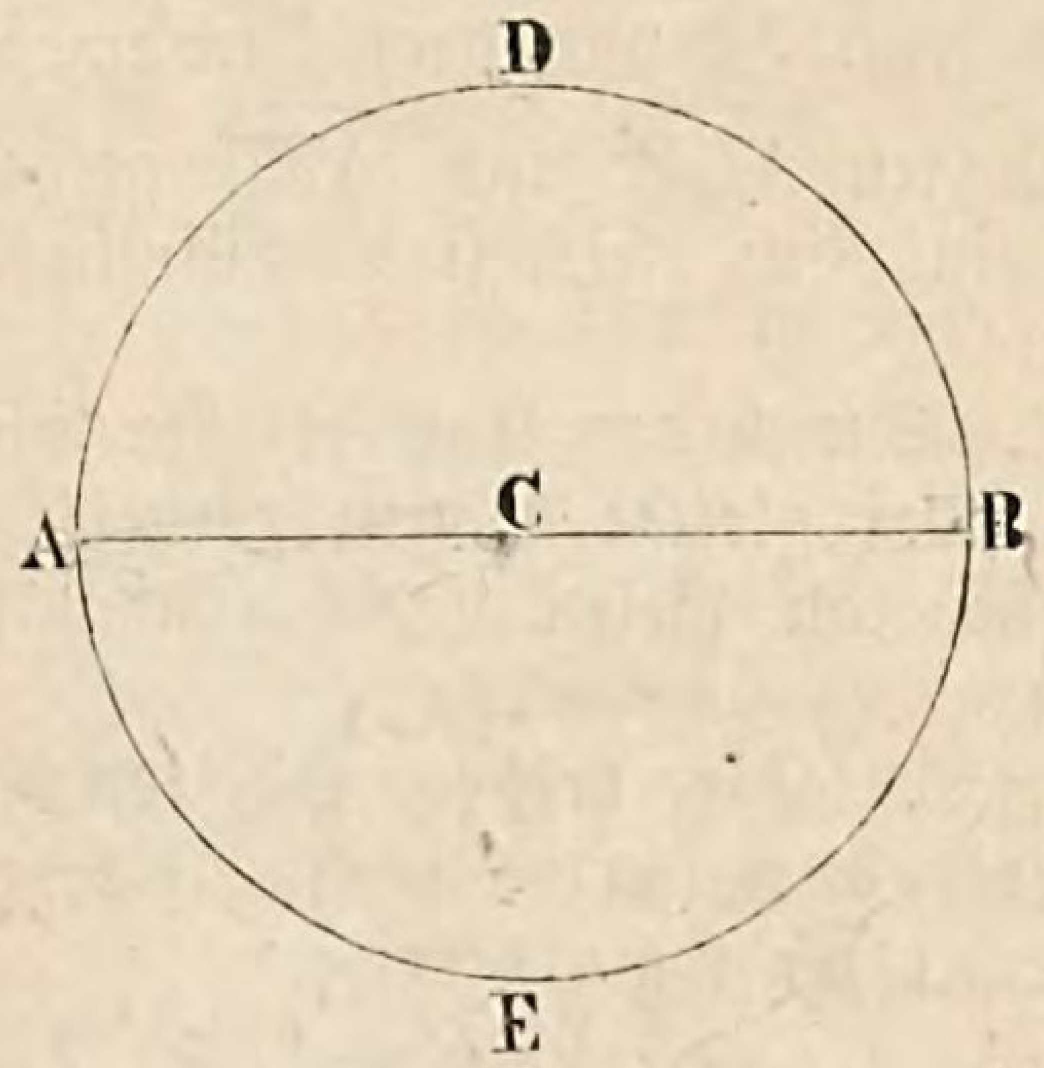


Fig. 52

Lehrsatz IV. Ein Durchmesser ist immer doppelt so groß wie ein Radius.

Wir wollen jetzt zum zweiten Lehrsatze über den Durchmesser übergehen. Der Schüler sehe auf Fig. 52. Er wird dann bemerken, daß der Kreis in Fig. 52 von dem Durchmesser in den oberen Bogen $\widehat{ADB}$ und in den unteren $\widehat{AEB}$ getheilt wird. Den oberen Bogen $\widehat{ADB}$ wollen wir uns um den Durchmesser AB als Axe gedreht, und vollständig umgeklappt denken. Der Bogen $\widehat{ADB}$ könnte dann entweder mit $\widehat{AEB}$ zusammenfallen oder nicht. Im letztern Falle müßte er entweder innerhalb oder außerhalb des Bogens $\widehat{AEB}$ liegen, also etwa die Lage $\widehat{AD_1B}$

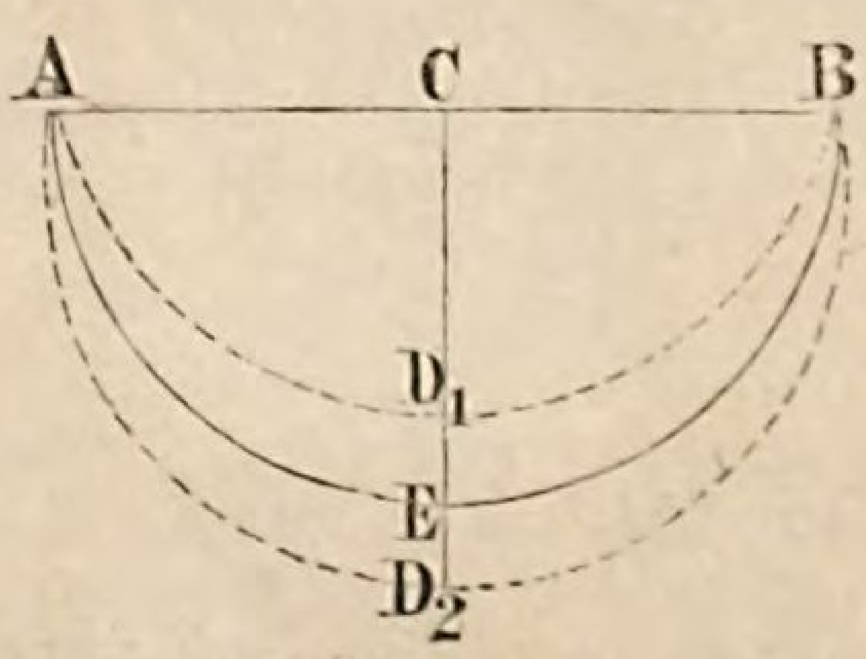


Fig. 53.

oder $\overset{\frown}{AD_2B}$ annehmen (Fig. 53, Seite 29). In die Lage AD_1B kann er aber nicht kommen, sonst wären die ungleichen Geraden CD_1 und CE Radien eines und desselben Kreises, was dem Lehrsatz I widerspräche. Ebenso wenig kann er außerhalb des Bogens $\overset{\frown}{AEB}$ etwa in die Lage $\overset{\frown}{AD_2B}$ fallen, sonst wären wieder die ungleichen Geraden CD_2 und CE Radien ein und desselben Kreises. Es bleibt also nur übrig, daß der Bogen $\overset{\frown}{ADB}$ sich nach dem Umklappen mit $\overset{\frown}{AEB}$ vollständig decke. Wenn sich aber die Bogen $\overset{\frown}{ADB}$ und $\overset{\frown}{AEB}$ decken d. h. in allen ihren Punkten zusammen fallen, so müssen sie auch gleich sein.

Unsere Betrachtungen haben also gelehrt, daß der Kreis Fig. 52 von dem Durchmesser AB in zwei Bogen $\overset{\frown}{ADB}$ und $\overset{\frown}{AEB}$ getheilt werde, welche einander gleich sind. Wir haben demgemäß den

Lehrsatz V. Durch den Durchmesser wird ein Kreis in zwei gleiche Bogen getheilt.

Wir schließen an diesen Lehrsatz noch sogleich folgende

Definition X. Die beiden Hälften, in welche der Kreis durch den Durchmesser zerlegt wird, nennt man Halbkreise.

In Fig. 52 sind also die Bogen $\overset{\frown}{ADB}$ und $\overset{\frown}{AEB}$ Halbkreise.

§ 29c. Die Secante. Eine gerade Linie, welche den Kreis durchschneidet, wird eine **Secante**[1]) genannt.

In Fig. 54 sind MN und ST Secanten. MN durchschneidet den Kreis in den Punkten O und P und ST in den Punkten U und V.

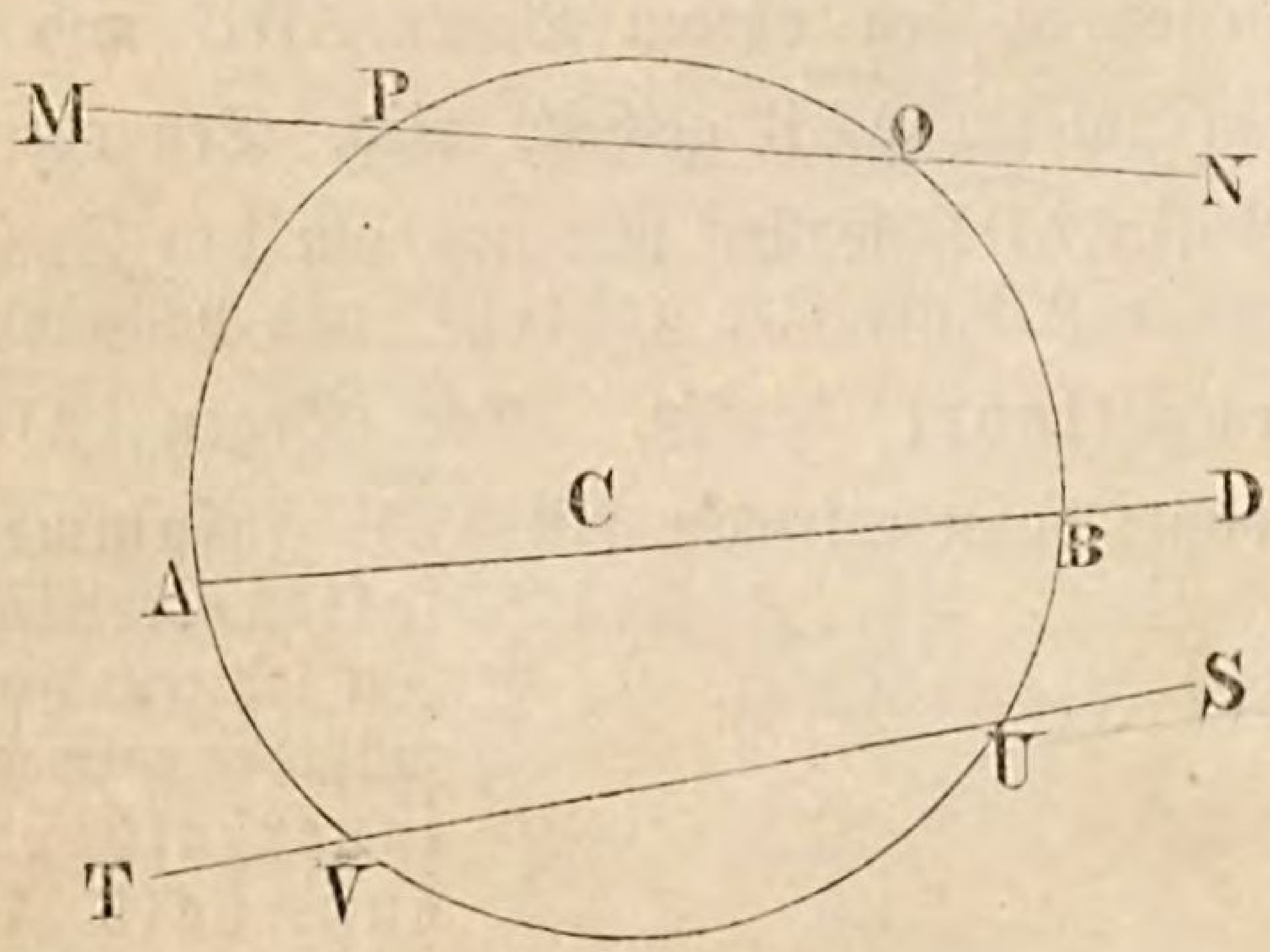


Fig. 54.

[1]) Secante ist entstanden aus dem lateinischen „secans", das deutsch „schneidend" heißt.

MN und ST ragen nach zwei Seiten hin über den Kreis hinaus. Man nennt aber auch solche gerade Linien Secanten, welche wie AD nur nach einer Seite hin über den Kreis hinaus verlängert sind.

Zu jeder Secante gehört als Bestandtheil eine Sehne. Zu MN gehört die Sehne OP, zu ST die Sehne UV und zu AD die Sehne AB.

§ 30. Der Centriwinkel und der Peripheriewinkel.[1])

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt zugleich Centrum eines Kreises ist, wird Centriwinkel genannt.

In Fig. 55 ist Winkel ECF ein Centriwinkel, denn sein Scheitelpunkt C ist zugleich

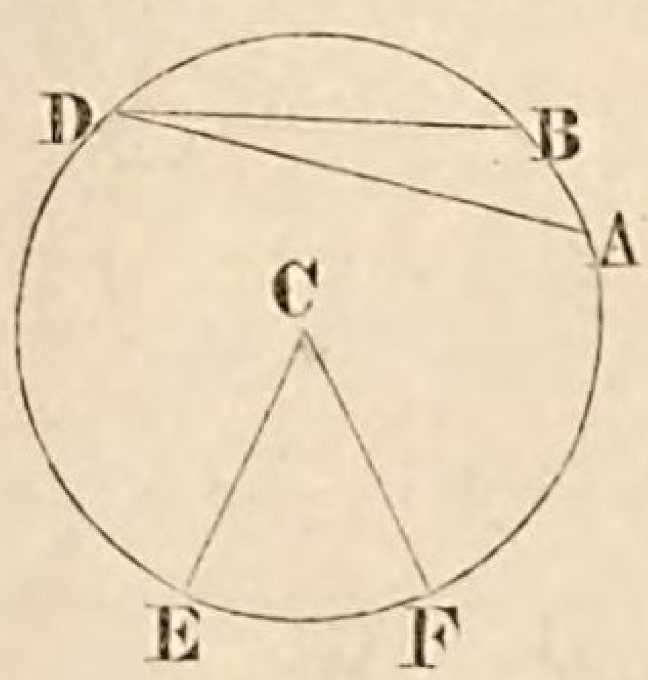


Fig. 55.

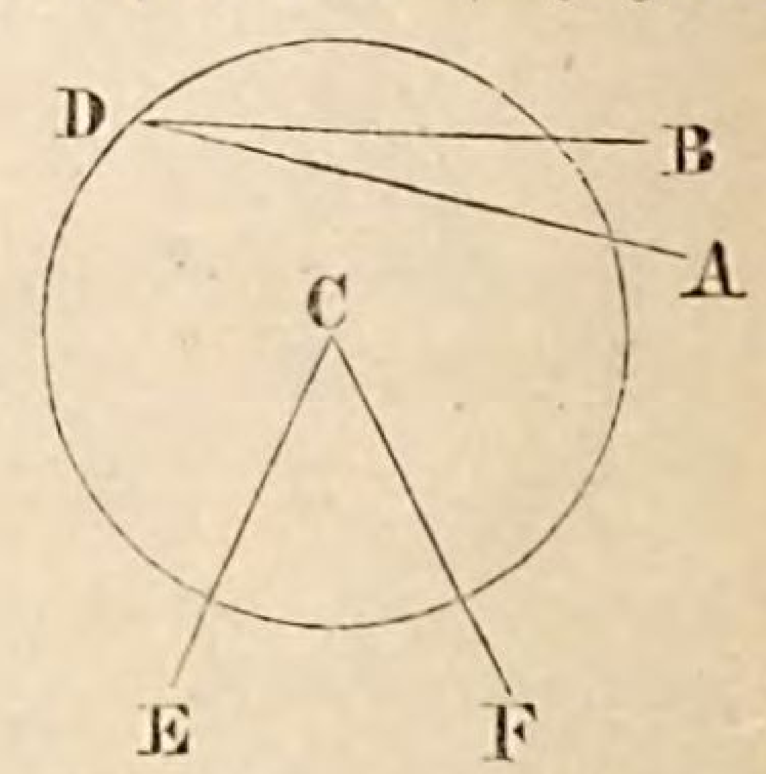


Fig. 56.

Centrum des Kreises um C. Seine Schenkel CE und CF sind Radien des Kreises um C. Man zeichnet bei einem Centriwinkel die Schenkel gewöhnlich so, daß sie Radien des Kreises werden, indessen auch Winkel ECF (Fig. 56) wird Centriwinkel genannt, obwohl die Schenkel desselben über den Kreis hinaus verlängert sind.

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt in der Kreislinie liegt, heißt ein Peripheriewinkel.

Winkel ADB in Fig. 55 ist ein Peripheriewinkel, denn sein Scheitelpunkt D ist ein Punkt der Kreislinie. Seine Schenkel AD und BD sind Sehnen; auch Winkel ADB in Fig. 56 ist ein Peripheriewinkel, seine Schenkel sind nicht Sehnen, sondern Secanten.

Aufgaben. 1) Der Schüler nenne in Fig. 51 die Radien und setze sie gemäß § 27a Lehrsatz III einander gleich.

2) Der Schüler gebe in Fig. 51 die Kreisbogen an.

3) Er nenne in Fig. 55 die Sehnen und in Fig. 57 die Secanten, zugleich bezeichne

[1]) Peripheriewinkel ist zusammengesetzt aus Peripherie und aus Winkel. Peripherie kommt aus dem Griechischen und ist gleichbedeutend mit Kreis und Kreislinie (es wird gesprochen Périferi, der Hauptton liegt auf dem letzten i.)

er die Sehnen, welche zu den Secanten gehören.

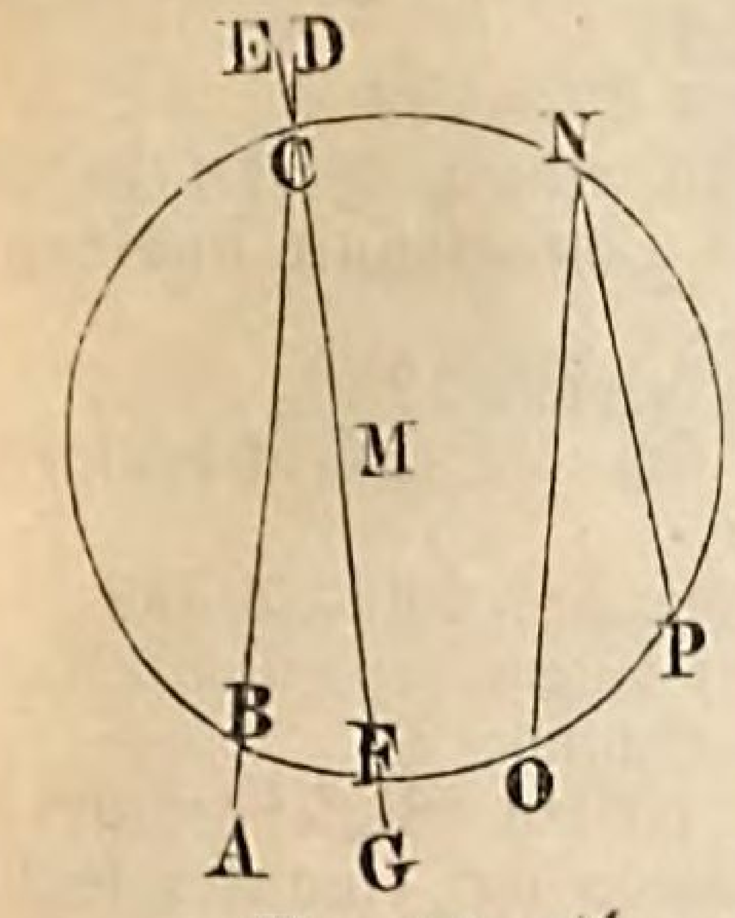


Fig. 57.

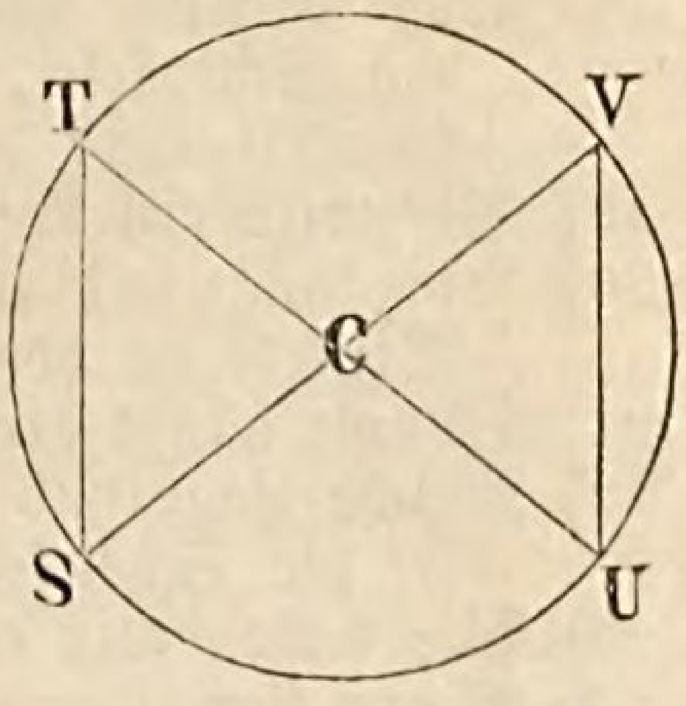


Fig. 58.

4) Der Schüler nenne in Fig. 58 die Durchmesser.

5) Er gebe die Centriwinkel an, welche er in Fig. 51 und 58, und die Peripheriewinkel, welche er in Fig. 57 und 58 bemerkt.

D. Recapitulation.

Wenn man in einem wissenschaftlichen Werke einen größern Abschnitt gründlich studiren will, muß man die einzelnen Theile für sich durchdringen und gewissenhaft durchdenken. Es geht dabei aber leicht der Zusammenhang verloren, und man muß sich die Einzelheiten noch einmal vorführen, um einen Ueberblick über das Ganze zu gewinnen. Auch unsere Schüler werden nach der Durcharbeitung der einzelnen Paragraphen eine Recapitulation[1]) des ganzen Stoffes wünschen, welchen wir bisher geboten haben, damit sie ihn gleichsam wie in einem Gesammtbilde überschauen. Wir werden darum den vorstehenden Theil des ersten Briefes in kurzen und prägnanten Zügen noch einmal durchgehen.

Nachdem wir bei der **Einführung in das Studium** den Nutzen der Mathematik geschildert, und den Zweck und Plan der Unterrichts-Briefe auseinandergesetzt hatten, gaben wir in der **historischen Einleitung** einen kurzen Abriß der allmäligen Entstehung und Ausbildung der mathematischen Wissenschaften, und zwar berücksichtigten wir besonders diejenigen mathematischen Disciplinen, mit welchen wir uns im ersten Cursus zu beschäftigen haben. Die historische Entwicklung sollte den Schüler mit den Männern bekannt machen, welche die elementare Mathematik begründeten; sie sollte ihn auch lehren, daß Jahrhunderte vergingen, ehe die regsamsten und tüchtigsten Denker der Griechen erarbeiteten, was er durch den ersten Cursus unserer Unterrichts-Briefe in weniger als Jahresfrist erlernen wird, wenn er mit Ernst an's Werk geht, besonders, wenn er den **Studienplan** beachtet, welcher der historischen Einleitung folgt.

Auf diese Weise war der Schüler für das Studium der Briefe vorbereitet, und wir konnten mit der **ersten Lection** beginnen. Zum Ausgangspunkt des Unterrichtes wählten wir die Geometrie, die Lehre von den räumlichen Gebilden, weil die räumlichen Größen und Verhältnisse dem Schüler leicht mit Hilfe der Anschauung zum Verständniß gebracht werden können. Die geometrischen Gebilde theilten wir in Körper, Flächen, Linien und Punkte ein. Den geometrischen Körper unterschieden wir scharf vom materiellen, die Fläche faßten wir als Grenze des Körpers, die Linie als Grenze der Fläche und den Punkt als Grenze der Linie auf. Auf diese Weise waren wir vom Körper zum Punkte herabgestiegen; wir wählten nun den umgekehrten Weg, indem wir vom Punkte ausgingen und die Linie durch Bewegung des Punktes, die Fläche durch Bewegung der Linie, und den Körper durch Bewegung der Fläche entstehen ließen.

Unter diesen geometrischen Gebilden interessirten uns zunächst die Flächen, weil die Eintheilung derselben in ebene und krumme Flächen den Anlaß zur Eintheilung der Geometrie in Planimetrie und Stereometrie gegeben hat. Die Planimetrie behandelt die ebenen Figuren, die Stereometrie die Körper und die anderen geometrischen Gestalten, welche nicht in einer Ebene liegen. Wir wandten uns der Planimetrie zu, und zwar nur einem bestimmten Theil derselben, der elementaren Planimetrie, welche von der unendlichen Menge der ebenen Figuren nur diejenigen untersucht, welche mit Lineal und Zirkel construirt werden können.

So war denn das Gebiet, welches zunächst Gegenstand der Unterrichts-Briefe sein soll, nach allen Seiten hin bestimmt und begrenzt. Aber bevor wir dieses Gebiet selbst betraten, mußten wir den Schüler noch mit einigen mathematischen Zeichen und mit den sogenanten Grundsätzen oder Axiomen bekannt machen. Wir gaben sieben solcher Zeichen und sechs Grundsätze an. Darnach konnten wir mit der Untersuchung planimetrischer Gebilde beginnen, und zwar behandelten wir zunächst die einfachste Figur, welche mit Hilfe des Lineals construirt wird: die gerade Linie oder die Gerade. Wir definirten sie und besprachen ihre Bezeichnung. Mit Hilfe der Geraden bestimmten wir den Begriff der gebrochenen und der krummen Linie und brachten dann einen Lehrsatz über die Gerade, welchen wir in den folgenden Briefen noch öfter verwenden werden. Nachdem wir noch die Feststellung der geraden Richtung erörtert und besonders dem Visiren unsere Aufmerksamkeit geschenkt hatten, gingen wir in der **zweiten Lection** an die Betrachtung eines andern ebenen Gebildes, welches mit dem Lineal gezeichnet wird, nämlich an die Betrachtung des Winkels. Wir besprachen den Scheitelpunkt, die Schenkel und den Winkelraum und setzten auseinander, wovon die Größe des Winkels abhängt. Indem wir den einen Schenkel um den Scheitelpunkt drehten, ließen wir den Winkel seine Größe allmälig verändern; durch diese Drehung des einen Schenkels wurden wir zum gestreckten Winkel und zur Hälfte des gestreckten Winkels, zum Rechten geführt. An den rechten Winkel schlossen wir die Behandlung der Begriffe „senkrecht", „vertical" und „horizontal" an. Schon vorher hatten wir uns der Bewegung des Uhrzeigers bei der Erörterung der Winkelgröße bedient; wir machten nun von diesem Hilfsmittel ausgedehnten Gebrauch, um die Eintheilung der Winkel

[1]) Recapitulation kommt aus dem Lateinischen und heißt Wiederholung.

in concave, gestreckte und convexe und die Eintheilung der concaven Winkel in spitze, rechte und stumpfe in anschaulicher Weise zu lehren. Damit beendeten wir vorläufig unsere Auseinandersetzung über den Winkel und gingen dann zum Kreise über, d. h. zu derjenigen Linie, welche mit Hilfe des Zirkels gezeichnet wird. Wir gaben eine Begriffsbestimmung des Kreises, erläuterten, wie ein Kreis construirt wird, und erklärten, was man unter einem Radius, einem Mittelpunkt, unter concentrischen Kreisen, unter einer Sehne und Secante, unter Centri- und Peripheriewinkeln zu verstehen habe. Damit schlossen wir die zweite Lection.

E. Wiederholungsfragen.

Schon im Studienplan haben wir darauf hingewiesen, daß wir am Ende eines jeden Briefes Fragen stellen werden. Diese Fragen sind so gewählt, daß der Schüler, welcher sie gewissenhaft beantwortet, sich den Inhalt des ganzen Briefes noch einmal vergegenwärtigt. Wir riethen im Studienplan dem Schüler an, die Antworten auf diese Fragen mit möglichster Sorgfalt schriftlich zu geben. Diesen Rath wiederholen wir; wenn der Schüler schriftlich fixirt, was er denkt, wird er mehr auf Einzelheiten aufmerksam werden, über die der geflügelte Gedanke leicht hinweggeht.

Hiernach beginnen wir mit den Fragen:

1) Wie kommt die Wissenschaft von den körperlichen Größen zu dem Namen Geometrie (Erdmeßkunst)?
2) Wie unterscheidet sich ein materieller Körper vom geometrischen?
3) Wovon sind die Flächen, Linien, Punkte die Grenzen?
4) Wie entsteht eine Linie, eine Fläche und ein Körper durch Bewegung?
5) Wie haben wir die Flächen eingetheilt?
6) In welche beiden Wissenschaften zerfällt die Geometrie?
7) Welche Figuren behandelt die elementare Planimetrie?
8) Welche mathematischen Zeichen haben wir angeführt, und wie werden sie gesprochen?
9) Wie heißen die mathematischen Grundsätze?
10) Wie haben wir die gerade Linie definirt?
11) Was versteht man unter der Entfernung zweier Punkte?
12) Wie bezeichnet man eine unbegrenzte, wie eine begrenzte gerade Linie?
13) Was ist eine gebrochene Linie?
14) Was ist eine krumme Linie?
15) Was geschieht mit zwei Geraden, welche zwei Punkte mit einander gemein haben?
16) Pflanzt sich der Lichtstrahl in geraden oder krummen Linien fort?
17) Welchen Zweck hat das Diopter?
18) Was versteht man bei einem Winkel unter den Schenkeln, dem Scheitelpunkt und dem Winkelraum?
19) Wie wird ein Winkel bezeichnet?
20) Wie lang hat man sich die Schenkel eines Winkels zu denken?
21) Wovon hängt die Größe des Winkels ab?
22) Welche Lage haben bei einem gestreckten Winkel die Schenkel zu einander?
23) Wie haben wir einen rechten Winkel definirt?
24) Wann stehen zwei Gerade auf einander senkrecht oder lothrecht?
25) Woran brachten wir die verticale, woran die horizontale Richtung zur Anschauung?
26) Welchen Nutzen hat die Setzwaage und die Libelle?
27) Wie pflegt man die verticalen und wie die horizontalen Linien auf dem Papier zu zeichnen?
28) Wo treffen alle verticalen Geraden zusammen, wenn man sie sich verlängert denkt?
29) Was für einen Winkel bilden die verticalen Richtungen der beiden Pole mit einander?
30) An welchem Theile der Erdkugel schlagen die Körper beim freien Fall die entgegengesetzte Richtung ein wie auf den Sundainseln?
31) Was ist ein spitzer und was ist ein stumpfer Winkel?
32) Was ist ein concaver und was ist ein convexer Winkel?
33) Wie ist der Kreis von uns definirt worden?
34) Was versteht man unter dem Mittelpunkt und unter den Radien eines Kreises?
35) In welchem Verhältniß der Länge stehen die Radien zu einander?
36) Was sind concentrische Kreise?
37) Was ist ein Kreisbogen?
38) Was versteht man unter einer Sehne?
39) Welches sind die beiden Lehrsätze, die wir über den Durchmesser aufgestellt haben?
40) Was ist eine Secante?
41) Was ist ein Peripherie- und was ist ein Centriwinkel?
42) Wie viel rechte Winkel sind an einem Würfel? dessen Ecken nicht abgestumpft sind?
43) Wann bilden die beiden Zeiger einer Uhr am Ende einer ganzen Stunde rechte Winkel?
44) Mit welchem von uns genannten Instrument kann man die Tiefe des Meeres messen?

Die Lösung der Aufgaben und Beantwortung der Wiederholungsfragen wird, wie bereits erwähnt, der folgende Brief bringen. Hiermit möge der Schüler seine eigene Arbeit vergleichen und etwaige Unrichtigkeiten, die sich in derselben vorfinden, berichtigen; namentlich aber möge er sich auch den Grund seiner irrthümlichen Auffassung vergegenwärtigen. Vor den anfänglichen Schwierigkeiten scheue er nicht zurück. Aller Anfang ist, wie das Sprüchwort sagt, schwer, aber Fleiß und Ausdauer werden ihn sicher an's Ziel bringen.

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

Berichtige S. 16, Spalte 2, Zeile 14 v. unten 4 hl, nicht 40 hl.

I. Cursus.
Lection 3 und 4.
Planimetrie.

Als
Manuscript
gedruckt.

2. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Nichts übereile —
Gut Ding will Weile!

Lection 3.

Um den Inhalt des vorigen Briefes vollkommen zum geistigen Eigenthum des Schülers zu machen, haben wir an die wichtigeren Definitionen und Lehrsätze Aufgaben angeschlossen und am Ende des Briefes Repetitionsfragen gestellt. Wir empfahlen dem Schüler auf die Lösung der Aufgaben und die Beantwortung der Fragen möglichst große Sorgfalt zu verwenden. Diese Mahnung wiederholen wir noch einmal für die zukünftigen Briefe. Wenn auch die Aufgaben und Fragen zum Theil sehr einfach erscheinen, ist es doch nöthig, daß der Schüler ihnen seine volle Aufmerksamkeit zuwende. Oft wird ein leicht verständlicher Inhalt in eine wichtige Form gekleidet, die der Schüler sich einprägen muß, um sie bei anderen Gelegenheiten passend zu gebrauchen. Im Folgenden bringen wir unter Abschnitt A die Auflösungen der Aufgaben und unter Abschnitt B die Antworten auf die Fragen. Um Raum zu sparen, verweisen wir zuweilen einfach auf die Lehrsätze und Paragraphen, welche die Antwort auf die Frage enthalten.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 1.

Abschnitt B. § 6. 1) 4 Schock sind gleich 240 Stück, oder 4 Schock sind ebenso viel wie 240 Stück. 2) 5 Meter sind gleich 50 Decimeter, oder 5 Meter sind ebenso groß wie 50 Decimeter. 3) 3 Mark sind gleich 300 Pfennig, oder 3 Mark sind ebenso viel wie 300 Pfennig. 4) 3 Decimeter sind gleich 30 Centimeter, oder 3 Decimeter sind ebenso groß wie 30 Centimeter.

§ 7. 1) 19 und 7 ist gleich 26, oder 19 plus 7 ist gleich 26; 19 ist ein Summand, 7 ist ein Summand und 26 ist die Summe. 2) 13 und 14 ist gleich 27, oder 13 plus 14 ist gleich 27; 13 ist ein Summand, 14 ist ein Summand und 27 ist die Summe. 3) 8 und 5 ist gleich 13, oder 8 plus 5 ist gleich 13; 8 ist ein Summand, 5 ist ein Summand und 13 ist die Summe. 4) 25 weniger 15 ist gleich 10, oder 25 minus 15 ist gleich 10; 25 ist der Minuend, 15 der Subtrahend und 10 die Differenz. 5) 19 weniger 6 ist gleich 13, oder 19 minus 6 ist gleich 13; 19 ist der Minuend, 13 der Subtrahend und 6 die Differenz. 6) 28 weniger 11 ist gleich 17, oder 28 minus 11 ist gleich 17; 28 ist der Minuend, 17 der Subtrahend und 11 die Differenz.

§ 8. 1) $3 . 6 = 18$ wird gesprochen: 3 mal 6 ist gleich 18; 3 ist ein Factor, 6 ist ein Factor und 18 ist das Product. 2) $4 . 5 = 20$ wird gesprochen: 4 mal 5 ist gleich 20; 4 ist ein Factor, 5 ist ein Factor und 20 ist das Product. 3) $3 . 10 = 30$ wird gesprochen: 3 mal 10 ist gleich 30; 3 ist ein Factor, 10 ist ein Factor und 30 ist das Product. 4) $\frac{8}{4} = 2$ wird gesprochen: 8 dividirt durch 4 ist gleich 2; 8 ist der Dividend, 4 der Divisor und 2

der Quotient. 5) $\frac{12}{3} = 4$ wird gesprochen: 12 dividirt durch 3 ist gleich 4; 12 ist der Dividend, 3 der Divisor und 4 der Quotient. 6) $\frac{60}{12} = 5$ wird gesprochen: 60 dividirt durch 12 ist gleich 5; 60 ist der Dividend, 12 der Divisor und 5 der Quotient.

Abschnitt C. § 9.

1) 200 dm = 20 m
2000 cm = 20 m
200 dm = 2000 cm.

2) 100 Dg = 1000 gr
2 Pfd. = 1000 gr
100 Dg = 2 Pfd.

3) 20 dm = 200 cm
2 m = 200 cm
20 dm = 2 m.

4) 8 + 5 = 13
10 + 3 = 13
8 + 5 = 10 + 3.

5) 12 — 8 = 4
10 — 6 = 4
12 — 8 = 10 — 6.

6) 9 + 6 = 15
10 + 5 = 15
9 + 6 = 10 + 5.

§ 10. **Grundsatz III.**

1) 6 m = 600 cm
7 m = 700 cm
6 m + 7 m = 600 cm + 700 cm
oder 13 m = 1300 cm.

2) 300 l = 3 hl
400 l = 4 hl
300 l + 400 l = 3 hl + 4 hl
oder 700 l = 7 hl.

3) 20 dm = 200 cm
2 dm = 20 cm
20 dm + 2 dm = 200 cm + 20 cm
oder 22 dm = 220 cm.

4) 3 m = 30 dm
5 m = 50 dm
3 m + 5 m = 30 dm + 50 dm
oder 8 m = 80 dm.

5) 2 Mk. = 200 Pf.
8 Mk. = 800 Pf.
2 Mk. + 8 Mk. = 200 Pf. + 800 Pf.
oder 10 Mk. = 1000 Pf.

Grundsatz IV.

1) 5 m = 500 cm
3 m = 300 cm
5 m — 3 m = 500 cm — 300 cm
oder 2 m = 200 cm.

2) 7 Mk. = 700 Pf.
4 Mk. = 400 Pf.
7 Mk. — 4 Mk. = 700 Pf. — 400 Pf.
oder 3 Mk. = 300 Pf.

3) 8 dm = 80 cm
2 dm = 20 cm
8 dm — 2 dm = 80 cm — 20 cm
oder 6 dm = 60 cm.

4) 10 m = 100 dm
6 m = 60 dm
10 m — 6 m = 100 dm — 60 dm
oder 4 m = 40 dm.

5) 900 l = 9 hl
800 l = 8 hl
900 l — 800 l = 9 hl — 8 hl
oder 100 l = 1 hl.

§ 11. **Grundsatz V.**

1) 300 l = 3 hl
2 = 2
2 × 300 l = 2 × 3 hl
oder 600 l = 6 hl.

2) 3 m = 300 cm
5 = 5
5 × 3 m = 5 × 300 cm
oder 15 m = 1500 cm.

3) 5 Mk. = 500 Pf.
4 = 4
4 × 5 Mk. = 4 × 500 Pf.
oder 20 Mk. = 2000 Pf.

4) 7 m = 70 dm
8 = 8
8 × 7 m = 8 × 70 dm
oder 56 m = 560 dm.

5) 9 dm = 90 cm
10 = 10
10 × 9 dm = 10 × 90 cm.
oder 90 dm = 900 cm.

Grundsatz VI.

1) 18 m = 1800 cm
6 = 6
18 m : 6 = 1800 cm : 6
oder 3 m = 300 cm.

2) 14 hl = 1400 l
7 = 7
14 hl : 7 = 1400 l : 7
oder 2 hl = 200 l.

3) 15 dm = 150 cm
5 = 5
15 dm : 5 = 150 cm : 5
oder 3 dm = 30 cm.

4) 36 m = 360 dm
9 = 9
36 m : 9 = 360 dm : 9
oder 4 m = 40 dm.

5) 8 Mk. = 800 Pf.
4 = 4
8 Mk. : 4 = 800 Pf. : 4
oder 2 Mk. = 200 Pf.

Section 2.

Abschnitt A. § 17. Die drei Winkel in Fig. 6, 7 und 8 werden

entweder mit $\angle$ ACB, $\angle$ DEF und $\angle$ LMN
oder mit $\angle$ BCA, $\angle$ FED und $\angle$ NML

bezeichnet. Bei $\angle$ ACB sind AC und BC die Schenkel, und C ist der Scheitelpunkt, bei $\angle$ DEF sind DE und FE die Schenkel, und E ist der Scheitelpunkt; bei $\angle$ LMN sind LM und NM die Schenkel und M ist der Scheitelpunkt.

§ 19. ∠ STR und ∠ ACB sind gestreckte Winkel; es ist daher ∠ STR = 2R und ∠ ACB = 2R. ∠ NPO und ∠ TSR sind rechte Winkel oder kürzer ausgedrückt „Rechte.“

§ 20. In Fig. 18 steht OP auf PN und PN auf OP senkrecht; in Fig. 19 steht RS auf ST und ST auf RS senkrecht.

§ 24. ∠ a und ∠ MPN sind spitze, ∠ c und ∠ DEF sind stumpfe Winkel. ∠ b ist ein Rechter und ∠ ABC ein Gestreckter.

Abschnitt B. § 25. In Fig. 44, 45 und 46 sind a, c und s die concaven und b, d und t die convexen Winkel.

Abschnitt C. § 30. 1) In Fig. 51 sind die Geraden CA, CB, CD, CE, CF und CG Radien. Es ist also CA = CB = CD = CE = CF = CG. 2) In Fig. 51 sind $\widehat{AB}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FG}$, und $\widehat{GA}$ Kreisbogen. 3) In Fig. 55 sind AD und BD Sehnen; in Fig. 57 sind AD und GE Secanten. Zur Secante AD gehört die Sehne BC, und zur Secante GE die Sehne CF. 4) In Fig. 58 sind die Geraden UT und SV Durchmesser. 5) In Fig. 51 sind die Winkel ACB, BCD, DCE, ECF, FCG und GCA, in Fig. 58 die Winkel SCU, UCV, VCT und TCS Centriwinkel. Fig. 57 enthält die Peripheriewinkel BCF und ONP; in Fig. 58 sind die Winkel STU, SVU, TSV und TUV Peripheriewinkel.

B. Antworten auf die in Abschnitt E der Lection 2 gestellten Fragen.

1) Der Schüler findet die Antwort auf Seite 5. 2) Der materielle Körper hat eine bestimmte Gestalt und Größe, außerdem aber noch stoffliche Eigenschaften; wenn man von diesen stofflichen Eigenschaften absieht, erhält man den geometrischen Körper. 3) Die Flächen sind Grenzen der Körper, die Linien Grenzen der Flächen, die Punkte Grenzen der Linien. 4) Die Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie und der Körper durch Bewegung einer Fläche. 5) Die Flächen werden in ebene und krumme Flächen eingetheilt. 6) Die Geometrie zerfällt in Stereometrie und Planimetrie (siehe § 4) 7) Die elementare Planimetrie behandelt diejenigen Figuren, welche mit Lineal und Zirkel construirt werden können. 8) Siehe § 6, § 7 und § 8. 9) Siehe in § 9 Grundsatz I und II, in § 10 Grundsatz III und IV und in § 11 Grundsatz V und VI. 10) Siehe § 13a Definition I. 11) Siehe § 13a Definition II. 12) Eine unbegrenzte gerade Linie wird mit einem großen Buchstaben benannt; eine begrenzte Gerade oder eine Strecke bezeichnet man entweder mit einem kleinen oder mit zwei an die Endpunkte gesetzten großen Buchstaben. 13) Siehe § 13c Definition III. 14) Siehe § 13c Definition IV. 15) Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, fallen ihrer ganzen Länge nach mit einander zusammen. 16) Ein Lichtstrahl pflanzt sich in einer geraden Linie fort. 17) Mit Hilfe des Diopters sucht man an einem beliebigen Gegenstande durch das Auge einen Punkt auf, welcher mit zwei anderen Punkten in einer geraden Linie liegt. 18) Siehe § 16. 19) Siehe § 17. 20) Die Schenkel eines Winkels hat man sich unendlich lang zu denken. 21) Die Größe eines Winkels hängt von der Annäherung der Schenkel an einander ab. 22) Bei einem gestreckten Winkel liegen die Schenkel in einer geraden Linie. 23) Siehe § 19 Definition I. 24) Zwei gerade Linien stehen auf einander senkrecht oder lothrecht wenn sie einen rechten Winkel mit einander bilden. 25) Die verticale Richtung brachten wir am Bleiloth oder Senkblei, die horizontale Richtung an der Oberfläche einer Flüssigkeit zur Anschauung. 26) Vermittelst der Libelle oder der Setzwaage stellt man die horizontale Richtung fest. 27) Siehe § 22. 28) Die verticalen Geraden treffen im Mittelpunkt der Erde zusammen, wenn man sie sich verlängert denkt. 29) Die verticalen Richtungen an den beiden Polen bilden mit einander einen gestreckten Winkel. 30) In Columbia und den angrenzenden Theilen Süd-Amerikas schlagen die Körper beim freien Fall die entgegengesetzte Richtung ein, wie auf den Sunda-Inseln. 31) Siebe § 24 Definition IV und V. 32) Siehe § 25 Definition VI und VII. 33) siehe § 27 Definition VIII. 34) Der Mittelpunkt oder das Centrum eines Kreises ist der feste Punkt, von welchem die sämmtlichen Punkte der Kreislinie gleich weit entfernt sind. 34) Der Radius oder Halbmesser eines Kreises ist die gerade Linie, welche das Centrum mit den Kreispunkten verbindet. 35) Die Radien eines Kreises sind einander gleich. 36) Siehe § 27b Definition IX. 37) Jeder Theil des Kreises wird ein Kreisbogen genannt. 38) Unter der Sehne versteht man eine gerade Linie, welche zwei Punkte des Kreises mit einander verbindet. 39) Siehe § 29b Lehrsatz IV und V. 40) Die Secante ist eine gerade Linie, welche den Kreis durchschneidet. 41) Siehe § 30. 42) An einem Würfel, dessen Ecken nicht abgestumpft sind, giebt es 24 rechte Winkel. 43) Am Ende einer ganzen Stunde steht der große Zeiger auf der XII. Der kleine Zeiger muß also nach der III oder nach der IX gerichtet sein, wenn er mit dem großen Zeiger einen rechten Winkel bilden soll. 44) Unter der Tiefe des Meeres versteht man die Länge der verticalen Linie von der Oberfläche bis zum Meeresgrunde. Die Tiefe des Meeres kann also mit einem Senkblei gemessen werden, dessen Faden genügend lang ist.

C. Das Messen der Linien.

§ 31. Die Entstehung der Längeneinheiten. Wenn Jemand eine Linie messen will, so vergleicht er sie mit einer andern Linie, welche man den **Maßstab** und deren Länge man die **Längeneinheit** nennt; genauer ausgedrückt, er untersucht, wie oft der Maßstab in der Länge der zu messenden Linie enthalten ist. So mißt der Zimmermann die Länge eines Balkens, indem er zusieht, wie oft er einen Maßstab an dem Balken entlang legen kann. In früheren Zeiten nahm man die Längeneinheit von den Gliedern des Körpers; man maß mit dem Fuße, mit dem Ellenbogen, mit der Klafter, d. i. der Länge der ausgebreiteten Arme bis zu den äußersten Fingerspitzen, mit der Spanne,

d. i. der Strecke, welche man mit dem Daumen und dem längsten Finger umspannen kann. Noch jetzt spricht man von Haar- und Handbreite, von Daum- und Faustdicke. Indessen die Gliedmaßen sind nicht bei allen Menschen gleich; die Messungen, die der eine mit seinen Gliedmaßen vornahm, konnten deswegen für den Andern keinen Werth haben; und sobald sich Handel und Verkehr zu regen begann, mußte das Verlangen nach einem einheitlichen Maße wenigstens innerhalb der Grenzen des Vaterlandes hervortreten. Man schaffte in Folge dessen einen einheitlichen Maßstab, indem man statt der vielen Füße einen Normalfuß und statt der verschiedenen Ellenbogen einen bestimmten zum Messen benutzte. In England war lange Zeit der Ellenbogen Heinrichs I. als Elle und in Frankreich der Fuß Ludwigs XIV. als Pariser Fuß in Gebrauch.

Da jedes kleine Ländchen, um seine Selbstständigkeit zu wahren, sein besonderes Maß und Gewicht beibehielt, war die Uebereinstimmung im Maßstabe oft auf ein kleines Gebiet beschränkt; es hat in Deutschland nicht weniger als 150 verschiedene Fuß- und Ellensysteme gegeben. Diesem kaum erträglichen Zustande wurde in Deutschland im Anfang dieses Jahrhunderts schon durch Napoleon bedeutend abgeholfen; im Jahre 1870 wurde ihm durch Einführung des Metersystems völlig ein Ende gemacht. Das Metermaß hat seine Geburtsstätte in Frankreich. Am Ausgange des vorigen Jahrhunderts in der großen Revolution wollten die Franzosen nicht mit dem Fuße eines Mannes messen, den sie als Volksunterdrücker verachteten. Der Nationalconvent beschloß deshalb eine Längeneinheit einzuführen, welche eine unveränderliche Strecke auf der Erdkugel darstelle. Man wollte erst die Länge eines Pendels wählen, welches in einer Sekunde eine Schwingung macht. Weil aber das Sekundenpendel an verschiedenen Theilen der Erde eine verschiedene Länge hat, machte eine Commission berühmter Mathematiker und Physiker — bestehend aus Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet — einen andern Vorschlag.

Die Kreise, welche man durch den Nord- und Südpol unserer Erdkugel legen kann, nennt man Meridiane; NABS (Fig. 1) sei ein solcher Meridian; N der Nordpol, S der Südpol, A und B zwei Punkte auf dem Aequator. Der Bogen NA ist dann der vierte Theil eines Meridians, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt, ein Meridianquadrant. Die gelehrte Commission rieth nun, den zehnmillionsten Theil eines solchen Quadranten zur Längeneinheit zu machen und ihm von dem griechischen Worte Metron[1]) den Namen **Meter** zu geben. Die Nationalversammlung nahm den Vorschlag beifällig auf; die beiden Geometer Mechain und Delambre wurden mit Meridianmessungen beauftragt, und am 1. August 1793 wurde die Länge des Meters zu 443,296 Pariser Linien festgestellt.

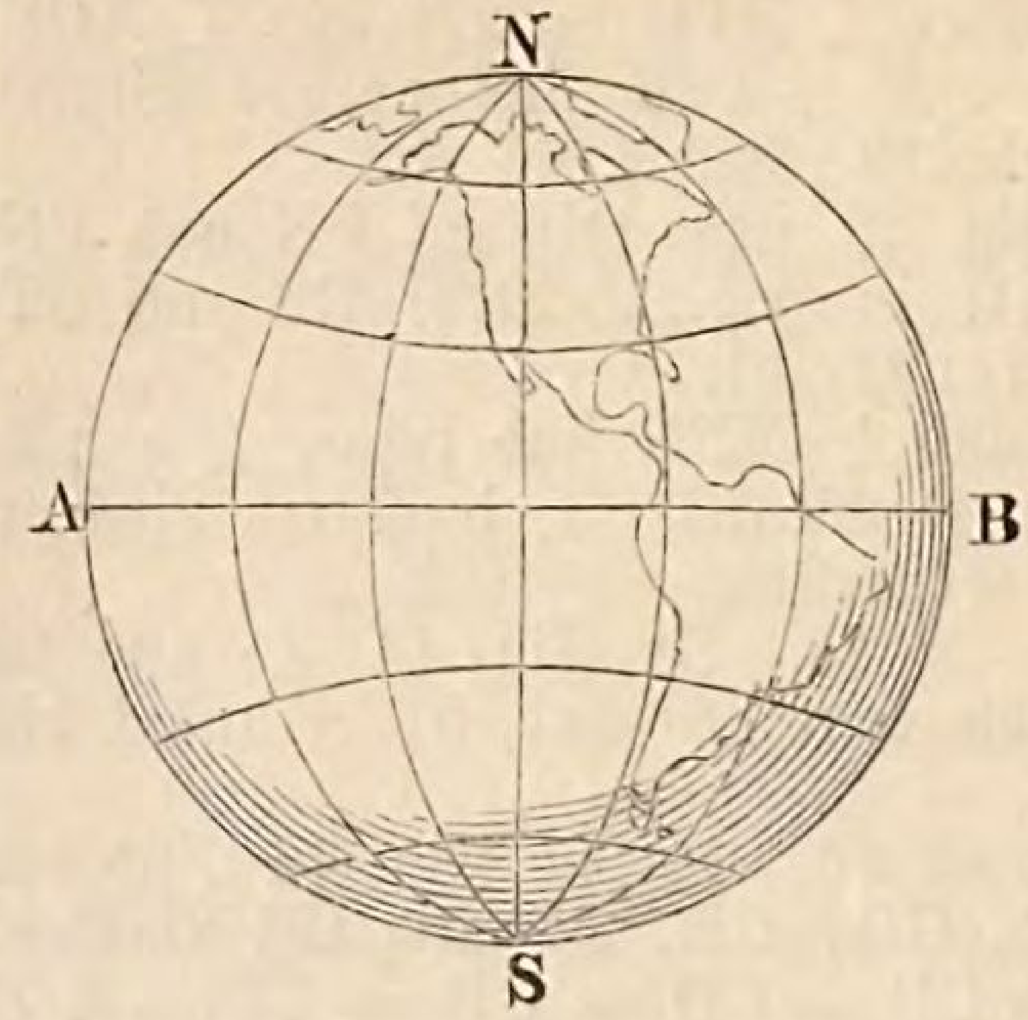


Fig. 1.

§ 32. Eintheilung des Metermaßes.

Um auch Gegenstände messen zu können, die größer oder kleiner sind als ein Meter, stellte man größere und kleinere Maßstäbe her, indem man das Meter durch die Zahlen 10, 100 und 1000 vervielfachte und theilte. Zur Bezeichnung der Maße, welche kleiner sind als ein Meter, setzte man die lateinischen Zahlen, zur Bezeichnung der größeren Maße die griechischen Zahlen mit dem Worte Meter zusammen.

Es heißt auf lateinisch

decem zehn, ein Decimeter ist gleich $^1/_{10}$ Meter; Abkürzung dm.

centum hundert, ein Centimeter ist gleich $^1/_{100}$ Meter; Abkürzung cm.

mille tausend; ein Millimeter ist gleich $^1/_{1000}$ Meter; Abkürzung mm.

Auf griechisch

deka zehn, ein Dekameter ist gleich 10 Metern; Abkürzung Dm.

hekaton hundert, ein Hektometer ist gleich 100 Metern; Abkürzung Hm.

chilioi tausend, ein Kilometer ist gleich 1000 Metern; Abkürzung Km.

Bei den Unterabtheilungen verwendet man in der Mitte der Worte den helltönenden Bindevokal i (Dec-i-meter, Cent-i-meter, Mill-i-meter), bei den Oberabtheilungen dagegen die tieftönenden Laute a und o (Dek-a-meter, Hekt-o-meter, Kil-o-meter). Die folgende Tabelle wird eine Uebersicht über die Verhältnisse ge-

[1]) Metron heißt Maß.

währen, in denen die einzelnen Maße zu einander stehen.

Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
1 =	10 =	100 =	1000 =	10 000 =	100 000 =	1 000 000
	1 =	10 =	100 =	1 000 =	10 000 =	100 000
		1 =	10 =	100 =	1 000 =	10 000
			1 =	10 =	100 =	1 000
				1 =	10 =	100
					1 =	10
						1

Bei der Einführung des Metersystems in Deutschland wurden die Bezeichnungen der einzelnen Maße geändert. Statt Meter soll „Stab", statt Centimeter „Neuzoll", statt Millimeter „Strich", statt Dekameter „Kette" gesagt werden, und 7500 Meter sollen eine „Meile" bilden. Aber obwohl die Namen Stab, Neuzoll u. s. w. der deutschen Sprache entlehnt sind, haben sie doch nicht die fremdsprachlichen Bezeichnungen Decimeter, Centimeter u. s. w. verdrängen können, wahrscheinlich, weil die letzteren durch das Zahlwort, welches den ersten Theil derselben bildet, genau die Größe des durch sie bezeichneten Maßes angeben. Das Metersystem ist im Jahre 1803 in Italien, 1821 in Holland und Belgien, 1836 in Griechenland, 1859 in Spanien und Portugal, 1870 in Deutschland, 1876 in Oesterreich-Ungarn eingeführt worden. Der größte Theil des civilisirten Europa hat also jetzt übereinstimmendes Maß. Bei der Ausdehnung, welche gegenwärtig der internationale Verkehr erreicht hat, liegt in diesem Umstande ein unberechenbarer Vortheil. Den Hauptnutzen gewährt aber das Metersystem dadurch, daß die Theilungs- und Vervielfältigungsziffer 10 des Meters übereinstimmt mit der Grundzahl unseres Zahlensystems. Der Fuß wurde in Deutschland in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien eingetheilt; wollte man nun die Zoll auf Fuß oder die Linien auf Zoll zurückführen, so gelangte man immer zu Zwölfteln also zu gemeinen Brüchen, die, wie der Leser selbst weiß, außerordentlich schwierige und umständliche Rechnungen erfordern. Wenn, man dagegen bei dem neuen Metersystem die kleinern Maße in größere umwandelt, so kommt man zu Decimalbrüchen, welche sich so behandeln lassen wie ganze Zahlen. Wie die Flächen und Körpermaße, sowie die Gewichte aus der Längeneinheit hervorgehen, werden spätere Kapitel lehren.

Die nebenstehende Figur 2 stellt ein in Centimeter (Neuzoll) getheiltes Decimeter dar.

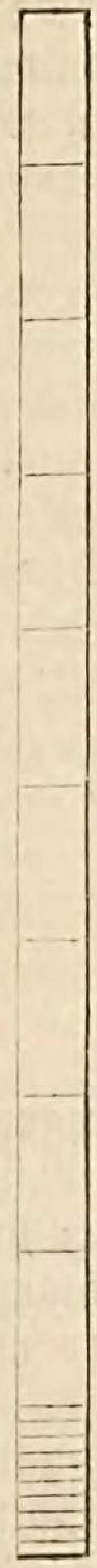


Fig. 2.

Aufgaben. 1) Wie viel Centimeter (Neuzoll) sind a) 9 Meter (Stab), b) 70 Millimeter (Strich), c) 8 Decimeter, d) 5 Dekameter (Kette), e) 900 Millimeter (Strich), f) 4 Kilometer?

2) Wie viel Decimeter sind a) 12 Meter (Stab), b) 7 Kilometer, c) 550 Centimeter (Neuzoll), d) 25 Dekameter (Ketten), e) 800 Millimeter (Strich), f) 19 Dekameter (Ketten)?

3) Wie viel Dekameter sind a) 170 Meter (Stab), b) 13 Hektometer, c) 2 Kilometer, d) 7000 Centimeter, (Neuzoll), c) 90 000 Millimeter (Strich)?

§ 33. Die Meßkette. Das Metermaß wird in mannigfacher Form und Beschaffenheit hergestellt. Die Tischler und Bauhandwerker bedienen sich gewöhnlich zum Messen eines Holzstabes von der Größe eines Meters, der Schnittwaarenhändler mißt seine Waaren meist mit einem Stabe (früher Elle), welcher die Größe eines halben Meters hat. Der Feldmesser braucht ein Maß, welches fest ist und sich doch leicht verpacken und transportiren läßt; er verwendet die sogenannte Meßkette, die 10 bis 20 Meter lang ist. Die Meßkette besteht aus Eisen- oder besser Stahlstäbchen a (Fig. 3.) von der Dicke eines Federkiels, die an beiden Enden umgebogen und durch Oesen b mit einander verbunden sind.

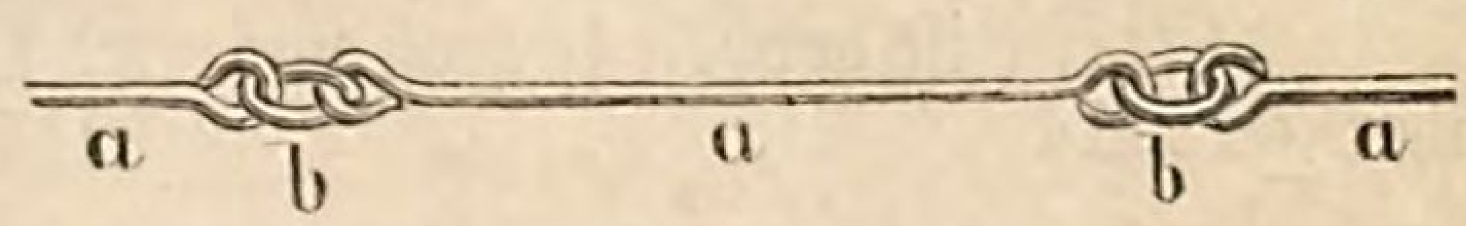


Fig. 3.

D. Die Messung der Winkel.

§ 34. Der Centriwinkel und sein Kreisbogen. Von der Größe der Winkel haben wir schon in § 18 und im Abschnitt B der zweiten Lection gesprochen; wir haben sie nach ihrer Größe in concave, gestreckte und convexe und die concaven in spitze, rechte und stumpfe eingetheilt. Die Bewegung des Uhrzeigers bot uns ein vortreffliches Mittel, die Größenverhältnisse aller dieser Winkel zu veranschaulichen.

Der Stift M (siehe § 19 und § 24) in der Mitte des Zifferblattes der Uhr diente uns als Scheitelpunkt eines Winkels, den großen Zeiger sahen wir als beweglichen Schenkel und einen

Strich, den wir von M nach der XII gezogen dachten, als festen Schenkel an. Wir wollen von dieser Hilfsvorstellung bei den folgenden Betrachtungen wieder Gebrauch machen.

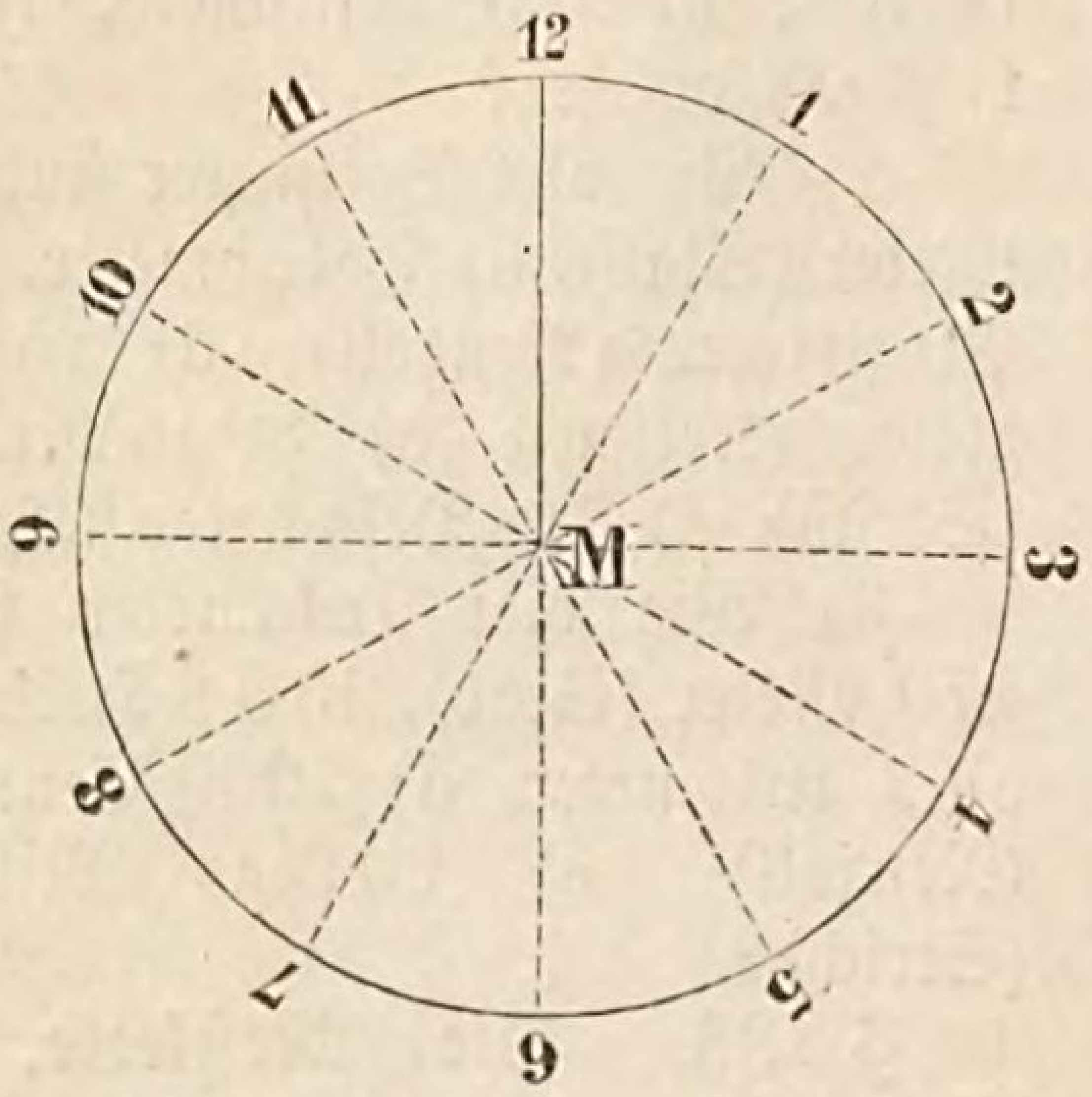


Fig. 4.

Der große Zeiger beginne seine Bewegung von der 12[1]) aus (Fig. 4). Je weiter er sich dreht, oder mit andern Worten, **je größer der Bogen** wird, welchen seine Spitze durchläuft, um so **größer** wird **der Winkel**, den er mit dem festen Striche M12 einschließt.

Die Größe des Winkels entspricht ganz der Größe des Bogens, welchen die Spitze des Zeigers durchwandert hat.

$\widehat{12,1,2}$ ist doppelt so groß wie $\widehat{12,1}$
daher $\angle 12M2$ " " " " $\angle 12M1$

$\widehat{12,1,3}$ ist dreimal so groß wie $\widehat{12,1}$
daher $\angle 12M3$ " " " " $\angle 12M1$

$\widehat{12,1,4}$ ist doppelt so groß wie $\widehat{12,1,2}$
daher $\angle 12M4$ " " " " $\angle 12M2$.

Wir brauchen als den einen Schenkel nicht immer den Strich M12 anzusehen. Auch wenn wir statt M12 irgend einen andern Radius setzen, etwa M1 oder M2, M4 2c., hängt die Größe des Winkels in derselben Weise von der Größe des dazu gehörigen Bogens ab.

$\widehat{1,2,3}$ ist doppelt so groß wie $\widehat{12,1}$
folglich $\angle 1M3$ " " " " $\angle 12M1$

$\widehat{1,2,6}$ ist fünfmal so groß wie $\widehat{6,7}$
folglich $\angle 1M6$ " " " " $\angle 6M7$

[1]) Um eine größere Uebereinstimmung mit dem Folgenden zu erzielen, haben wir statt einer Uhr mit römischen Ziffern in Fig. 4 einfach einen in 12 Theile getheilten Kreis gegeben.

$\widehat{12,1,3}$ ist gleich $\widehat{3,4,6}$
folglich $\angle 12M3$ " $\angle 3M6$

$\widehat{4,5,8} = \widehat{8,9,12} = \widehat{12,1,4}$
folglich $\angle 4M8 = \angle 8M12 = \angle 12M4$

$\widehat{1,2,3} = \widehat{3,4,5} = \widehat{5,6,7}$
folglich $\angle 1M3 = \angle 3M5 = \angle 5M7$

$\widehat{7,8,9} = \widehat{9,10,11} = \widehat{11,12,1}$
folglich $\angle 7M9 = \angle 9M11 = \angle 11M1$.

Ueberhaupt gehören in unserer Figur zu **gleichen Bogen gleiche Winkel** und zu **ungleichen Bogen ungleiche Winkel;** ist **ein Bogen zwei-, drei-, viermal so groß** als ein anderer, so ist auch **sein Winkel zwei-, drei-, viermal so groß** wie der Winkel des andern.

Wir können diesen Satz noch verallgemeinern, indem wir zusehen, welche geometrischen Gebilde wir in unserer Figur vorfinden. Der große Zeiger dreht sich um M und beschreibt dabei den Kreis 12, 1, 2, 3, 4 2c., M ist der Mittelpunkt und M12, M1, M2, M3 2c. sind Radien dieses Kreises. Die Winkel, von denen wir gesprochen haben, z. B. 12M1, 12M3 2c. sind Centriwinkel, denn ihr Scheitelpunkt M ist zugleich Mittelpunkt eines Kreises. Wir haben darum den

Lehrsatz I. Zu gleichen Kreisbogen gehören gleiche Centriwinkel und zu ungleichen Kreisbogen ungleiche Centriwinkel; ist ein Kreisbogen zwei-, drei-, viermal so groß wie ein anderer, so ist auch sein Centriwinkel zwei-, drei-, viermal so groß wie der Centriwinkel des andern.

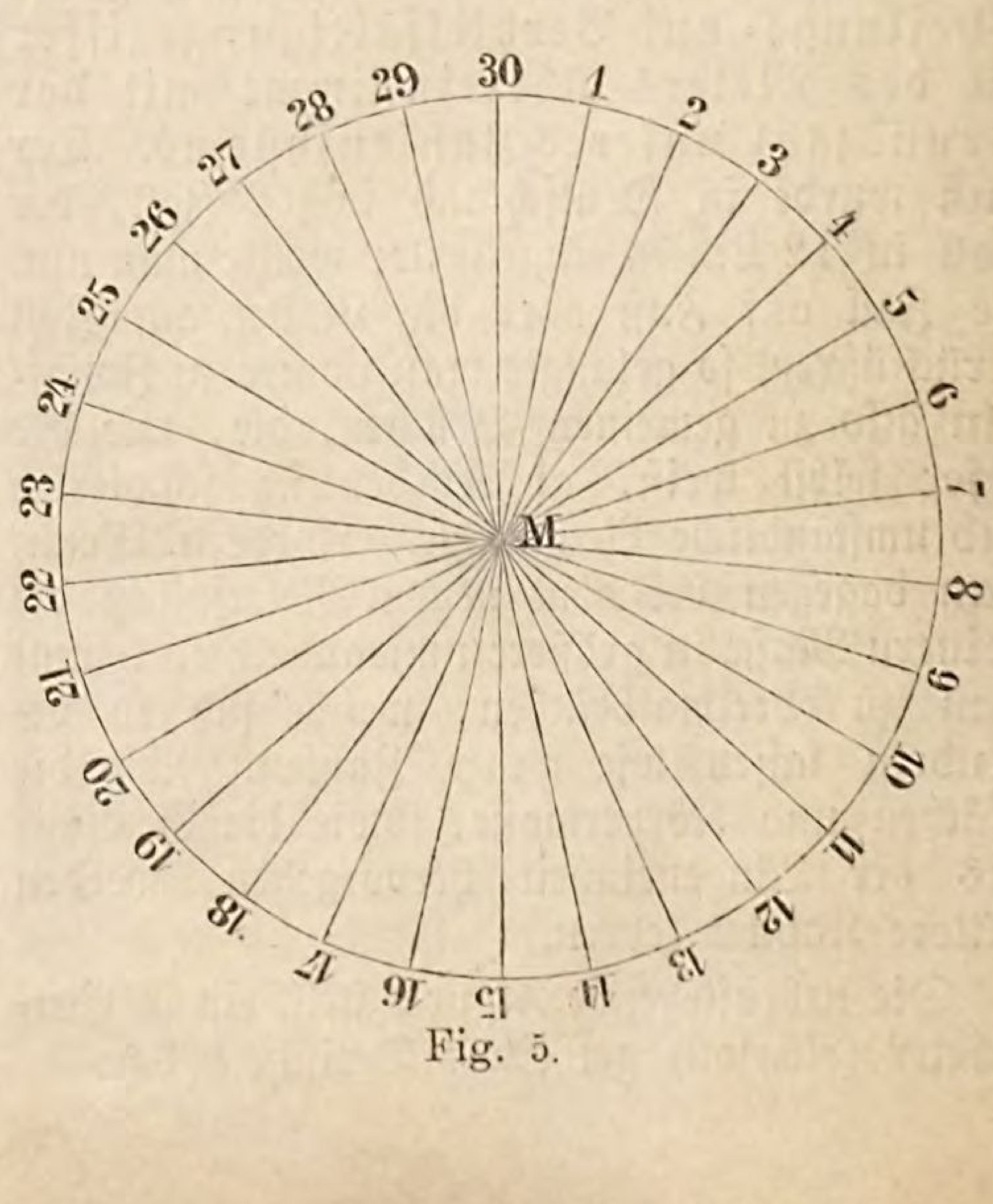


Fig. 5.

Aufgaben zu Lehrsatz I. Der Kreis Fig. 5 ist in 30 gleiche Kreisbogen eingetheilt: Auf diesen Kreis beziehen sich die folgenden Aufgaben.

1) Der Schüler setze die im Folgenden mit ꝛc. abgebrochenen Gleichungen fort.

a) $\overset{\frown}{30,1,2} = \overset{\frown}{2,3,4} = \overset{\frown}{4,5,6}$ ꝛc.
daher $\angle 30M2 = \angle 2M4 = \angle 4M6$ ꝛc.

b) $\overset{\frown}{30,1,3} = \overset{\frown}{3,4,6} = \overset{\frown}{6,7,9}$ ꝛc.
daher $\angle 30M3 = \angle 3M6 = \angle 6M9$ ꝛc.

c) $\overset{\frown}{2,3,7} = \overset{\frown}{7,8,12} = \overset{\frown}{12,13,17}$ ꝛc.
daher $\angle 2M7 = \angle 7M12 = \angle 12M17$ ꝛc.

d) $\overset{\frown}{4,5,10} = \overset{\frown}{10,11,16}$ ꝛc.
daher $\angle 4M10 = \angle 10M16$ ꝛc.

e) $\overset{\frown}{6,7,16} = \overset{\frown}{16,17,26}$ ꝛc.
daher $\angle 6M16 = \angle 16M26$ ꝛc.

2) Bei je zwei der im Folgenden genannten Winkel gebe der Schüler an, wie viel Mal der eine größer ist als der andere.

a) $\angle 30M5$, $\angle 5M6$.
b) $\angle 1M7$, $\angle 8M10$.
c) $\angle 3M13$, $\angle 15M20$.
d) $\angle 7M16$, $\angle 17M20$.
e) $\angle 9M17$, $\angle 18M20$.
f) $\angle 11M25$, $\angle 15M17$.

Bei den letzten Aufgaben muß sich der Schüler immer überlegen, wie oft der Bogen des einen Winkels im Bogen des andern enthalten ist. Z. B. $\overset{\frown}{5,6}$ ist fünfmal in $\overset{\frown}{30,1,5}$ enthalten. Die Antwort auf Frage a muß also lauten:

$\angle 30M5$ ist fünfmal so groß wie $\angle 5M6$.

§ 35. Das Messen der Centriwinkel. Die Winkeleinheit.

Den Lehrsatz I. verwendet man zur **Messung der Centriwinkel.**

Will man eine Größe messen, so muß man sie mit einer bekannten gleichartigen Größe, der Maßeinheit, vergleichen, die Linie mit einer andern Linie (der Längeneinheit), den **Winkel** mit einem andern Winkel (der **Winkeleinheit).** Man muß zusehen, wie oft die Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Demgemäß:

Um einen Centriwinkel zu messen, hat man zu untersuchen, wie oft ein anderer Centriwinkel (die Winkeleinheit) in dem zu messenden Centriwinkel enthalten ist.

In Fig. 4 wollen wir Winkel 12M1 zur Winkeleinheit machen und vermittelst derselben Winkel 1M5 messen. Wir müssen prüfen, wie oft Winkel 12M1 in Winkel 1M5 enthalten ist oder mit andern Worten: wie viel Mal Winkel 1M5 größer ist als Winkel 12M1. Statt dessen brauchen wir nach Lehrsatz I. nur die Bogen, welche zu diesen Winkeln gehören, mit einander zu vergleichen, also zu untersuchen, wie oft $\overset{\frown}{1,2,5}$ größer ist als $\overset{\frown}{12,1}$. $\overset{\frown}{1,2,5}$ ist 4mal so groß wie $\overset{\frown}{12,1}$, folglich beträgt Winkel 1M5 vier Winkeleinheiten.

$\angle 3M8$ ist gleich 5 Winkeleinheiten weil $\overset{\frown}{3,4,8}$ 5mal größer ist als $\overset{\frown}{12,1}$.

$\angle 7M10$ ist gleich 3 Winkeleinheiten, weil $\overset{\frown}{7,8,10}$ 3mal größer ist als $\overset{\frown}{12,1}$.

$\angle 5M12$ ist gleich 7 Winkeleinheiten, weil $\overset{\frown}{5,6,12}$ 7mal größer ist als $\overset{\frown}{12,1}$.

Aufgaben. I. Winkel 12M1 sei Winkeleinheit; wie viel Winkeleinheiten beträgt dann:
a) $\angle 2M5$ b) $\angle 4M8$ c) $\angle 1M6$ d) $\angle 3M7$ e) $\angle 8M10$ f) $\angle 12M6$?

In Fig. 5 sei Winkel 30M1 die Winkeleinheit. Wir wollen vermittelst derselben Winkel 1M12 ausmessen. Zu diesem Zwecke müssen wir zusehen wie oft Winkel 30M1 in Winkel 1M12 oder Bogen $\overset{\frown}{30,1}$ in $\overset{\frown}{1,2,12}$ enthalten ist.

$\angle 1M12$ ist gleich 11 Winkeleinheiten, weil $\overset{\frown}{30,1}$ 11mal in $\overset{\frown}{1,2,12}$ enthalten ist.

$\angle 7M15$ ist gleich 8 Winkeleinheiten, weil $\overset{\frown}{30,1}$ 8mal in $\overset{\frown}{7,8,15}$ enthalten ist.

$\angle 9M24$ ist gleich 15 Winkeleinheiten, weil $\overset{\frown}{30,1}$ 15mal in $\overset{\frown}{9,10,24}$ enthalten ist.

Aufgaben. II. Winkel 30M1 sei Winkeleinheit; gleich wie viel Winkeleinheiten ist dann
a) $\angle 3M9$ b) $\angle 7M16$ c) $\angle 4M13$ d) $\angle 8M20$ e) $\angle 1M15$ f) $\angle 15M22$ g) $\angle 7M14$?

§ 36. Eintheilung der Centriwinkel in Grade.

Als Längeneinheit kann man Linien von

jeder beliebigen Länge verwenden, wenn sie sich auch nicht alle als gleich practisch erweisen. Ebenso könnte man beim Messen der Centriwinkel als Maßeinheit Winkel von beliebiger Größe wählen. Man könnte den Kreis in 4, 12, 30, 100 oder 400 ꝛc. gleiche Kreisbogen eintheilen und zur Winkeleinheit den Centriwinkel machen, welcher einem der gleichen Kreisbogen entspricht. Wenn die Winkeleinheit groß ist, so würden kleine Winkel nur als Bruchtheile derselben ausgedrückt werden können; man müßte von $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{50}$ Winkeleinheit sprechen. Da man Brüche möglichst vermeidet, so sind die Mathematiker übereingekommen, sich einer kleinen Winkeleinheit zu bedienen. **Man zerlegt den Kreis in 360 gleiche Bogen und nennt jeden derselben einen Gradbogen. Diesen 360 gleichen Bogen entsprechen 360 gleiche Centriwinkel, von denen man sagt, sie betragen einen Grad oder sie sind Winkel von einem Grade. Ein Winkel von einem Grade ist die Winkeleinheit.**

Ein Centriwinkel beträgt 5, 10, 50, 100 Grad, wenn er 5, 10, 50, 100 Mal so groß ist wie ein Winkel von 1 Grade, wenn also sein Kreisbogen 5, 10, 50, 100 Mal so groß ist wie ein Gradbogen.

Auf den ganzen Kreis kommen 360 Grade. In Fig. 4 macht jeder der Kreisbogen $\overset{\frown}{12,\,1}$ $\overset{\frown}{1,\,2}$, $\overset{\frown}{2,\,3}$, $\overset{\frown}{3,\,4}$, u. s. w. den 12ten Theil eines Kreises aus, ist also gleich 30 Gradbogen, denn 30 ist der zwölfte Theil von 360. Darum beträgt jeder der Centriwinkel 12 M 1, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, 4 M 5 30 Grad.

∠ 12 M 2	beträgt	60	Grad,	weil	sein	Bogen	aus	2mal 30	Gradbogen	besteht.
∠ 12 M 3	„	90	„	„	„	„	„	3mal 30	„	„
∠ 12 M 4	„	120	„	„	„	„	„	4mal 30	„	„
∠ 5 M 7	„	60	„	„	„	„	„	2mal 30	„	„
∠ 3 M 6	„	90	„	„	„	„	„	3mal 30	„	„
∠ 12 M 6	„	180	„	„	„	„	„	6mal 30	„	„
∠ 12 M 7	„	210	„	„	„	„	„	7mal 30	„	„
∠ 12 M 9	„	270	„	„	„	„	„	9mal 30	„	„

Unter Winkel 12 M 7 und 12 M 9 sind convexe Winkel zu verstehen.

Aufgaben. I. 1) Wie viel Grad betragen die concaven Winkel a) ∠ 12 M 5 b) ∠ 1 M 4 c) ∠ 2 M 6 d) ∠ 9 M 12 e) ∠ 6 M 10 f) ∠ 10 M 11 g) ∠ 8 M 12 h) ∠ 7 M 9 i) ∠ 5 M 8 k) ∠ 9 M 11 l) ∠ 10 M 2 m) ∠ 11 M 3?

2) Wie viel Grad betragen die convexen Winkel a) ∠ 12 M 8 b) ∠ 12 M 10 c) ∠ 12 M 12 d) ∠ 1 M 8 e) ∠ 2 M 10 f) ∠ 10 M 9 g) ∠ 11 M 7 h) ∠ 2 M 9 i) ∠ 3 M 10?

In Fig. 5 ist der Kreis in 30 gleiche Kreisbogen getheilt; auf jeden derselben kommen 12 Gradbogen, weil der ganze Kreis in 360 Gradbogen zerfällt.

Aufgaben. II. 1) Wie viel Grad beträgt jeder der Winkel 30 M 1, 1 M 2, 2 M 3 u. s. w.? 2) Wie viel Grad betragen die concaven Winkel a) ∠ 30 M 2 b) ∠ 30 M 5 c) ∠ 30 M 7 d) ∠ 30 M 9 e) ∠ 30 M 13 f) ∠ 2 M 12 g) ∠ 2 M 16 h) ∠ 1 M 9 i) ∠ 7 M 17 k) ∠ 16 M 25 l) ∠ 29 M 3 m) ∠ 15 M 29? 3) Wie viel Grad betragen die convexen Winkel a) ∠ 30 M 16 b) ∠ 30 M 19 c) ∠ 2 M 25 d) ∠ 8 M 30 e) ∠ 19 M 5 f) ∠ 6 M 24 g) ∠ 3 M 20?

§ 37. Zurückführung der Winkelmessung auf die Messung der Centriwinkel.

Der Schüler, welcher aufmerksam unseren Betrachtungen gefolgt ist, wird sich schon gefragt haben, weshalb wir so viel Mühe auf die Messung der Centriwinkel verwenden, da wir in diesem Capitel doch lehren wollen, wie Winkel im Allgemeinen gemessen werden. Indessen durch eine leichte Ueberlegung wird er finden, daß mit der Messung der Centriwinkel auch die Messung der anderen Winkel gegeben sei, denn es ist nicht schwer, einen jeden Winkel in einen Centriwinkel umzuwandeln, man braucht blos mit einem ganz beliebigen Radius um seinen Scheitelpunkt einen Kreis zu schlagen.

Haben wir doch schon im ersten Briefe fast jeden Winkel zu einem Centriwinkel gemacht, indem wir innerhalb des Winkelraumes einen Kreisbogen beschrieben.

Winkel a oder mit anderer Bezeichnung Winkel DCE ist kein Centriwinkel (Fig. 6). Wir

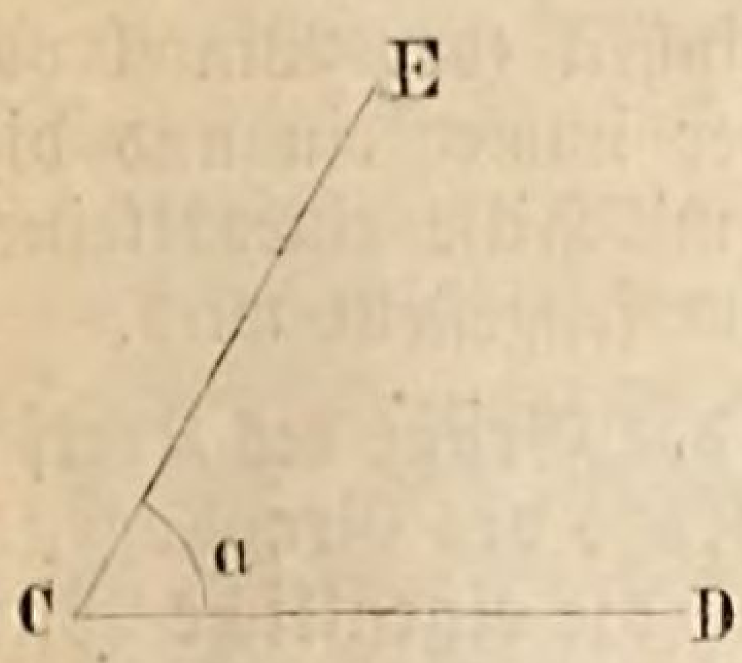


Fig 6.

legen ihn an eine andere Stelle (Fig.. 7) und beschreiben um seinen Scheitelpunkt C mit dem Schenkelstück CA einen Kreis, der den andern Schenkel in B schneidet. Dann ist aus Winkel a der Centriwinkel ACB geworden, den wir auf dieselbe Weise messen können, wie wir vorher die anderen Centriwinkel ge-

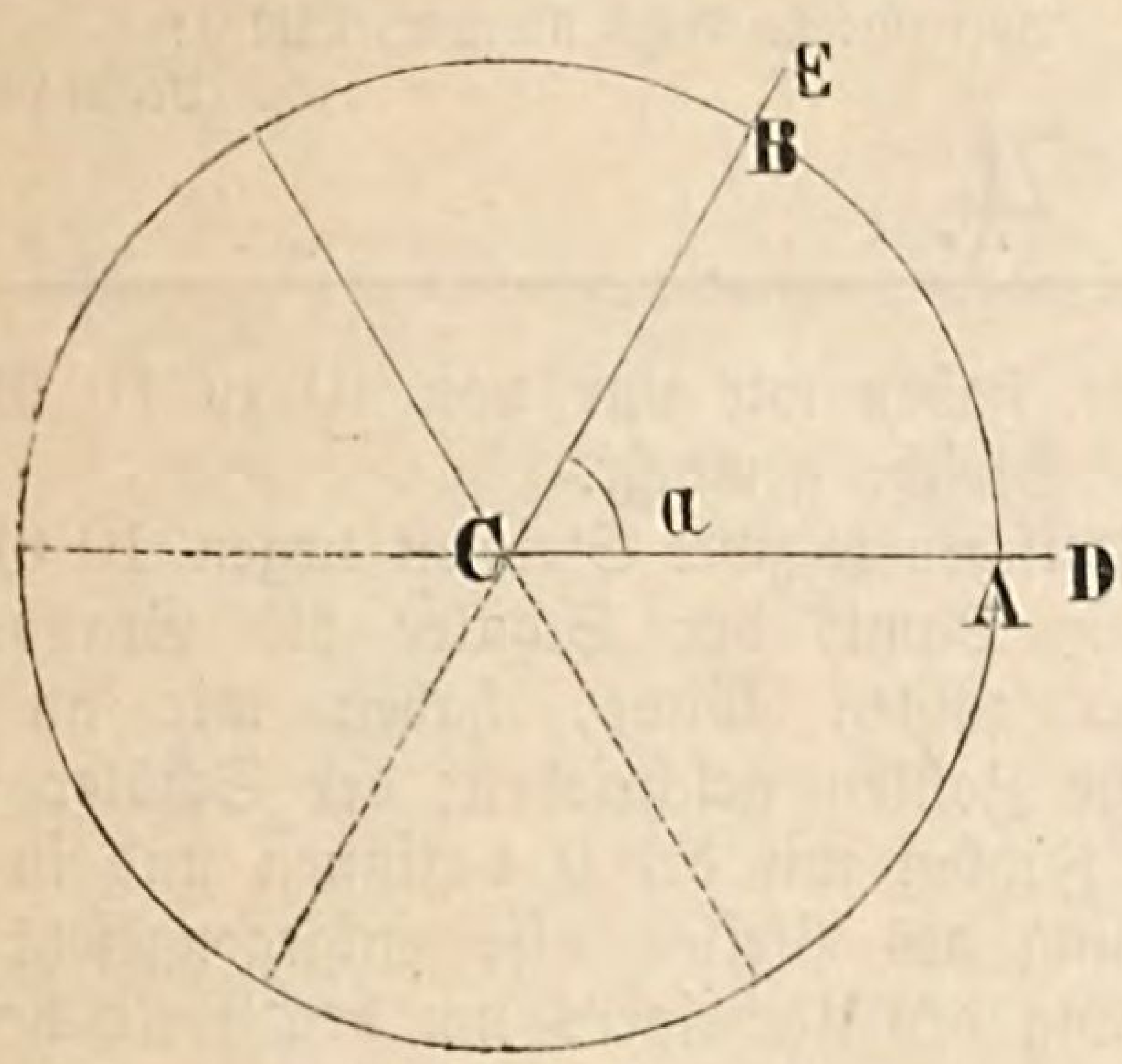


Fig. 7.

messen haben. Wir müssen zu diesem Zwecke den Kreis, welcher durch die Punkte A und B hindurchgeht, in 360 Gradbogen theilen. Wie der Schüler sieht, zerlegen die sechs Radien, welche wir gezeichnet haben, den Kreis in sechs gleiche Theile. Der Bogen $\widehat{AB}$ ist also der sechste Theil seines Kreises; darum fallen auf $\widehat{AB}$ 60 Gradbogen. Winkel a beträgt mithin 60 Grad.

Der Schüler wird jetzt fragen, weshalb wir gerade mit CA einen Kreis geschlagen haben. Er wird wissen wollen, ob sich auch 60 Grad für den Winkel a ergeben, wenn wir seine Größe vermittelst eines andern Kreises bestimmen.

Um auf diese Frage zu antworten, müssen wir noch einen Lehrsatz bringen. Wir wollen zu diesem Zwecke um den Scheitelpunkt C des Winkels a auch mit den Schenkelstücken CA_1 und CA_2 Kreise beschreiben, welche den Schenkel in B_1 und B_2 durchschneiden. (Fig. 8.) Der Schüler sieht dann drei concentrische Kreise, welche den gemeinsamen Mittelpunkt C haben. Von diesen drei Kreisen schließen die beiden Schenkel CD und CE der Reihe nach die Bogen $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{AB}$ und $\widehat{A_2B_2}$ zwischen sich ein. AB ist, wie der Schüler schon weiß, der sechste Theil des mittlern Kreises, und

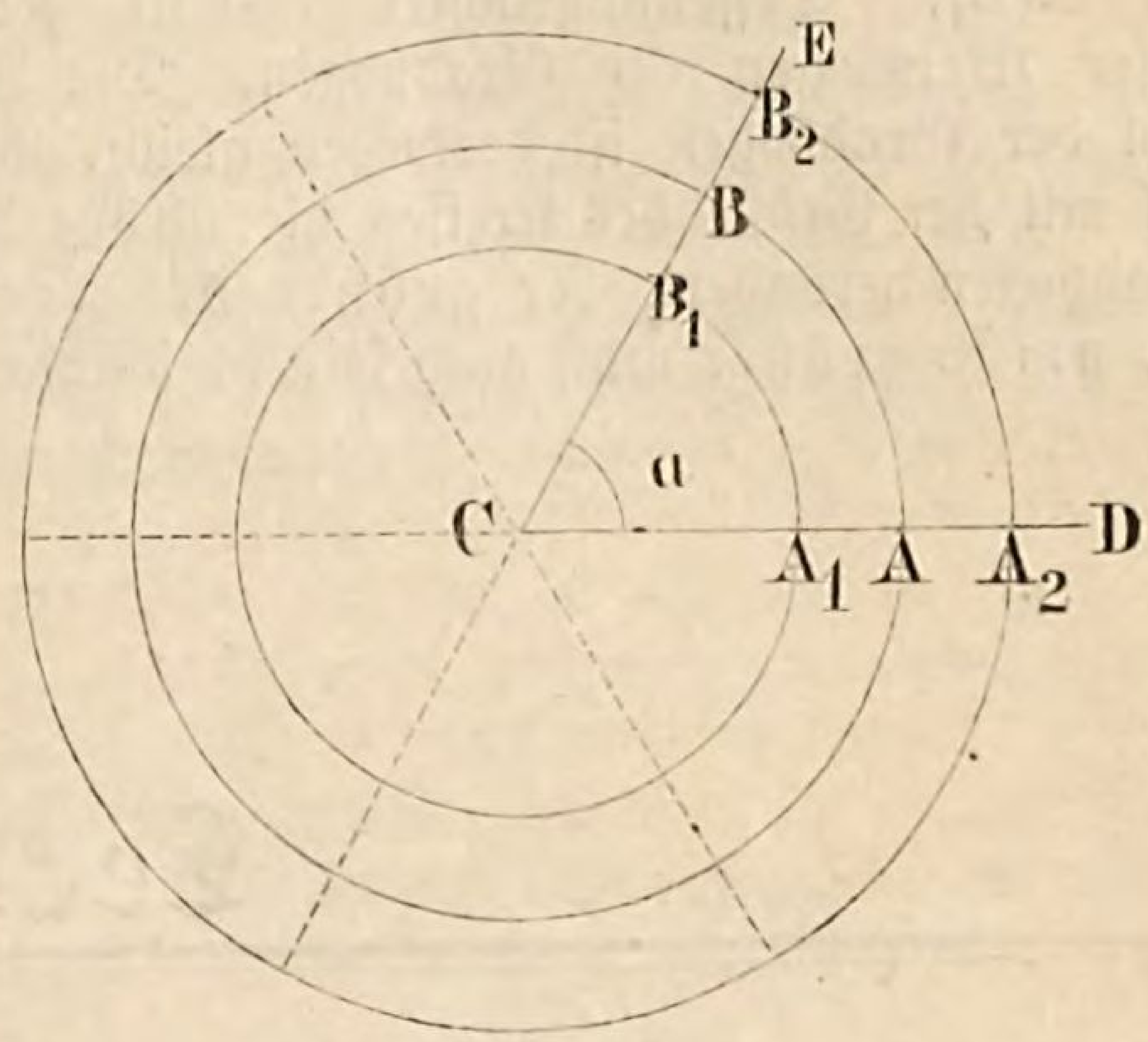


Fig. 8.

wie er mit Hilfe der punktirten Radien bemerkt, bilden die Bogen $\widehat{A_1B_1}$ und $\widehat{A_2B_2}$ auch den sechsten Theil ihrer Kreise. Wäre der Bogen $\widehat{AB}$ nicht der sechste, sondern der achte, hundertste oder dreihundertsechzigste Theil des mittlern Kreises, so müßten auch die Bogen $\widehat{A_1B_1}$ und $\widehat{A_2B_2}$ gleich dem achten, hundertsten oder dreihundertsechzigsten Theile ihrer Kreise sein. Wir haben also den

Lehrsatz II. Wenn zwei gerade Linien, welche vom Kreismittelpunkte ausgehen, von dem Kreise den sechsten, achten, dreihundertsechzigsten Theil zwischen sich fassen, so schließen sie auch von jedem concentrischen Kreise den sechsten, achten, dreihundertsechzigsten Theil zwischen sich ein.

Jetzt können wir die Frage erledigen, um derentwillen wir den Lehrsatz eingeschoben haben. Messen wir den Winkel a nicht mit dem Kreise, dessen Radius CA ist, sondern mit den beiden andern concentrischen Kreisen, so müssen wir diese letzteren in 360 Gradbogen zerlegen. $\widehat{AB}$ ist der sechste Theil des mittlern Kreises (Fig. 8); nach dem vorigen Lehrsatz müssen also auch die Bogen $\widehat{A_1B_1}$ und $\widehat{A_2B_2}$ gleich dem sechsten Theil ihrer Kreise sein. Darum fallen auf $\widehat{A_1B_1}$ und auf $\widehat{A_2B_2}$ 60 Gradbogen. Jeder dieser Bogen zeigt also an, daß der Winkel a 60 Grade beträgt. Wir haben darum den

Lehrsatz III. Es ist gleichgiltig, welchen Kreis wir zur Messung des Winkels

benützen, es wird immer dieselbe Gradanzahl angegeben.

$\widehat{A_2B_2}$ ist größer als $\widehat{AB}$, und $\widehat{AB}$ ist größer als A_1B_1. Dessenungeachtet enthält jeder dieser Kreisbogen 60 Gradbogen. Die Anzahl der Gradbogen ist deswegen gleich, weil sich mit der Größe des Kreises die Größe der Gradbogen verändert. Je größer der Kreis ist, um so größer muß auch sein dreihundertsechzigster Theil, d. h. sein Gradbogen sein. Die eigentliche Winkeleinheit (der Winkel von einem Grade) bleibt aber immer ein und dieselbe, gleichviel ob sie mit Hilfe eines kleinen oder großen Gradbogens festgestellt wird.

Lehrsatz IV. Mit der Größe des Kreises ändert sich zwar die Größe des Gradbogens, unverändert bleibt aber die eigentliche Winkeleinheit, der Winkel von einem Grade.

Unermüdliche Arbeit überwindet Alles!
(Vergil.)

Lection 4.

A. Der Transporteur.

§ 38. Die Messung des Winkels vermittelst eines transportabeln Kreises. Nach Lehrsatz III des vorigen Paragraphen ist es gleichgiltig, welchen Kreis wir zur Winkelmessung verwenden; mit der Größe des Kreises ändert sich nach Lehrsatz IV desselben Paragraphen wohl der Gradbogen, aber nicht die eigentliche Winkeleinheit, der Winkel von einem Grade, deshalb auch nicht die Anzahl der Grade des zu messenden Winkels. Indessen noch sind nicht alle Schwierigkeiten überwunden, welche sich der Messung der Winkel entgegenstellen. Den Kreis, welchen wir zum Messen benützen, müssen wir in 360 Gradbogen eintheilen. Diese Eintheilung ist nur mit guten Instrumenten möglich und immer mit vieler Mühe verknüpft. In Figur 1 sei sie ausgeführt; um nicht zu verwirren, haben wir nur von 10 zu 10 Gradbogen Striche gemacht.

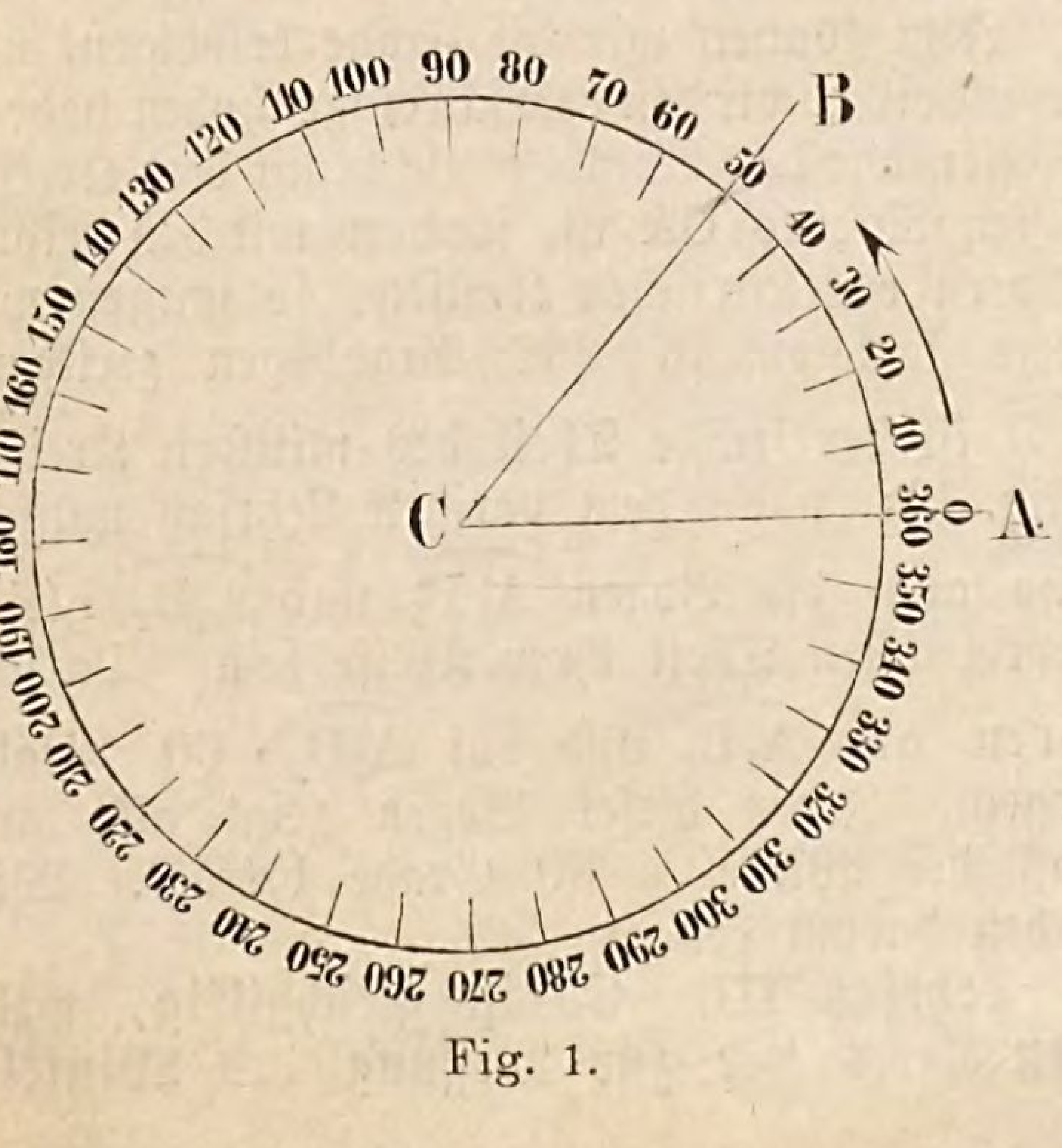


Fig. 1.

Zwischen je zwei Strichen liegen 10 Gradbogen. Damit der Schüler die Gradbogen leichter zählen könne, haben wir an die Striche Zahlen geschrieben; der Schüler muß beim Zählen mit der 0 beginnen und in der Richtung des Pfeiles also entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers um den Kreis herum gehen.

Denken wir uns nun den so eingetheilten Kreis von seiner Stelle verrückbar, also transportabel, so können wir mit ihm jeden Winkel messen. Wir brauchen den transportabeln Kreis nur so zu legen, daß der zu messende Winkel sein Centriwinkel wird.

Es sei uns die Aufgabe gestellt, vermittelst des transportabeln Kreises den Winkel ACB (Fig. 2.) zu messen. Wir müssen zu diesem Zwecke den Winkel ACB zum Centriwinkel machen, also den transportabeln Kreis in eine solche Lage bringen, daß der Mittelpunkt M desselben auf den Scheitelpunkt C des Winkels ACB fällt. (siehe Fig. 1.) Im Uebrigen werden wir den Kreis am zweckmäßigsten so legen, daß wir ohne alle Mühe die Anzahl der Gradbogen ablesen können, welche von den Schenkeln CA und CB eingeschlossen werden. Dies erreichen wir am besten, wenn wir den Nullpunkt der Kreistheilung auf

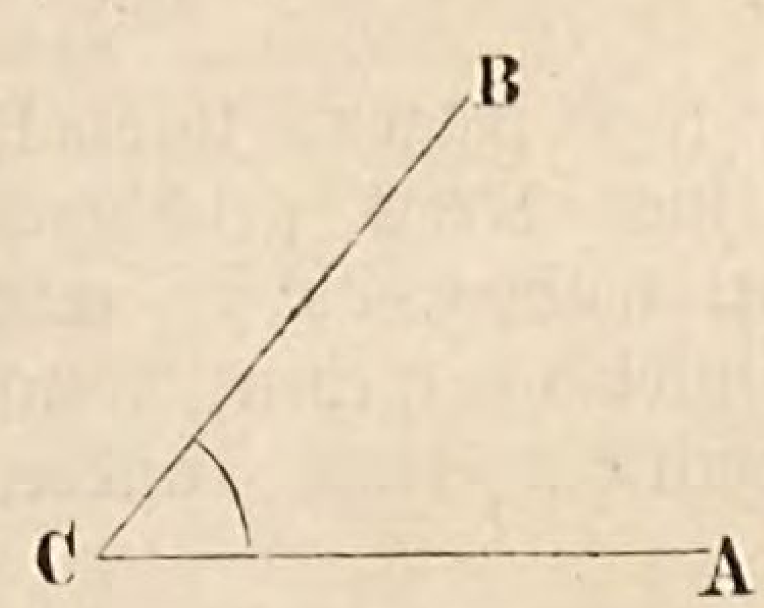


Fig. 2.

den einen Schenkel (hier AC) fallen lassen. Der andere Schenkel CB möge den mit der Ziffer 50 bezeichneten (siehe Fig. 1) Punkt der Kreistheilung durchschneiden. Zwischen den Schenkeln CA und CB des Winkels ACB liegen nun 50 Gradbogen; er beträgt mithin 50 Grad.

§ 39. Der Transporteur. Der ganze Kreis umfaßt 360 Gradbogen, der Halbkreis die Hälfte davon, 180 Gradbogen. Da man gewöhnlich nur die Größe solcher Winkel durch Messen bestimmt, welche kleiner sind als 180 Grad, so genügt zur Winkelmessung ein transportabler Halbkreis, der gewöhnlich Transporteur genannt wird und aus Papier oder Messing gearbeitet ist. Der Schüler wird einwenden, daß ein Halbkreis weder aus Papier noch aus Messing ausgeschnitten werden könne, weil er eine Linie sei, die weder Breite noch Dicke habe. In der That, der Transporteur ist kein geometrischer Halbkreis, sondern sein wesentliches Stück ist eine Papier- oder Messingscheibe, ABCD (Fig. 3), die von

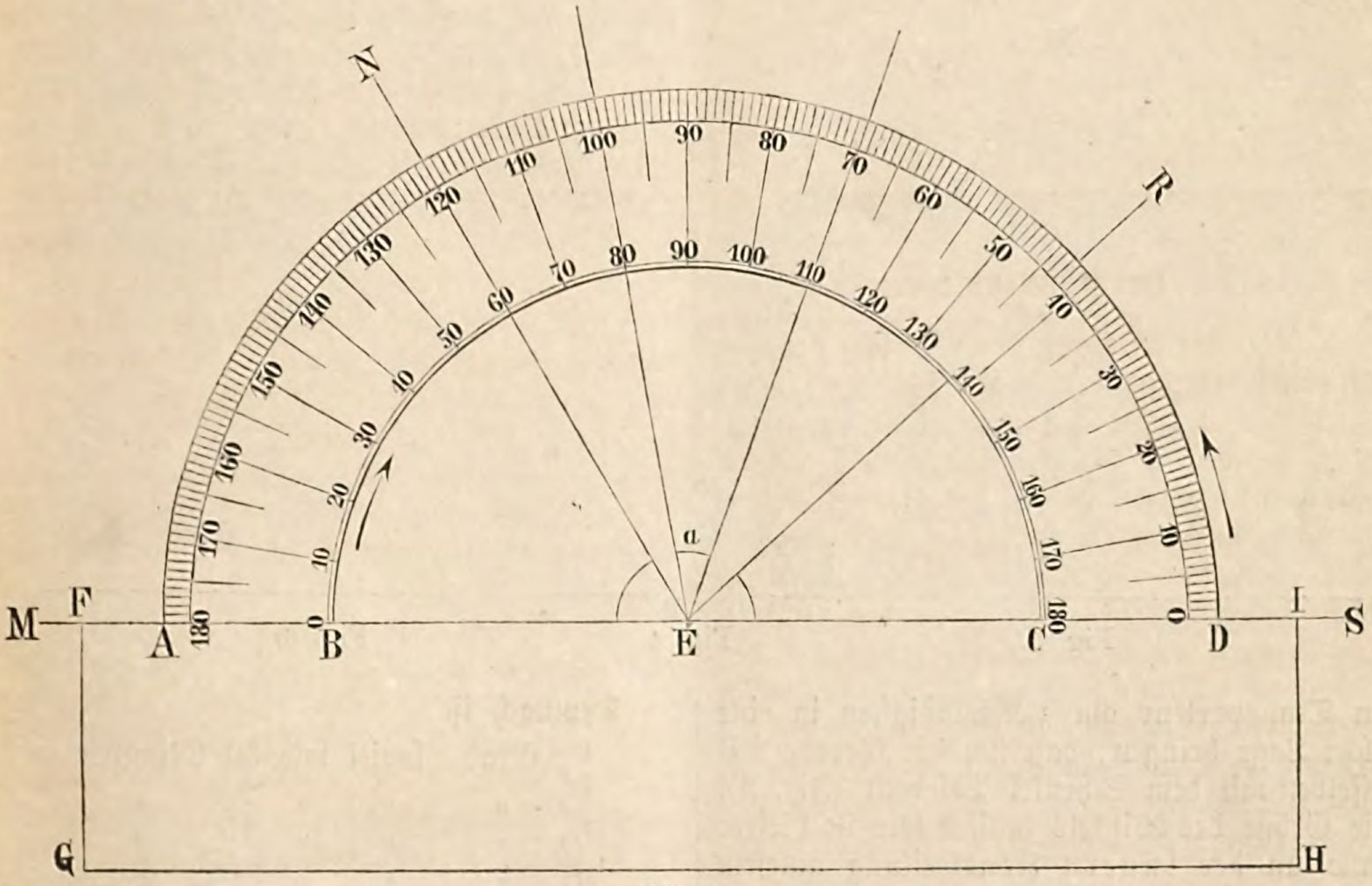


Fig. 3.

zwei Halbkreisen begrenzt wird; und zwar sind diese Halbkreise die Hälften zweier concentrischen Kreise, welche den gemeinsamen Mittelpunkt E haben. Auf der Scheibe sind die Gradbogen durch Striche angedeutet, deren Verlängerung den Mittelpunkt E treffen würde. 10 Gradbogen werden von zwei längeren Strichen eingeschlossen; mitten zwischen denselben sieht der Schüler einen weniger langen Strich. Die ganz kurzen Striche theilen die einzelnen Gradbogen von einander ab. Die Scheibe ABCD wird ausgeschnitten. Mit ihr verbunden ist das rechtwinklige Viereck FGHI, der Einschnitt E bezeichnet den Mittelpunkt der Halbkreise. Bei der Verwendung des Transporteurs merke sich der Schüler die drei Hauptregeln:

1. **Der zu messende Winkel muß Centriwinkel werden;** d a r u m i s t d e r T r a n s p o r t e u r s o z u l e g e n , d a ß d e r **Einschnitt** E, w e l c h e r d e n K r e i s m i t t e l p u n k t d a r s t e l l t , a u f d e n **Scheitelpunkt** d e s z u m e s s e n d e n W i n k e l s f ä l l t.

2. Die **Schenkel** des zu messenden Winkels müssen so lang gezeichnet, resp. so weit verlängert werden, daß sie über die halbkreisförmige Scheibe **hinausreichen.**

3. Die Anzahl **der Gradbogen** zwischen den beiden Schenkeln giebt **die Zahl der Grade** des zu messenden **Winkels** an.

Der Schüler sieht an der Außen- und Innenseite der halbkreisförmigen Scheibe in der Richtung der Pfeile an den größeren Strichen die Ziffern 10, 20, 30, 40, ... 180.

Diese Ziffern sollen dazu dienen, ihm das Zählen der Gradbogen zwischen den Schen-

keln des zu messenden Winkels zu erleichtern. Wir wollen annehmen, es solle der Winkel a Fig. 4 gemessen werden, so muß der Schüler zunächst den Einschnitt E des Transporteurs auf den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels bringen. Der eine Schenkel möge die Ziffer 70, der andere die Ziffer 100 der Außenseite durchschneiden (Fig. 3); dann liegen zwischen den Schenkeln des Winkels a 30 Gradbogen, denn es ist 100 — 70 = 30. Bequemer kann sich der Schüler die Messung der Winkel noch einrichten, wenn er den Transporteur so legt, daß die Gerade EB oder EC desselben mit einem Schenkel des zu messenden Winkels zusammenfällt; man kann dann entweder auf der Außen- oder auf der Innenseite der halbkreisförmigen Scheibe die Zahl der Grade unmittelbar ablesen.

Nehmen wir an, wir sollten den Winkel MTN (Fig. 5) messen. Wir werden hierbei

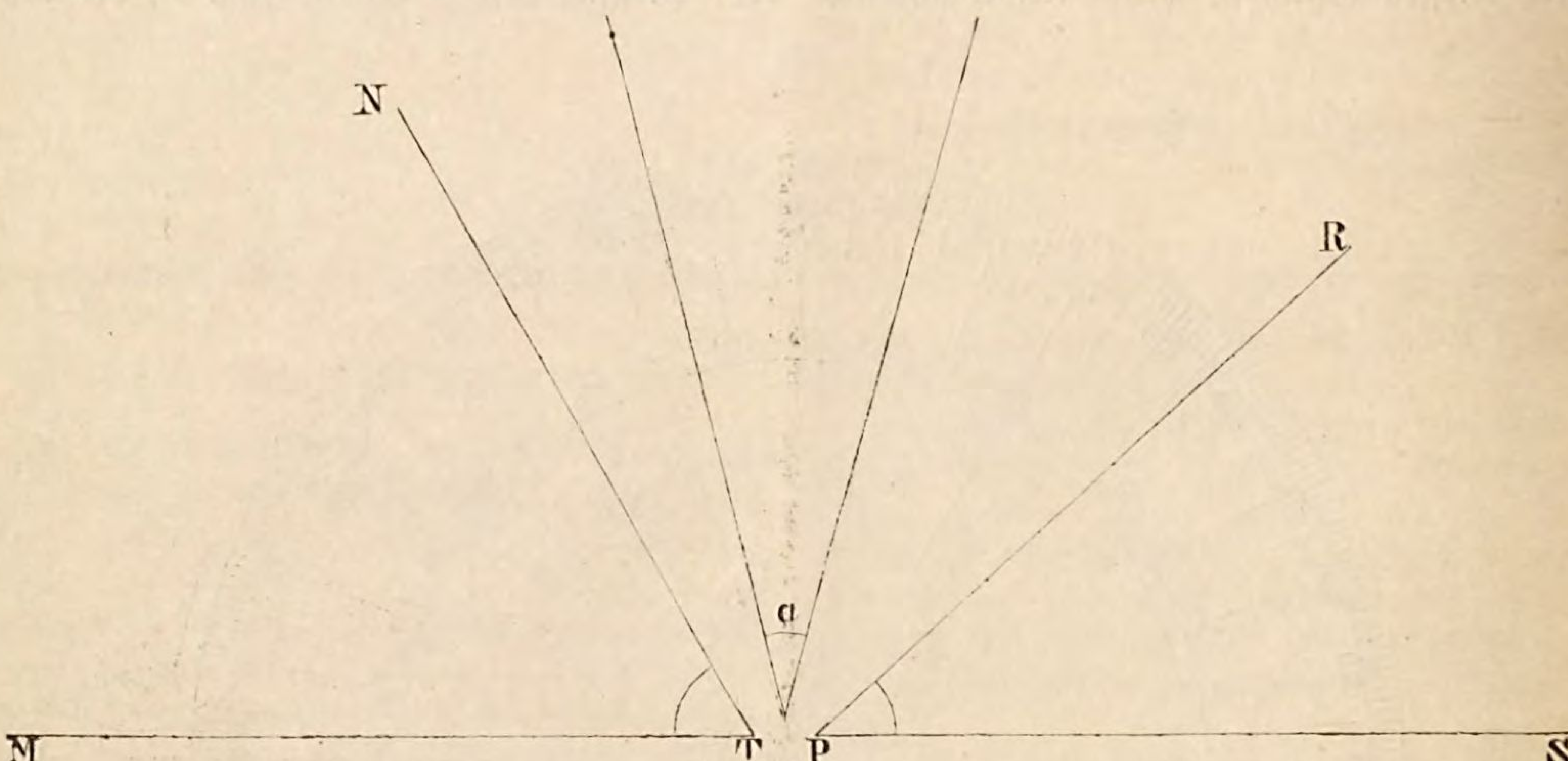


Fig. 5. Fig. 4. Fig. 6.

den Transporteur am zweckmäßigsten in eine solche Lage bringen, daß sich die Gerade EB desselben mit dem Schenkel TM deckt (Fig. 3). Die Größe des Winkels müssen wir in diesem Falle an der innern Kreistheilung ablesen. Da der Schenkel TN mit dem Striche zusammenfällt, welcher mit 60 bezeichnet ist, beträgt der Winkel MTN 60 Grad.

§ 40. Eintheilung der Grade in Minuten und der Minuten in Secunden. Um den Winkel SPR (Fig. 6) zu messen, werden wir am besten die Gerade EC des Transporteurs auf den Schenkel SP legen. Die Größe des Winkels wird dann durch die äußere Kreistheilung angegeben. Wie der Schüler sieht, geht der zweite Schenkel PR zwischen zwei Theilstrichen hindurch, welche den Ziffern 42 und 43 entsprechen. Der Winkel SPR ist also größer als 42 Grad und kleiner als 43 Grad, d. h. er beträgt 42 Grad nebst einem Bruchtheil.

Um statt des Gradbruchtheiles ganze Zahlen zu erhalten, ist **der Grad** noch **in 60 Minuten** und **die Minute in 60 Secunden** eingetheilt.

Demnach ist

$^1/_2$ Grad soviel wie 30 Minuten
$^1/_3$ „ „ „ 20 „
$^1/_4$ „ „ „ 15 „
$^1/_{12}$ „ „ „ 5 „
$^1/_5$ Minute „ „ 12 Secunden
$^1/_6$ „ „ „ 10 „ u. s. w.

Für die Wörter Grad, Minute, Secunde hat man mathematische Zeichen eingeführt.

18^0 bedeutet 18 Grad;
$25'$ „ 25 Minuten;
$13''$ „ 13 Secunden.

$\angle\, d = 12^0\ 17'\ 26''$ heißt mit anderen Worten: Winkel d ist gleich 12 Grad, 17 Minuten, 26 Secunden.

Aufgaben. I. Was bedeuten die Gleichungen:

$$\angle\, a = 30^0\ 45'\ 17''$$
$$\angle\, b = 97^0\ 44'\ 59''$$
$$\angle\, c = 125^0\ 58'\ 27''$$
$$\angle\, d = 53^0\ 3'\ 6''?$$

Mit dem gewöhnlichen Transporteur kann man nur die ganze Anzahl der Grade genau

bestimmen, den überschüssigen Bruchtheil eines Grades oder die Zahl der überschüssigen Minuten muß man abschätzen. Wir sehen z. B. in Fig. 3, daß der Schenkel ER mitten zwischen dem 42sten und 43sten Gradstriche hindurchgeht. Daraus werden wir schließen, daß der Winkel SER gleich $42^1/_2$ Grad oder 42 Grad und 30 Minuten sei.

Diesem Briefe liegt ein Transporteur aus Carton bei, einen aus Messing gearbeiteten Transporteur wird der Schüler in jedem bessern Reißzeuge finden. Die anderen Instrumente, welche zur Messung der Winkel dienen, werden wir erst im zweiten Cursus beschreiben. Wir wollen nur bemerken, daß man mit den besten neueren Instrumenten selbst Bruchtheile von Secunden angeben kann.

Aufgaben. II. Der Schüler messe die folgenden sechs[1]) Winkel.

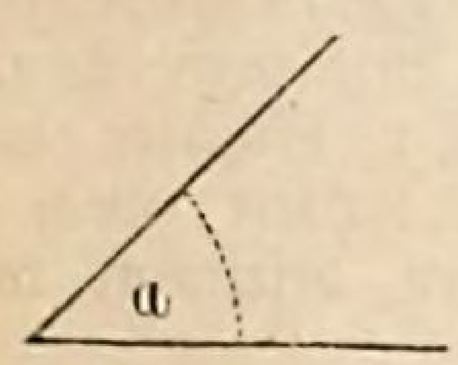


Fig. 7.

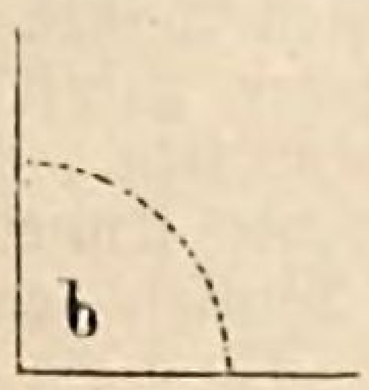


Fig. 8.

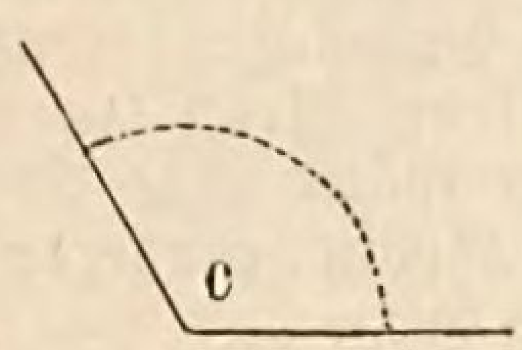


Fig. 9.



Fig. 10.

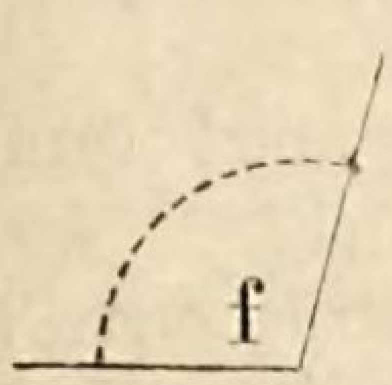


Fig. 11.

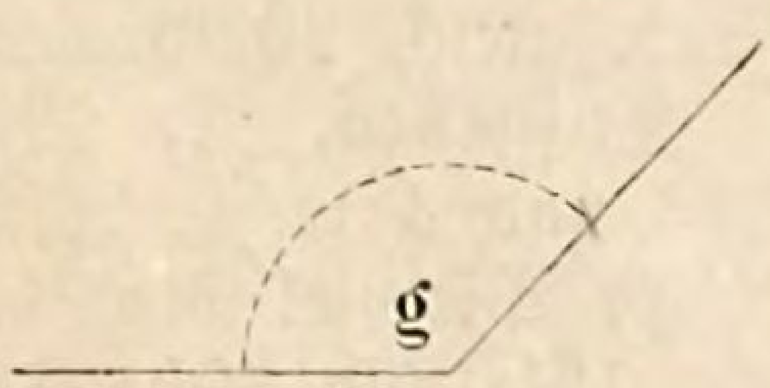


Fig. 12.

Es genügt aber nicht, daß der Schüler diese sechs Aufgaben behandle, er suche vielmehr in der Messung der Winkel eine recht große Gewandtheit zu erlangen. Er muß bei Winkeln, die er sich selbst zeichnet, die Anzahl der Grade erst abschätzen und später durch Messung mit dem Transporteur bestimmen. Diese Uebungen muß er fortsetzen, bis er sich eine ziemliche Sicherheit in der Gradschätzung erworben hat.

§ 41. Das Zeichnen der Winkel von bestimmter Größe. Der Transporteur kann nicht blos benützt werden, um Winkel zu messen; man kann ihn auch gebrauchen, um Winkel von einer bestimmten Gradanzahl zu zeichnen.

Um etwa einen Winkel zu zeichnen, welcher 55 Grad beträgt, ziehen wir uns mit dem Lineal eine gerade Linie MN (Fig. 13) und wählen einen Punkt derselben, etwa P,

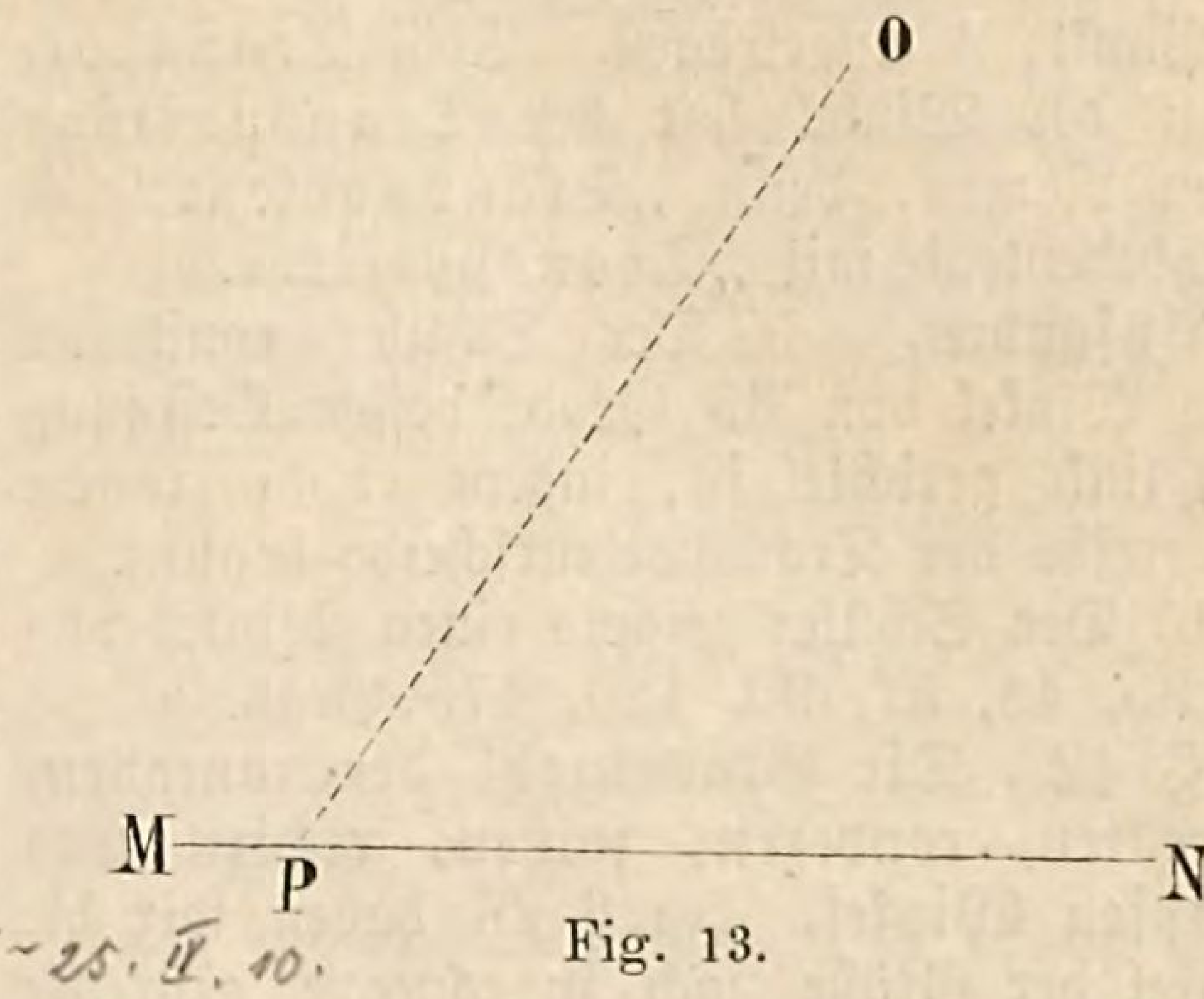


Fig. 13.

zum Scheitelpunkt des Winkels, welchen wir construiren wollen. Dann legen wir den Transporteur so auf die Gerade MN, daß der Einschnitt E auf den Punkt P und die Gerade EC (Fig. 3) auf PN fällt, und machen bei dem 55sten Gradstriche der äußeren Kreistheilung des Transporteurs (mit einer Feder oder einem Bleistift) einen Punkt O. (Fig. 13.) Verbinden wir dann die Punkte O und P durch eine Gerade, so erhalten wir den Winkel OPN (Fig. 13), welcher 55 Grad beträgt. Man sagt in diesem Falle, man habe den Winkel OPN = 55° an MN im Punkte P angetragen.

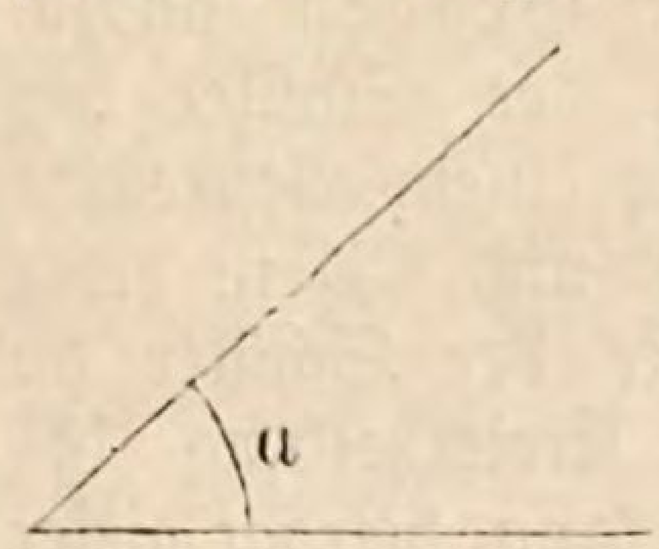


Fig. 14.

Können wir einen Winkel von bestimmter Größe zeichnen, so können wir auch einen Winkel transportiren, d. h. von einem Orte an einen bestimmten andern bringen. Es sei uns die Aufgabe gestellt, den Ort des Winkels a (Fig. 14) so zu verändern, daß A (Fig. 15) sein Scheitelpunkt und AB einer seiner Schenkel wird. Wir werden dazu den Winkel a messen; er möge 42 Grad betragen. Darauf werden wir den Winkel CAB = 42 Grad in der angegebenen

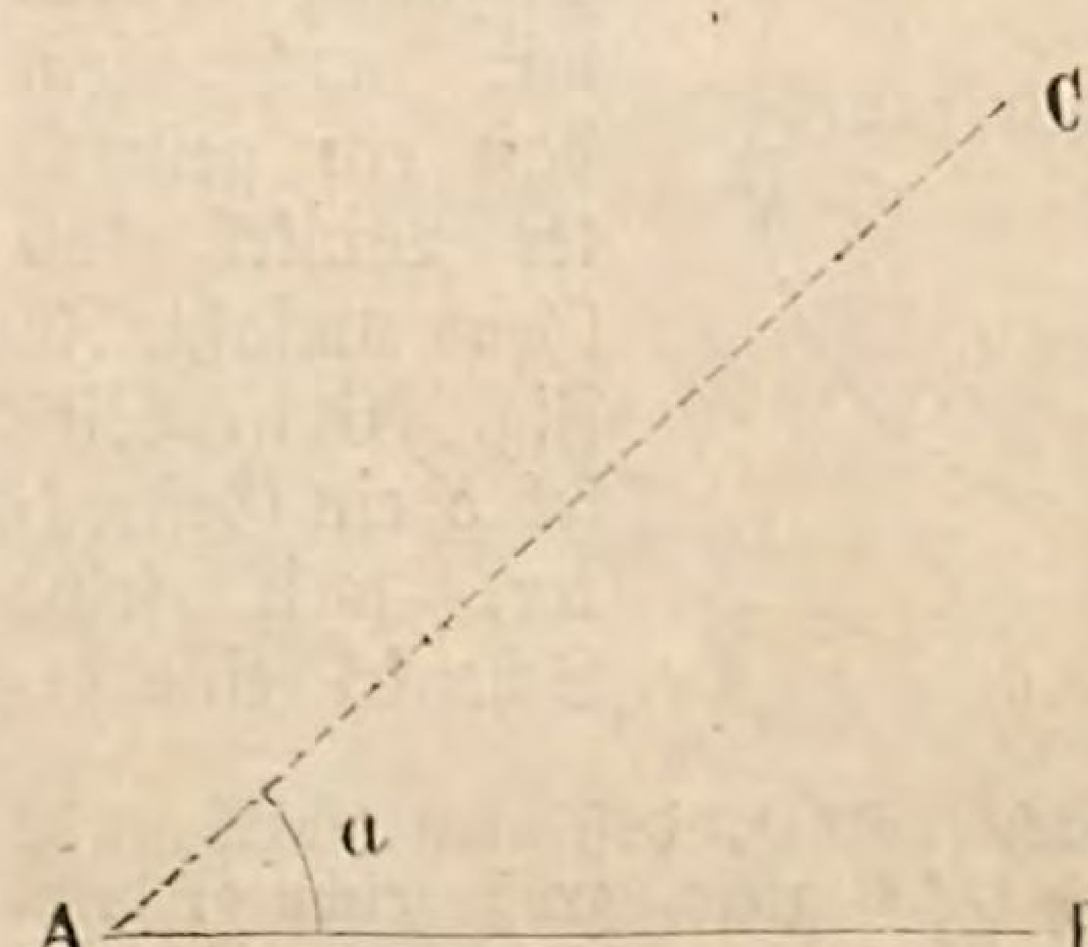


Fig. 15.

---

[1]) Der Schüler muß bei den sechs Winkeln wenigstens einen Schenkel verlängern, um sie vermittelst des Transporteurs messen zu können.

Weise zeichnen. Man sagt in diesem Falle, man habe den Winkel a transportirt, oder genauer: man habe den ∠ CAB[1]) = ∠ a an AB im Punkte A angetragen. Vom Transportiren der Winkel hat der Transporteur seinen Namen, denn „Transporteur" ist gleichbedeutend mit „Transportirer."

Aufgaben. a) Der Schüler construire einen Winkel von 35 Grad, dessen Oeffnung nach links gerichtet ist, indem er die innere Zifferreihe der Transporteurscheibe benutzt.

b) Der Schüler zeichne einen Winkel von 25, 35, 48, 57, 90, 120, 175 Grad. 26.IV.10

§ 42. Die Gradanzahl der concaven, gestreckten, convexen, spitzen, rechten und stumpfen Winkel. In § 26 haben wir die Winkel der Größe nach in concave, gestreckte und convexe, und die concaven in spitze, rechte und stumpfe eingetheilt. Es erhebt sich jetzt die Frage, ob wir diese Winkelclassen nicht noch näher dadurch bestimmen können, daß wir ihre Gradanzahl angeben oder sie innerhalb bestimmter Grad-Grenzen einschließen. In der That, wenn wir wissen, wie viel Grad ein gestreckter Winkel beträgt, so können wir auch über die Gradanzahl der übrigen Winkelclassen Angaben machen, denn wie wir schon in § 26 erörterten, sind wir bei der Definition derselben vom gestreckten Winkel ausgegangen.

Es ist nun nicht schwer, die Größe des gestreckten Winkels in Graden auszudrücken. In Fig. 3 sieht der Schüler den Winkel BEC, welcher gleich einem Gestreckten ist, weil seine Schenkel BE und CE in einer geraden Linie liegen. Wie der Schüler an der äußern und innern Kreistheilung der Transporteurscheibe ablesen kann, beträgt dieser Winkel 180 Grad. Aber auch unabhängig von der Transporteurzeichnung wollen wir nachweisen, daß ein gestreckter Winkel 180 Grad umfaßt. In Fig. 16 ist Winkel c ein Gestreckter, weil seine Schenkel eine gerade Linie bilden; um den Scheitelpunkt C des Winkels c ist, wie der Schüler sieht, ein Kreis geschlagen, welcher die beiden Schenkel in A und B schneidet. Die Gerade ACB ist ein Durchmesser dieses Kreises, sie theilt ihn (§ 29b Lehrs. V.) in die beiden Hälften oder Halbkreise $\overset{\frown}{ADB}$ und $\overset{\frown}{AEB}$. Zum Centriwinkel c gehört als Bogen der eine Halbkreis $\overset{\frown}{ADB}$. Da nun der ganze Kreis 360 Gradbogen umfaßt, so müssen auf den Halbkreis $\overset{\frown}{ADB}$ 180 Gradbogen fallen. Der zu $\overset{\frown}{ADB}$ gehörige Centriwinkel c muß mithin 180 Grad betragen. Also:

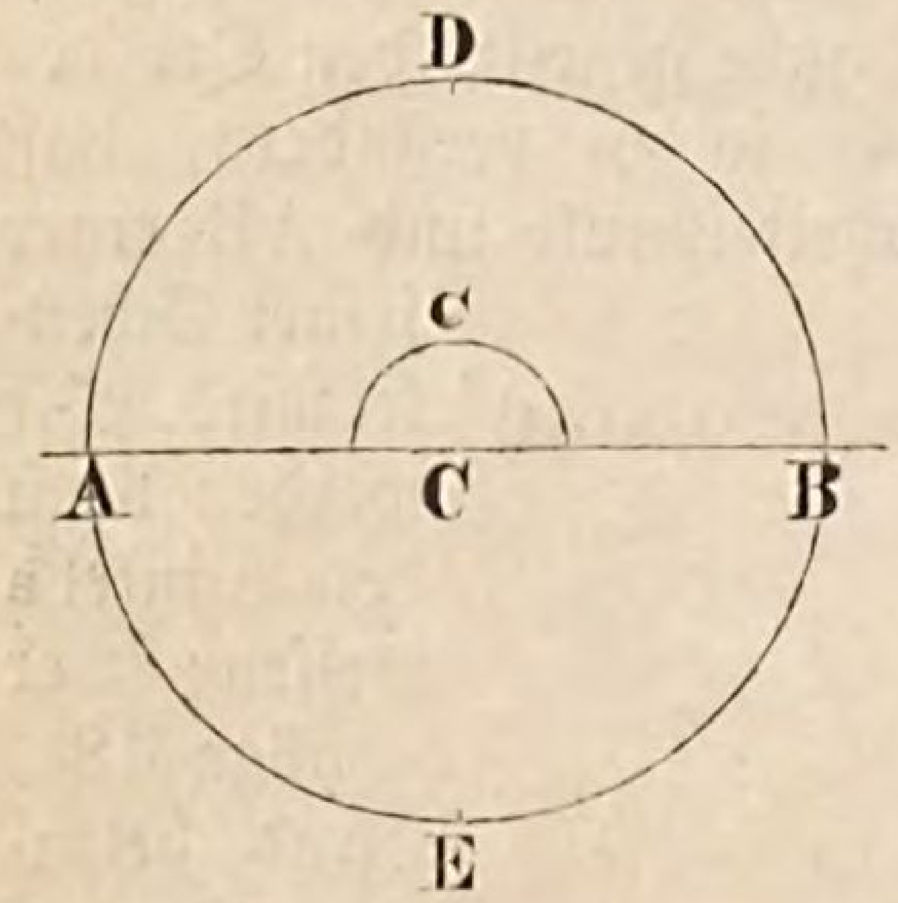


Fig. 16.

Ein gestreckter Winkel beträgt 180 Grad.

Die concaven Winkel sind kleiner, die convexen sind größer als ein Gestreckter, daher der Satz:

Ein concaver Winkel beträgt weniger, ein convexer mehr als 180 Grad.

Da wir mit dem Transporteur nur Winkel bis zu 180 Grad messen können, ist es unmöglich, die Gradanzahl convexer Winkel mit dem Transporteur direct zu ermitteln. Der Schüler wird aber später eine Methode kennen lernen, nach der die Größe convexer Winkel genau bestimmt werden kann.

Der rechte Winkel ist die Hälfte eines Gestreckten, also ist er gleich der Hälfte von 180 Grad, gleich 90 Grad.

Aufgaben. 1) Wie viel Grad betragen 2, 3 und 4 rechte Winkel?

2) Wie viel Grad beträgt der 3te, 5te, 6te, 9te, 15te und 30ste Theil eines rechten und eines gestreckten Winkels?

Der rechte Winkel beträgt 90 Grad.

Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein Rechter, daher der Satz:

Ein spitzer Winkel beträgt weniger als 90 Grad.

Ein stumpfer Winkel ist größer als ein Rechter und kleiner als ein Gestreckter; also:

Ein stumpfer Winkel beträgt mehr als 90 und weniger als 180 Grad.

B. Die Addition geometrischer Gebilde.

§ 43. Die Addition der geraden Linie und der Winkel. Ungleichartige Größen können nicht zu einander addirt werden. Man kann 4 menschliche Tugenden nicht mit 9 Elephantenzähnen und 7 Mausergewehre nicht mit 6 gebackenen Pflaumen zusammenzählen, man müßte denn die Mausergewehre und die Pflaumen als Gegenstände überhaupt auffassen und sie dadurch wieder gleichartig machen. Dagegen kann man **alle gleichartigen**

[1]) Es ist nicht nöthig, daß man die Schenkel der Winkel a und CAB gleich groß zeichnet, denn nach § 18 hat die Länge der gezeichneten Schenkel auf die Größe des Winkels keinen Einfluß.

Größen **addiren**, 3 Schock zu 10 Schock, 5 Teller zu 8 Tellern, 20 Birnen zu 70 Birnen. Auch gleichartige geometrische Gebilde kann man zusammenfügen, oder, anders ausgedrückt, addiren. Eine Gerade kann zu einer andern, ein Winkel zu einem andern addirt werden.

Es sei uns die Aufgabe gestellt, die beiden **Geraden** a und b (Fig. 17 und 18) zu **addiren** oder mit anderen Worten die Summe von a



Fig. 17.

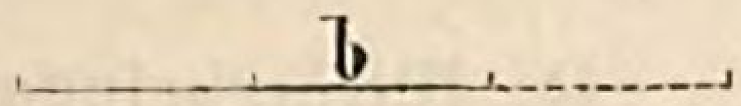


Fig. 18.

und b zu finden. Wir werden dann a und b messen; a möge 1 Centimeter, b 2 Centimeter lang sein. Wenn wir 1 Centimeter und 2 Centimeter addiren, erhalten wir als Summe 3 Centimeter, in Zeichen

$$1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$$

Construiren wir also eine Gerade c (Fig. 19),



Fig. 19.

welche 3 Centimeter lang ist, so haben wir

$$a + b = c$$

d. h. die Gerade c ist so groß wie die Geraden a und b zusammen, oder mit anderen Worten: die Gerade c ist die Summe der Geraden a und b.

Bequemer kann man die Summe von a und b finden, wenn man a um die Länge von b (um zwei Centimeter) oder b um die Länge von a (um einen Centimeter) verlängert. Bei Fig. 18 ist die Verlängerung durch eine punktirte Linie bezeichnet.

Hiernach wird dem Schüler die **Addition der Winkel** nicht schwer fallen. Nehmen wir an, wir sollten die beiden Winkel a und b (Fig. 20 und 21) addiren, oder, anders ausgedrückt, wir sollten die Summe der Winkel a und b suchen. Wir werden dann mit dem Transporteur die Winkel a und b messen.

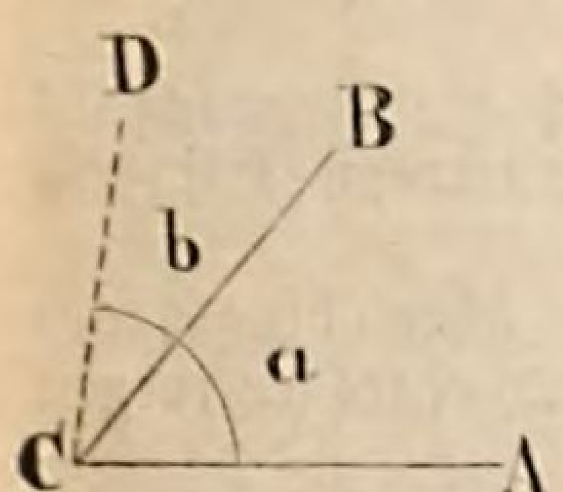


Fig. 20.

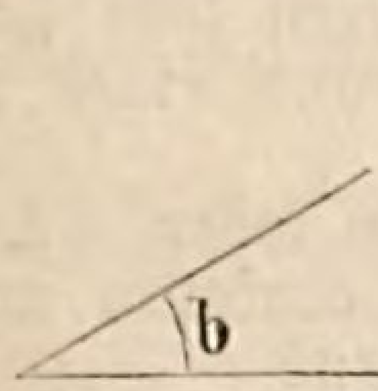


Fig. 21.

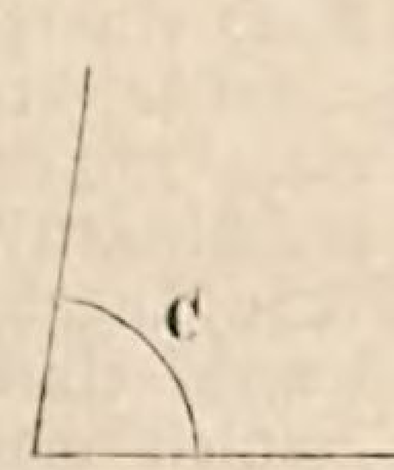


Fig. 22.

Winkel a möge 50 und Winkel b 30 Grad betragen. Es sind

$$50^0 + 30^0 = 80^0$$

d. h. 80 Grad ist die Summe von 50 Grad und 30 Grad.

Zeichnen wir uns also nach § 41 einen Winkel von 80 Grad, den wir c (Fig. 22) nennen wollen, so ist

$$\angle a + \angle b = \angle c$$

d. h. der Winkel c ist so groß wie Winkel a und Winkel b zusammen, oder mit anderen Worten: Winkel c ist die Summe von Winkel a und Winkel b.

Wir können die Summe der beiden Winkel auch finden, wenn wir gemäß § 41 $\angle$ BCD = $\angle$ b an den Schenkel BC des Winkels a im Scheitelpunkt C antragen. Es ist dann:

$$\angle a + \angle b = \angle ACD$$

in Worten: Winkel ACD ist die Summe der beiden Winkel a und b.

In Fig. 23 ist Winkel EFG die Summe der beiden Winkel EFH und HFG, in Zeichen:

$$\angle EFH + \angle HFG = \angle EFG$$

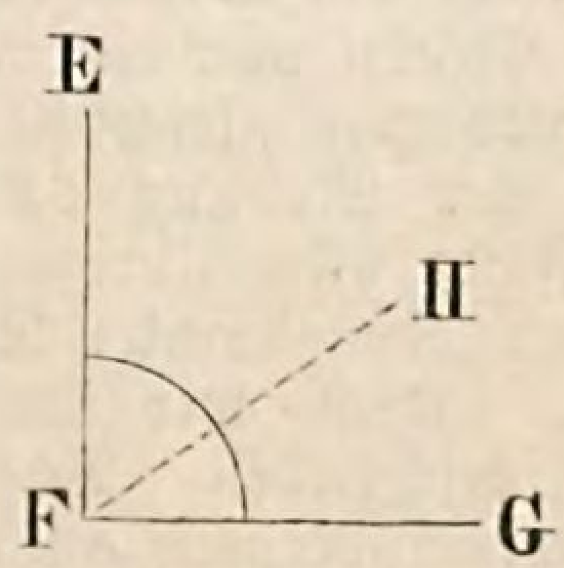


Fig. 23.

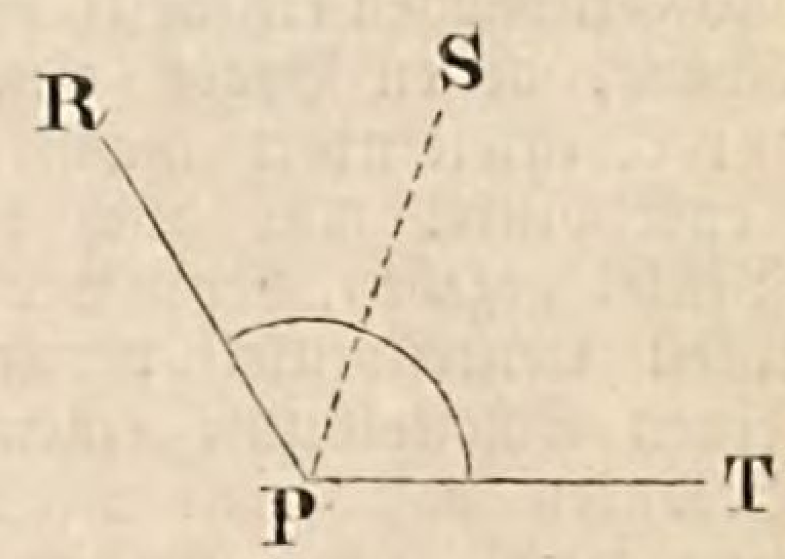


Fig. 24.

In Fig. 24 ist Winkel RPT die Summe der beiden Winkel RPS und SPT, in Zeichen:

$$\angle RPS + \angle SPT = \angle RPT.$$

C. Recapitulation.

(Vergl. Brief 1, S. 31.)

Nachdem wir in den beiden ersten Abschnitten der **dritten Lection** die Auflösung der Aufgaben und die Beantwortung der Wiederholungsfragen gebracht hatten, gingen wir zur Messung derjenigen geometrischen Gebilde über, welche wir schon im ersten Briefe betrachtet haben. Zunächst behandelten wir die Messung der Linien. Wir setzten auseinander, was man unter einer Längeneinheit oder einem Maßstabe verstehe, und erörterten, daß die Längeneinheit im Laufe der Zeit verschiedene Wandelungen erfahren habe. Wir

schilderten, daß in den frühesten Zeiten wahrscheinlich Jedermann seine eigenen Gliedmaßen zum Messen benützte, daß Handel und Verkehr aber bald das Bedürfniß nach einem einheitlichen Maßstabe innerhalb einzelner Staaten und dann innerhalb größerer Staatengruppen hervorrief. Im Zusammenhange damit beschrieben wir die Entstehung des Metermaßes, welches jetzt bei den meisten Völkern Europas, seit dem Jahre 1870 auch in Deutschland eingeführt ist. Wir besprachen sodann, daß man das Meter, um größere und kleinere Maße zu gewinnen, mit der Zahl 10 vervielfacht und getheilt habe, und beleuchteten die Vorzüge, welche die Zehntheilung gegenüber der bisher gebräuchlichen Zwölftheilung hat. Nachdem wir darauf noch einige Aufgaben gebracht hatten, beschrieben wir die Meßkette, deren sich die Geometer beim Feldmessen bedienen.

Nachdem wir in dieser Weise die Messung der Linien behandelt hatten, wandten wir uns zur Messung der Winkel, und zwar betrachteten wir zunächst die Centriwinkel. Die Bewegung des Uhrzeigers lehrte uns, daß die Größe der Centriwinkel der Größe der zugehörigen Kreisbogen entspricht, daß zu gleichen Centriwinkeln gleiche Kreisbogen und zu ungleichen Centriwinkeln ungleiche Kreisbogen gehören. Diese Sätze führten uns zu der Erkenntniß, daß wir die Größe der Centriwinkel mit Hilfe ihrer Bogen messen können. Wir bestimmten den Begriff der Winkeleinheit und machten uns nun an die Messung der Centriwinkel, indem wir erst einen Centriwinkel, dessen Bogen der zwölfte Theil seines Kreises war, zur Winkeleinheit wählten und dann zu anderen Winkeleinheiten übergingen. Im Anschluß daran besprachen wir, daß man gewöhnlich den Kreis in 360 Gradbogen eintheilt und den Winkel von einem Grade, dessen Bogen einem Gradbogen gleich ist, zur Winkeleinheit macht. Mit der Messung der Centriwinkel war auch die Messung aller übrigen Winkel gegeben, denn wir konnten jeden Winkel in einen Centriwinkel verwandeln, indem wir um seinen Scheitelpunkt einen Kreis beschrieben. Das Bedenken, daß Kreise mit verschiedenen Radien auch eine verschiedene Gradanzahl ergeben, beseitigten wir, indem wir nachwiesen, daß sich mit der Größe des Kreises zwar die Größe der Gradbogen, aber nicht die Größe der eigentlichen Winkeleinheit, des Winkels von einem Grade, ändere.

In der **vierten Lection** beschrieben wir erst den transportabeln Kreis und dann den Transporteur, ein Instrument, welches zum Messen, Transportiren und Construiren der Winkel dient, und setzten genau auseinander, welchen Regeln man beim Benützen des Transporteurs zu folgen habe. Wir erörterten dann die Eintheilung der Grade in Minuten und Secunden, aber wir hielten uns bei dieser Erörterung nicht lange auf, weil die Eintheilung der Grade erst im zweiten Cursus für uns wichtig wird. Hiernach bestimmten wir die Gradanzahl der concaven, gestreckten, convexen, spitzen, rechten und stumpfen Winkel, und zwar gingen wir, wie bei unseren früheren Untersuchungen der Winkelgröße, vom gestreckten Winkel aus. Wir fanden, daß der gestreckte Winkel 180 Grad und der rechte Winkel 90 Grad beträgt. Mit Hilfe dieser Zahlen konnten wir die Zahl der Grade aller übrigen Winkelclassen in bestimmte Grenzen einschließen.

Nach diesen Betrachtungen verließen wir das Gebiet der Winkelmessung, um im Abschnitt B der vierten Lection noch einige Bemerkungen über das Addiren zu machen, auf welche wir uns im dritten Briefe stützen werden. Wir zeigten zunächst, daß nur gleichartige Größen der Addition unterworfen werden können, und addirten dann gerade Linien und Winkel zu einander. Damit schlossen wir den Abschnitt B der zweiten Lection.

D. Wiederholungsfragen.

1) Was versteht man unter einer Längeneinheit oder einem Maßstabe?
2) Welcher Theil eines Meridianquadranten ist ein Meter?
3) Was ist ein Decimeter, Centimeter und Millimeter?
4) Wie groß ist ein Dekameter, Hektometer und Kilometer?
5) Welche Namen hat die deutsche Reichsregierung für „Meter", „Centimeter", „Millimeter" und „Dekameter" eingeführt?
6) Gleich wie viel Kilometer ist eine Meile?
7) Wovon hängt die Größe eines Centriwinkels ab?
8) Was versteht man unter einer Winkeleinheit?
9) Was ist ein Gradbogen?
10) Wie viel Grad beträgt ein Centriwinkel, dessen Kreisbogen gleich 4, 10, 20, 100 Gradbogen ist?
11) Auf welche Weise verwandelt man einen gewöhnlichen Winkel in einen Centriwinkel?
12) Ist die Größe eines Gradbogens immer dieselbe?
13) Ist die Größe des Winkels von einem Grade veränderlich?
14) Welches ist der Hauptbestandtheil eines Transporteurs?
15) Welche drei Regeln hat man zu beachten, wenn man vermittelst des Transporteurs Winkel mißt?
16) Beim Transporteur sind an der Außen- und Innenseite Zifferreihen. An welcher Seite liest man am bequemsten die Grade ab, wenn die Oeffnung des zu messenden Winkels nach links liegt?
17) Welche Zifferreihe benützt man am besten, wenn die Oeffnung des zu messenden Winkels nach rechts liegt?
18) Wie zeichnet man Winkel von bestimmter Größe?
19) Wie viel Grad beträgt ein gestreckter, wie viel Grad ein rechter Winkel?
20) In welche Grenzen läßt sich die Gradanzahl eines spitzen und eines stumpfen Winkels einschließen?
21) Welche Angaben lassen sich über die Gradanzahl eines concaven und eines convexen Winkels machen?
22) Können ungleichartige Größen zu einander addirt werden?
23) Können gleichartige Größen zu einander addirt werden?
24) Welche geometrische Gebilde haben wir addirt?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 5 und 6.
Planimetrie.

3. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Als Manuscript gedruckt.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Mancher weiß nicht, daß er kann —
Wenn er's übet, geht es an.

Lection 5.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 3.

Abschnitt C. §. 32. 1. a) 9 m = 900 cm. b) 70 mm = 7 cm. c) 8 dm = 80 cm. d) 5 Dm = 5000 cm. e) 900 mm = 90 cm. f) 4 Km = 400 000 cm.

2. a) 12 m = 120 dm. b) 7 Km = 70 000 dm. c) 550 cm = 55 dm. d) 25 Dm = 2500 dm. e) 800 mm = 8 dm. f) 19 Dm = 1900 dm.

3. a) 170 m = 17 Dm. b) 13 Hm = 130 Dm. c) 2 Km = 200 Dm. d) 7000 cm = 7 Dm. e) 90 000 mm = 9 Dm.

Abschnitt D. § 34. 1. a) $\overset{\frown}{4,5,6} = \overset{\frown}{6,7,8}$
folglich $\angle\, 4M6 = \angle\, 6M8$

$\overset{\frown}{6,7,8} = \overset{\frown}{8,9,10} = \overset{\frown}{10,11,12}$
folglich $\angle\, 6M8 = \angle\, 8M10 = \angle\, 10M12$

$\overset{\frown}{10,11,12} = \overset{\frown}{12,13,14} = \overset{\frown}{14,15,16}$
folglich $\angle\, 10M12 = \angle\, 12M14 = \angle\, 14M16$

$\overset{\frown}{14,15,16} = \overset{\frown}{16,17,18} = \overset{\frown}{18,19,20}$
folglich $\angle\, 14M16 = \angle\, 16M18 = \angle\, 18M20$

$\overset{\frown}{18,19,20} = \overset{\frown}{20,21,22} = \overset{\frown}{22,23,24}$
folglich $\angle\, 18M20 = \angle\, 20M22 = \angle\, 22M24$

$\overset{\frown}{22,23,24} = \overset{\frown}{24,25,26} = \overset{\frown}{26,27,28}$
folglich $\angle\, 22M24 = \angle\, 24M26 = \angle\, 26M28$

$\overset{\frown}{26,27,28} = \overset{\frown}{28,29,30}$
folglich $\angle\, 26M28 = \angle\, 28M30$.

b) $\overset{\frown}{6,7,9} = \overset{\frown}{9,10,12} = \overset{\frown}{12,13,15}$
folglich $\angle\, 6M9 = \angle\, 9M12 = \angle\, 12M15$

$\overset{\frown}{12,13,15} = \overset{\frown}{15,16,18} = \overset{\frown}{18,19,21}$
folglich $\angle\, 12M15 = \angle\, 15M18 = \angle\, 18M21$

$\overset{\frown}{18,19,21} = \overset{\frown}{21,22,24} = \overset{\frown}{24,25,27}$
folglich $\angle\, 18M21 = \angle\, 21M24 = \angle\, 24M27$

$\overset{\frown}{24,25,27} = \overset{\frown}{27,28,30}$
folglich $\angle\, 24M27 = \angle\, 27M30$.

c) $\overset{\frown}{2,3,7} = \overset{\frown}{7,8,12} = \overset{\frown}{12,13,17}$
folglich $\angle\, 2M7 = \angle\, 7M12 = \angle\, 12M17$

$\overset{\frown}{12,13,17} = \overset{\frown}{17,18,22} = \overset{\frown}{22,23,27}$
folglich $\angle\, 12M17 = \angle\, 17M22 = \angle\, 22M27$

$\overset{\frown}{22,23,27} = \overset{\frown}{27,28,2}$
folglich $\angle\, 22M27 = \angle\, 27M2$.

d) $\overset{\frown}{4,5,10} = \overset{\frown}{10,11,16} = \overset{\frown}{16,17,22}$
folglich $\angle\, 4M10 = \angle\, 10M16 = \angle\, 16M22$

$\overset{\frown}{16,17,22} = \overset{\frown}{22,23,28} = \overset{\frown}{28,29,4}$
folglich $\angle\, 16M22 = \angle\, 22M28 = \angle\, 28M4$.

e) $\overset{\frown}{6,7,16} = \overset{\frown}{16,17,26} = \overset{\frown}{26,27,6}$
folglich $\angle\, 6M16 = \angle\, 16M26 = \angle\, 26M6$.

2. a) $\angle\, 30M5$ ist 5 mal so groß wie $\angle\, 5M6$
b) $\angle\, 1M7$ „ 3 „ „ „ „ $\angle\, 8M10$
c) $\angle\, 3M13$ „ 2 „ „ „ „ $\angle\, 15M20$
d) $\angle\, 7M16$ „ 3 „ „ „ „ $\angle\, 17M20$
e) $\angle\, 9M17$ „ 4 „ „ „ „ $\angle\, 18M20$
f) $\angle\, 11M25$ „ 7 „ „ „ „ $\angle\, 15M17$

§ 35. Aufgaben I. Wenn wir in Fig. 4 den Winkel 12M1 zur Winkeleinheit machen, so ist ∠ 2M5 gleich 3, ∠ 4M8 gleich 4, ∠ 1M6 gleich 5, ∠ 3M7 gleich 4, ∠ 8M10 gleich 2, und ∠ 12M6 gleich 6 Winkeleinheiten.

Aufgaben II. Wählen wir in Fig. 5 den Winkel 30M1 zur Winkeleinheit, so ist ∠ 3M9 gleich 6, ∠ 7M16 gleich 9, ∠ 4M13 ebenfalls gleich 9, ∠ 8M20 gleich 12, ∠ 1M15 gleich 14, ∠ 15M22 gleich 7 und ∠ 7M14 ebenfalls gleich 7 Winkeleinheiten.

§ 36. Aufgaben I. 1. Von den concaven Winkeln ist

a) ∠ 12M5 = 150°	g) ∠ 8M12 = 120°
b) ∠ 1M4 = 90°	h) ∠ 7M9 = 60°
c) ∠ 2M6 = 120°	i) ∠ 5M8 = 90°
d) ∠ 9M12 = 90°	k) ∠ 9M11 = 60°
e) ∠ 6M10 = 120°	l) ∠ 10M2 = 120°
f) ∠ 10M11 = 30°	m) ∠ 11M3 = 120°.

2. Von den convexen Winkeln ist

a) ∠ 12M8 = 240°	f) ∠ 10M9 = 330°
b) ∠ 12M10 = 300°	g) ∠ 11M7 = 240°
c) ∠ 12M12 = 360°	h) ∠ 2M9 = 210°
d) ∠ 1M8 = 210°	i) ∠ 3M10 = 210°.
e) ∠ 2M10 = 240°	

Aufgaben II. 1. Jeder der Winkel 30M1, 1M2, 2M3 u. s. w. beträgt 12 Grad.

2. Von den concaven Winkeln ist

a) ∠ 30M2 = 24°	g) ∠ 2M16 = 168°
b) ∠ 30M5 = 60°	h) ∠ 1M9 = 96°
c) ∠ 30M7 = 84°	i) ∠ 7M17 = 120°
d) ∠ 30M9 = 108°	k) ∠ 16M25 = 108°
e) ∠ 30M13 = 156°	l) ∠ 29M3 = 48°
f) ∠ 2M12 = 120°	m) ∠ 15M29 = 168°.

3. Von den convexen Winkeln ist

a) ∠ 30M16 = 192°	e) ∠ 19M5 = 192°
b) ∠ 30M19 = 228°	f) ∠ 6M24 = 216°
c) ∠ 2M25 = 276°	g) ∠ 3M20 = 204°.
d) ∠ 8M30 = 264°	

Lection 4.

Abschnitt A. Aufgaben I. § 40. Die Gleichung ∠ a = 30° 45′ 17″ bedeutet: Winkel a beträgt 30 Grad, 45 Minuten und 17 Secunden. Die Gleichung ∠ b = 97° 44′ 59″ bedeutet: Winkel b beträgt 97 Grad, 44 Minuten und 59 Secunden. Die Gleichung ∠ c = 125° 58′ 27″ bedeutet: Der Winkel c beträgt 125 Grad, 58 Minuten und 27 Secunden. Die Gleichung ∠ d = 53° 3′ 6″ bedeutet: Winkel d beträgt 53 Grad, 3 Minuten und 6 Secunden.

Aufgaben II. ∠ a = 45°. ∠ b = 90°.
∠ c = 101°. ∠ e = 75°.
∠ f = 104°. ∠ g = 133°.

§ 41. Weil wir diesen Abschnitt auf einen möglichst kleinen Raum beschränken müssen, können wir nicht die Zeichnungen der acht Winkel bringen, welche der Schüler gemäß § 41 construiren soll. Wir nehmen an, daß er die Construction derselben richtig ausgeführt habe.

§ 42. 1) Es sind 2 R = 180°, 3 R = 270°, 4 R = 360°.

2) Der 3te Theil eines Rechten beträgt 30 Grad, der 5te Theil 18 Grad, der 6te Theil 15 Grad, der 9te Theil 10 Grad, der 15te Theil 6 Grad und der 30ste Theil 3 Grad. Der 3te Theil eines Gestreckten beträgt 60 Grad, der 5te Theil 36 Grad, der 6te Theil 30 Grad, der 9te Theil 20 Grad, der 15te Theil 12 Grad und der 30ste Theil 6 Grad.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 4 gestellten Fragen.

1) Unter einer Längeneinheit versteht man die Länge einer geraden Linie, mit welcher man andere Linien mißt. 2) Das Meter ist der zehnmillionste Theil eines Meridianquadranten. 3) Ein Decimeter ist der zehnte, ein Centimeter der hundertste, ein Millimeter der tausendste Theil eines Meters. 4) Ein Dekameter ist so groß wie zehn Meter, ein Hektometer so groß wie hundert Meter, ein Kilometer so groß wie tausend Meter. 5) Die deutsche Reichsregierung hat für das Wort „Meter" den Namen „Stab", für das Wort „Centimeter" den Namen „Neuzoll", für das Wort „Millimeter" den Namen „Strich", für das Wort Dekameter den Namen „Kette" eingeführt. 6) Eine Meile ist gleich 7½ Kilometer. 7) Die Größe eines Centriwinkels hängt von dem Kreisbogen ab, welchen seine Schenkel einschließen. 8) Unter einer Winkeleinheit versteht man die Größe eines Winkels, mit welchem man andere Winkel mißt. 9) Ein Gradbogen ist der dreihundertsechzigste Theil eines Kreises. 10) Ein Centriwinkel, dessen Kreisbogen gleich 4, 10, 20, oder 100 Gradbogen ist, beträgt 4, 10, 20, oder 100 Grad. 11) Man verwandelt einen gewöhnlichen Winkel in einen Centriwinkel, indem man um seinen Scheitelpunkt einen Kreis schlägt. 12) Die Größe des Gradbogens ändert sich mit der Größe des Kreises, dessen dreihundertsechzigster Theil der Gradbogen ist. 13) Die Größe eines Winkels von einem Grade ist unveränderlich. 14) Der Hauptbestandtheil eines Transporteurs ist eine in hundertundachtzig Theile getheilte halbkreisförmige Scheibe. 15) Siehe § 39 1, 2, 3. 16) Wenn die Oeffnung des zu messenden Winkels nach links liegt, liest man am besten die Grade an der Innenseite ab. 17) Liegt die Oeffnung des zu messenden Winkels nach rechts, so wird am besten die Außenseite des Transporteurs zum Ablesen der Grade benützt. 18) Siehe § 41, S. 45. 19) Ein gestreckter Winkel beträgt 180, ein rechter 90 Grad. 20) Ein spitzer Winkel beträgt mehr als 0 und weniger als 90 Grad, ein stumpfer Winkel mehr als 90 und weniger als 180 Grad. 21) Ein concaver Winkel ist größer als 0 und kleiner als 180 Grad, ein convexer Winkel ist größer als 180, und höchstens gleich 360 Grad. 22) Ungleichartige Größen können nicht addirt werden. 23) Gleichartige Größen kann man addiren. 24) Wir haben gerade Linien und Winkel addirt.

C. Die Nebenwinkel.

§ 44. Die Definition der Nebenwinkel. Die Summe der Nebenwinkel. Der Schüler blicke aufmerksam auf Figur 1, S. 51. Er wird in derselben bemerken, daß die beiden

Winkel ABD und CBD den Schenkel BD mit einander gemein haben, und daß ihre anderen Schenkel AB und BC eine gerade Linie bilden. Für solche Winkel hat man einen besondern Namen eingeführt; man nennt sie **Nebenwinkel**.

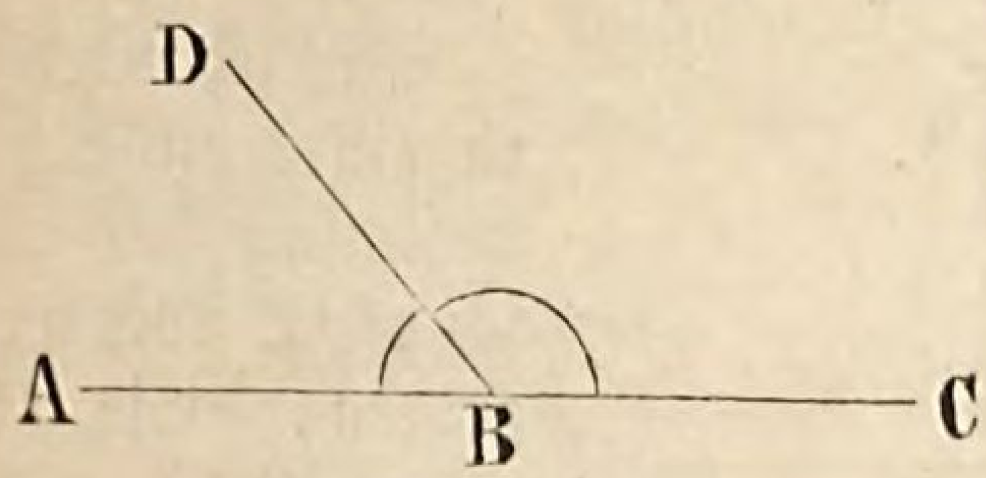


Fig. 1.

Definition I. Nebenwinkel sind solche Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine gerade Linie bilden.

Die Winkel s und t in Fig. 2, ferner die Winkel u und v in Fig. 3 sind Nebenwinkel.

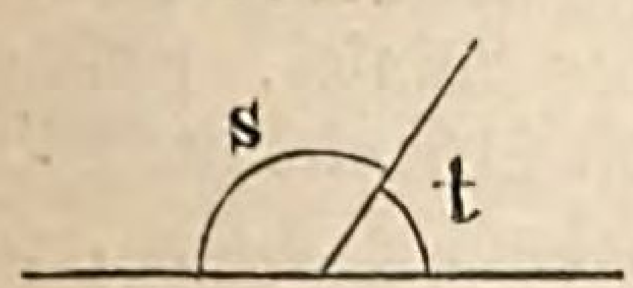


Fig. 2.

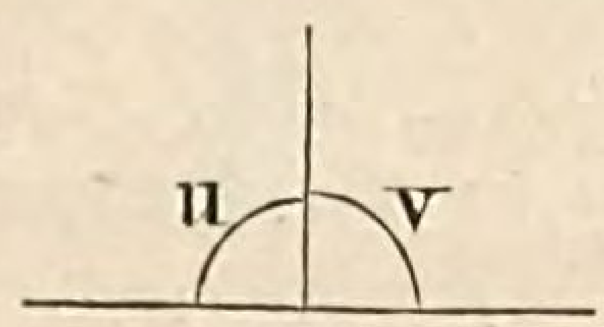


Fig. 3.

Nebenwinkel bildet z. B. die Seitengasse mit der Hauptstraße, das Hobeleisen mit der obern und untern Fläche des Hobels, der Baum mit dem Erdboden u. s. w. Freilich darf es der Schüler mit diesen Beispielen nicht zu genau nehmen. Wir müssen hier wieder daran erinnern, daß sich die rein mathematischen Verhältnisse in der Natur nicht finden.

Wir wollen jetzt die beiden Nebenwinkel in Fig. 1 gemäß § 43 zu einander addiren. Es ist

$$ABD + CBD = ABC$$

in Worten: Winkel ABC ist **die Summe der beiden Nebenwinkel** ABD und CBD.

Winkel ABC ist ein Gestreckter, weil seine Schenkel AB und BC in einer geraden Linie liegen. Nach § 19 Lehrs. I. **ist** er darum **gleich zwei Rechten.**

Wenn wir die fett gedruckten Wörter mit einander verbinden und dabei „zweier" für „der beiden" setzen, so haben wir den

Lehrsatz I. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Das Wort **Summe** haben wir in § 7 erklärt; wir wollen noch näher darauf eingehen. In der Gleichung

$$7 + 6 = 13$$

bedeutet die **linke** Seite (7 + 6): die 6 **soll** zur 7 addirt werden; sie richtet an uns eine Aufforderung, einen Befehl; wir können sie als einen **Imperativsatz**[1] (Befehlssatz) ansehen. Die **rechte** Seite dagegen giebt uns das **Resultat der Addition;** auf der rechten Seite ist die Aufforderung der linken ausgeführt. Gemäß § 7 haben wir in der Gleichung 7 + 6 = 13 die 13 als Summe zu betrachten, man nennt so aber auch die linke Seite 7 + 6. Ueberhaupt bezeichnet man mit dem Worte **Summe** nicht blos das **Resultat** der Addition, sondern auch den **Imperativsatz,** welcher die Aufforderung zum Addiren an uns richtet, zum Beispiel:

8 + 9 ist die Summe von 8 und 9
4 + 7 + 10 ist die Summe von 4, 7 und 10
s + t ist die Summe der Winkel s und t[2])
u + v ist die Summe der Winkel u und v
ABD + CBD ist die Summe der Winkel ABD und CBD.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist nach dem vorigen Lehrsatz gleich zwei Rechten, darum ist

$$ABD + CBD = 2\ R \text{ (Fig. 1)}$$
$$s + t = 2\ R \text{ (Fig. 2)}$$
$$u + v = 2\ R \text{ (Fig. 3).}$$

Wenn sich zwei gerade Linien schneiden, entstehen vier Nebenwinkelpaare. Die Winkel

a und b, b und c, c und d, d und a } in Fig. 4,
g und f, f und e, e und h, h und g } in Fig. 5

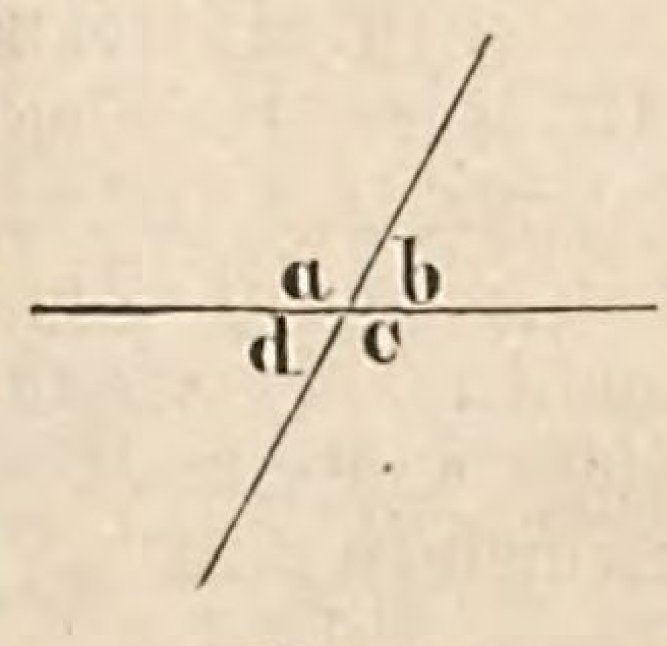


Fig. 4.

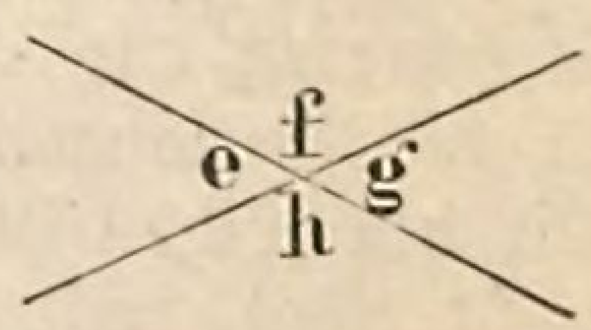


Fig. 5.

sind Nebenwinkel. Mithin ist

$a + b = 2\ R$	$g + f = 2\ R$
$b + c = 2\ R$	$f + e = 2\ R$
$c + d = 2\ R$	$e + h = 2\ R$
$d + a = 2\ R$	$h + g = 2\ R$

[1]) Imperativsatz heißt Befehlssatz, von dem lateinischen imperare befehlen. [2]) Wir wollen künftig nur noch Winkelzeichen setzen, wenn es zweifelhaft ist, ob durch die Buchstaben Winkel oder Linien bezeichnet werden.

Aufgaben. Der Schüler gebe in den Figuren 6 und 7 die Nebenwinkel an und setze ihre Summe zwei Rechten gleich.

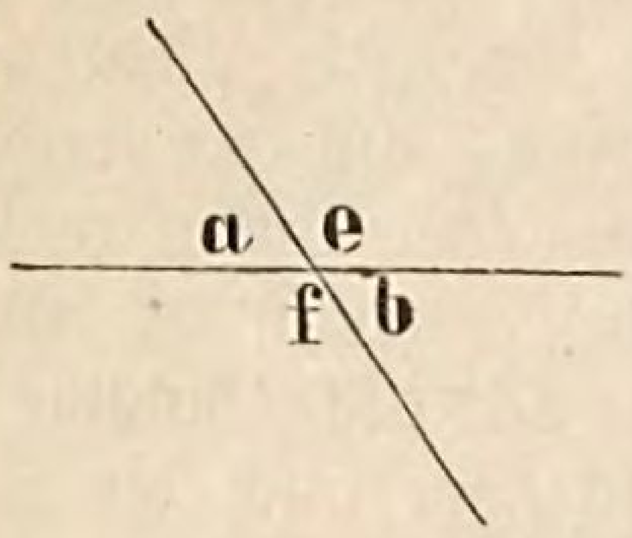


Fig. 6.



Fig. 7.

§. 45. Folgerungen aus dem Lehrsatz I des vorigen Paragraphen. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen soviel wie zwei Rechte. Ist der eine kleiner als ein Rechter, so muß mithin der andere größer sein als ein Rechter. Ist der eine spitz, so ist der andere stumpf.

Wenn der eine Nebenwinkel gleich einem Rechten ist, so muß auch der andere gleich einem Rechten sein, sonst würden sie zusammen nicht zwei Rechte betragen.

Lehrsatz II. Ist der eine Nebenwinkel ein Rechter, so muß auch der zweite gleich einem Rechten sein.

Von diesem Satze wollen wir mehrere Anwendungen bringen.

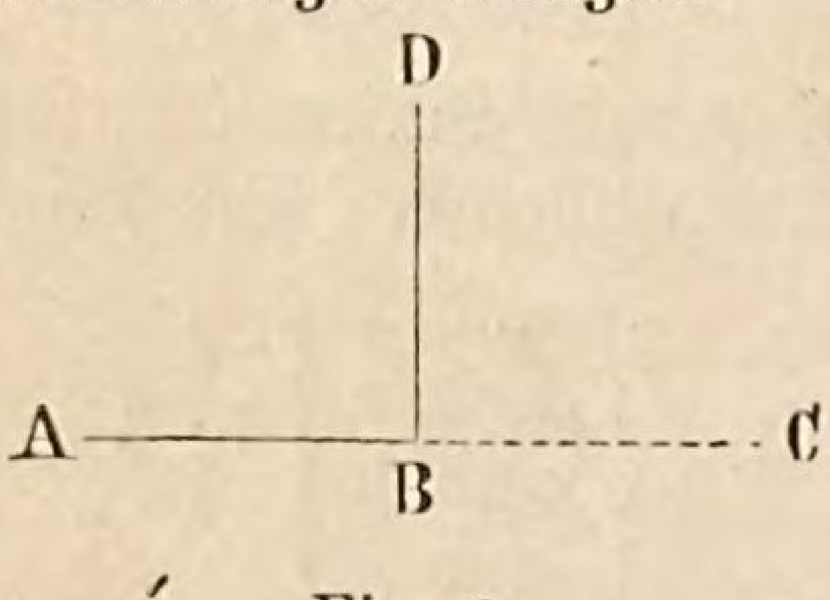


Fig. 8.

Nehmen wir an, wir hätten durch Messung mit dem Transporteur gefunden, daß ABD (Fig. 8) gleich einem rechten Winkel sei. Wir können dann gemäß § 20 Def. III sagen, der Schenkel DB stehe auf dem Schenkel AB senkrecht. Verlängern wir AB über B hinaus (in Fig. 8 ist die Verlängerung punktirt), so erhalten wir den Winkel CBD, welcher auch einen Rechten beträgt, weil sein Nebenwinkel ABD gleich einem Rechten ist. Deswegen steht DB auch auf BC, der Verlängerung von AB, senkrecht. Ueberhaupt steht der eine Schenkel eines rechten Winkels nicht blos auf dem andern Schenkel, sondern auch auf der Verlängerung desselben senkrecht.

Für das Wort senkrecht gebraucht man auch das Zeichen ⊥.

In Fig. 8 ist DB ⊥ AC
In Fig. 9 ist ST ⊥ MN

d. h. in Worten:

die Gerade DB steht senkrecht auf der Geraden AB,
„ „ ST „ „ „ „ „ MN.

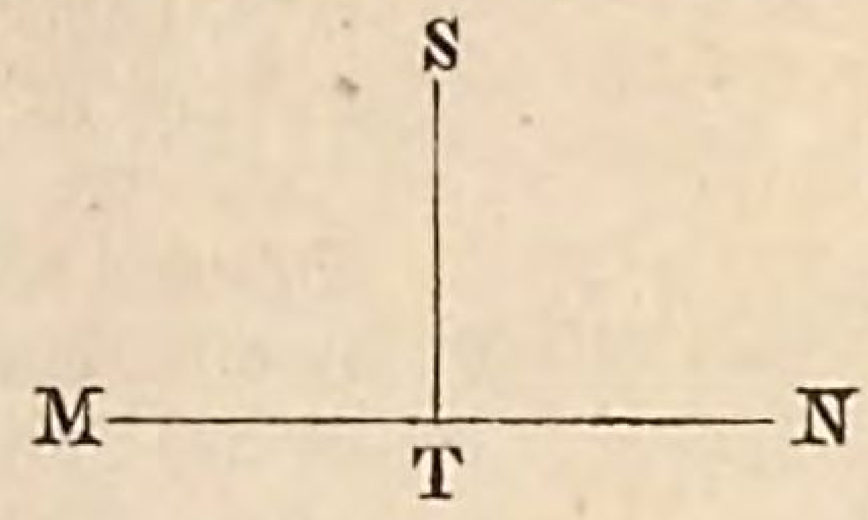


Fig. 9.

Wir schreiten jetzt zu einer andern Anwendung des Lehrsatzes II. Wir wollen zeigen, wie man vermittelst dieses Satzes prüfen kann, ob das Winkelmaß genau einen rechten Winkel darstellt. In Figur 10 ist das Winkelmaß in eine solche Lage gebracht, daß der eine Schenkel desselben einen Theil der Geraden AC berührt. Längs des andern Schenkels ist die Gerade CD gezogen. Ist Winkel ACD d. h. der Winkel, welchen die Schenkel des Winkelmaßes bilden, ein Rechter, so muß nach Lehrsatz II auch sein Nebenwinkel BCD gleich einem Rechten sein. Klappen wir nun das Winkelmaß um, so daß der untere Schenkel an der Geraden CB anliegt, so wird es die Lage annehmen, welche wir in Fig. 10 durch Punkte angedeutet haben; der zweite Schenkel wird sich wieder an die Gerade CD anlehnen.

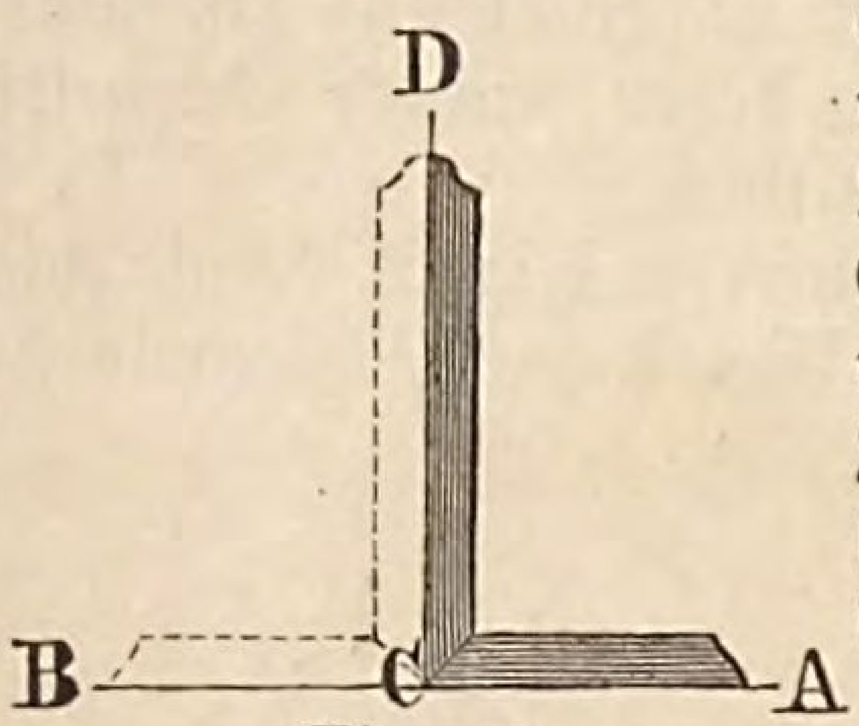


Fig. 10.

Schließen dagegen die beiden Schenkel des Winkelmaßes nicht einen rechten, sondern etwa einen spitzen Winkel ein (siehe Fig. 11), so wird die Gerade CE, welche wir nach dem Umklappen längs des an AB nicht anliegenden Schenkels ziehen, mit CD nicht zusammenfallen, sondern den Winkel ECD bilden.

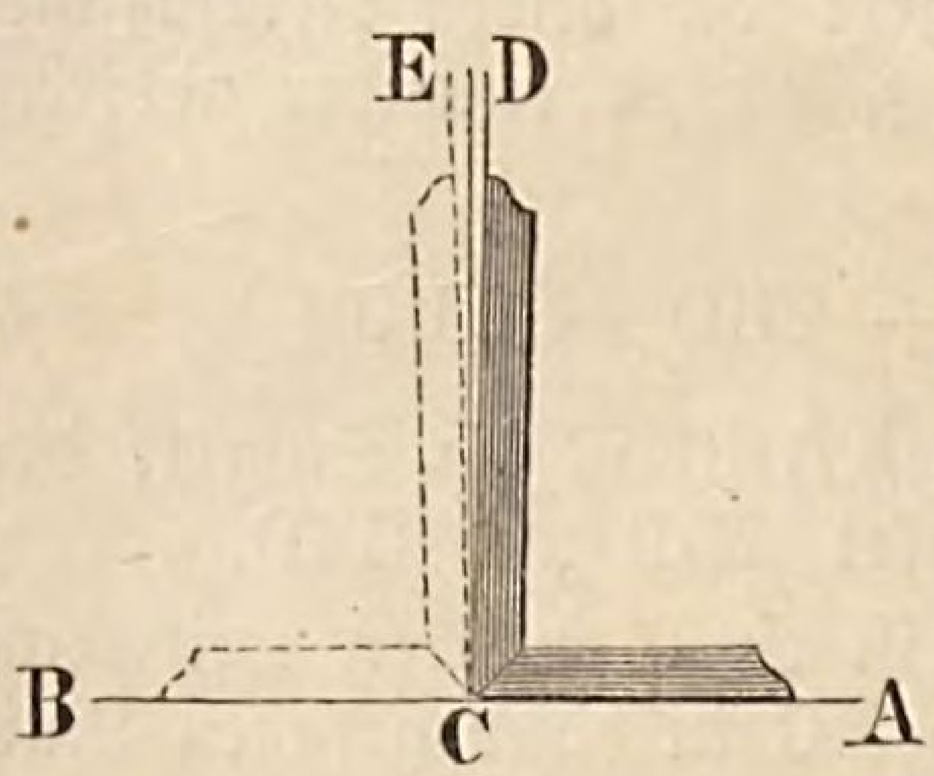


Fig. 11.

Noch eine dritte Anwendung des Lehrsatzes II. In Fig. 12 schneiden sich zwei gerade Linien und bilden mit einander die Winkel a, b, c und d. Wir wollen uns vorstellen, wir hätten mit dem Transporteur festgestellt, daß der Winkel a gleich einem Rechten sei; dann müssen

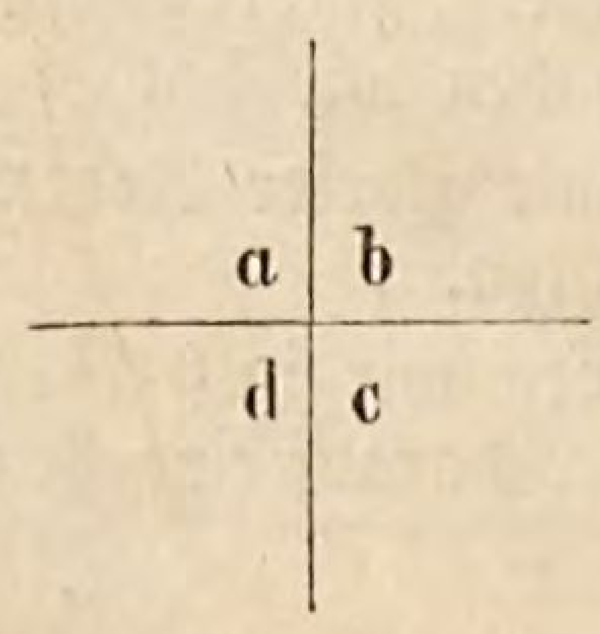


Fig. 12.

nach Lehrs. II auch die beiden Winkel b und d, die Nebenwinkel von a, einen Rechten betragen. Ist aber Winkel d ein Rechter, so muß auch Winkel c, der Nebenwinkel von d, gleich einem Rechten sein.

Wenn also Winkel a einen Rechten beträgt, so sind auch die Winkel b, c und d Rechte; oder allgemein:

Wenn von den **vier Winkeln**, welche von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden, der **eine** ein **Rechter** ist, so müssen auch die **drei anderen** einen **Rechten** betragen.

Bei jedem Kreuze, z. B. beim Fensterkreuze und beim Crucifix, sieht der Schüler vier rechte Winkel, welche von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden.

§ 46. **Die Gradanzahl der Nebenwinkel.** Nach § 44 Lehrsatz I betragen zwei Nebenwinkel **zwei** Rechte. **Ein** rechter Winkel ist gleich **90 Grad.** Zwei Nebenwinkel sind mithin zusammen gleich **zweimal 90** oder gleich **180 Grad.** Ist die Gradanzahl des einen Nebenwinkels bekannt, so erhält man also die Größe des andern, indem man die Gradanzahl des bekannten Winkels von 180 Grad abzieht. Beträgt der eine Nebenwinkel 70 Grad, so muß der andere gleich 110 Grad sein, denn es sind

$$110^0 = 180^0 - 70^0.$$

Aufgaben I. Der eine Nebenwinkel möge a) 25, b) 54, c) 75, d) 92, e) 108, f) 123 Grad betragen. Wie groß ist dann der andere Nebenwinkel?

Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, entstehen vier Winkel. Will man wissen, wie viel Grad diese vier Winkel betragen, so braucht man nur die Gradanzahl des einen Winkels mit dem Transporteur zu bestimmen; die Größe der andern kann man dann leicht berechnen. Wenn der Schüler den Winkel s in Figur 13 mißt, wird er finden, daß derselbe 120 Grad beträgt. Die Winkel u und t sind Nebenwinkel von s, sie sind also beide gleich 180 — 120 d. h. gleich 60 Grad. Der Winkel v ist Nebenwinkel von u, er beträgt mithin 180 — 60 d. h. 120 Grad.

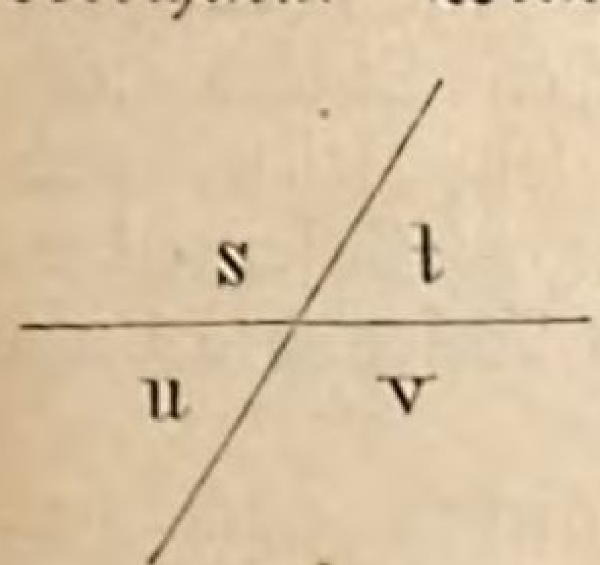


Fig. 13.

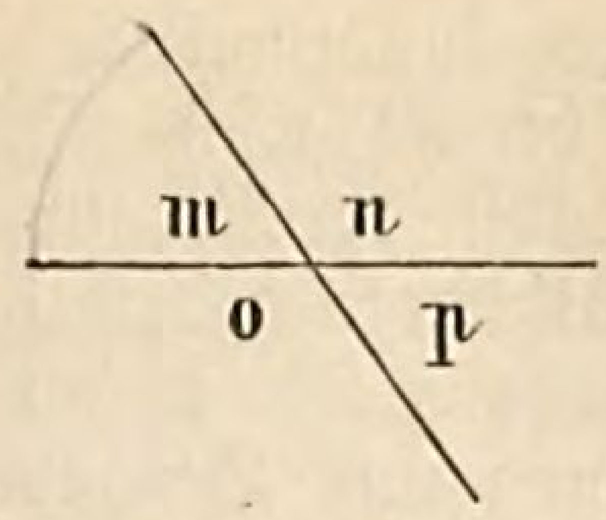


Fig. 14.

Aufgaben II. Der Schüler messe in Fig. 14 den Winkel m; er berechne daraus die Gradanzahl der drei Winkel n, o und p, wie wir vorher dargelegt haben.

D. Die Euklid'sche Beweismethode.

§ 47. **Die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis.** Die bisher aufgestellten Lehrsätze haben wir bewiesen, theils indem wir auf die Nöthigung hinwiesen, welche in der räumlichen Anschauung liegt, theils indem wir auf frühere Lehrsätze zurückgingen. Allein allen diesen Beweisen fehlte die herkömmliche Form, welche schon von den alten Griechen bei ihren mathematischen Untersuchungen beobachtet und besonders von Euklid ausgebildet wurde. Wir wollen jetzt den Schüler mit dieser Euklid'schen Beweisform bekannt machen und damit einen wichtigen Schritt vorwärts thun. Der Schüler, welcher sich noch nicht mit der Mathematik beschäftigt hat, lasse sich durch die Neuheit der Form nicht zurückschrecken. Wenn er unseren Auseinandersetzungen mit Aufmerksamkeit folgt, wird er die Euklid'sche Beweismethode nicht blos verstehen, er wird sich auch bald mit ihr befreunden, denn sie hat in der That große Vorzüge. Auf keine andere Weise lassen sich die mathematischen Schlüsse so kurz und bündig, so klar und übersichtlich darstellen. Doch wir wollen weitere allgemeine Betrachtungen über diese Methode erst anstellen, wenn der Schüler sie an einem bestimmten Beispiel kennen gelernt hat. Wir wollen den Lehrsatz beweisen:

Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, beträgt vier Rechte.

In diesem Lehrsatze wird **vorausgesetzt,**

daß wir mehrere Winkel haben, welche um einen Punkt herum liegen;

es wird **behauptet:**

daß die Summe dieser Winkel vier Rechte betrage.

Wir haben also den **vorausgesetzten** und den **behaupteten** Theil zu unterscheiden. Diese beiden Theile schreibt man unter der Bezeichnung **Voraussetzung** und **Behauptung** noch einmal hin, aber statt der im Lehrsatze gebrauchten allgemeinen Ausdrücke bedient man sich der

Buchstaben einer Figur und der mathematischen Zeichen. Was im Lehrsatze bereits gesagt ist, wird in der Voraussetzung und in der Behauptung in die Sprache der Mathematik gekleidet.

Sehen wir zu, welche Fassung wir in unserem Falle der Voraussetzung und Behauptung geben müssen.

In Figur 15 sieht der Schüler drei Winkel r, s und t, welche rings um ihren gemeinsamen Scheitelpunkt herum liegen. Die Summe dieser Winkel ist:

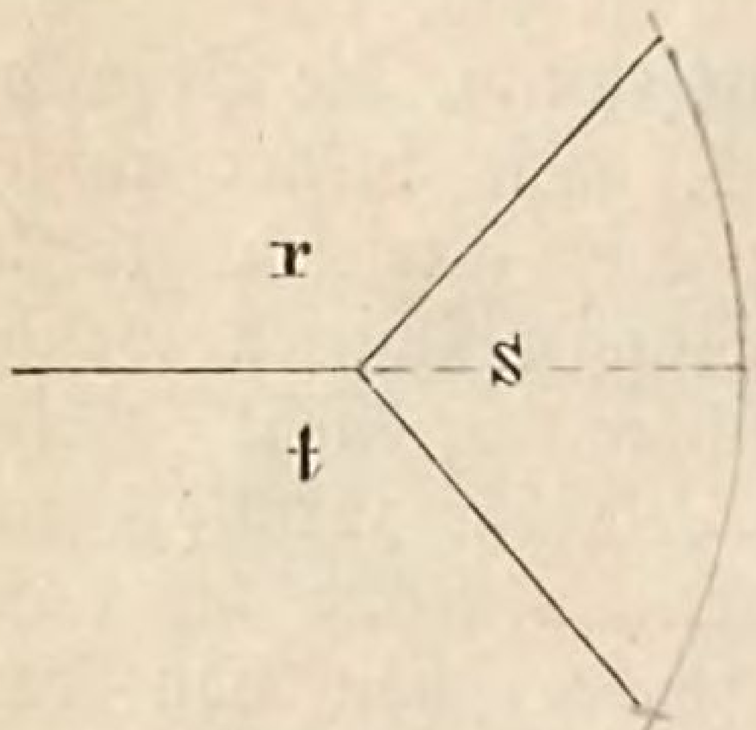


Fig. 15.

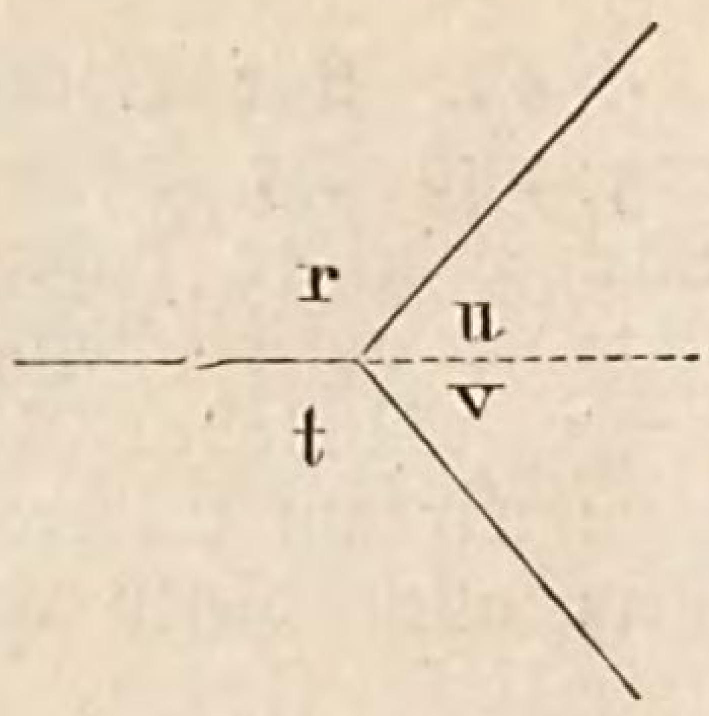


Fig. 16.

$$r + s + t.$$

Diese Summe soll vier Rechte betragen, in Zeichen: es soll

$r + s + t = 4\,R$ sein.

Demgemäß ist die **Voraussetzung**:

Gegeben sind uns in Figur 15 die drei Winkel[1]) r, s und t, welche um einen Punkt herum liegen;

und die **Behauptung**[1]):

$$r + s + t = 4\,R.$$

Diese Behauptung müssen wir beweisen. Bevor wir den **Beweis** beginnen, wollen wir noch einmal auf die Bedeutung der Grundsätze zurückgehen.

Es sind 60 dm = 6 m
und 600 cm = 6 m
―――――――――――
60 dm = 600 cm [2])
nach Grundsatz II.

Es sei $a = 59^0$ [3])
und $c = 59^0$
―――――――――――
$a = c$
nach Grundsatz II.

Es sind 13 cm + 7 cm = 2 dm
und 30 cm = 3 dm
―――――――――――
13 cm + 7 cm + 30 cm = 2 dm + 3 dm
nach Grundsatz III.

Es ist 19 + 11 = 30
und 20 + 5 = 25
―――――――――――
19 + 11 + 20 + 5 = 30 + 25
nach Grundsatz III.

In allen diesen Fällen wird aus zwei Gleichungen eine dritte erschlossen. Aus

$a = 59^0$ und $c = 59^0$

wird gefolgert, daß

$a = c$ sei.

So oft wir einen **Grundsatz** anwenden, **erschließen** wir aus **zwei Gleichungen** eine **dritte.** Bei den meisten Beispielen, welche wir gebracht haben, wird durch die erschlossene Gleichung unser Wissen nicht bereichert. Daß 60 dm = 600 cm seien, wußten wir, bevor uns der Grundsatz II darüber belehrte.

Indessen ein einfaches Beispiel wird beweisen, daß wir durch Schlüsse, welche wir den mathematischen Grundsätzen gemäß ausführen, neues Wissen erlangen können. Mit Hilfe von Spiegelapparaten hat man berechnet, daß das Licht, welches von unseren irdischen Lichtquellen ausgeht, in der Secunde 42 000 Meilen zurücklegt. Von den Astronomen ist festgestellt worden, daß auch das Fixsternlicht 1 Secunde braucht, um 42 000 Meilen zu durchlaufen. Unter Geschwindigkeit versteht man in der Physik den in einer Secunde zurückgelegten Weg. Nennen wir c die Geschwindigkeit des irdischen Lichtes, c_1 die Geschwindigkeit des Fixsternlichtes, so haben wir

c = 42 000 Meilen
c_1 = 42 000 Meilen
―――――――――――
$c = c$, nach Gr. II.

Die letzte Gleichung lehrt uns, daß die Geschwindigkeiten des irdischen Lichtes und des Fixsternlichtes einander gleich seien, und diese Erkenntniß ist für alle Hypothesen überaus wichtig, welche über das Wesen des Lichtes aufgestellt werden.

In der That, das Schließen nach den Grundsätzen ist der Grundzug der mathematischen Methode. Auch die Euklid'sche Beweisform läuft darauf hinaus, aus bekannten Gleichungen diejenigen zu erschließen,

[1]) Die Theilung des Lehrsatzes in Voraussetzung und Behauptung ist von Euklid noch nicht ausgeführt worden. Sie ist das Werk späterer Mathematiker. [2]) Der Strich bedeutet wieder „folglich". [3]) a und c sollen Winkel bezeichnen.

welche in der Behauptung enthalten sind. Der Beweis, welchen wir für den aufgestellten Lehrsatz gaben, wird das eben Gesagte erläutern. Die Behauptung ist:

$$r + s + t = 4\ R.$$

Diese Behauptung ist zu beweisen. Wir verlängern zu diesem Zwecke den Schenkel, welchen die beiden Winkel r und t (siehe Fig. 15) gemeinsam haben. In Figur 16 ist diese Verlängerung durch eine punktirte Gerade angedeutet. Die punktirte Linie zerlegt den Winkel s in die beiden Winkel u und v. u und v sind zusammen so groß wie s, in Zeichen:

$$u + v = s.$$

Wie der Schüler in Figur 16 sieht, sind die beiden Winkel r und u, ebenso t und v zusammen so groß wie ein Gestreckter oder 2 Rechte, in Zeichen:

$$r + u = 2\ R\ ^{1)}$$
$$\text{und}\ v + t = 2\ R.$$

Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches. (Grundsatz III.)

Folglich ist:

$$r + u + v + t = 2\ R + 2\ R\ \text{oder}$$
$$r + u + v + t = 4\ R.$$

Wie wir vorher bemerkt haben, ist $u + v = s$. Setzen wir in der vorletzten Gleichung für $u + v$ die gleiche Größe s ein, so erhalten wir:

$$r + s + t = 4\ R$$

was behauptet war.

Noch jetzt ist es gebräuchlich, jeden Beweis mit den Worten „was behauptet war" zu schließen. Früher setzte man an den Schluß eines Beweises die Buchstaben q. e. d., welche die Abkürzungen der lateinischen Worte „quod erat demonstrandum"[2]) sind. ~ 18. II. 1910

§ 48. Die Winkel um einen Punkt. Messung der convexen Winkel. In unseren Erörterungen sind Voraussetzung, Behauptung und Beweis durch die Bemerkungen, welche zur Erläuterung des Beweisverfahrens dienten, unterbrochen und von einander losgelöst worden. Dadurch kann der Schüler zu der Ansicht kommen, daß die Euklid'sche Methode nicht den Vorzug der Kürze besitze, welchen wir vorher an ihr gerühmt haben. Um dieser irrigen Ansicht vorzubeugen, wollen wir noch einmal hinter einander den Lehrsatz, die Voraussetzung und die Behauptung bringen. Der Schüler wird dann mit einem Blicke überschauen, was in den vorigen Auseinandersetzungen nothwendig zerrissen werden mußte. (Fig. 15 und 16, Seite 54.)

Lehrsatz III. Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, beträgt vier Rechte.

Voraussetzung. Gegeben sind uns in Figur 15 die drei Winkel r, s und t, welche um einen Punkt herum liegen.

Behauptung. $r + s + t = 4\ R.$

Beweis. In Figur 16 ist

$$\begin{array}{r} r + u = 2\ R \\ v + t = 2\ R \\ \hline r + u + v + t = 4\ R \end{array}$$

nach Grundsatz III.

Für $u + v$ setzen wir s, dann ist

$$r + s + t = 4\ R,$$

was behauptet war.

Aufgabe. I. Wie würde die Voraussetzung und die Behauptung zu Lehrsatz III heißen, wenn wir statt Figur 15 die Figur 17 wählten?

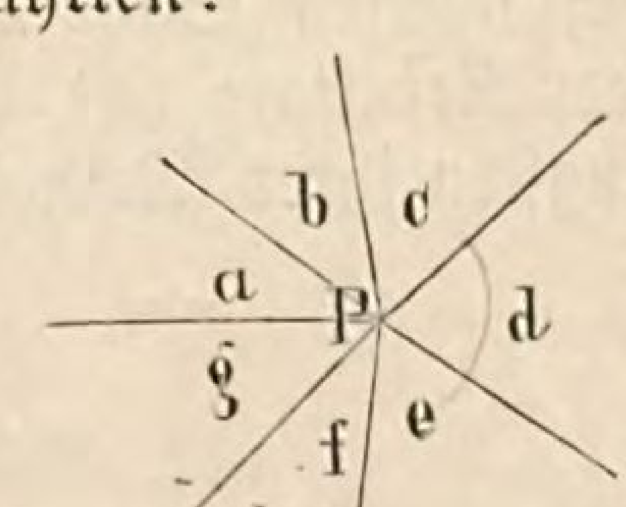


Fig. 17.

Ein rechter Winkel beträgt 90 Grad, vier Rechte sind mithin 360 Grad. Wir können darum den Lehrsatz III auch geben:

Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, beträgt 360 Grad.

Wie wir schon in § 42 des zweiten Briefes auseinandersetzten, ist es unmöglich, die **Gradanzahl convexer** Winkel direct mit dem Transporteur zu ermitteln, weil man damit nur Winkel bis zu 180 Grad messen kann. Indessen in der eben gegebenen Fassung bietet uns Lehrsatz III eine Methode, die Größe convexer Winkel vermittelst des Transporteurs zu bestimmen. Zu jedem convexen Winkel gehört ein concaver, zum convexen Winkel b der concave a, zum convexen Winkel d der concave c und zum convexen Winkel t der concave s (siehe Fig. 18, 19 und 20.

---

[1]) Euklid hat alle seine Schlüsse ohne Zeichen der Abkürzung blos mit Worten ausgedrückt.

[2]) „quod erat demonstrandum" heißt zu deutsch „was zu beweisen war".

Nach Lehrsatz III sind der convexe und der entsprechende concave Winkel zusammen gleich

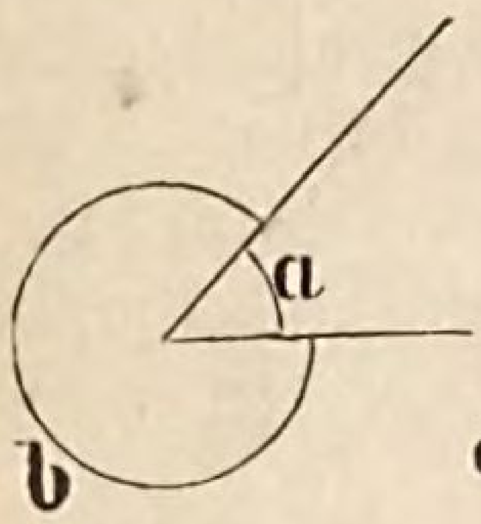


Fig. 18.

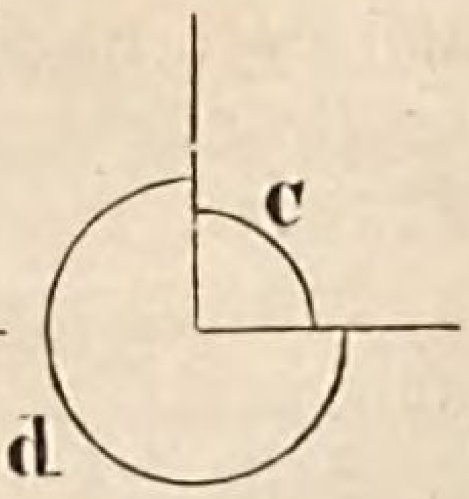


Fig. 19.

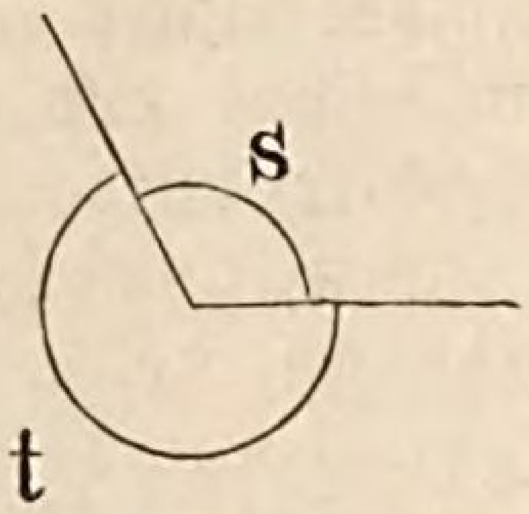


Fig. 20.

360 Grad, weil sie um einen Punkt herum liegen. Hat man den concaven Winkel mit dem Transporteur gemessen, so kann man die Größe des convexen bestimmen, indem man die Gradanzahl des concaven Winkels von 360 Grad abzieht. Winkel a (Fig. 18) beträgt 47 Grad, Winkel b mithin 360 — 47 oder 313 Grad.

Aufgaben. II. Der Schüler ermittele in den Figuren 19 und 20 die Größe der concaven Winkel c und s mit dem Transporteur und bestimme dann die Gradanzahl der convexen Winkel d und t durch Rechnung.

§ 49. Bedeutung der mathematischen Methode für andere Wissenschaften. Die mathematischen Schlüsse sind so sicher und unanfechtbar, daß an ihnen nicht gerüttelt werden kann. Während in den anderen Wissenschaften die Theorien wechseln, bleiben in der Mathematik die einmal gefundenen Sätze bestehen. Diese Sicherheit der Resultate hat die Mathematik nicht zum Geringsten ihrer Methode zu verdanken. Man hat darum versucht, die mathematische Methode auch auf andere Wissenszweige zu übertragen. Besonders Philosophen wollten ihrer Wissenschaft, in welcher ein System das andere verdrängt, den Charakter der Sicherheit verleihen, indem sie ihre Speculationen in ein mathematisches Gewand kleideten. Sie haben in ihren Systemen Definitionen, Lehrsätze und Beweise; aber sie kamen trotzdem nicht zu Resultaten, welche allgemeine Anerkennung fanden. In der That! die Methode der Mathematik reicht für die Aufgaben der übrigen Wissenschaften nicht aus. In der Mathematik zergliedert man Definitionen und setzt Größen einander gleich; in der Philosophie und den Naturwissenschaften sucht man für die Wirkungen die Ursachen, schöpft aus einzelnen Erfahrungen allgemeine Gesetze und bemüht sich durch Hypothesen das Wahrgenommene zu erklären. Läßt sich das gefundene Gesetz, die aufgestellte Hypothese in Gleichungen aussprechen, so kann man diese Gleichungen mathematisch behandeln; man gelangt dann zu Folgerungen, welche ohne mathematische Behandlung nicht übersehen werden können. Darauf beruht der unermeßliche Nutzen, welchen die Mathematik den anderen Wissenschaften bringt, darum wird auch die moderne Wissenschaft, die Mathematik immer mehr in sich aufnehmen, wenn sie auch aufgehört hat, ihre Aussprüche in die Formen der Definition, des Lehrsatzes, der Voraussetzung, der Behauptung und des Beweises zu zwängen.

Wissen ist Macht!

Lection 6.

A. Die Scheitelwinkel, die Gegenwinkel und die Wechselwinkel.

§ 50. Die Scheitelwinkel. In Figur 1 sind a und b zwei Winkel, bei welchen die Schenkel des einen Verlängerungen der Schenkel des andern sind. Für solche Winkel hat man einen besondern Namen eingeführt, man nennt sie **Scheitelwinkel.**

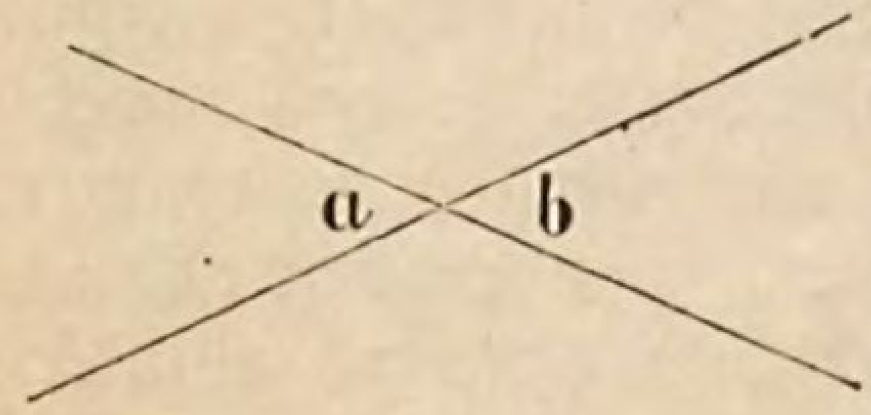


Fig. 1.

Definition I. Scheitelwinkel sind solche Winkel, bei welchen die Schenkel des einen Verlängerungen der Schenkel des andern sind.

Wenn sich zwei gerade Linien schneiden, entstehen zwei Scheitelwinkelpaare. Es sind

a und c } in Fig. 2
b und d }
a und f in Fig. 3

b und e }
c und h } in Fig. 3
d und g }

Scheitelwinkel.

In Figur 4 sind

s und v, t und u

Scheitelwinkel. Wie wir schon in § 45 festgestellt haben, beträgt jeder der Winkel s und v 120 Grad und jeder der Winkel t und u 60 Grad. Es ist darum

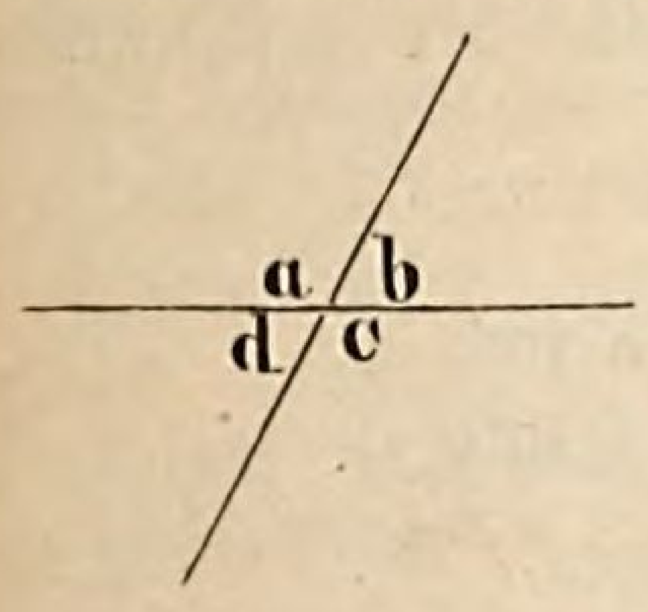


Fig. 2.

$$s = v$$
$$t = u.$$

So oft wir mit dem Transporteur **Scheitelwinkel** messen, werden wir finden, daß sie einander **gleich** sind.

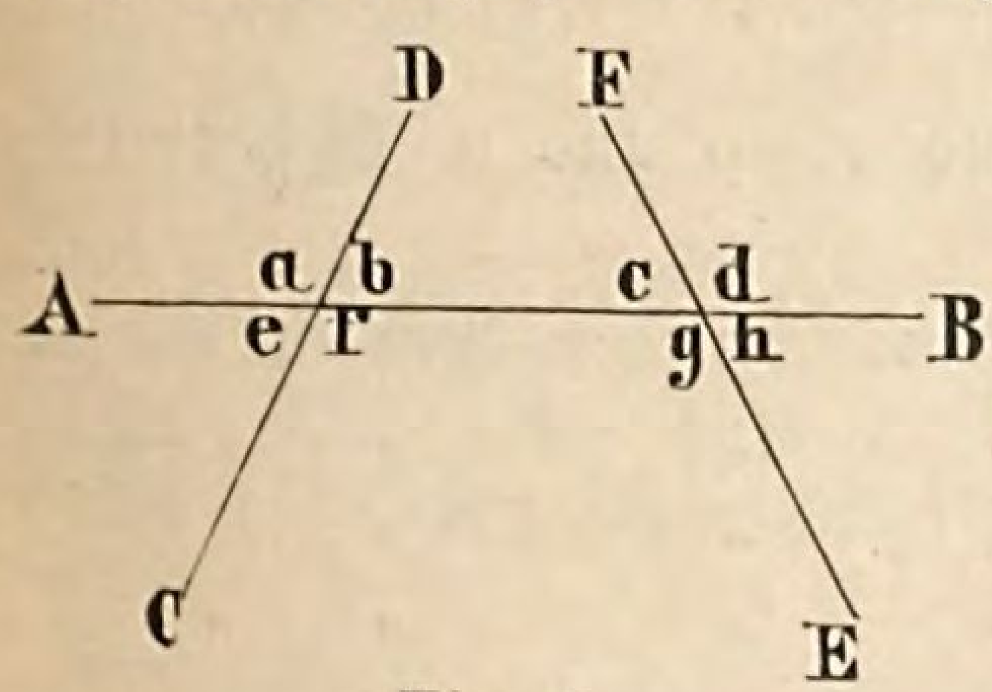


Fig. 3

Bevor wir über die **Gleichheit der Scheitelwinkel** einen Lehrsatz aufstellen, müssen wir noch eine Bemerkung vorausschicken.

In dem Ausdruck

$$15 + 7 - 7$$

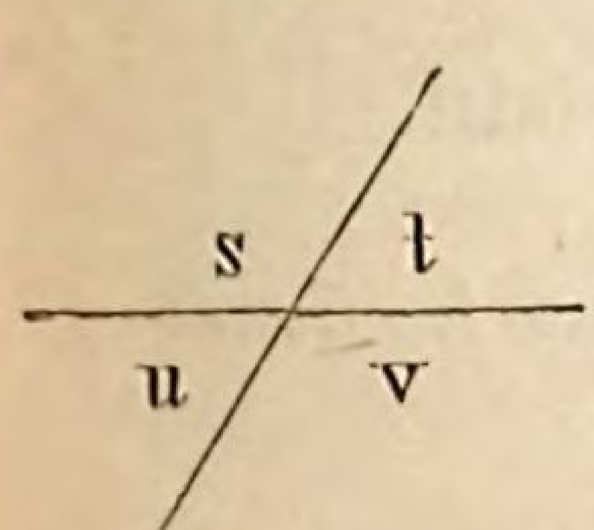


Fig. 4.

soll 7 zu 15 erst addirt (hinzugefügt) und dann subtrahirt (weggenommen) werden. Wenn wir wieder nehmen, was wir hinzufügen, ergiebt sich dasselbe Resultat, als wenn wir gar nichts hinzugefügt hätten. Es ist darum

$$15 + 7 - 7 = 15.$$

Ebenso ist:

$$75 + 100 - 100 = 75;$$
$$37 + 18 - 18 = 37;$$
$$c + n - n = c$$
und $d + n - n = d.$

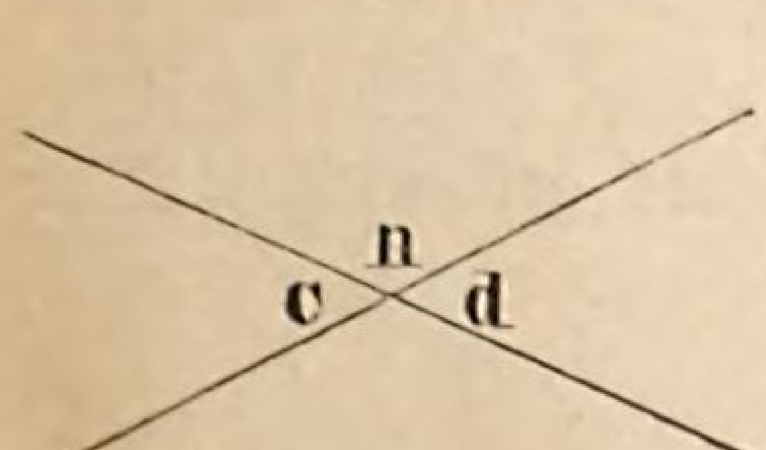


Fig. 5.

Nach dieser Bemerkung wollen wir die Gleichheit der Scheitelwinkel nach der Methode beweisen, welche wir im letzten Abschnitt der vorigen Lection besprochen haben.

Der zu beweisende Satz lautet:

Lehrsatz I. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Voraussetzung. Wir haben in Figur 5 die beiden Scheitelwinkel c und d.

Behauptung. $c = d.$

Beweis. Wie der Schüler in Figur 5 sieht, sind die Winkel c und n, ebenso d und n Nebenwinkel. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte, folglich ist:

$$c + n = 2\ R$$
und $d + n = 2\ R.$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, mithin ist:

$$\text{I}\quad c + n = d + n.$$

Jede Größe ist sich selbst gleich, 5 = 5, 12 = 12, ebenso auch

$$\text{II}\quad n = n$$

Wir wollen jetzt die beiden Gleichungen I und II unter einander setzen und nach dem Grundsatz verfahren:

Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & c + n & = & d + n \\ \text{II} & n & = & n \\ \hline & c + n - n & = & d + n - n, \end{array}$$

das ist nach der obigen Bemerkung:

$c = d$, was behauptet war.

Nach dem vorstehenden Lehrsatze ist:

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\}\text{ in Fig. 2.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = f \\ b = e \\ c = h \\ g = d \end{array}\right\}\text{ in Fig. 3.}$$

Aufgaben. Der Schüler nenne in den Figuren 6 und 7 die Scheitelwinkel und setze sie gemäß Lehrsatz I einander gleich.

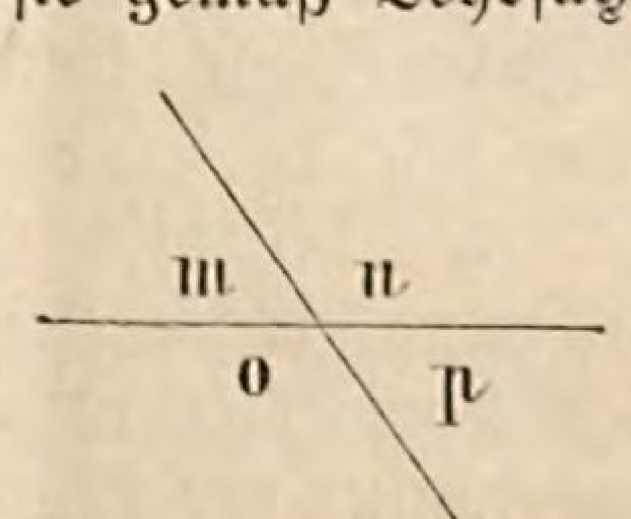


Fig. 6.

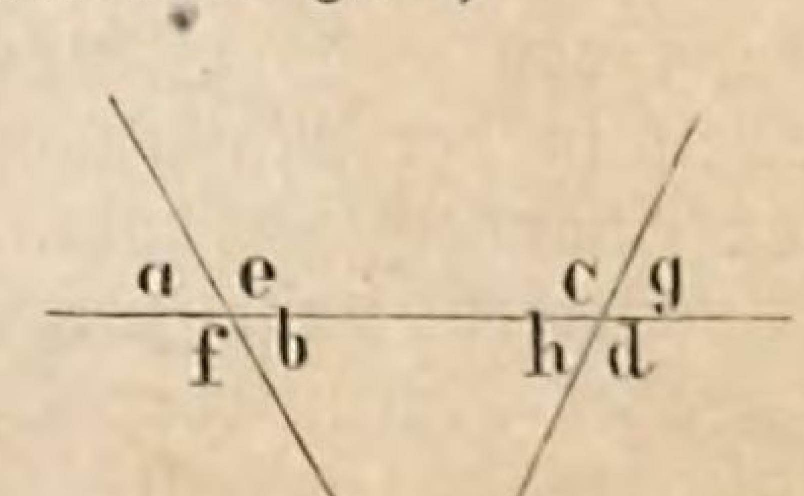


Fig. 7.

§ 51. Die Gegenwinkel und die Wechselwinkel. In Fig. 8 werden die beiden Geraden CD und EF von der Geraden AB geschnitten.

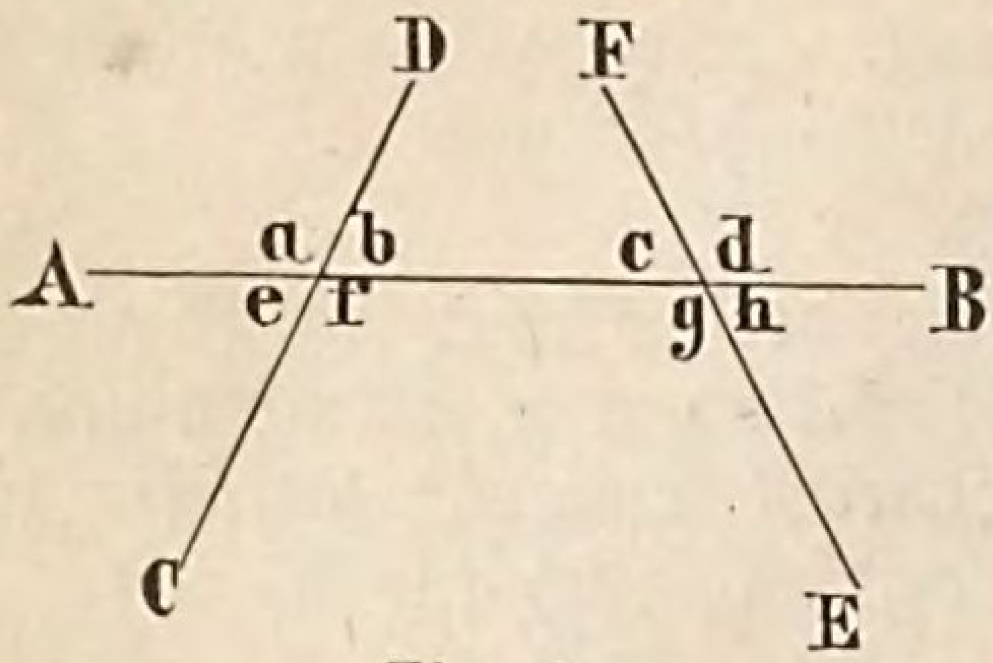


Fig. 8.

Von den acht Winkeln a, b, c, d, e, f, g, h werden unter dem Namen **Gegenwinkel** je zwei Winkel zusammengefaßt, welche
1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) auf derselben Seite der schneidenden,
3) auf derselben Seite der geschnittenen Geraden liegen.

In Fig. 8 sind

a und c e und g
b und d f und h

Gegenwinkel, denn es liegen,

a und c	beide	oberhalb	der	schneidenden	und	links	von	den	geschnittenen	Geraden
b und d	„	oberhalb	„	„	„	rechts	„	„	„	„
e und g	„	unterhalb	„	„	„	links	„	„	„	„
f und h	„	unterhalb	„	„	„	rechts	„	„	„	„

In Figur 9 sind die Winkel m und s, n und t, r und v, p und u Gegenwinkel, denn es liegen

m und s	beide	links	von	der	schneidenden	und	oberhalb	der	geschnittenen	Geraden
n und t	„	rechts	„	„	„	„	oberhalb	„	„	„
r und v	„	links	„	„	„	„	unterhalb	„	„	„
p und u	„	rechts	„	„	„	„	unterhalb	„	„	„

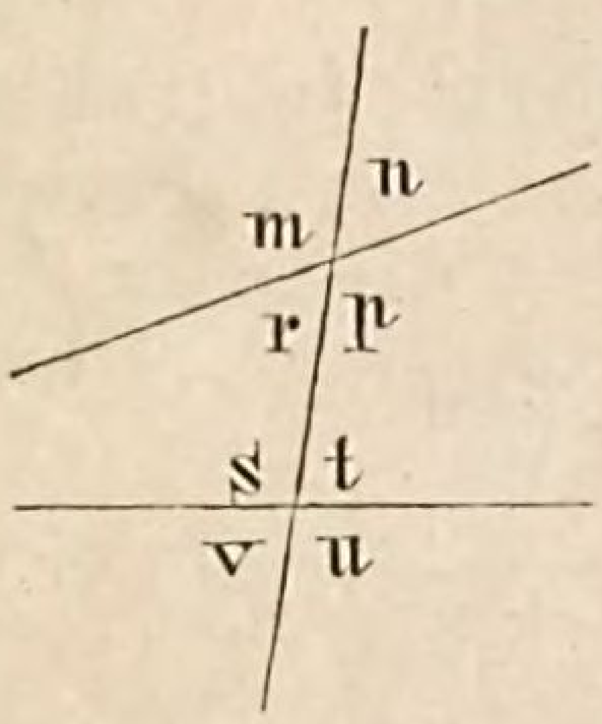


Fig. 9.

Die Gegenwinkel werden auch **„correspondirende“** Winkel genannt; indessen die Bezeichnung „Gegenwinkel“ ist mehr in Gebrauch.

Wir kommen jetzt zu den Wechselwinkeln.

Je zwei Winkel, welche
1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden,
3) auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden

liegen, nennt man **Wechselwinkel.**

In Fig. 8 sind

a und h, b und g, c und f, d und c

Wechselwinkel, denn es liegt

a oberhalb,	h unterhalb	der	schneidenden,	a links,	h rechts	von	den	geschnittenen	Geraden
b oberhalb,	g unterhalb	„	„	b rechts,	g links	„	„	„	„
c oberhalb,	f unterhalb	„	„	c links,	f rechts	„	„	„	„
d oberhalb,	e unterhalb	„	„	d rechts,	e links	„	„	„	„

In Fig. 9 sind m und u, n und v, r und t, p und s Wechselwinkel, denn es liegt:

m links,	u rechts	von	der	schneidenden,	m oberhalb,	n unterhalb	der	geschnittenen	Geraden
n rechts,	v links	„	„	„	n oberhalb,	v unterhalb	„	„	„
p rechts,	s links	„	„	„	p unterhalb,	s oberhalb	„	„	„
r links,	t rechts	„	„	„	r unterhalb,	t oberhalb	„	„	„

Ehe wir Aufgaben über Gegenwinkel und Wechselwinkel stellen, wollen wir eine Bemerkung von mehr practischem Interesse machen. Weil in der Mathematik, wie wir in § 13b auseinandergesetzt haben, die kleinen lateinischen Buchstaben meist zur Bezeichnung begrenzter gerader Linien oder Strecken verwendet werden, bedient man sich zur Benennung der Winkel lieber der kleinen griechischen Schriftzeichen; wir wollen deswegen den Schüler mit den ersten acht Buchstaben des griechischen Alphabets bekannt machen.

α	wird	gesprochen	wie	a	und	genannt	Alpha
β	„	„	„	b	„	„	Beta
γ	„	„	„	g	„	„	Gamma
δ	„	„	„	d	„	„	Delta
ε	„	„	„	ĕ	„	„	Epsilon

ζ wird gesprochen wie z und genannt Zeta
η " " " ē " " Eta
ϑ " " " th " " Theta.

Da mit den griechischen Buchstaben nur Winkel bezeichnet werden, ist es nicht nöthig, ihnen noch ein Winkelzeichen beizufügen.

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \delta$$

soll, ohne daß ein $\angle$ hinzugesetzt wird, künftig bedeuten:

Winkel Alpha ist gleich Winkel Gamma, und Winkel Beta ist gleich Winkel Delta.

Später wollen wir zur Bezeichnung der Winkel ausschließlich griechische Buchstaben verwenden. Vorläufig wollen wir ein Uebergangsstadium schaffen, indem wir die Winkel bald mit lateinischen und bald mit griechischen Buchstaben benennen. Schon in den Aufgaben bringen wir eine Figur, in welcher der Schüler die ersten acht griechischen Buchstaben findet.

30. **Aufgaben.** I. Der Schüler gebe an, wie

$\alpha = \beta$, $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \vartheta$,
$\beta = \eta$, $\gamma = \delta$, $\gamma = \zeta$,
$\delta = \vartheta$, $\delta = \eta$, $\eta = \vartheta$ zu sprechen ist.

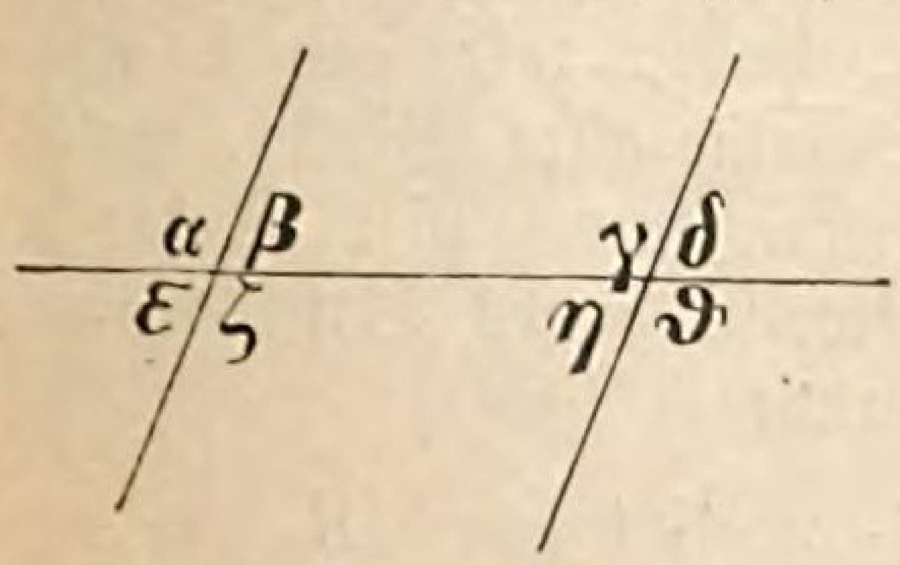


Fig. 10.

31. **Aufgaben** II. Der Schüler nenne in den Figuren 7 und 10 die Gegenwinkel und die Wechselwinkel.

§ 52. Eintheilung der Wechselwinkel in innere und äußere. In Figur 11 sieht der Schüler die Wechselwinkel:

α und ϑ β und ε
γ und ζ δ und η.

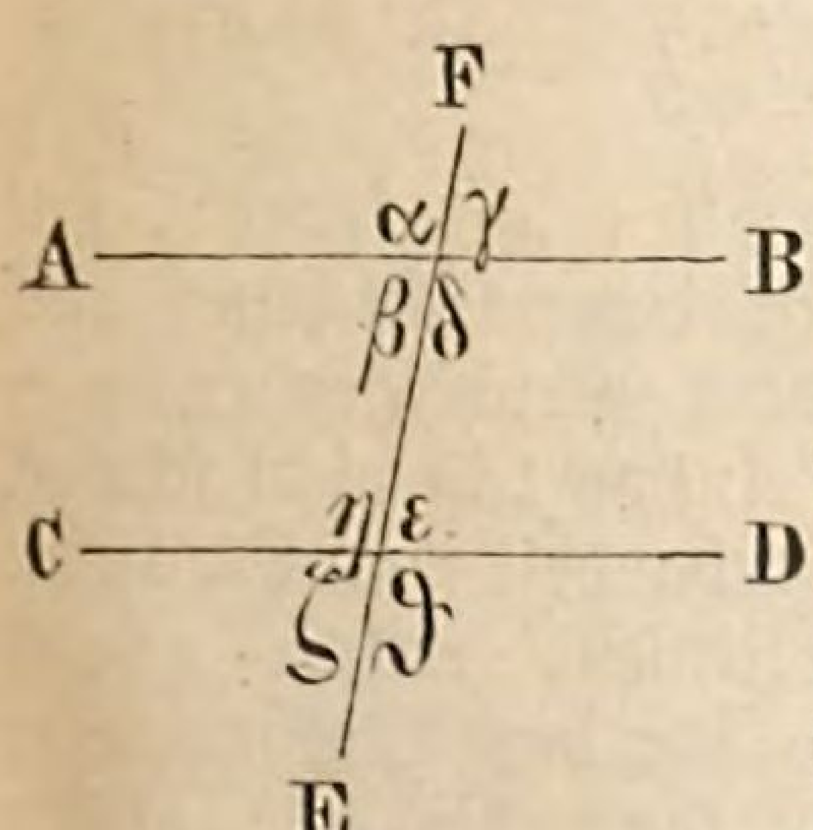


Fig. 11.

Er wird sogleich bemerken, daß α und ϑ, γ und ζ eine ganz andere Lage haben, als β und ε, δ und η. Während nämlich β, ε, δ und η im **Innern** des Raumes liegen, welcher von den Geraden AB und CD eingeschlossen wird, befinden sich die Winkel α, ϑ, γ und ζ an der **Außenseite** dieser beiden Geraden.

Man nennt darum:

α und ϑ
γ und ζ

äußere Wechselwinkel,

β und ε
δ und η

innere Wechselwinkel.

Aeußere Wechselwinkel liegen **außerhalb**, **innere Wechselwinkel innerhalb** der geschnittenen Geraden.

In Figur 8 sind:

a und h, e und d — äußere
b und g, f und c — innere

Wechselwinkel.

32. **Aufgaben.** Der Schüler gebe in Figur 7, 9 und 10 die äußeren und inneren Wechselwinkel an. /~ 30. IV. 11.

B. Lehrsätze über Gegenwinkel und Wechselwinkel. Die Parallelen.

§ 53. Die Gleichheit der Gegenwinkel. In Figur 12 werden die beiden Geraden MN und ST von der dritten UV durchschnitten. Es sind demnach

α und η β und ζ
γ und ε δ und ϑ

Gegenwinkel, ferner

α und ϑ β und ε
γ und ζ δ und η

Wechselwinkel.

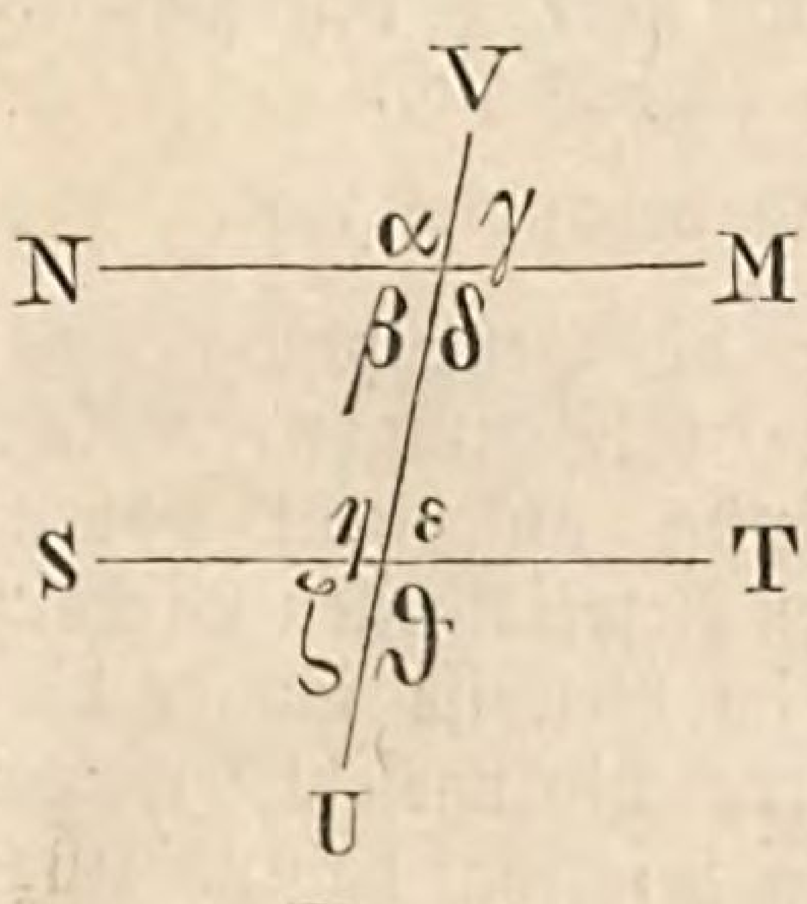


Fig. 12.

Nehmen wir an, zwei Gegenwinkel, etwa α und η, seien einander gleich, so können wir folgenden Satz beweisen:

Lehrsatz II. Sind zwei Gegenwinkel gleich, so müssen auch die anderen Gegenwinkel einander gleich sein.

Voraussetzung. In Figur 12 ist

$$\alpha = \eta$$

Behauptung. Es ist

$$\text{I } \gamma = \varepsilon, \quad \text{II } \beta = \zeta, \quad \text{III } \delta = \vartheta.$$

Beweis. Die Winkel α und γ, ε und η sind Nebenwinkel; darum ist:

$$\gamma + \alpha = 2 \text{ R}$$
$$\varepsilon + \eta = 2 \text{ R}.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind[1]), folglich ist:

$$\gamma + \alpha = \varepsilon + \eta; \text{ ferner ist:}$$
$$\alpha = \eta \text{ nach der Voraussetzung.}$$

Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches[2]), mithin:

$$\gamma + \alpha - \alpha = \varepsilon + \eta - \eta \text{ oder}$$
$$\text{I } \gamma = \varepsilon, \text{ was behauptet war.}$$

Die Winkel γ und β, ε und ζ sind Scheitelwinkel, folglich ist:

$$\gamma = \beta$$
$$\varepsilon = \zeta$$

Setzen wir in Gleichung I für γ den gleichen Winkel β und für ε den gleichen Winkel ζ ein, so erhalten wir:

$$\text{II } \beta = \zeta, \text{ was behauptet war.}$$

Es sind ferner die Winkel α und δ, η und ϑ Scheitelwinkel, daher ist:

$$\alpha = \delta$$
$$\text{und } \eta = \vartheta.$$

Nach der Voraussetzung haben wir:

$$\alpha = \eta.$$

Wenn wir in dieser Gleichung statt α den gleichen Winkel δ und statt η den gleichen Winkel ϑ einsetzen, so ergiebt sich:

$$\text{III } \delta = \vartheta, \text{ was behauptet war.}$$

Damit haben wir die Behauptung vollständig bewiesen. Die **Gleichungen**, welche wir in der **Behauptung** aufgestellt haben, **kehrten** in den einzelnen **Beweistheilen wieder;** wir haben zu ihnen im Beweise immer dieselben römischen Ziffern hinzugesetzt, welche wir in der Behauptung beigefügt haben. Auch künftig werden wir unsere Beweise mit dem Wortlaut der Behauptung schließen; auch den Zusatz „was behauptet war" werden wir in den nächsten Briefen machen, um die Aufmerksamkeit des Schülers auf die Behauptung zurückzulenken. Wir hätten dem Beweise des letzten Lehrsatzes eine mehr mathematische Form geben können, wenn wir nicht die Grundsätze selbst angeführt und die Worte „folglich", „daher", „mithin" durch den üblichen Strich ersetzt hätten. Indessen, wir legen großen Werth darauf, daß sich der Schüler den Wortlaut der Grundsätze genau einpräge, denn die Grundsätze sind, wie wir in der vorigen Lection auseinandergesetzt haben, das Fundament der mathematischen Methode. Darum werden wir auch später zuweilen ihren Wortlaut wiederholen; daneben werden wir aber auch die knappe mathematische Form gebrauchen.

Bei dem eben bewiesenen Lehrsatz mußten wir die Gleichheit zweier Gegenwinkel voraussetzen. Wir nahmen an, daß $\alpha = \eta$ sei; wir hätten aber auch voraussetzen können, daß $\gamma = \varepsilon$, oder daß $\beta = \zeta$, oder daß $\delta = \vartheta$ sei.

Mit der Voraussetzung hätte sich auch die Behauptung geändert. Würden wir vorausgesetzt haben, daß $\beta = \zeta$ sei, so müßte die Behauptung heißen:

$$\alpha = \eta, \ \gamma = \varepsilon, \ \delta = \vartheta.$$

Aufgaben. Wie müßte die Behauptung ausfallen, wenn die Voraussetzung wäre

1) $\gamma = \varepsilon$ 2) $\delta = \vartheta$?

§ 54. Grundsatz VII. Noch eine andere Bemerkung wollen wir machen, bevor wir einen neuen Lehrsatz beginnen. In § 47 der vorigen Lection haben wir den Lehrsatz bewiesen, daß die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, vier Rechte beträgt. Bei dem Beweise dieses Satzes kamen wir auf die Gleichung:

$$r + u + v + t = 4 \text{ R}.$$

Für die Summe $u + v$ **setzten** wir die **gleiche** Größe s ein. Eine ähnliche Einsetzung haben wir auch beim Beweise des letzten Lehrsatzes vorgenommen; z. B. haben wir für Winkel α den gleichen Winkel δ und für Winkel η den gleichen Winkel ϑ eingeführt, um die Gleichung

$$\alpha = \eta$$
$$\text{in } \delta = \vartheta$$

umzuwandeln. Wir wollen uns fragen, mit welchem Rechte wir in einer Gleichung eine Größe mit einer andern gleich großen vertauschen können. Die Antwort ist nicht schwer. In der Mathematik behandelt man Größen. Winkel oder gerade Linien, welche gleich groß sind, haben also für den Mathematiker gleichen Werth. Er kann die eine gleiche Größe für die andere gebrauchen, die eine für die andere einsetzen. Wir haben also den

Grundsatz VII. Größen, welche gleich sind, kann man für einander einsetzen.

[1]) Siehe § 10 Grundsatz II. [2]) Siehe § 11 Grundsatz IV.

§ 55. Lehrsätze über Gegen- und Wechselwinkel. Wir wollen jetzt einige Sätze in rein mathematischer Form behandeln, welche für den nächsten Abschnitt wichtig sind:

Lehrsatz III. Wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, müssen auch die Wechselwinkel einander gleich sein.

Voraussetzung. In Figur 12 ist

$$\alpha = \eta.$$

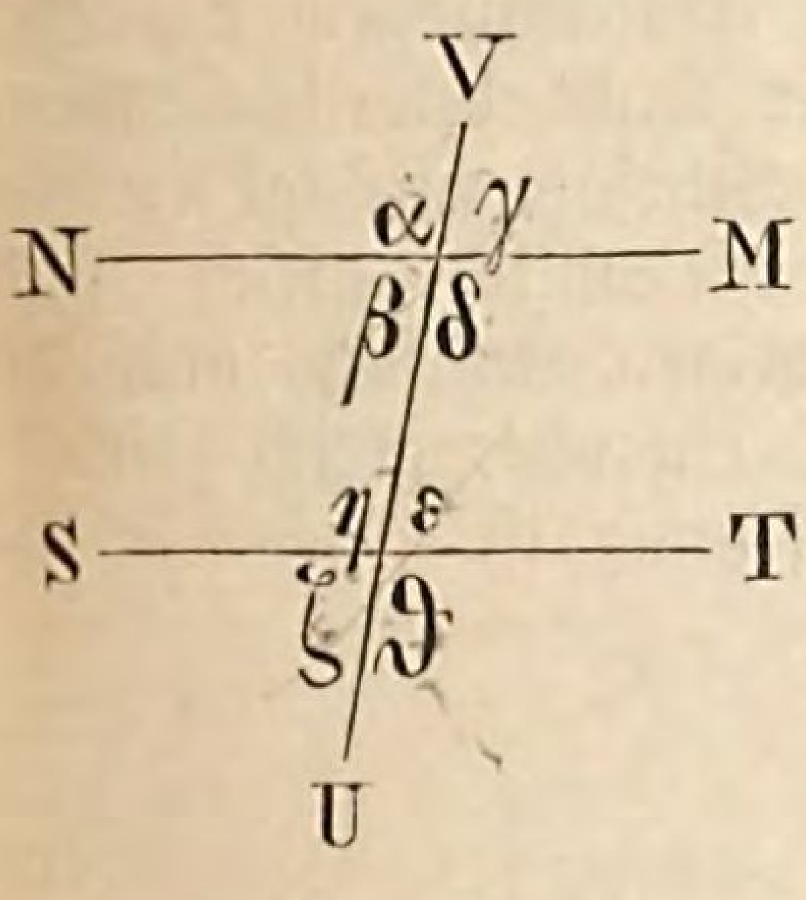


Fig. 12.

Behauptung.

a) I $\alpha = \vartheta$
II $\gamma = \zeta$
b) III $\beta = \varepsilon$
IV $\delta = \eta$[1]).

Beweis. η und ϑ sind Scheitelwinkel; darum ist:

$$\eta = \vartheta.$$

Nach der Voraussetzung haben wir:

$$\alpha = \eta.$$

Setzen wir in dieser Gleichung nach Grundsatz VII für η den gleichen Winkel ϑ ein, so erhalten wir:

I $\alpha = \vartheta$, was behauptet war.

γ und α, ferner ζ und η sind Nebenwinkel; es ist deswegen

$\gamma + \alpha = 2$ R
und $\zeta + \eta = 2$ R

$\gamma + \alpha = \zeta + \eta$ nach Gr. II.
$\alpha = \eta$ nach Voraussetzung

$\gamma + \alpha - \alpha = \zeta + \eta - \eta$ nach Gr. IV.
oder II $\gamma = \zeta$, was behauptet war.

γ und β, ζ und ε sind Scheitelwinkel, darum ist:

$$\gamma = \beta$$
$$\zeta = \varepsilon.$$

Wird in Gleichung II für γ der gleiche Winkel β und für ζ der gleiche Winkel ε eingesetzt, so ergiebt sich:

III $\beta = \varepsilon$, was behauptet war.

Es sind ferner α und δ, ϑ und η Scheitelwinkel, mithin ist:

$$\alpha = \delta$$
$$\vartheta = \eta.$$

[1]) Unter a) haben wir die äußeren, unter b) die inneren Wechselwinkel zusammengefaßt.

Wir haben bereits bewiesen, daß $\alpha = \vartheta$ ist. Vertauschen wir in dieser letzten Gleichung α mit dem gleichen Winkel δ, und ϑ mit dem gleichen Winkel η, so ergiebt sich

IV $\delta = \eta$, was behauptet war.

Lehrsatz IV. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, müssen auch die anderen Wechselwinkel einander gleich sein.

Voraussetzung. In Fig. 12 ist

$$\alpha = \vartheta.$$

Behauptung. I $\gamma = \zeta$, II $\beta = \varepsilon$,
III $\delta = \eta$.

Beweis. γ und α, ferner ϑ und ζ sind Nebenwinkel, folglich ist

$\gamma + \alpha = 2$ R
$\zeta + \vartheta = 2$ R

$\gamma + \alpha = \zeta + \vartheta$ nach Gr. II.
$\alpha = \vartheta$ nach Voraussetzung.

$\gamma + \alpha - \alpha = \zeta + \vartheta - \vartheta$ nach Gr. IV.
oder I $\gamma = \zeta$, was behauptet war.

Weil γ und β, ζ und ε Scheitelwinkel sind, haben wir:

$$\gamma = \beta$$
$$\zeta = \varepsilon.$$

Setzen wir für γ und ζ die gleichen Winkel β und ε in Gleichung I ein, so erhalten wir:

II $\beta = \varepsilon$, was behauptet war.

Ferner sind α und δ, ϑ und η Scheitelwinkel; deswegen ist:

$$\alpha = \delta$$
$$\vartheta = \eta.$$

Nach der Voraussetzung haben wir:

$$\alpha = \vartheta.$$

Wenn wir in dieser Gleichung α und ϑ mit den gleichen Winkeln δ und η vertauschen, ergiebt sich

III $\delta = \eta$, was behauptet war.

Wir haben in der Voraussetzung angenommen, daß die beiden Wechselwinkel α und ϑ einander gleich seien; wir hätten ebenso gut voraussetzen können, daß $\gamma = \zeta$,
oder daß $\beta = \varepsilon$,
oder daß $\delta = \eta$
sei, denn γ und ζ, β und ε, δ und η sind ebenso gut Wechselwinkel, wie α und ϑ. Wie in Lehrsatz II muß sich mit der Voraus-

setzung auch hier die Behauptung ändern. Ist die Voraussetzung z. B.

$$\beta = \varepsilon$$

so muß die Behauptung heißen:

$$\text{I } \alpha = \vartheta \quad \text{II } \gamma = \zeta \quad \text{III } \delta = \eta.$$

Ja noch mehr: wenn die Behauptung geändert wird, so muß auch der Beweis sich ändern. Bleibt er auch in seinen wesentlichen Zügen bestehen, so müssen doch oft andere Buchstaben gesetzt werden. Wir wollen vom Schüler noch nicht verlangen, daß er der veränderten Behauptung den Beweis anpasse, denn die ganze Beweismethode wird ihm noch zu neu sein, als daß er selbständig damit operiren könnte. Er möge aber immerhin den Versuch machen; wir werden uns sehr freuen, wenn Zuschriften uns beweisen, daß er den Versuch nicht vergeblich angestellt hat. Im vierten Briefe werden wir ihm Gelegenheit geben, sich selbständig im Beweisverfahren zu üben. Vorläufig bitten wir ihn, die folgenden Fragen zu beantworten:

Aufgaben. Wie muß die Behauptung lauten, wenn vorausgesetzt wird

$$1)\ \gamma = \zeta \qquad 2)\ \delta = \eta?$$

Wir wollen diesen Paragraphen mit dem Beweise eines neuen Satzes schließen.

In Figur 13 sind

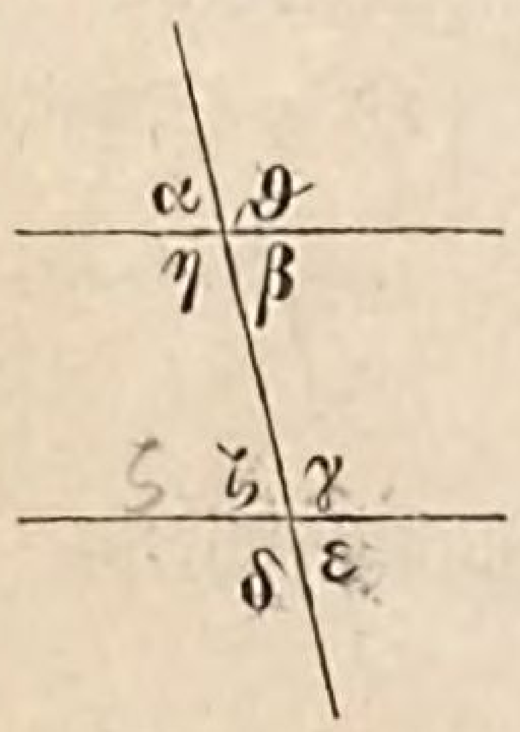


Fig. 13.

α und ζ, η und δ, β und ε, ϑ und γ Gegenwinkel.

Ferner sind

α und ε, ϑ und δ äußere Wechselwinkel.

und η und γ, β und ζ innere Wechselwinkel.

Wir wollen nun beweisen, daß alle Gegenwinkel gleich sein müssen, wenn zwei Wechselwinkel gleich sind.

Lehrsatz V. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, müssen alle Gegenwinkel einander gleich sein.

Voraussetzung. In Fig. 13 ist

$$\alpha = \varepsilon.$$

Behauptung. Es ist

$$\text{I } \alpha = \zeta \quad \text{II } \eta = \delta \quad \text{III } \beta = \varepsilon \quad \text{IV } \vartheta = \gamma.$$

Beweis. ε und ζ sind Scheitelwinkel, darum ist:

$$\varepsilon = \zeta.$$

Nach der Voraussetzung haben wir:

$$\alpha = \varepsilon.$$

Setzen wir für ε den gleichen Winkel ζ ein, so ergiebt sich:

$$\text{I } \alpha = \zeta.$$

Die drei anderen Gleichungen der Behauptung können wir leicht beweisen, wenn wir auf den vorigen Lehrsatz zurückgehen.

Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, müssen nach dem vorigen Lehrsatze auch die anderen Wechselwinkel einander gleich sein.

Nach der Voraussetzung ist

$$\alpha = \varepsilon,$$

folglich ist auch

$$\text{a) } \eta = \gamma$$
$$\text{b) } \beta = \zeta$$
$$\text{c) } \vartheta = \delta$$

Nun ist ferner:

$$1)\ \gamma = \delta$$
$$2)\ \zeta = \varepsilon$$
$$3)\ \delta = \gamma$$

weil γ und δ, ζ und ε, δ und γ Scheitelwinkel sind.

Vertauschen wir in den Gleichungen a, b und c die Winkel γ, ζ und δ mit den gleichen Winkeln δ, ε und γ, so erhalten wir

$$\text{II } \eta = \delta$$
$$\text{III } \beta = \varepsilon$$
$$\text{IV } \vartheta = \gamma,$$

was behauptet war.

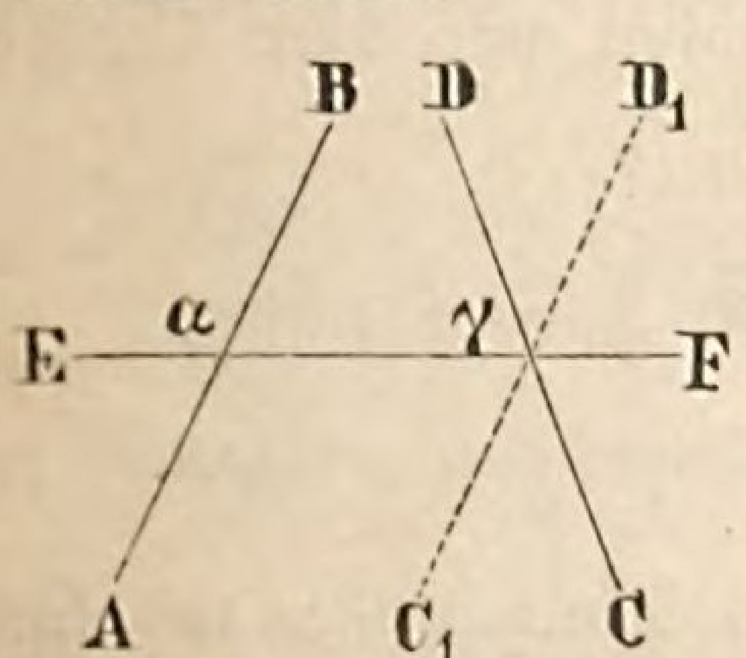
§ 56. Zusammenfassung der Lehrsätze II, III, IV und V. Die letzten vier Lehrsätze handelten von den Gegen- und Wechselwinkeln. Zunächst wiesen wir nach, daß alle Gegenwinkel gleich sein müssen, wenn zwei Gegenwinkel einander gleich sind. In Lehrsatz III wurde bewiesen, daß auch die Wechselwinkel gleich sind, wenn wir zwei Gegenwinkel als gleich annehmen. Lehrsatz III und IV endlich zeigten uns, daß wir dieselben Behauptungen auch aufstellen können, wenn wir statt der Gleichheit zweier Gegenwinkel die Gleichheit zweier Wechselwinkel voraussetzen. Fassen wir den Inhalt aller dieser Lehrsätze zusammen, so können wir den Satz aussprechen:

Lehrsatz VI. Sind zwei Gegen- oder Wechselwinkel gleich, so müssen auch die

anderen Gegen- und Wechselwinkel einander gleich sein. 3. V. 10.

§ 57. Parallele Linien. Die **parallelen** Linien oder die **Parallelen** sind dem Schüler sicher bekannt. Hat er doch wohl die Schienen der Eisenbahn, die Sprossen der Leiter, die Baumreihen einer Allee immer parallel genannt. „**Parallel**" kommt her von den griechischen Worten „παρ̕ ἀλλήλων", (par allélon): „**neben einander** her". Wenn man den Schüler aufforderte, die parallelen Linien näher zu charakterisiren, so würde auch er von ihnen sagen, sie liefen ohne sich zu schneiden, immer in demselben Abstande **neben einander** her. Er würde damit in der That eine Eigenschaft der „parallelen" Linien nennen, welche wir später besprechen wollen. Die bisherigen Lehrbücher haben diese Eigenschaft bei der Definition der parallelen Linien zu Grunde gelegt. Wir werden aus methodischen Gründen einen andern Weg einschlagen.

Zunächst wollen wir die Parallelen in gerade und krumme Parallele eintheilen. Gerade Parallele sind zum Beispiel die Sprossen einer Leiter, krumme Parallele sind concentrische Kreise und die Schienen der Eisenbahn, wenn sie nicht in gerader Richtung verlaufen. Die krummen Parallelen können wir erst später untersuchen; vorläufig wollen wir uns mit den geraden Linen befassen, welche man parallel nennt.


Fig. 14.

In Fig. 14 werden die beiden Geraden AB und CD von der dritten Geraden EF geschnitten. Wie der Schüler sofort bemerkt, ist Winkel α größer als Winkel γ. Wenn man aber CD um den Punkt dreht, in welchem sich die beiden Geraden CD und EF durchschneiden, so wird CD in Lage C_1D_1 kommen, so daß $\alpha = \gamma$ ist. Man sagt dann, die Linien C_1D_1 und AB hätten „**gleiche Richtung**", sie seien „**gleichlaufend**", oder sie seien „**parallel**".

α und γ sind zwei Gegenwinkel. Wir werden darum die parallelen Geraden folgendermaßen definiren:

Zwei gerade Linien nennt man parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel einander gleich sind.

Der Definition der Parallelen können wir eine andere Fassung geben, wenn wir auf Lehrsatz VI Rücksicht nehmen. Wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, so müssen auch die anderen Gegenwinkel und die Wechselwinkel nach diesem Satze einander gleich sein, wir können darum die Parallelen auch so definiren:

Definition II. Zwei gerade Linien heißen parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die Gegen- und Wechselwinkel einander gleich sind.

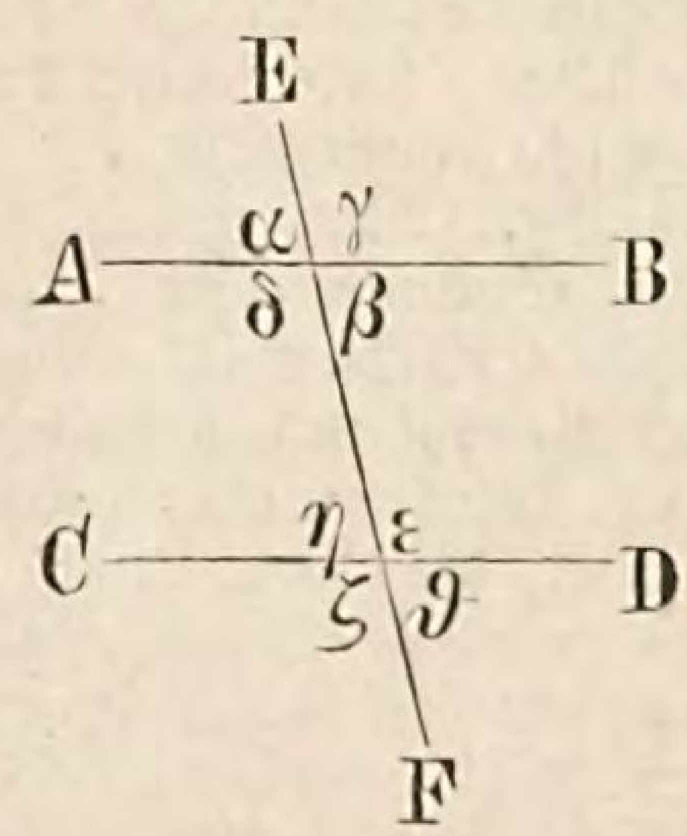
Die Gegen- und Wechselwinkel müssen gleich sein, wenn wir zwei Geraden die Bezeichnung „parallel" geben. Wie wir bereits gesehen haben, ist diese Bedingung erfüllt, wenn zwei Gegenwinkel gleich sind; nach Lehrsatz VI ist sie auch erfüllt, wenn ein Wechselwinkelpaar gleich ist. Wir können darum den Satz aufstellen:

Lehrsatz VII. Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind, müssen parallel sein.

In Fig. 15 werden die beiden Geraden AB und CD von der dritten Geraden EF geschnitten. γ und ε sind Gegenwinkel. Nehmen wir an, es sei

$$\gamma = \varepsilon$$

so sind nach dem vorigen Lehrsatze die Geraden AB und CD einander parallel.


Fig. 15.

In Fig. 12 werden die Geraden MN und ST von der dritten Geraden UV geschnitten. Sind die beiden Wechselwinkel γ und ζ gleich, in Zeichen: ist

$$\gamma = \zeta$$

so müssen nach dem letzten Lehrsatze die Geraden MN und ST parallel sein.

Für das Wort „parallel" hat man das Zeichen || eingeführt.

AB || CD bedeutet:

Die Gerade AB ist parallel der Geraden CD.

MN || ST bedeutet:

Die Gerade MN ist parallel der Geraden ST.

C. Recapitulation.

Nachdem wir am Anfang der **fünften Lection** die Aufgaben gelöst und die Fragen beantwortet hatten, wandten wir uns in Abschnitt C der Be-

handlung der Nebenwinkel zu. Wir definirten die Nebenwinkel erst und ermittelten dann ihre Summe. Diese Summe konnten wir um so leichter bestimmen, als wir schon in dem Abschnitt B der vierten Lection gelehrt hatten, wie geometrische Gebilde addirt werden. Aus dem Satze über die Summe der Nebenwinkel zogen wir mehrere Folgerungen und zeigten unter Anderem, wie man auf leichte Weise untersuchen könne, ob das Winkelmaß, von dem wir schon in § 19 des ersten Briefes gesprochen hatten, wirklich einen rechten Winkel darstelle. Die Summe, welche wir für Nebenwinkel gefunden hatten, ließ sich leicht in Grade umsetzen. Wir sahen, daß zwei Nebenwinkel zusammen 180 Grad betragen, und konnten nun ohne Schwierigkeiten die Größe des einen Nebenwinkels berechnen, wenn der andere gegeben ist.

Im Abschnitt D der fünften Lection erörterten wir die Euklid'sche Beweismethode. Zwar hatten wir auch schon in den beiden ersten Briefen unsere Lehrsätze bewiesen, aber wir hatten uns dabei nicht der herkömmlichen Form bedient, welche schon von Euklid in ihren wesentlichsten Zügen ausgebildet wurde. Wir besprachen zuerst, daß man den Inhalt des Lehrsatzes in den vorausgesetzten und behaupteten Theil zerlegen könne, und daß man gewöhnlich diese Theile von einander gesondert unter dem Namen Voraussetzung und Behauptung dem Lehrsatze folgen lasse. Hierauf gingen wir zum Beweise über. Wir zeigten, daß die Schlüsse nach den Grundsätzen das Fundament der Euklid'schen Beweismethode seien, und setzten dann an einem bestimmten Lehrsatze auseinander, wie man den Beweis führen müsse. Wir hatten dazu den Satz gewählt, daß die Summe aller Winkel um einen Punkt herum gleich 4 Rechten sei. Dieses Satzes bedienten wir uns zugleich, um anzugeben, auf welche Weise man convexe Winkel messen könne.

Nachdem wir noch über die Bedeutung der mathematischen Methode für andere Wissenschaften gesprochen hatten, begannen wir die **sechste Lection** mit der Behandlung der Scheitelwinkel. Wir gaben eine Definition derselben und bewiesen, daß sie einander gleich seien. Darnach gingen wir zu den Gegenwinkeln und Wechselwinkeln über. Wir erklärten, was man unter denselben verstehe, indem wir auf mehrere Figuren hinwiesen. Ehe wir Aufgaben über Gegen- und Wechselwinkel brachten, machten wir den Schüler mit den ersten acht griechischen Schriftzeichen bekannt. Zugleich erwähnten wir, daß wir später immer nur griechische Buchstaben zur Benennung der Winkel benützen wollen, weil mit den kleinen lateinischen Buchstaben begrenzte gerade Linien oder Strecken bezeichnet werden. Die griechischen Buchstaben fanden sofort Verwendung in den Figuren, welche wir den Aufgaben und Lehrsätzen über Gegen- und Wechselwinkel beifügten. Vier solcher Lehrsätze stellten wir auf; den Inhalt derselben faßten wir in einem fünften Lehrsatze zusammen. Im Anschluß an die Gegen- und Wechselwinkel behandelten wir die parallelen Geraden. Bei der Definition derselben gingen wir nicht, wie es gewöhnlich geschieht, von der Eigenschaft aus, daß sie immer in demselben Abstande nebeneinander her laufen, ohne sich zu schneiden; wir nannten vielmehr zwei gerade Linien parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel einander gleich sind. Dieser Definition konnten wir noch eine andere Fassung geben, indem wir auf frühere Lehrsätze zurückgingen. Schließlich brachten wir noch einen Satz über parallele Linien und gaben an, welches Zeichen man für das Wort „parallel" gebraucht.

D. Wiederholungsfragen.

1) Wie haben wir die Nebenwinkel definirt?
2) Gleich wie viel Rechten ist die Summe zweier Nebenwinkel?
3) Wie heißt die Summe der Zahlen 6, 8 und 10?
4) Ein Winkel möge gleich einem Rechten sein; wie groß ist dann sein Nebenwinkel?
5) Welches Zeichen gebraucht man für das Wort senkrecht?
6) Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, entstehen vier Winkel; der eine derselben möge einen Rechten betragen, wie groß sind dann die drei anderen?
7) Die Gradanzahl eines Winkels sei bekannt; wie findet man die Gradanzahl seines Nebenwinkels?
8) In welche beiden Theile zerfällt der Lehrsatz?
9) Was erreichen wir, wenn wir einen Grundsatz anwenden?
10) Was versteht man in der Physik unter Geschwindigkeit?
11) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Lichtes?
12) Gleich wie viel Rechten ist die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen?
13) Wie kann man die Gradanzahl eines convexen Winkels bestimmen?
14) Wie haben wir Scheitelwinkel definirt?
15) Welchen Lehrsatz haben wir über Scheitelwinkel aufgestellt?
16) Was sind Gegenwinkel?
17) Was sind Wechselwinkel?
18) Welchen deutschen Buchstaben entspricht das α, γ, ε und η?
19) Welchen deutschen Buchstaben entspricht das β, δ, ζ und ϑ?
20) Welche geometrischen Gebilde wollen wir künftig mit griechischen Buchstaben bezeichnen?
21) Welche Lehrsätze haben wir über Gegenwinkel und Wechselwinkel aufgestellt?
22) Von welchen griechischen Worten kommt die Bezeichnung „parallel" her?
23) Welche Definition haben wir von parallelen Linien gegeben?
24) Welche Ausdrücke werden gleichbedeutend mit dem Worte „parallel" gebraucht?
25) Sind die verticalen Richtungen einander parallel?
26) Wie groß ist $\alpha + \beta - \beta$, wenn α und β Winkel sind?
27) Wie heißen die ersten sechs mathematischen Grundsätze?
28) Welchen Grundsatz haben wir im dritten Briefe aufgestellt?
29) Welcher mathematischen Zeichen haben wir uns bedient?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 7 und 8.
Planimetrie.

Als
Manuscript
gedruckt.

4. Brief
der
Mathematischen Unterrichts-Briefe.
Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung
hervorragender Fachmänner und Gelehrten
bearbeitet von

W. Burckhardt.

Den Strebsamen unterstützt das Geschick.

Lection 7.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 5.

Abschnitt C. § 44. In Fig. 6 sind die Winkel

a und e	b und f
e und b	f und a

Nebenwinkel; darum ist

$a + e = 2\,R \qquad b + f = 2\,R$
$e + b = 2\,R \qquad f + a = 2\,R.$

In Fig. 7 sind die Winkel

c und g	d und h
g und d	h und c

Nebenwinkel; mithin ist

$c + g = 2\,R \qquad d + h = 2\,R$
$g + d = 2\,R \qquad h + c = 2\,R.$

§ 46. Aufgaben I. Der andere Nebenwinkel beträgt:

a) 155° b) 126° c) 105° d) 88° e) 72° f) 57°, denn es sind:

$a)\ 180^0 - 25^0 = 155^0 \qquad d)\ 180^0 - 92^0 = 88^0$
$b)\ 180^0 - 54^0 = 126^0 \qquad e)\ 180^0 - 108^0 = 72^0$
$c)\ 180^0 - 75^0 = 105^0 \qquad f)\ 180^0 - 123^0 = 57^0.$

Aufgaben II. Der Winkel m ist gleich 55 Grad; n und o sind Nebenwinkel von m, sie betragen darum 125 Grad, denn es sind $180^0 - 55^0 = 125^0$. Der Winkel p ist Nebenwinkel von n, er beträgt mithin 180 — 125 d. i. 55 Grad.

Abschnitt D. § 48. Aufgaben I. Wählen wir statt Figur 15 die Figur 17, so heißt die **Voraussetzung:**

Gegeben sind uns in Figur 17 die Winkel a, b, c, d, e, f, g, welche um den Punkt P herum liegen,

und die **Behauptung:**

$$a + b + c + d + e + f + g = 2\,R.$$

Aufgaben II. Die concaven Winkel c und s betragen 91 und 118 Grad; darum sind die convexen Winkel d und t gleich 269 und gleich 242 Grad, denn es bestehen die Gleichungen:

$$360^0 - 91^0 = 269^0; \qquad 360^0 - 118^0 = 242^0.$$

Lection 6.

Abschnitt A. § 50. In Figur 6 sind m und p, n und o, in Figur 7 sind a und b, e und f, c und d, g und h Scheitelwinkel; mithin ist:

$$\left.\begin{matrix} m = p \\ n = o \end{matrix}\right\} \text{ in Fig. 6} \qquad \left.\begin{matrix} e = f \\ c = d \\ g = h \end{matrix}\right\} \text{ in Fig. 7.}$$
$$a = b \text{ in Fig. 7}$$

§ 51. Aufgaben I. Die Gleichungen:

$1)\ \alpha = \beta, \quad 4)\ \alpha = \varepsilon, \quad 7)\ \beta = \vartheta,$
$2)\ \beta = \eta, \quad 5)\ \gamma = \delta, \quad 8)\ \gamma = \zeta,$
$3)\ \delta = \vartheta, \quad 6)\ \delta = \eta, \quad 9)\ \eta = \vartheta$

der Reihe nach müssen gesprochen werden:

1) Winkel Alpha	ist	gleich	Winkel Betha
2) Winkel Beta	„	„	Winkel Eta
3) Winkel Delta	„	„	Winkel Theta
4) Winkel Alpha	„	„	Winkel Epsilon
5) Winkel Gamma	„	„	Winkel Delta
6) Winkel Delta	„	„	Winkel Eta
7) Winkel Beta	„	„	Winkel Theta
8) Winkel Gamma	„	„	Winkel Zeta
9) Winkel Eta	„	„	Winkel Theta.

Aufgaben II. Gegenwinkel sind:

a und c, e und g, f und h, b und d	in Fig. 7	α und γ, β und δ, ε und η, ζ und ϑ	in Fig. 10

Wechselwinkel sind:

a und d, f und g, e und h, b und c	in Fig. 7	α und ϑ, ε und δ, β und η, ζ und γ	in Fig. 10.

§ 52. In Figur 7 sind

a und d, f und g } äußere Wechselwinkel. e und h, b und c } innere Wechselwinkel.

In Figur 9 sind:

m und u, n und v } äußere Wechselwinkel. r und t, p und s } innere Wechselwinkel.

In Figur 10 sind

α und ϑ, ε und δ } äußere Wechselwinkel. β und η, ζ und γ } innere Wechselwinkel.

§ 53. Wenn wir voraussetzen: $\gamma = \varepsilon$,
ist die Behauptung: $\alpha = \eta$, $\beta = \zeta$, $\delta = \vartheta$.

Wenn die Behauptung ist: $\delta = \vartheta$,
heißt die Behauptung; $\alpha = \eta$, $\beta = \zeta$, $\gamma = \varepsilon$.

§ 55. Setzen wir voraus: $\gamma = \zeta$,
so ist die Behauptung: $\alpha = \vartheta$, $\beta = \varepsilon$, $\delta = \eta$.

Wird vorausgesetzt: $\delta = \eta$,
heißt die Behauptung: $\alpha = \vartheta$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \zeta$.

B. Antworten auf die in Abschnitt D der Lection 6 gestellten Fragen.

1) Unter Nebenwinkeln haben wir Winkel verstanden, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine gerade Linie bilden. 2) Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten. 3) Die Summe der Zahlen 6, 8, 10 ist: 6 + 8 + 10. 4) Der Nebenwinkel eines Rechten ist wieder ein Rechter. 5) Für das Wort „senkrecht" macht man das Zeichen ⊥. 6) Wenn von den vier Winkeln, welche von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden, der eine ein Rechter ist, so müssen auch die anderen drei je einen Rechten betragen. 7) Siehe § 46. 8) Der Lehrsatz zerfällt in die Voraussetzung und in die Behauptung. 9) Wenn wir einen Grundsatz anwenden, erschließen wir aus zwei Gleichungen eine dritte. 10) In der Physik versteht man unter Geschwindigkeit den Weg, welchen ein sich bewegender Körper in einer Secunde zurücklegt. 11) Das Licht legt 42000 Meilen in der Secunde zurück. 12) Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, beträgt vier Rechte. 13) Die Gradanzahl eines convexen Winkels bestimmt man, indem man die Gradanzahl des entsprechenden concaven Winkels von 360 Grad abzieht. 14) Siehe § 50 Definition I. 15) Scheitelwinkel sind einander gleich. 16) Unter dem Namen Gegenwinkel faßt man diejenigen Winkel zusammen, welche

1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) auf derselben Seite der schneidenden,
3) auf derselben Seite der geschnittenen Geraden

liegen. 17) Unter Wechselwinkeln versteht man diejenigen Winkel, welche

1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) auf verschiedenen Seiten der schneidenden,
3) auf verschiedenen Seiten der geschnittenen

Geraden liegen. 18) Das α entspricht dem deutschen a, das γ dem g, das ε dem ĕ und das η dem ē. 19) Das β entspricht dem b, das δ dem d, das ζ dem z und das ϑ dem th. 20) Die Winkel wollen wir künftig mit griechischen Buchstaben bezeichnen. 21) Siehe Lection 6, Abschnitt B, Lehrsatz II, III, IV und V. 22) Das Wort „parallel" kommt von dem griechischen παρ' ἀλλήλων (par allélōn) her, daß zu deutsch neben einander her heißt. 23) Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Gegen- und Wechselwinkel einander gleich sind, nennt man sie parallel. 24) Statt die Worte „zwei gerade Linien sind parallel" zu gebrauchen, sagt man auch: „die beiden Geraden sind gleichlaufend, oder sie haben gleiche Richtung". 25) Die verticalen Linien sind nicht genau parallel, weil sie nicht beständig neben einander her laufen, sondern sich im Mittelpunkte der Erde schneiden. 26) Es ist $\alpha + \beta - \beta = \alpha$. 27) Siehe § 9 Grundsatz I und II, § 10 Grundsatz III und IV, und § 11 Grundsatz V und VI. 28) Größen, welche gleich sind, kann man für einander einsetzen. 29) Wir haben uns bisher der folgenden Zeichen bedient: = (gleich), + (plus), — (minus), × und . (mal), : und — (dividirt durch), ———— (folglich), ⊥ (senkrecht) und || (parallel).

C. Sätze über Parallele.

§ 58. Die Gegen- und Wechselwinkel bei Parallelen. In dem letzten Paragraphen der vorhergehenden Lection haben wir begonnen, die parallelen geraden Linien zu besprechen. Bei der Definition derselben gingen wir nicht von der Eigenschaft aus, daß sie sich niemals schneiden, so weit man sie auch verlängern mag. Wir verwendeten vielmehr die Gegen- und Wechselwinkel, um die parallelen Geraden zu definiren.

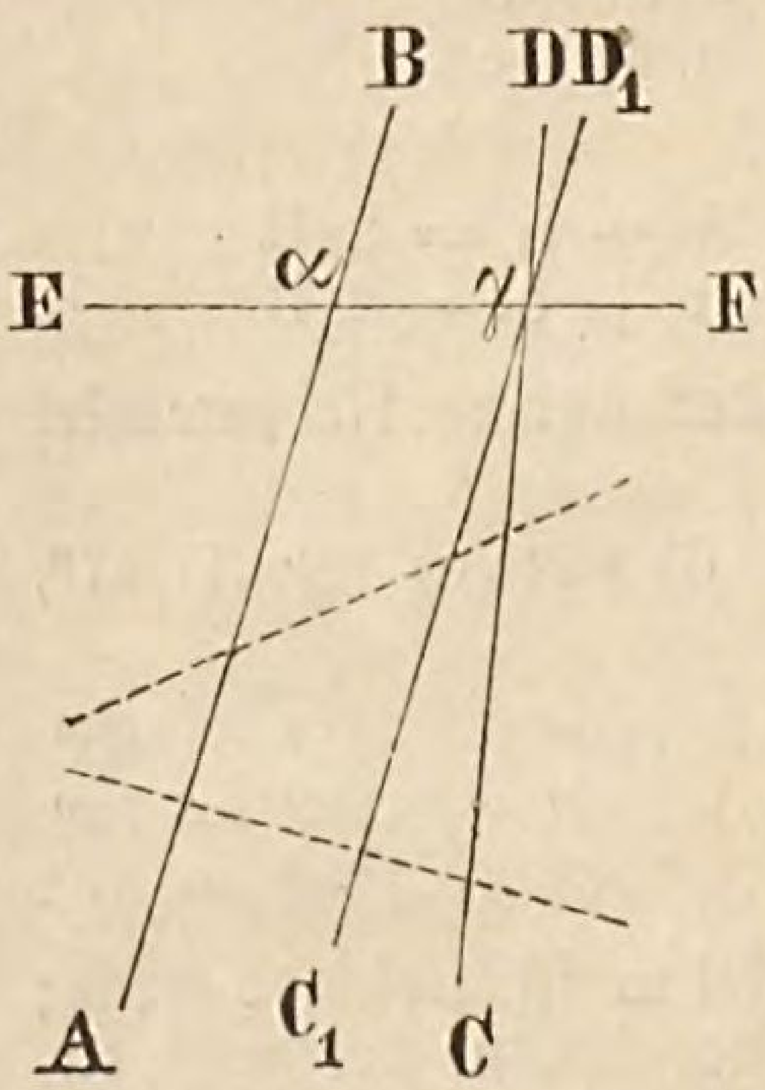


Fig. 1.

In Figur 1 werden die beiden Geraden AB und CD von der dritten EF geschnitten. Sind die Gegenwinkel α und γ ungleich, so sagt man: die beiden Geraden AB und CD haben **verschiedene Richtung.** Wird dagegen CD durch Drehung in die Lage C_1D_1 gebracht, bei welcher die beiden Winkel α und γ gleiche Größe haben, so nennt man AB und C_1D_1 **parallel,** oder man sagt: AB und CD haben

gleiche Richtung, AB und CD sind **gleichlaufend.**

Wenn die beiden Gegenwinkel α und γ gleich sind, müssen nach § 56, Lehrsatz VI auch die anderen Gegenwinkel und die Wechselwinkel gleich sein, welche von AB, CD und EF gebildet werden. Wir konnten darum die parallelen Geraden folgendermaßen definiren:

Zwei gerade Linien heißen parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die Gegen- und Wechselwinkel gleich sind.

An diese Definition schlossen wir den Satz:

Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Gegen- oder Wechselwinkel gleich sind, müssen parallel sein.

Gegen die Definition der Parallelen und gegen den letzten Lehrsatz wird in dem Schüler ein Bedenken aufsteigen. Wir haben zwei parallele Gerade immer in Zusammenhang mit einer bestimmten dritten Geraden betrachtet, welche durch die beiden Parallelen hindurch gelegt ist; wir nannten zwei gerade Linien parallel, wenn sie mit dieser dritten Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel einschließen. Diesen Zusammenhang mit der dritten schneidenden Geraden hätten wir erwähnen sollen, wenn wir von zwei Parallelen sprachen; wir hätten sagen müssen: Zwei Gerade sind parallel oder haben gleiche Richtung „in Bezug auf eine bestimmte schneidende Gerade". Nehmen wir an, daß in Figur 1 die beiden Geraden AB und C_1D_1 zwar mit EF aber nicht mit den punktirten Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel bilden, dann wäre AB und C_1D_1 zwar parallel „in Bezug auf EF", aber nicht „in Bezug auf die durch Punkte angedeuteten Linien."

Nur in einem Falle sind wir berechtigt, die Worte „in Bezug auf rc." hinter „parallel" auszulassen, nämlich, wenn wir nachweisen können,

daß zwei gerade Linien, welche in Bezug auf **eine** Gerade parallel sind, auch in Bezug auf **alle anderen** Geraden parallel sein müssen, von denen sie durchschnitten werden,

oder mit anderen Worten,

daß zwei gerade Linien, die mit einer **dritten** schneidenden Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel bilden, auch gleiche Gegen- und Wechselwinkel mit **allen anderen** Geraden einschließen, welche durch sie hindurchgelegt werden können.

In diesem Falle dürfen wir nicht annehmen, daß in Figur 1 die beiden Geraden AB und C_1D_1 zwar mit EF, aber nicht mit den punktirten Linien gleiche Gegenwinkel einschließen. Ist AB parallel C_1D_1 „in Bezug auf die schneidende Gerade EF", so ist es selbstverständlich, daß AB und C_1D_1 auch parallel verlaufen „in Bezug auf die punktirten Linien, ja in Bezug auf alle Geraden, welche durch AB und C_1D_1 hindurchgelegt werden können." Die Wörter „in Bezug auf rc." hinter dem Worte „parallel" drücken dann keine Eigenthümlichkeit einer bestimmten schneidenden Geraden aus; sie haben ihre Bedeutung verloren und bleiben lieber fort.

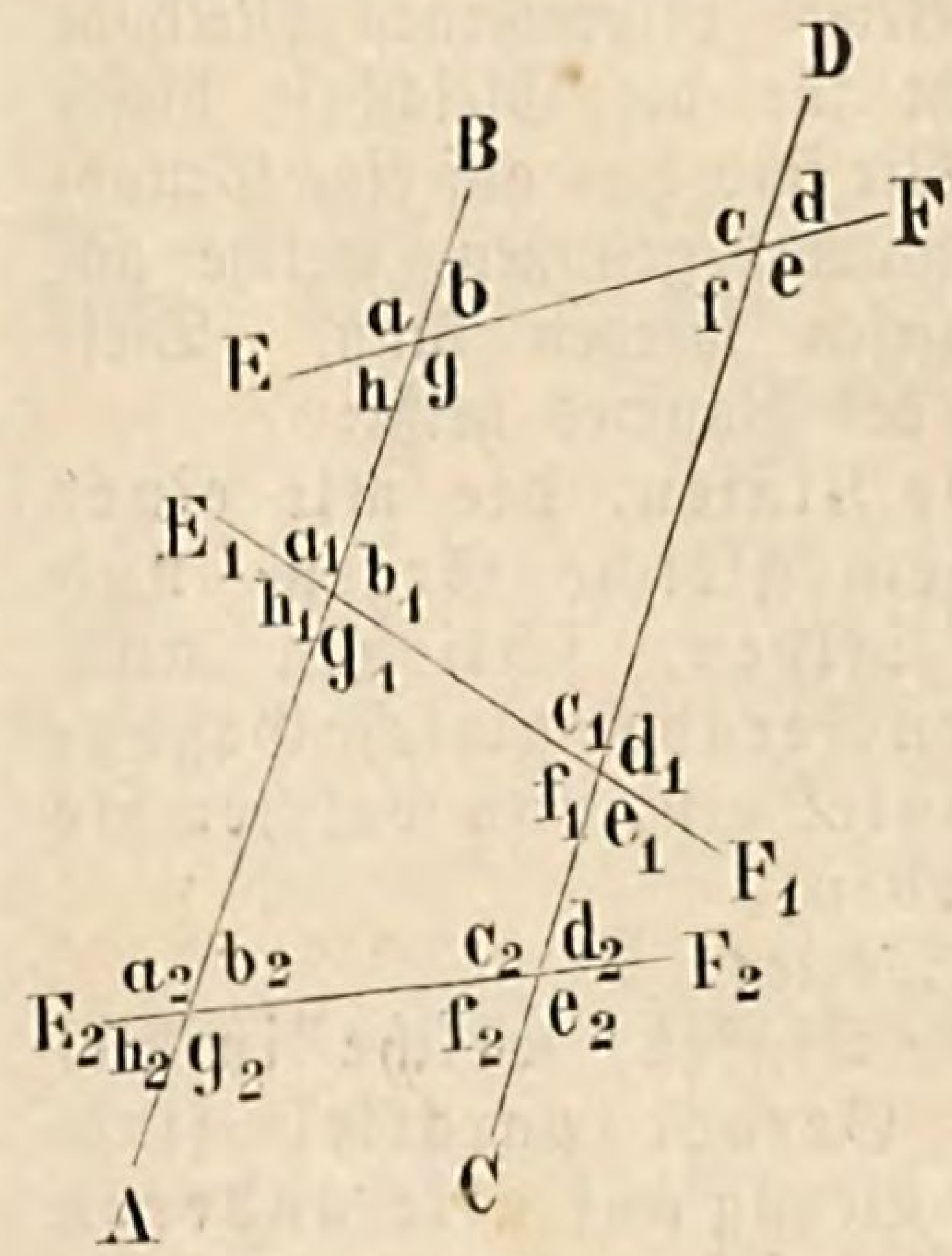


Fig. 2.

Untersuchen wir, ob wir den eben erwähnten Nachweis liefern können!

In Figur 2 werden die beiden Geraden AB und CD 1) von EF, 2) von E_1F_1, 3) von E_2F_2 geschnitten. Dadurch entstehen

die Gegenwinkel

1) a und c, b und d, e und g, f und h;
2) a_1[1]) und c_1, b_1 und d_1, e_1 und g_1, f_1 und h_1;
3) a_2 und c_2, b_2 und d_2, e_2 und g_2, f_2 und h_2;

die Wechselwinkel

1) a und e, h und d, b und f, g und c;
2) a_1 und e_1, h_1 und d_1, b_1 und f_1, g_1 und c_1;
3) a_2 und e_2, h_2 und d_2, b_2 und f_2, g_2 und c_2.

Wir wollen annehmen, daß die beiden Gegenwinkel a und c einander gleich sind; es ist dann nach § 56 Lehrsatz VI auch

$$\begin{array}{lll} b = d \text{ und} & a = e & g = c. \\ e = g & h = d & \\ f = h & b = f & \end{array}$$

Es fragt sich jetzt, ob auch die Gegenwinkel einander gleich sind, welche die beiden Geraden AB und CD mit E_1F_1 und E_2F_2 bil-

[1]) a_1 wird a eins, a' wird a Strich gesprochen.

den. Vermittelst des Transporteurs können wir finden, daß

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 \quad \text{und} \quad a_1 = e_1 \\ b_1 &= d_1 \quad \quad \quad h_1 = d_1 \\ e_1 &= g_1 \quad \quad \quad b_1 = f_1 \\ f_1 &= h_1 \quad \quad \quad g_1 = c_1 \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} a_2 &= c_2 \quad \text{und} \quad a_2 = e_2 \\ b_2 &= d_2 \quad \quad \quad h_2 = d_2 \\ e_2 &= g_2 \quad \quad \quad b_2 = f_2 \\ f_2 &= h_2 \quad \quad \quad g_2 = c_2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Indessen einen zwingenden Beweis nach der im dritten Briefe besprochenen Methode können wir nicht für die Gleichheit dieser Winkel geben. Wir sind hier auf eine Grundeigenschaft des Raumes gestoßen, welche auf keine Weise erwiesen werden kann. Diese Grundeigenschaft des Raumes heißt:

Zwei gerade Linien, die mit einer dritten Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel bilden, schließen auch mit jeder andern Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel ein, von welcher sie geschnitten werden;

mit anderen Worten:

Zwei gerade Linien, welche in Bezug auf **eine** Gerade parallel sind, müssen auch in Bezug auf **alle anderen** Geraden parallel sein, von denen sie geschnitten werden.

Damit haben wir die Fundamentaleigenschaft des Raumes, in der Fassung, welche uns nach den vorigen Auseinandersetzungen gestattet, hinter dem parallel die Wörter „in Bezug auf 2c." einfach fortzulassen. Die Definition, welche wir von den Parallelen gaben, ebenso der Lehrsatz VII in § 57, kann also die ursprüngliche Form behalten.

Wir können die Fundamentaleigenschaft des Raumes noch anders aussprechen. Die erste Fassung, welche wir derselben gegeben haben, beginnt mit den Worten: „Zwei gerade Linien, welche mit einer dritten Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel bilden".

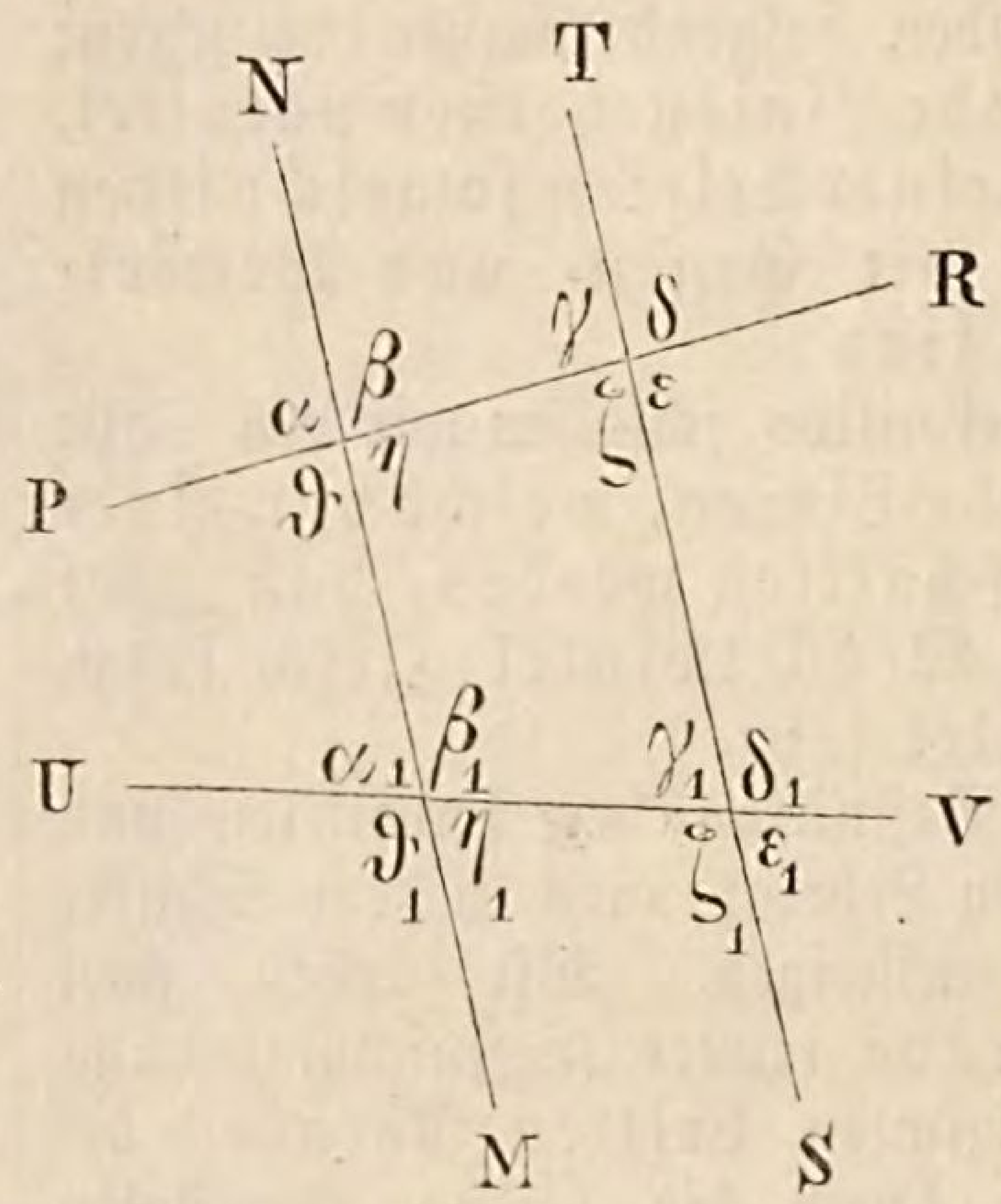


Fig. 3.

Dafür können wir gemäß der Definition der Parallelen kürzer sagen: Zwei parallele gerade Linien. Wenn wir uns dieser kürzern Ausdrucksweise statt der längern bedienen und die dann überflüssigen Wörter „auch" und „andern" auslassen, wird aus der obigen Fundamentaleigenschaft der wichtige Satz:

Lehrsatz I. Zwei parallele gerade Linien schließen mit jeder Geraden gleiche Gegen- und Wechselwinkel ein, von welcher sie durchschnitten werden.

Wir wollen mehrere Beispiele für diesen Lehrsatz bringen:

§ 59. Beispiele für Lehrsatz I in § 58. In Figur 3 seien die beiden Geraden MN und ST einander parallel. Es ist dann

$\alpha = \gamma$ als Gegenwinkel bei den Parallelen MN und ST geschnitten von PR
$\beta = \delta$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\varepsilon = \eta$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\zeta = \vartheta$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\alpha_1 = \gamma_1$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\beta_1 = \delta_1$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\varepsilon_1 = \eta_1$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\zeta_1 = \vartheta_1$ „ Gegenwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV

$\alpha = \varepsilon$ als äußere Wechselwinkel bei den Parallelen MN und ST geschnitten von PR
$\delta = \vartheta$ „ äußere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\beta = \zeta$ „ innere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\gamma = \eta$ „ innere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ PR
$\alpha_1 = \varepsilon_1$ „ äußere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\delta_1 = \vartheta_1$ „ äußere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\beta_1 = \zeta_1$ „ innere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV
$\gamma_1 = \eta_1$ „ innere Wechselwinkel „ „ Parallelen MN und ST „ „ UV

In Figur 4 werden zwei Parallele von einer dritten Geraden geschnitten. Die Endpunkte der Parallelen und der schneidenden Geraden sind nicht durch große Buchstaben bezeichnet.

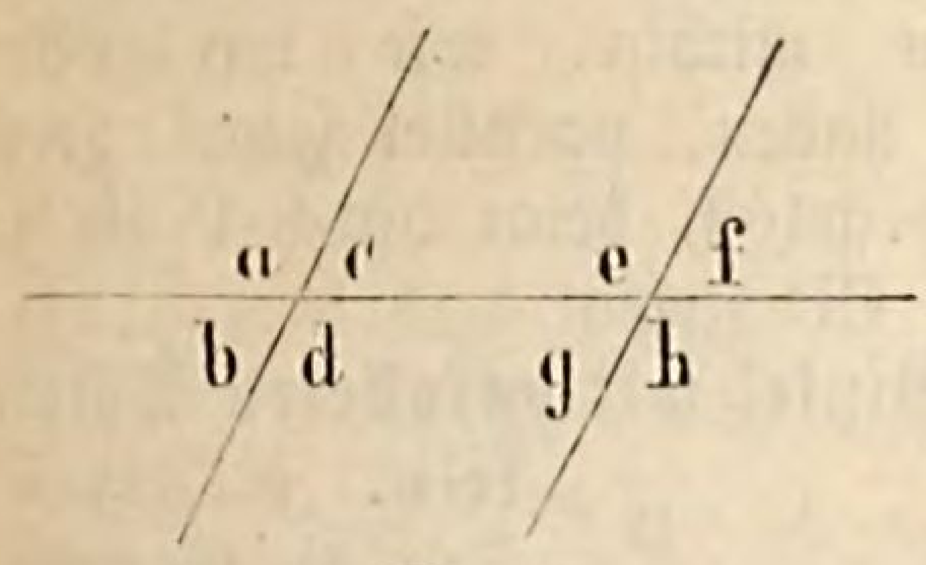


Fig. 4.

Wenn man in diesem Falle zwei Gegen- oder Wechselwinkel gleich setzt, drückt man sich folgendermaßen aus. Es ist

a = e als Gegenwinkel bei Parallelen
c = f „ Gegenwinkel „ Parallelen
b = g „ Gegenwinkel „ Parallelen
d = h „ Gegenwinkel „ Parallelen

ferner

a = h als äußere Wechselwinkel bei Parallelen
b = f „ äußere Wechselwinkel „ Parallelen
c = g „ innere Wechselwinkel „ Parallelen
e = d „ innere Wechselwinkel „ Parallelen.

Aufgaben. a) In Figur 5 ist AB parallel CD; in Figur 6 ist NM parallel ST. Die beiden Parallelen AB und CD werden von EF, die beiden Parallelen NM und ST von UV geschnitten. Der Schüler setze gemäß Lehrsatz I je zwei Gegen- und Wechselwinkel einander gleich und begründe die Gleichheit in der soeben angegebenen Weise mit den Worten: als Gegenwinkel (Wechselwinkel) bei den Parallelen ꝛc.

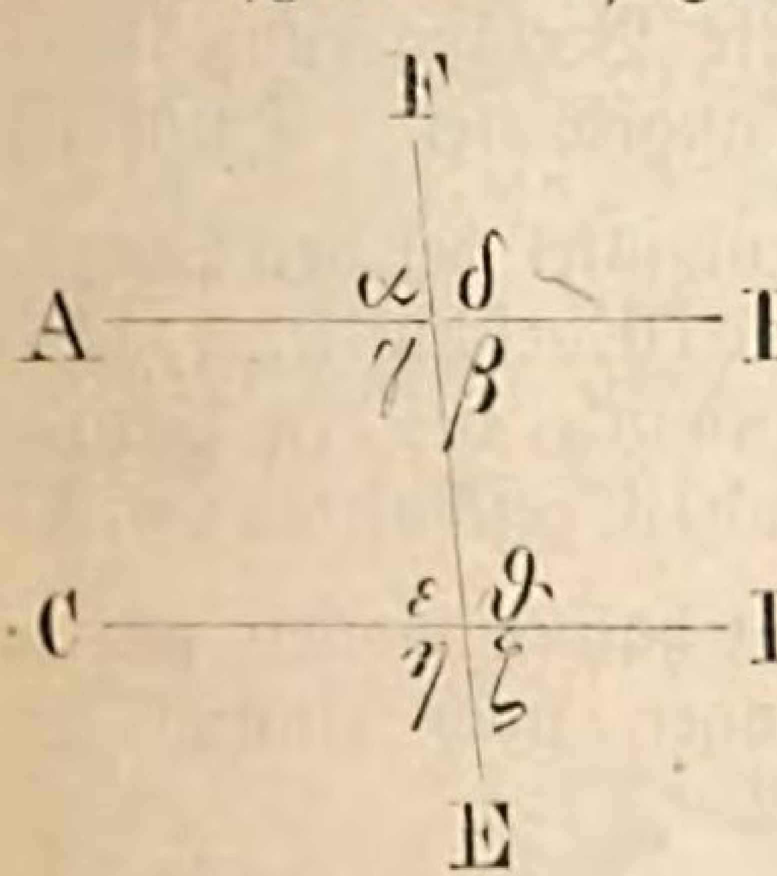


Fig. 5.

b) In Figur 7 werden zwei parallele gerade Linien von drei anderen Geraden geschnitten. Der Schüler stelle die Gleichungen zwischen je zwei Gegen- und Wechselwinkeln auf. Er füge auch den Grund für die Gleichheit bei mit den Worten: als Gegenwinkel (Wechselwinkel) bei Parallelen.

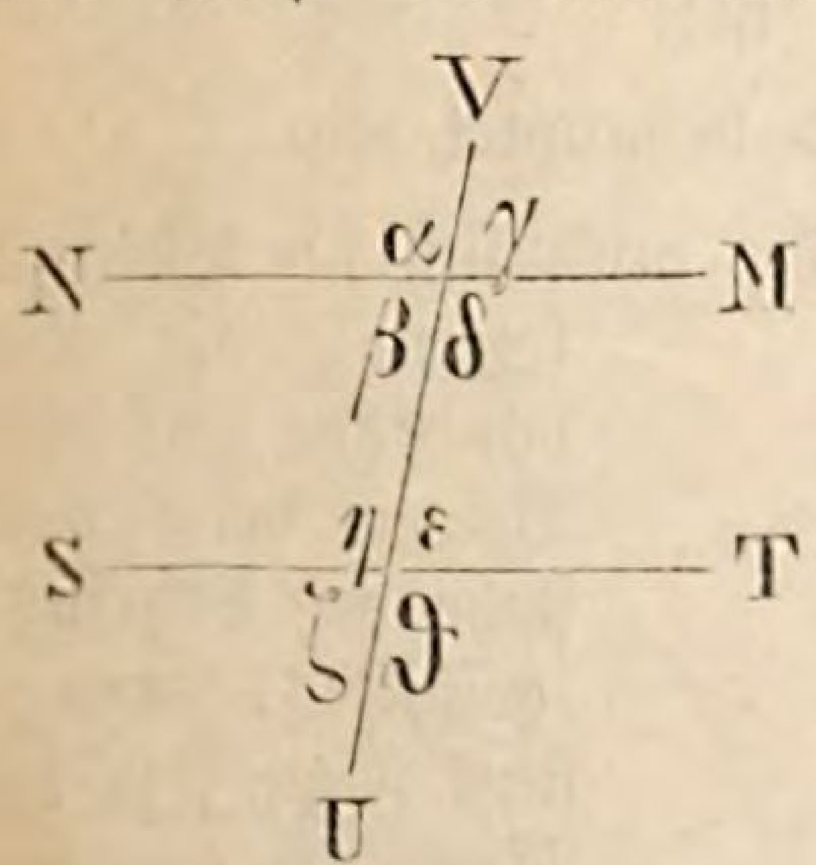
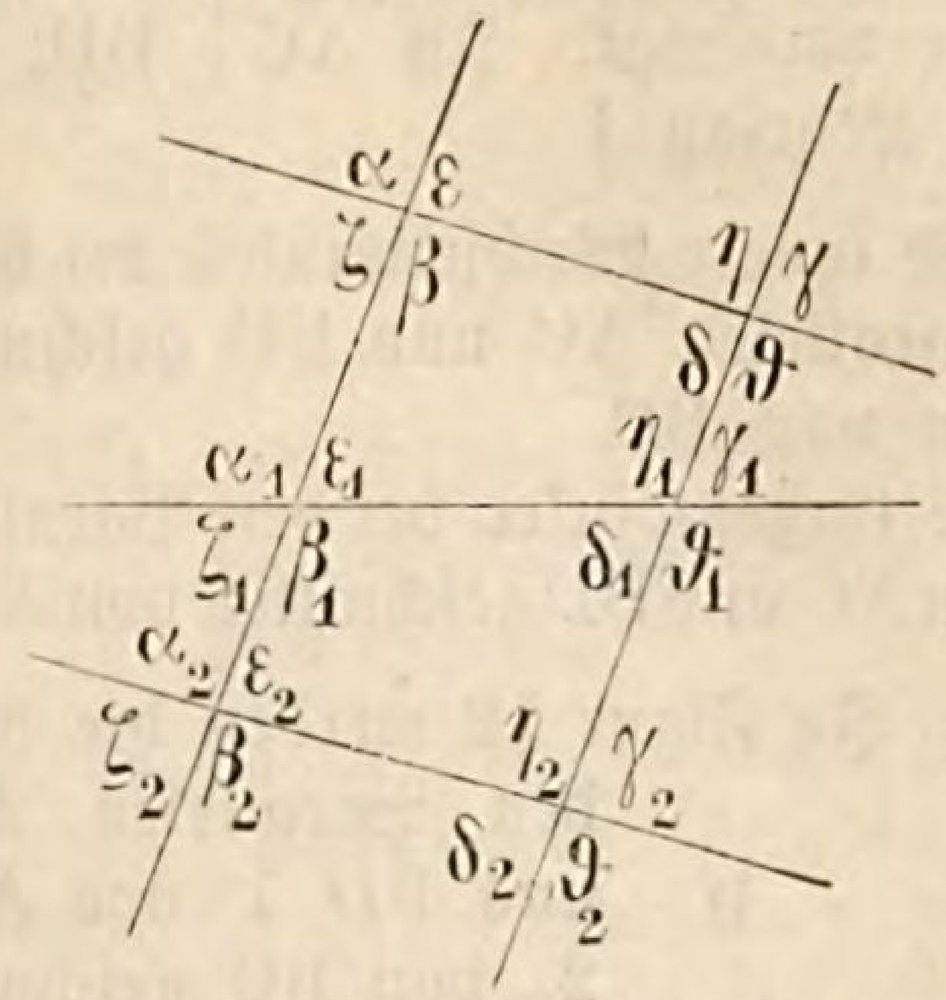
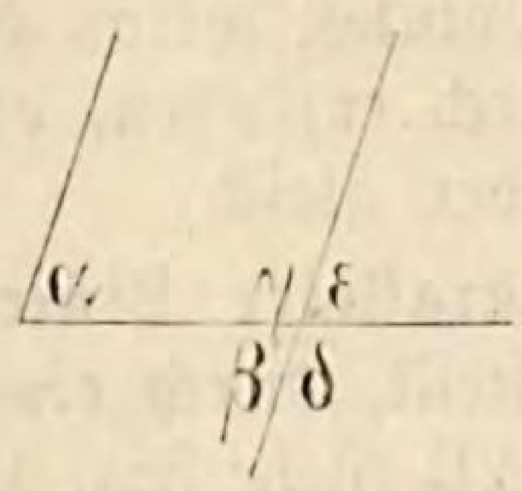


Fig. 6.

§ 60. Gegenwinkel und Wechselwinkel bei unvollständigen Figuren. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, entstehen vier Gegenwinkel- und vier Wechselwinkelpaare. Diese Zahl der Gegen- und Wechselwinkel verringert sich aber, wenn eine oder mehrere von diesen drei Geraden nicht über den Schnittpunkt hinaus verlängert sind.


Fig. 7.

Z. B. haben wir in Figur 8 nur die Gegenwinkel α und ε und die inneren Wechselwinkel α und β, also ein Gegenwinkel- und ein Wechselwinkelpaar.


Fig. 8.

In Figur 9 sieht der Schüler nur die Gegenwinkel γ und δ und in Figur 10[1]) die inneren Wechselwinkel α und β. In Fig. 11

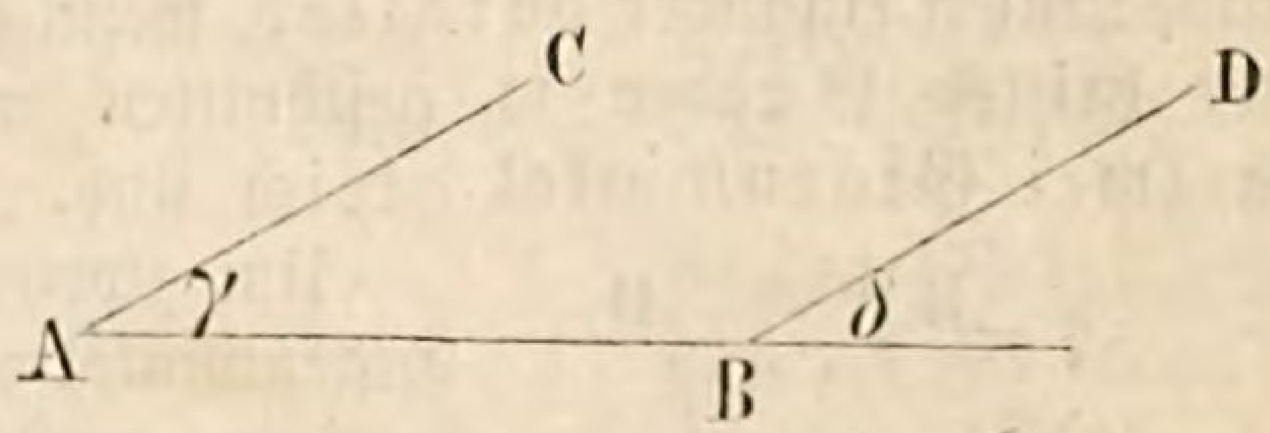


Fig. 9.

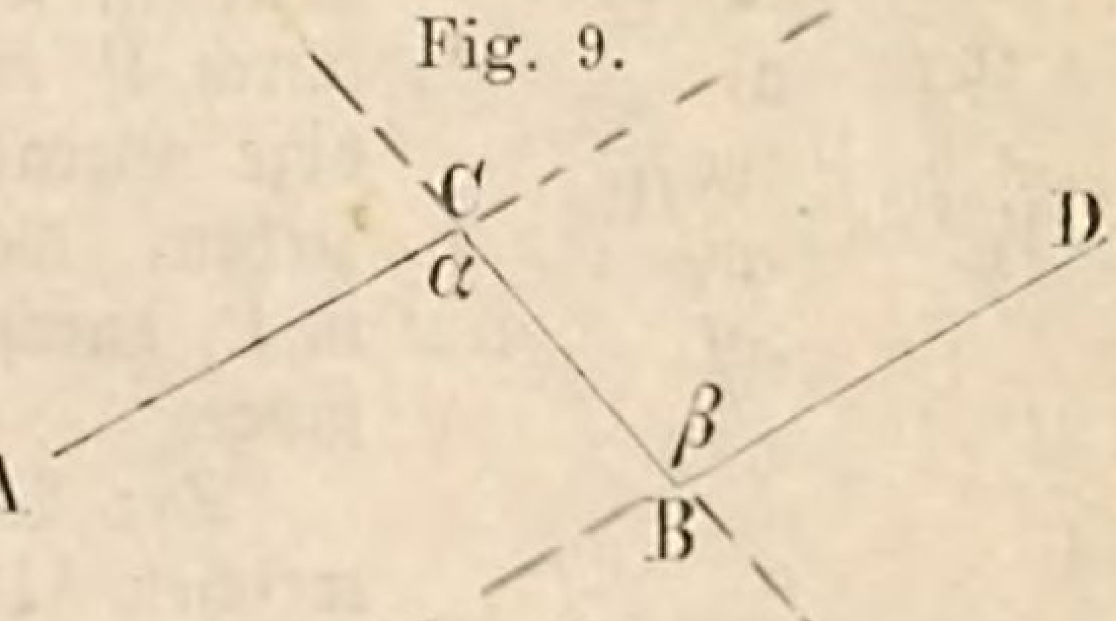


Fig. 10.

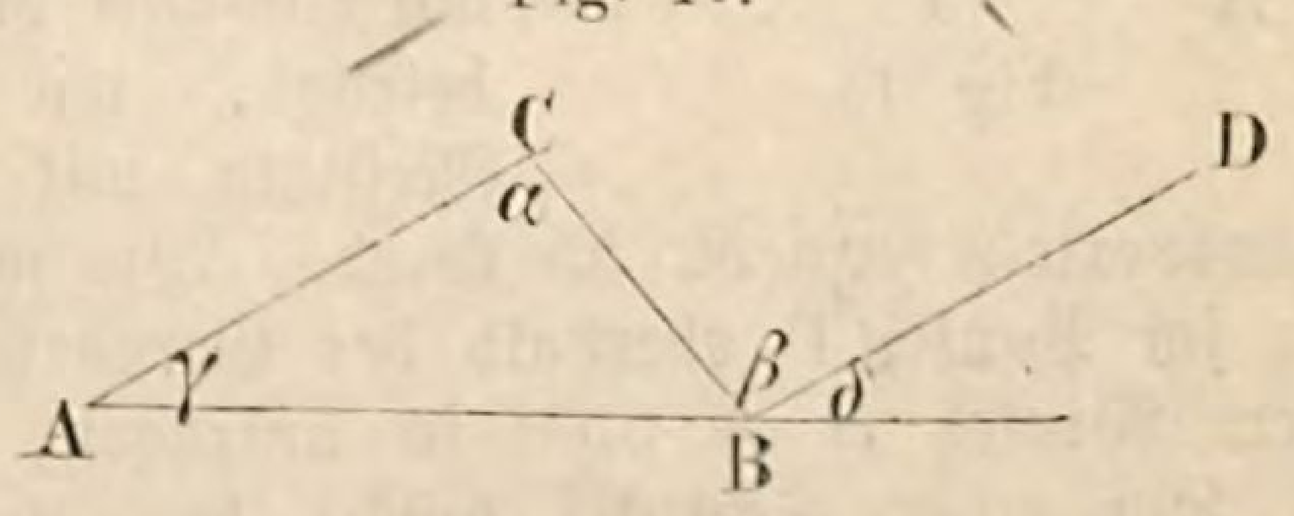


Fig. 11.

[1]) Es ist für den Anfänger nicht leicht zu erkennen, daß α und β in Figur 10 innere Wechselwinkel sind. Er wird gut thun, sich die Gerade BD über B hinaus, die Gerade AC über C hinaus und die Gerade BC über B und C hinaus verlängert zu denken; er wird dann sehen, daß α und β
1) verschiedene Scheitelpunkte haben, daß sie
2) an verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden BC und
3) an verschiedenen Seiten der beiden geschnittenen Geraden AC und BD liegen.

sind die beiden vorhergehenden Figuren 9 und 10 mit einander vereinigt. Ist AC || BD, so haben wir nach Lehrsatz I

$\alpha = \beta$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AC und BE geschnitten von BC

und $\gamma = \delta$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AC und BD geschnitten von AB.

Aufgaben. In Figur 12 werden die beiden Parallelen AC und BD 1) von AB 2) von BC geschnitten. Der Schüler setze die beiden Gegenwinkel und die beiden inneren Wechselwinkel, welche dadurch entstehen, einander gleich.

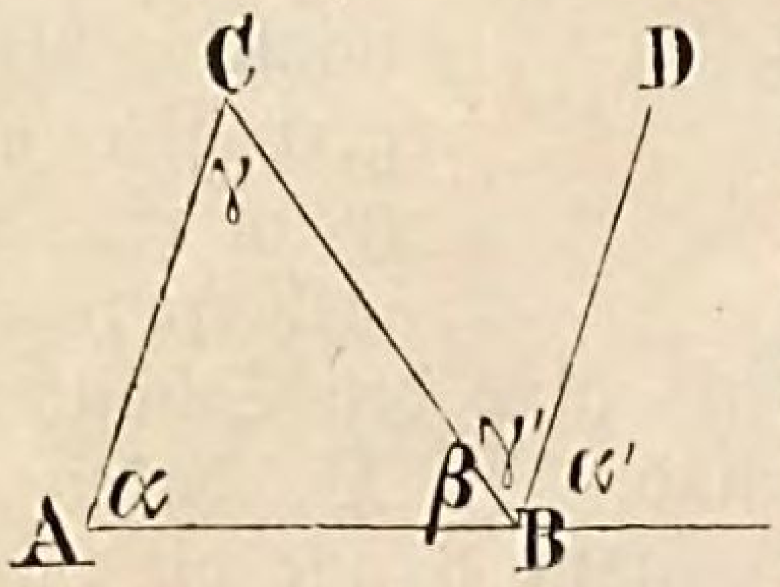


Fig. 12.

§ 61. Construction paralleler Linien. Es sei uns die **Aufgabe** gestellt, **durch einen Punkt** P **zu einer Geraden** AB (siehe Fig. 13) **eine Parallele zu legen.** Diese Aufgabe wollen wir lösen, indem wir uns auf Lehrsatz VII in § 57 stützen. Nach diesem Satze sind zwei gerade Linien einander parallel, wenn sie von einer dritten Geraden so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel gleich sind.

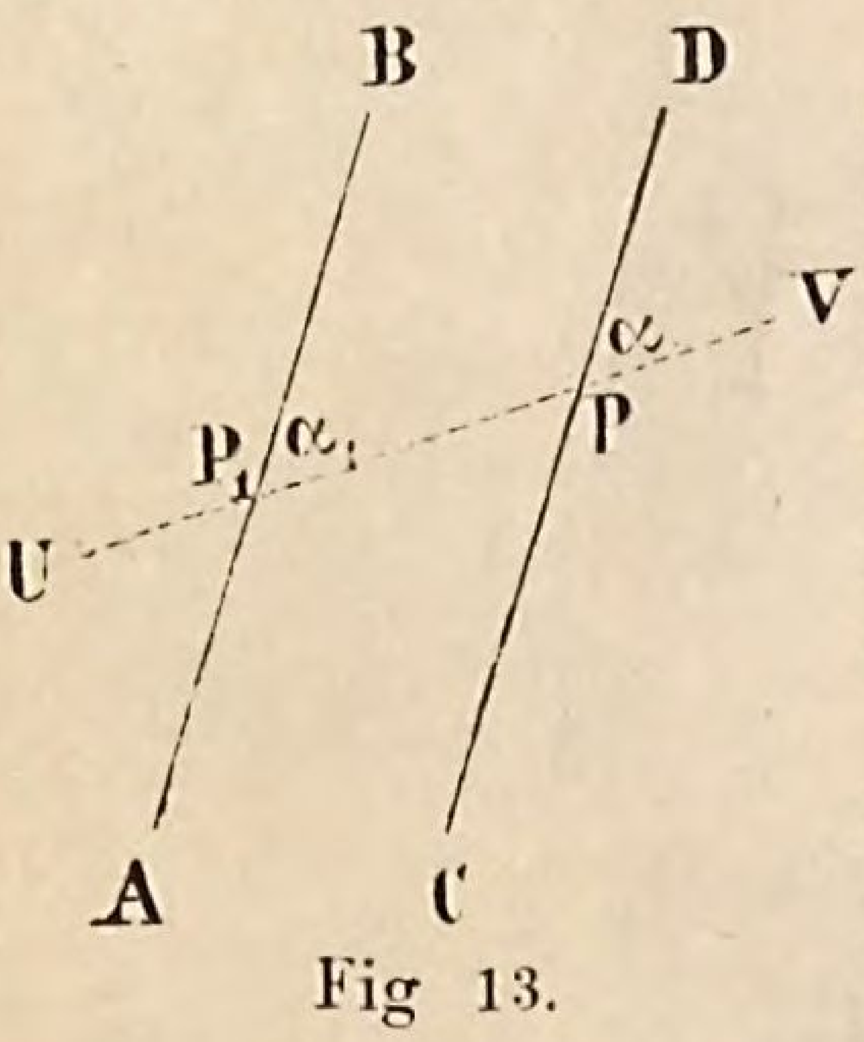


Fig 13.

Um zwei gleiche Gegenwinkel zu construiren, wollen wir durch P eine beliebige Gerade UV[1]) ziehen, welche AB in P_1 durchschneiden möge.

Der Winkel α_1, welchen AB und UV mit einander bilden, beträgt, wie die Messung mit dem Transporteur ergiebt, 55 Grad. Wir wollen nun im Punkte P oberhalb der Geraden UV einen Winkel $\alpha = 55^0$ so antragen, daß PV sein einer Schenkel wird; den zweiten Schenkel, welcher PD heißen möge, wollen wir über P hinaus bis C verlängern. Dann haben wir zwei Winkel α_1 und α, welche einander gleich sind, weil sie beide 55 Grad betragen. α_1 und α sind, wie der Schüler sofort bemerken wird, Gegenwinkel. Die beiden Geraden AB und CD werden also von UV so geschnitten, daß zwei Gegenwinkel einander gleich sind; sie müssen mithin, wie wir oben auseinandergesetzt haben, parallel sein. Jetzt ist unsere Aufgabe gelöst, denn durch P ist zu AB die Parallele CD gelegt.

§ 62. Die Winkel mit parallelen Schenkeln. In Fig. 14 sind die Geraden AB und ED, ferner BC und EF parallel; die Winkel α und β haben deswegen parallele Schenkel. Von solchen Winkeln, deren Schenkel parallel sind, gilt der

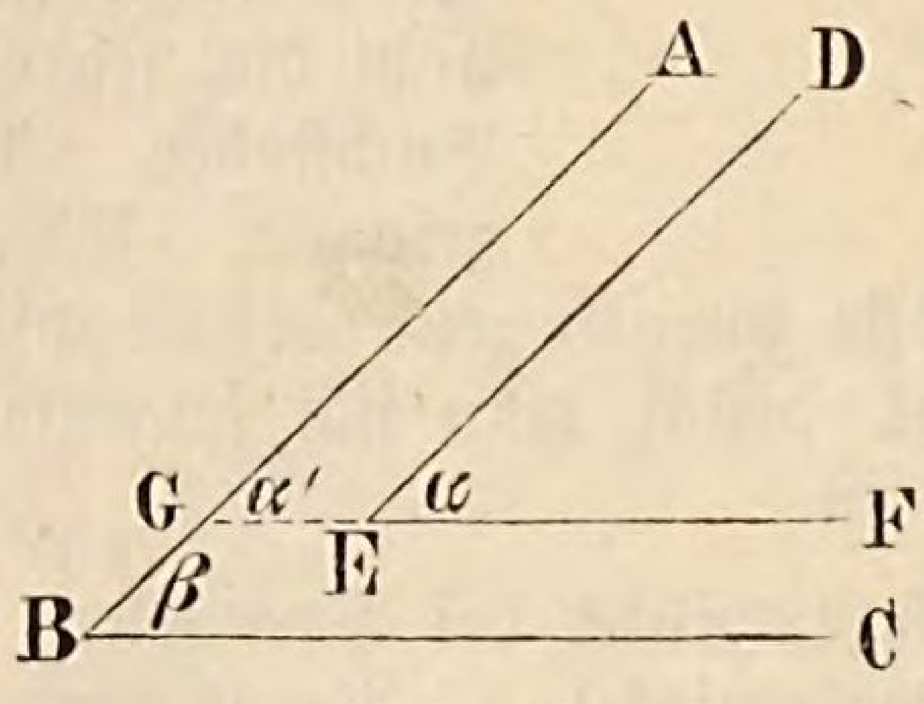


Fig. 14.

Lehrsatz II. Winkel mit parallelen Schenkeln sind einander gleich.

Voraussetzung. In Figur 14 ist AB || ED und BC || EF.

Behauptung. $\alpha = \beta$.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, verlängern wir FE über E hinaus bis G. In Figur 14 ist diese Verlängerung durch eine punktirte Gerade angedeutet. Dann ist

$\alpha = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und DE geschnitten von FG.

und $\beta = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen GF und BC geschnitten von AB.

Der Uebersichtlichkeit halber wollen wir die beiden letzten Gleichungen noch einmal hinschreiben. Wir haben:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \alpha'$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind. Folglich ist:

$\alpha = \beta$, was behauptet war.

Aufgaben. 1) Wie muß sich die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis beim vorstehenden Lehrsatze gestalten, wenn statt Figur 14 die Figur 15 gegeben ist?

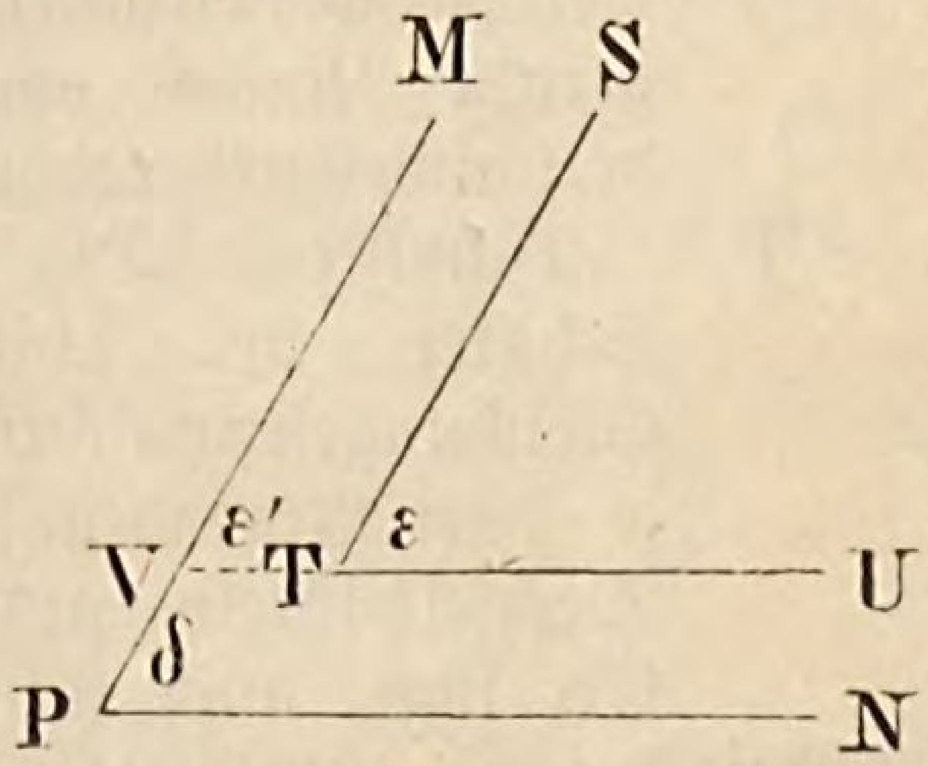


Fig. 15.

2) In Figur 16 ist nach dem vorigen Lehrsatze:

$\alpha = \varepsilon$, weil AP || EP_1 und DP || FP_1 ist.

[1]) In unserer Figur ist UV durch Punkte angedeutet.

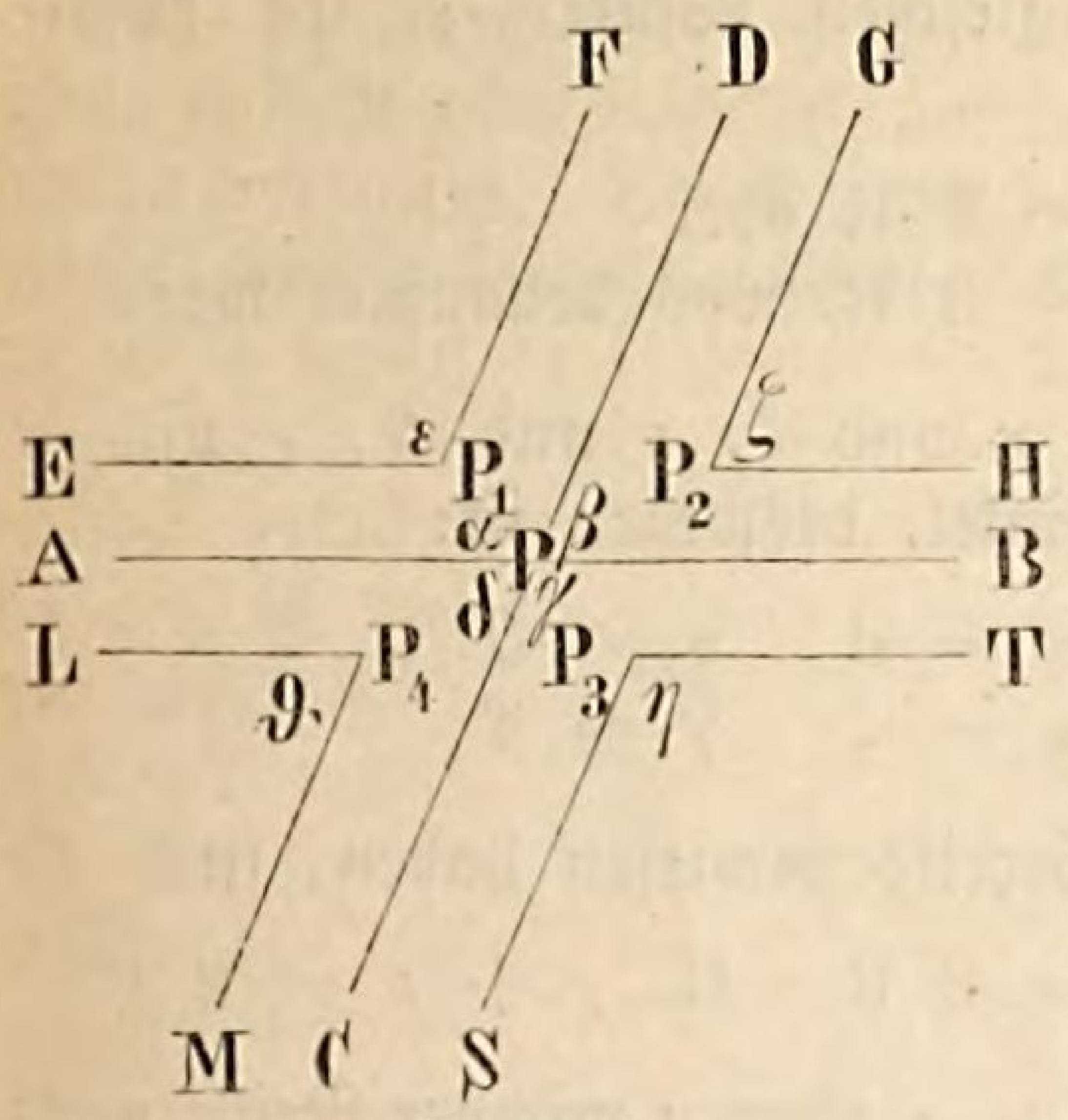


Fig. 16.

Der Schüler nenne die andern Winkel, welche in Fig. 16 einander gleich sind; er füge auch in der soeben angegebenen Weise, also etwa mit den Worten „weil PD || P_2G 2c." den Grund der Gleichheit hinzu.

§ 63. Entgegengesetzte Winkel Wie wir schon öfter bemerkt haben, entstehen acht Winkel, wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden.

Welche von diese acht Winkeln Gegenwinkel und Wechselwinkel genannt werden, haben wir schon besprochen; wir wollen den Schüler jetzt mit den **entgegengesetzten Winkeln** bekannt machen.

Unter der Bezeichnung: **„entgegengesetzte Winkel"** faßt man je zwei Winkel zusammen, welche

1) verschiedene Scheitelpunkte haben
2) an derselben Seite der schneidenden Geraden
3) an verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden

liegen.

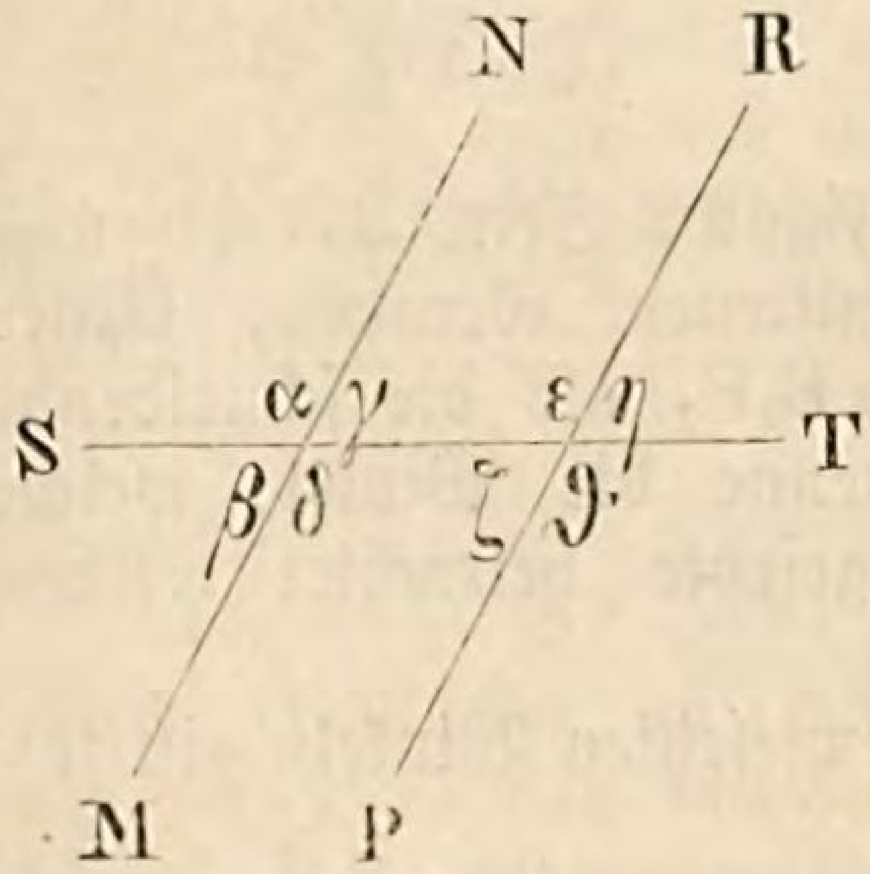


Fig. 17.

In Figur 17 sind MN und PR die geschnittenen Geraden, und ST ist die schneidende Gerade. Die Winkel α und η, γ und ε, β und ϑ, δ und ζ sind entgegengesetzte Winkel, denn es liegt

α und η oberhalb der schneidenden Geraden,	α an der linken,	η an der rechten	Seite der geschnittenen	Geraden
γ und ε oberhalb „ schneidenden „	γ „ „ rechten,	ε „ „ linken	„ „ geschnittenen	„
δ und ζ unterhalb „ schneidenden „	δ „ „ rechten,	ζ „ „ linken	„ „ geschnittenen	„
β und ϑ unterhalb „ schneidenden „	β „ „ linken,	ϑ „ „ rechten	„ „ geschnittenen	„

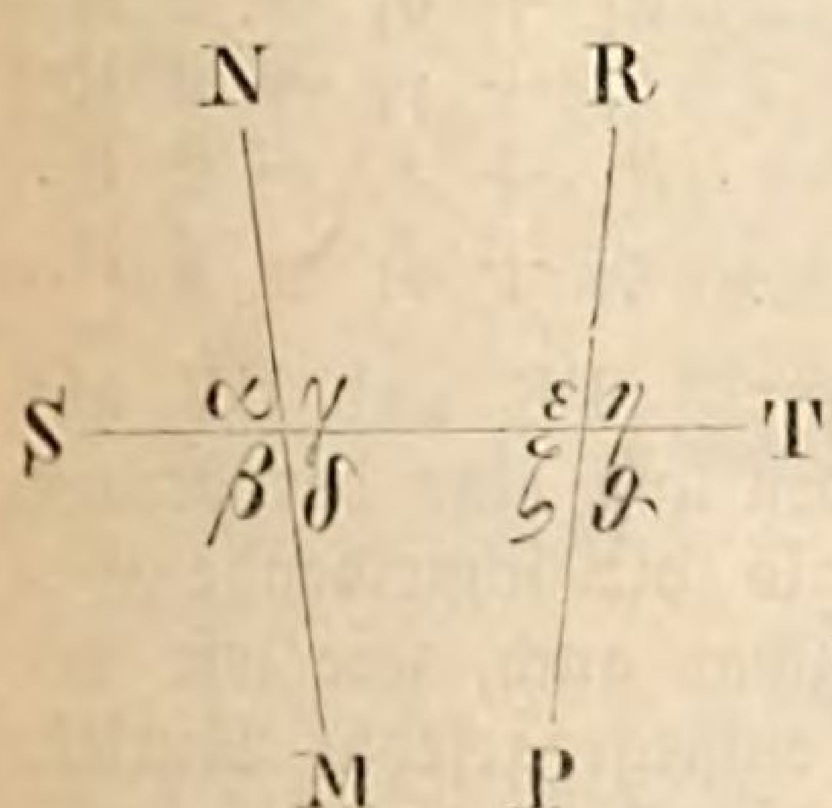


Fig. 18.

In Fig. 17 sind die beiden Geraden MN und PR einander parallel; aber auch in Fig. 18 sind α und η, γ und ε, δ und ζ, β und ϑ entgegengesetzte Winkel, obgleich MN und PR verschiedene Richtung haben.

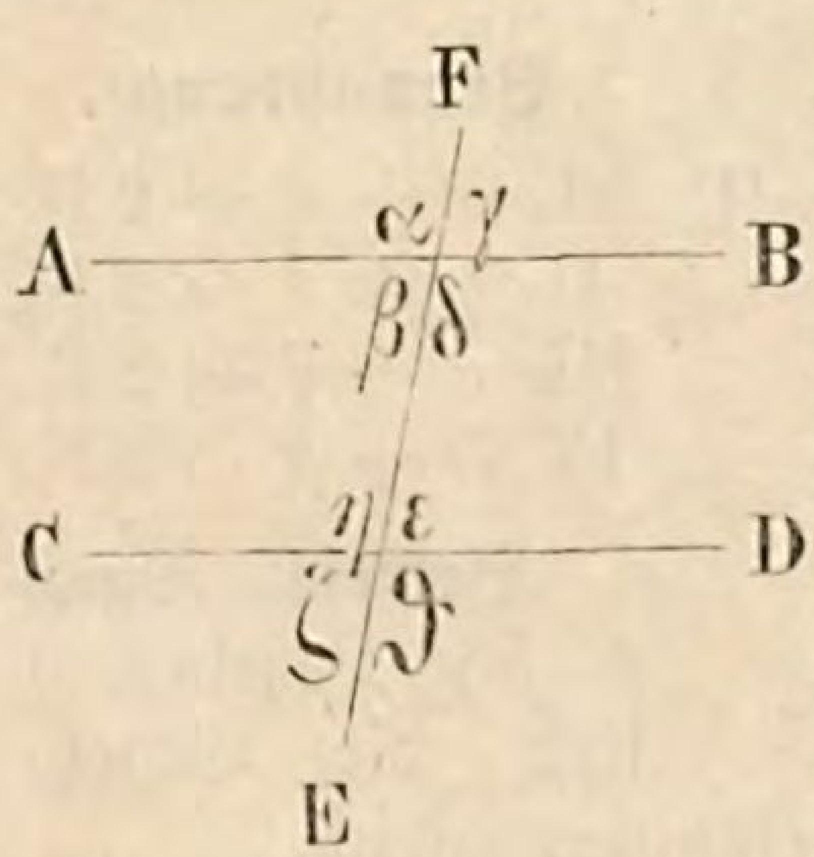


Fig. 19.

In Figur 19 werden die beiden Geraden AB und CD von EF geschnitten; es sind α und ζ, β und η, γ und ϑ, δ und ε entgegengesetzte Winkel, denn es liegt:

α und ζ an der linken Seite der schneidenden Geraden	α oberhalb, ζ unterhalb der geschnittenen Geraden
β und η „ „ linken „ „ schneidenden „	β unterhalb, η oberhalb „ geschnittenen „
γ und ϑ „ „ rechten „ „ schneidenden „	γ oberhalb, ϑ unterhalb „ geschnittenen „
δ und ε „ „ rechten „ „ schneidenden „	δ unterhalb, ε oberhalb „ geschnittenen „

In Figur 3 sieht der Schüler die beiden Geraden MN und ST, welche 1) von PR und 2) von UV geschnitten werden; entgegengesetzte Winkel sind darum

1)		2)	
	α und δ und		α_1 und δ_1
	β und γ		β_1 und γ_1
	ϑ und ε		ϑ_1 und ε_1
	η und ζ		η_1 und ζ_1.

Wir können in Figur 3 auch PR und UV als die geschnittenen Geraden und 1) MN 2) ST als die schneidende Gerade betrachten; deswegen sind auch entgegengesetzte Winkel

1)		2)	
	α und ϑ_1 und		γ und ζ_1
	ϑ und α_1		ζ und γ_1
	β und η_1		δ und ε_1
	η und β_1		ε und δ_1.

Aufgaben I. a) Der Schüler gebe in den Figuren 20 und 21 die entgegengesetzten Winkel an.

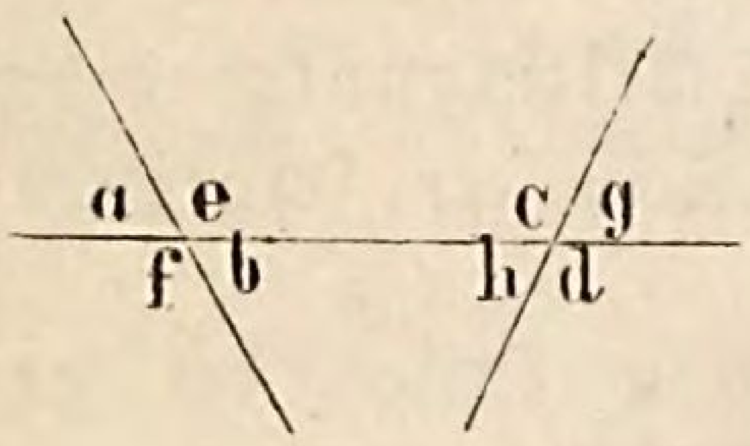


Fig. 20.

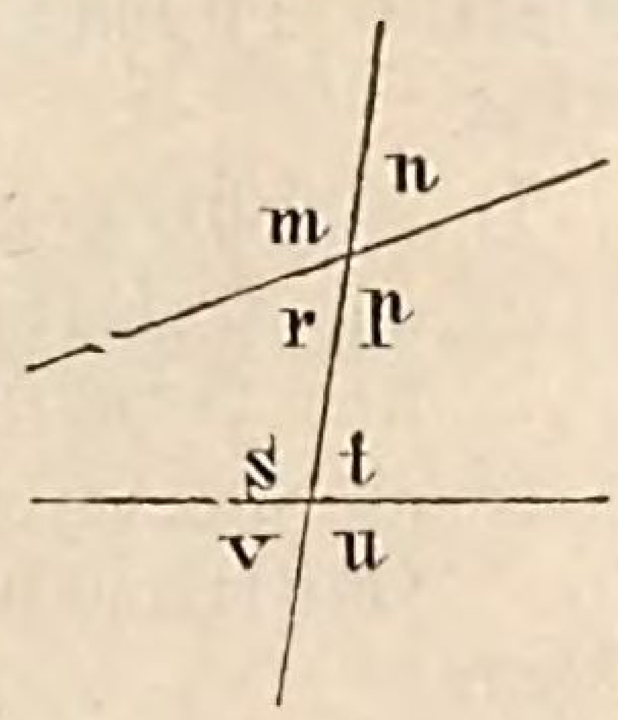


Fig. 21.

b) Er sehe in Figur 2 Seite 67 AB und CD als die geschnittenen Geraden, ferner 1) EF 2) E_1F_1 3) E_2F_2 als die schneidende Gerade an, und nenne die Winkel, welche dann als entgegengesetzte betrachtet werden müssen.

Von den entgegengesetzten Winkeln gilt folgender

Lehrsatz III. Wenn zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten werden, ist die Summe zweier entgegengesetzten Winkel gleich zwei Rechten.

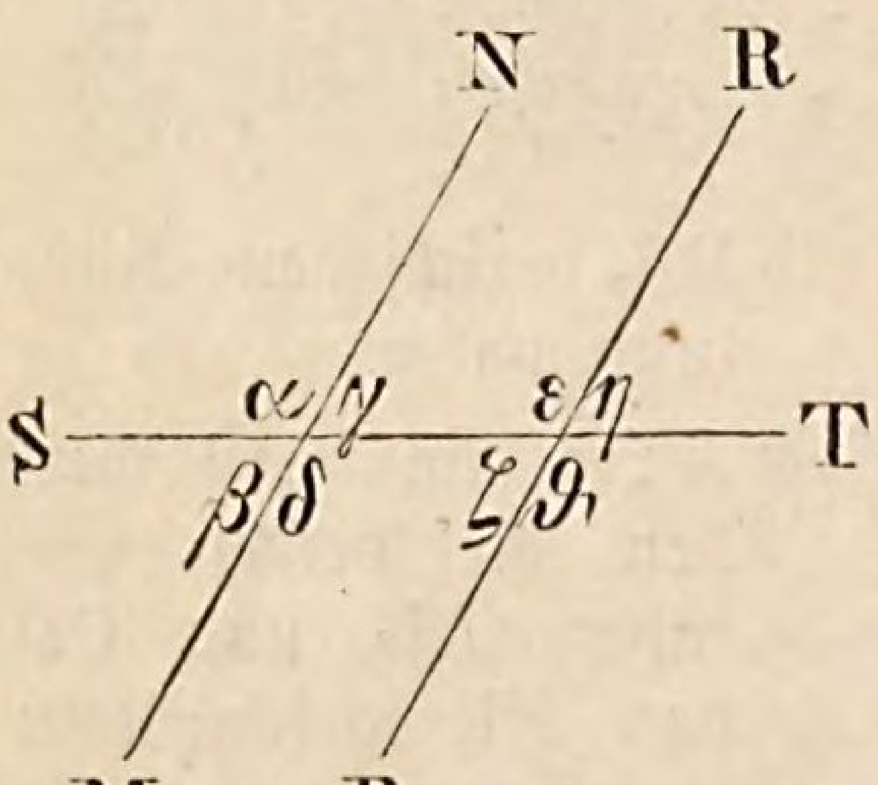


Fig. 17.

Voraussetzung. In Fig. 17 ist MN || PR.

Behauptung.

I. $\alpha + \eta = 2$ R.
II. $\gamma + \varepsilon = 2$ R.
III. $\delta + \zeta = 2$ R.
IV. $\vartheta + \beta = 2$ R.

Beweis. Nach § 58 Lehrsatz I sind die Gegenwinkel bei Parallelen einander gleich.

Es ist darum:

$\alpha = \varepsilon$ } als Gegenw.[1]) bei den Parallelen MN
$\gamma = \eta$ } und PR, geschnitten von ST.

Ferner haben wir:

$$\alpha + \gamma = 2 \text{ R als Nebenw.}^{2)}$$

Setzen wir für γ in der letzten Gleichung den gleichen Winkel η ein, so ergiebt sich

I. $\alpha + \eta = 2$ R, was behauptet war.

Vertauschen wir dagegen in der Gleichung

$$\alpha + \gamma = 2 \text{ R}$$

[1]) Gegenw. ist eine Abkürzung für Gegenwinkel.
[2]) Nebenw. ist eine Abkürzung für Nebenwinkel.

α mit dem gleichen Winkel ε, so erhalten wir:

$\varepsilon + \gamma = 2$ R oder
II. $\gamma + \varepsilon$[1]) $= 2$ R, was behauptet war.

α und δ, η und ζ, ε und ϑ, γ und β sind Scheitelwinkel, deswegen ist:

$$\alpha = \delta \quad \varepsilon = \vartheta$$
$$\eta = \zeta \quad \gamma = \beta$$

Wie wir bereits bewiesen haben, ist:

I. $\alpha + \eta = 2$ R. II. $\gamma + \varepsilon = 2$ R.

Für $\alpha, \eta, \gamma, \varepsilon$ können wir der Reihe nach die gleichen Winkel $\delta, \zeta, \beta, \vartheta$ einsetzen. Nehmen wir diese Einsetzung vor, so ergiebt sich:

III. $\delta + \zeta = 2$ R, was behauptet war.
IV. $\vartheta + \beta = 2$ R, was behauptet war.

In Figur 19 (Seite 71) sind die beiden Geraden AB und CD parallel; je zwei entgegengesetzte Winkel betragen darum in dieser Figur zwei Rechte. Es ist

$$\alpha + \zeta = 2 \text{ R} \qquad \gamma + \vartheta = 2 \text{ R}$$
$$\beta + \eta = 2 \text{ R} \qquad \delta + \varepsilon = 2 \text{ R.}$$

In Figur 3 (siehe Seite 68) ist MN und ST parallel. Es ist deshalb

1) $\alpha + \delta = 2$ R   2) $\alpha_1 + \delta_1 = 2$ R
$\beta + \gamma = 2$ R $\beta_1 + \gamma_1 = 2$ R
$\vartheta + \varepsilon = 2$ R $\vartheta_1 + \varepsilon_1 = 2$ R
$\eta + \zeta = 2$ R $\eta_1 + \zeta_1 = 2$ R.

Sehen wir in Figur 3 PR und UV als die geschnittenen Geraden und eine der beiden Linien MN und ST als die schneidende Gerade an, so entstehen zwar auch, wie wir bereits erwähnt haben, entgegengesetzte Winkel, es wäre aber falsch, die Summe zweier entgegengesetzten Winkel in diesem Falle gleich 2 Rechten zu setzen, weil die geschnittenen Geraden PR und UV nicht parallel sind. Es ist also nicht

$$\alpha + \vartheta_1 = 2 \text{ R}$$
$$\vartheta + \alpha_1 = 2 \text{ R u. s. w.}$$

Aufgaben II. a) In Figur 2 Seite 67 sind die Geraden AB und CD parallel. Der Schüler stelle auch hier die Gleichungen gemäß Lehrsatz III auf.

[1]) 3 + 7 ist gerade so viel wie 7 + 3; es ist gleichgiltig, in welcher Reihenfolge wir die Summanden addiren. Wir können darum auch für $\varepsilon + \gamma$ den Ausdruck $\gamma + \varepsilon$ setzen.

b) In Figur 21 und 22 werden, wie der Schüler sieht, zwei Parallele von einer dritten Geraden geschnitten. Der Schüler setze die Summe zweier entgegengesetzten Winkel gleich 2 Rechten.

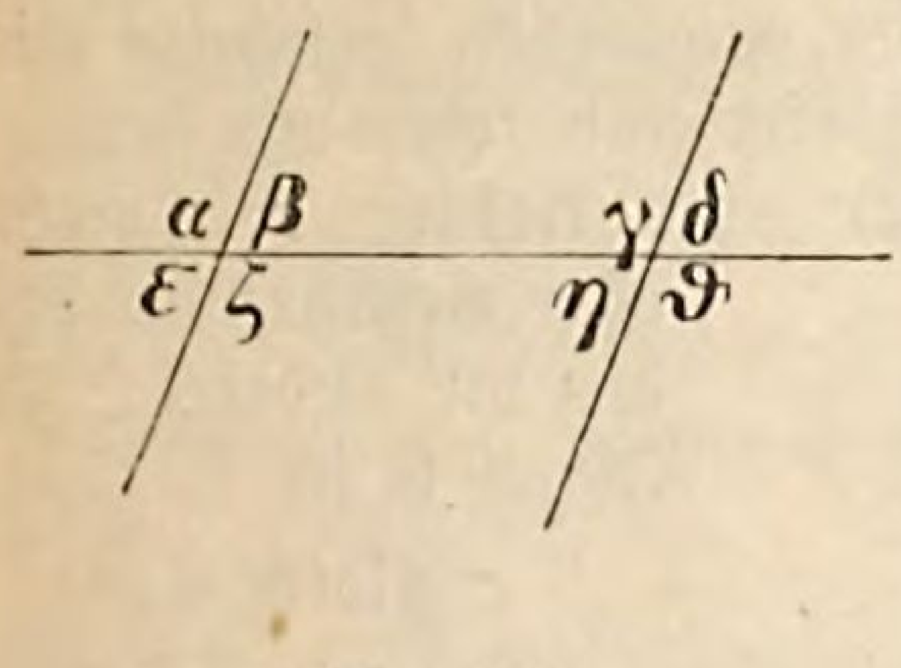


Fig. 21.

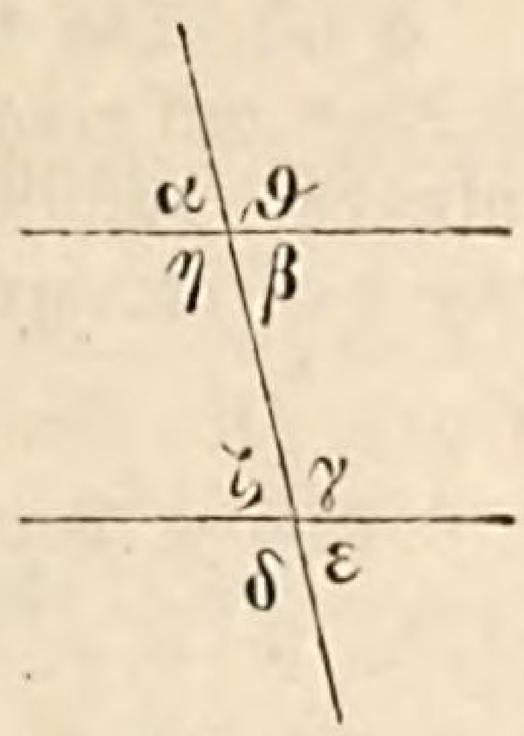


Fig. 22.

Hiermit wollen wir das wichtige Capitel von den parallelen Linien beschließen. Wir haben die Gegenwinkel, die Wechselwinkel und die entgegengesetzten Winkel ausführlich bebesprochen und bewiesen, daß bei Parallelen zwei Gegen- und zwei Wechselwinkel gleich sind und daß zwei entgegengesetzte Winkel zwei Rechte betragen. Wir waren bestrebt, diese wichtigen Sätze durch Beispiele und Aufgaben dem Schüler zum vollen Verständniß zu bringen; damit sie ihm aber ganz in Fleisch und Blut übergehen, wird er gut thun, sich zwei parallele Gerade in den verschiedensten Lagen hinzuzeichnen, durch diese Parallelen in den verschiedensten Richtungen eine schneidende Gerade zu legen und dann die Gleichungen zwischen den Gegenwinkeln, den Wechselwinkeln u. s. w. aufzustellen.

Ohn' Arbeit, ohne Schweiß
Ist wenig zu erlangen.
M. G. Lichtwer.

Lection 8.

A. Das Dreieck.

§ 64. Die Ecken, Seiten und Winkel des Dreiecks und ihre Bezeichnung. Die Figur 1 hat, wie der Schüler bemerkt, die **drei Ecken** A, B und C; sie wird darum ein **Dreieck** genannt. Bei einem Dreieck haben wir außer den drei Ecken noch

drei Seiten
und **drei Winkel**
zu unterscheiden.

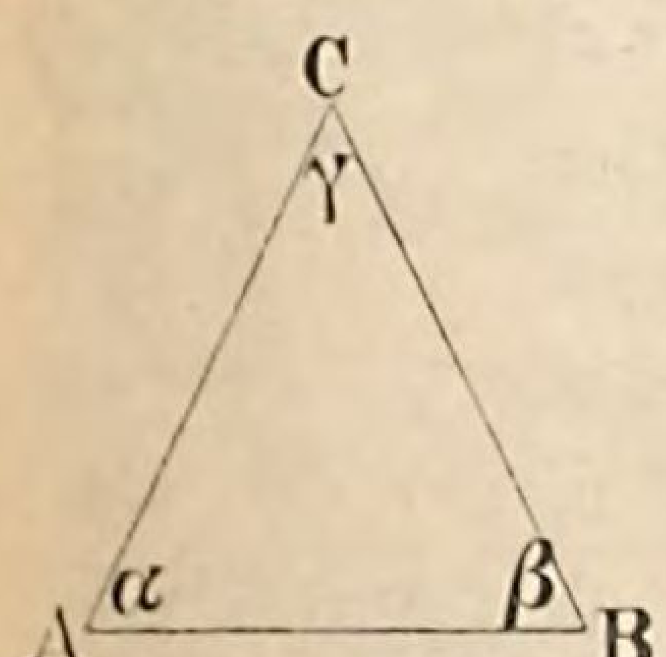


Fig. 1.

In Figur 1 sind

AB, BC und CA die drei Seiten,
α, β und γ die drei Winkel.

Will man bei einem Dreiecke die drei **Eckpunkte** bezeichnen, so bedient man sich wie in Figur 1 der **großen lateinischen** Buchstaben A, B, C rc. Je zwei dieser großen Buchstaben kann man zugleich gebrauchen, um die **Seiten** zu benennen; wie wir schon oben angegeben haben, versteht man unter AB, BC und CA die Seiten des Dreiecks in Fig. 1.

Da die Dreiecksseiten begrenzte Strecken sind, kann man gemäß § 13b zu ihrer Bezeichnung auch **kleine lateinische** Buchstaben wählen.

In Figur 2 sind

a, b und c die Dreiecksseiten.[1])

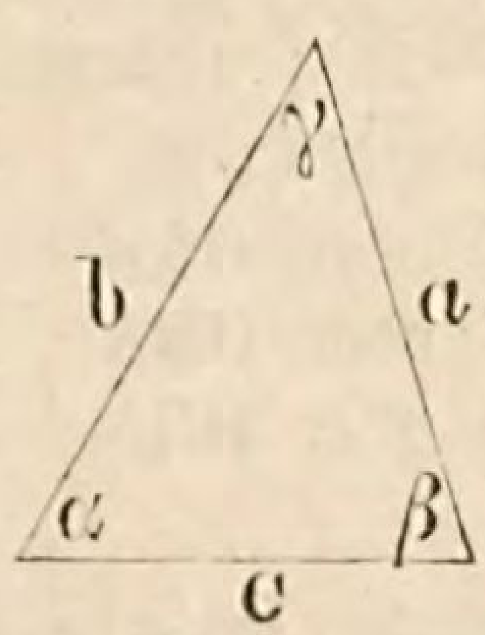


Fig. 2.

Bei den **Winkeln** ist eine **dreifache** Bezeichnungsweise in Gebrauch. Man kann

1) einen **griechischen** Buchstaben in die Oeffnung des Winkels hineinsetzen, wie in Figur 1. Bei der Wahl der Winkel verfährt man nicht willkürlich, man setzt vielmehr, wenn die Eckpunkte benannt sind,

zum A ein α, zum B ein β
zum C ein γ, zum D ein δ u. s. w.

Sind die Seiten des Dreiecks mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, so wählt man, wie in Figur 2, die griechischen Buchstaben so, daß

der Seite a der Winkel α,
der Seite b der Winkel β,
der Seite c der Winkel γ

gegenüberliegt; einer Seite d müßte also der Winkel δ gegenüberliegen.

Man kann

2) die **Buchstaben, mit welchen die Eckpunkte des Dreiecks benannt sind,** zur Be-

---

[1]) Wenn die Seiten mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, benennt man die Eckpunkte meistens nicht.

zeichnung der Winkel benützen; man kann in Figur 1

statt Winkel α, Winkel A
statt Winkel β, Winkel B
statt Winkel γ, Winkel C sagen

Dieser Bezeichnungsweise darf man sich indessen nicht bedienen, wenn sie zweideutig ist. In Figur 3 ist die Seite AB über B hinaus bis D verlängert.

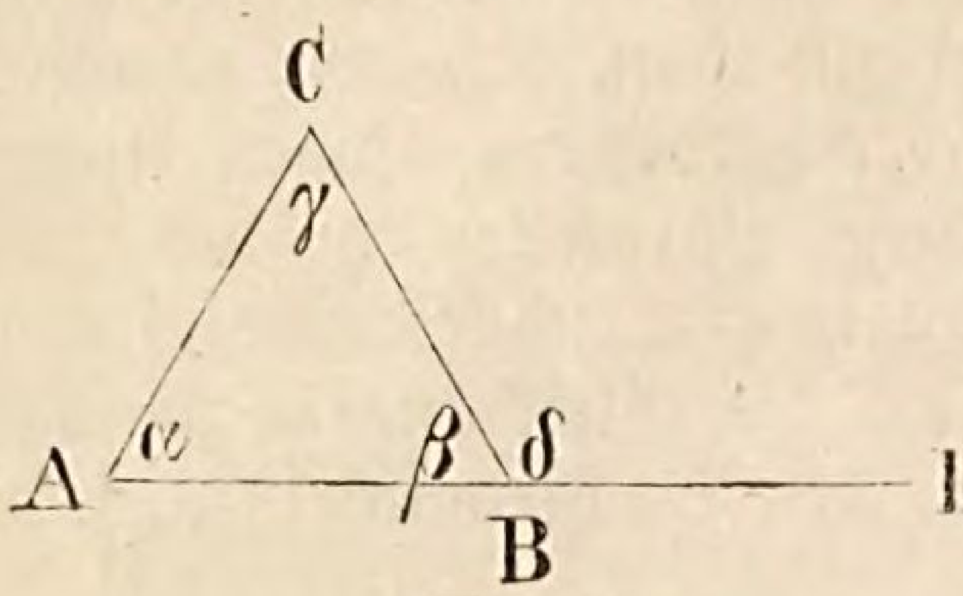


Fig. 3.

Winkel A und Winkel C ist vollkommen eindeutig, es kann mit Winkel A nur Winkel α und mit Winkel C nur Winkel γ gemeint sein; dagegen Winkel B ist zweideutig, man kann darunter sowohl Winkel β wie Winkel δ verstehen. Die Bezeichnung Winkel B darf darum nicht gebraucht werden.

Statt die Winkel des Dreiecks mit **einem** Eckbuchstaben zu benennen, kann man

3) alle **drei Eckbuchstaben** gemäß § 57 verwenden; man hat dabei den Buchstaben am Scheitelpunkt zwischen die beiden anderen zu stellen. Demgemäß kann in Figur 1

Winkel α auch Winkel BAC oder CAB
Winkel β auch Winkel ABC oder CBA
Winkel γ auch Winkel ACB oder BCA

genannt werden.

Als Abkürzung für das Wort **„Dreieck“** gebraucht man die Figur △; diesem Zeichen fügt man entweder die Eckbuchstaben hinzu, wenn man ein besonderes Dreieck im Auge hat, oder man hilft sich, wie wir später sehen werden, auf mannichfache andere Weise.

△ ABC wird gesprochen Dreieck ABC
△ MNP „ „ Dreieck MNP.

Aufgaben. a) Der Schüler gebe in Fig. 4 die Eckpunkte an, b) er nenne in Fig. 4 und 5 die Seiten, c) er bezeichne in Fig. 4 auf dreierlei Weise die Winkel.

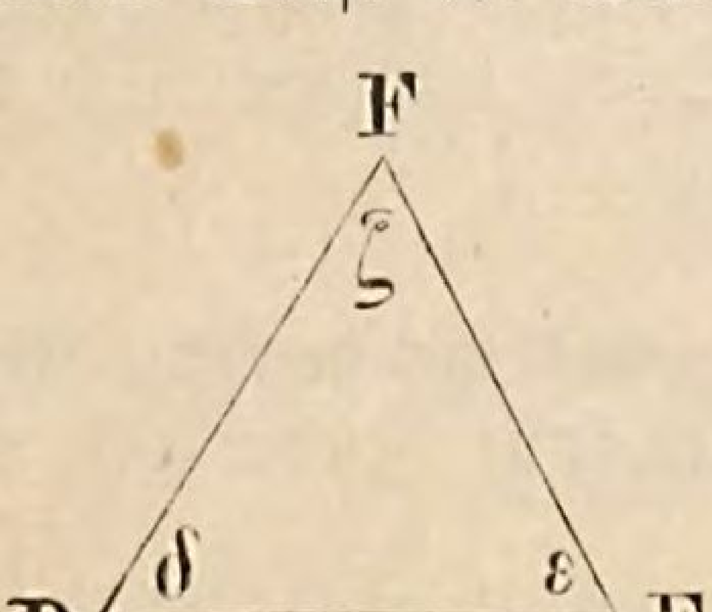


Fig. 4.

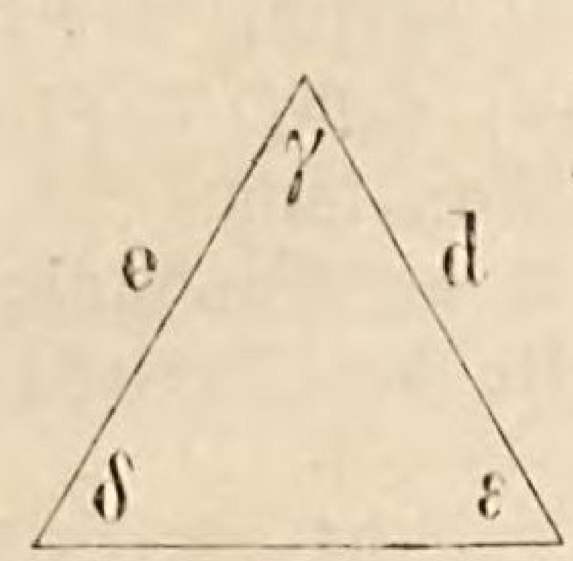


Fig. 5.

Ehe wir Lehrsätze über die Dreiecksseiten aufstellen, wollen wir erst in den beiden folgenden Paragraphen die sogenannten **Ungleichungen** behandeln.

§ 65. Die Ungleichungen. Wenn wir zwei Größen mit einander vergleichen, erkennen wir entweder, daß sie **gleich** sind, oder wir finden, daß die eine **größer** oder **kleiner** ist, **mehr** oder **weniger** beträgt als die andere. In Figur 6 ist

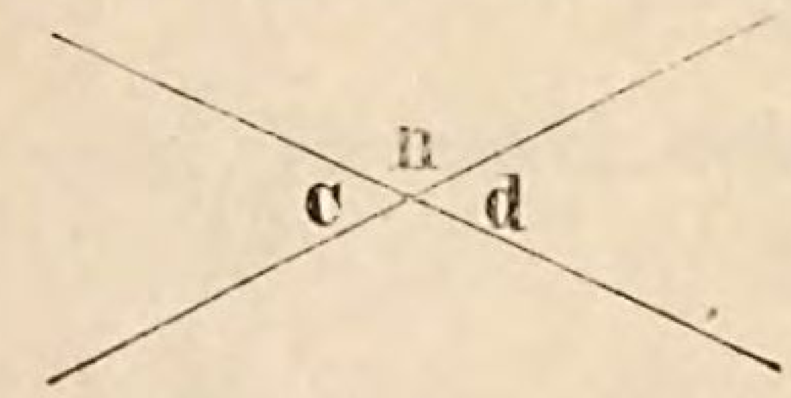


Fig. 6.

c **gleich** d,

weil c und d Scheitelwinkel sind.

Es ist ferner

n **größer** als c

oder mit anderen Worten:

c **kleiner** als n,

weil c nur 52 Grad, n dagegen 128 Grad beträgt.

Für das Wort **gleich** haben wir ein mathematisches Zeichen (=) eingeführt und sehr häufig angewendet; wir wollen jetzt den Schüler auch mit den Zeichen bekannt machen, welche für die Wörter **größer als (mehr als), kleiner als (weniger als)** in Gebrauch sind.

Für **größer als** und **mehr als** setzt man $>$.
Für **kleiner als** und **weniger als** „ „ $<$.

$n > c$ bedeutet:
n ist **größer** als c.
$c < n$ bedeutet:
c ist **kleiner** als n.

Die beiden Zeichen $>$ und $<$ stellen demnach einen Winkel dar, dessen Oeffnung immer der größern und dessen Scheitelpunkt immer der kleinern von den beiden verglichenen Größen zugekehrt ist.

$$7 + 3 = 10, \quad \alpha + \beta = \gamma$$

sind **Gleichungen;** Ausdrücke wie

$$n > c, \quad c < n$$

pflegt man dagegen **Ungleichungen** zu nennen.

Die Ungleichungen

7 > 4, 5 < 10, 12 m[1]) > 8 m, 77 cm[1]) < 2 m,
$\alpha > \beta$, $\beta < \gamma$, $\gamma > \delta$, $\delta < \varepsilon$

werden der Reihe nach gesprochen:

7 ist mehr als 4, 5 ist weniger als 10,
12 Meter sind größer als 8 Meter,

---

[1]) m bedeutet Meter, cm Centimeter (siehe § 6, Seite 11).

77 Centimeter sind kleiner als 2 Meter,
Winkel α ist größer als Winkel β,
Winkel β „ kleiner als Winkel γ,
Winkel γ „ größer als Winkel δ,
Winkel δ „ kleiner als Winkel ε.

Aufgaben. Wie spricht man die Ungleichungen:

1) $20 \geq 15$, 5) $6\text{ m} > 75\text{ cm}$, 9) $\alpha > \gamma$,
2) $72 < 100$, 6) $33\text{ cm} \leq 5\text{ dm}$[1], 10) $\beta < \delta$,
3) $80 \geq 69$, 7) $6\text{ dm} \geq 80\text{mm}$[1], 11) $\gamma < \varepsilon$,
4) $33 < 44$, 8) $2\text{ l} \leq 2\text{ hl}$[1], 12) $\alpha > \delta$?

Im nächsten Paragraphen wollen wir zwei Grundsätze aufstellen, welche Ungleichungen betreffen.

§ 66. Grundsatz VIII und IX. Das folgende aus dem Leben gegriffene Beispiel wird uns zu Grundsatz VIII führen.

Nehmen wir an, ein Tischler habe zwei Holzstäbe; auf den einen möge er ein a und auf den andern ein b geschrieben haben. a sei 3 Meter und b 2 Meter lang. a ist also **größer** als b.

An jeden der beiden Holzstäbe möge er nun ein gleiches Stück von 1 Meter anleimen (hinzufügen, addiren). Dann mißt a 4 Meter und b 3 Meter; a ist also wieder **größer** als b.

Erst hatte der Tischler Ungleiches (a war 3 Meter, b 2 Meter lang). Wenn er **Gleiches zu Ungleichem addirt** (zu a 1 Meter und zu b 1 Meter), er**giebt** sich wieder **Ungleiches** (a mißt 4 Meter, b 3 Meter), und zwar ist a nicht kleiner geworden als b, a ist vielmehr größer, gerade wie vorher, die beiden Größen a und b sind ungleich **in demselben Sinne** geblieben.

Fassen wir die fett gedruckten Wörter zusammen, so haben wir den

Grundsatz VIII. Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches in demselben Sinne.

Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über:

7 Decimeter sind größer als 55 Centimeter, in Zeichen:

$$7\text{ dm} > 55\text{ cm}.$$

3 Decimeter sind ebenso groß wie 30 Centimeter, in Zeichen:

$$3\text{ dm} = 30\text{ cm}.$$

[1] dm bedeutet Decimeter (siehe § 6, Seite 11), mm Millimeter (siehe § 32, Seite 36), l bedeutet Liter, hl Hektoliter (siehe § 10, Seite 14).

Addiren wir die linken und ebenso die rechten Seiten der Ungleichung und Gleichung zu einander, so erhalten wir nach Grundsatz VIII

$$7\text{ dm} + 3\text{ dm} > 55\text{ cm} + 30\text{ cm}$$
oder $$10\text{ dm} > 85\text{ cm}.$$

Wenn wir dem zweiten Beispiel die knappe mathematische Form geben, haben wir:

$$\begin{array}{c} 7\text{ dm} > 55\text{ cm} \\ 3\text{ dm} = 30\text{ cm} \\ \hline 7\text{ dm} + 3\text{ dm} > 55\text{ cm} + 30\text{ cm} \\ 10\text{ dm} > 85\text{ cm}. \end{array}$$[1]

Drittes Beispiel. 6 Meter sind kleiner als 80 Decimeter, in Zeichen:

$$6\text{ m} < 80\text{ dm}.$$

2 Meter sind ebenso groß wie 20 Decimeter, in Zeichen:

$$2\text{ m} = 20\text{ dm}.$$

Nach Grundsatz VIII sind darum auch 6 m + 2 m kleiner als 80 dm + 20 dm, in Zeichen:

$$6\text{ m} + 2\text{ m} < 80\text{ dm} + 20\text{ dm}$$

In kurzer mathematischer Fassung heißt das dritte Beispiel:

$$\begin{array}{c} 6\text{ m} < 80\text{ dm} \\ 2\text{ m} = 20\text{ dm} \\ \hline 6\text{ m} + 2\text{ m} < 80\text{ dm} + 20\text{ dm} \\ \text{oder } 8\text{ m} < 100\text{ dm}. \end{array}$$

Wir bringen in mathematischer Fassung noch folgende Beispiele:

$$\begin{array}{c} 1)\ 8\text{ Mk.} > 272\text{ Pf.} \\ 2\text{ Mk.} = 200\text{ Pf.} \\ \hline 8\text{ Mk.} + 2\text{ Mk.} > 272\text{ Pf.} + 200\text{ Pf.} \\ \text{oder } 10\text{ Mk.} > 472\text{ Pf.} \end{array}$$

2) In Figur 7 sieht der Schüler vier ge-

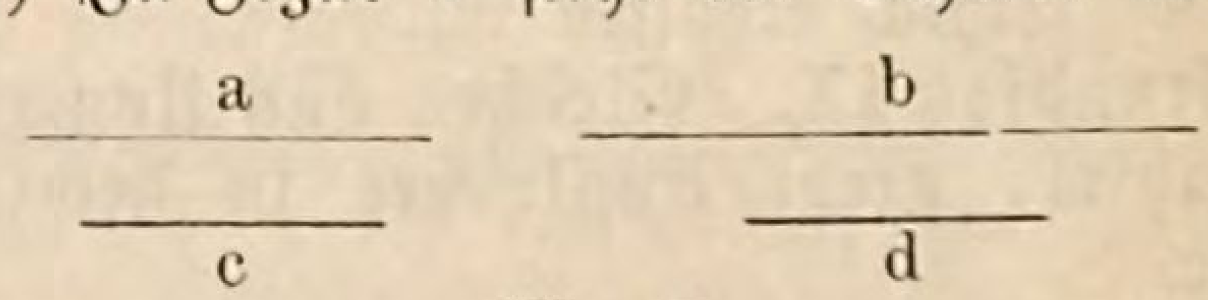


Fig 7.

rade Linien a, b, c und d. Wie er sofort bemerken wird, ist

$$\begin{array}{c} a < b \\ c = d \\ \hline a + c < b + d. \end{array}$$

[1] Dieser Strich bedeutet wieder folglich.

In Figur 8 sind die Geraden dargestellt, welche den Strecken $a + c$ und $b + d$ entsprechen.

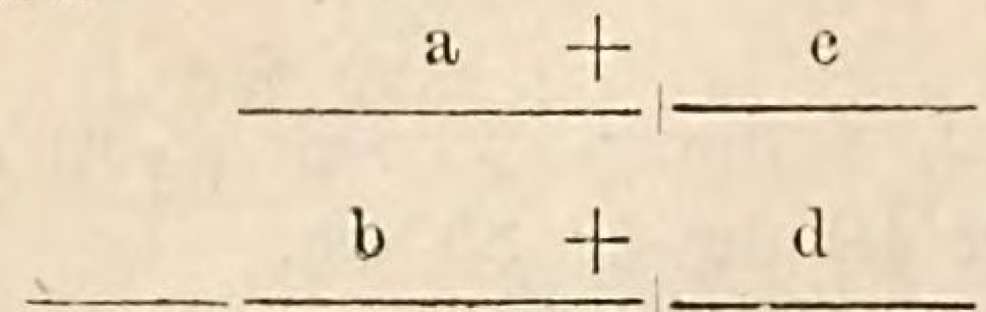


Fig. 8.

Aufgaben. Unter 1, 2, 3, 4 findet der Schüler je eine Ungleichung und eine Gleichung; er erschließe daraus nach Grundsatz VIII die entsprechende Ungleichung.

1)	3 hl > 75 l 1 hl = 100 l	3)	701 cm < 12 m 500 cm = 5 m
2)	9 Mk. > 325 Pf. 3 Mk. = 300 Pf.	4)	66 cm < 11 dm 40 cm = 4 dm.

Den Grundsatz IX wollen wir ebenso aus einem Beispiel herleiten.

Von zwei Brüdern möge der eine A ein Gehalt von 200 Kronen, der andere B ein Gehalt von 1700 Mark jährlich beziehen. Da 200 Kronen gleich 2000 Mark sind, hat A ein größeres Einkommen als B. Um eine Schwester zu unterstützen, möge A von seinem Gehalt 15 Kronen, B 150 Mark nehmen (subtrahiren) und der Schwester zuwenden. 15 Kronen sind gerade so viel wie 150 Mark, beide Brüder gewähren der Schwester also die gleiche Summe. A behält dann 185 Kronen oder 1850 Mark, B 1550 Mark, A hat mithin wieder mehr als B.

Erst hatten die beiden Brüder Ungleiches (A 200 Kronen, B 1700 Mark); wenn sie **Gleiches von Ungleichem subtrahirt** haben (A 15 Kronen, B 150 Mark), **ergiebt** sich für sie wieder **Ungleiches** (für A 185 Kronen für B 1550 Mark); und zwar hat A nicht weniger als B, sondern mehr, gerade wie zuvor. Die beiden Brüder haben also Ungleiches **in demselben Sinne** behalten.

Wenn wir die fett gedruckten Wörter an einander reihen, erhalten wir

Grundsatz IX. Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt Ungleiches in demselben Sinne.

Zweites Beispiel. 1 Hektoliter ist gleich 100 Litern, 9 Hektoliter sind darum mehr als 625 Liter, in Zeichen:

$$9 \text{ hl} > 625 \text{ l}.$$

5 Hektoliter sind so groß wie 500 Liter, in Zeichen:

$$5 \text{ hl} = 500 \text{ l}.$$

Subtrahiren wir 5 hl von 9 hl und 500 l von 625 l, also das Gleiche von dem Ungleichen, so erhalten wir nach Grundsatz IX

$$9 \text{ hl} - 5 \text{ hl} > 625 \text{ l} - 500 \text{ l}$$
oder $4 \text{ hl} > 125 \text{ l}$.

Drittes Beispiel. 4 Mark sind weniger als 483 Pfennige, in Zeichen:

$$4 \text{ Mk.} < 483 \text{ Pf.}$$

2 Mark sind gerade soviel wie 200 Pfennige, in Zeichen:

$$2 \text{ Mk.} = 200 \text{ Pf.}$$

Ziehen wir 2 Mk. von 4 Mk. und 200 Pf. von 483 Pf. ab, so ergiebt sich nach Grundsatz IX:

$$4 \text{ Mk.} - 2 \text{ Mk.} < 483 \text{ Pf.} - 200 \text{ Pf.}$$
oder $2 \text{ Mk.} < 283 \text{ Pf.}$

Wenn wir das zweite und dritte Beispiel in die kurze mathematische Form bringen, haben wir:

$$9 \text{ hl} > 625 \text{ l}$$
$$5 \text{ hl} = 500 \text{ l}$$
$$\overline{9 \text{ hl} - 5 \text{ hl} > 625 \text{ l} - 500 \text{ l}}$$
oder $4 \text{ hl} > 125 \text{ l}$.

und
$$4 \text{ Mk.} < 483 \text{ Pf.}$$
$$2 \text{ Mk.} = 200 \text{ Pf.}$$
$$\overline{4 \text{ Mk.} - 2 \text{ Mk.} < 483 \text{ Pf.} - 200 \text{ Pf.}}$$
oder $2 \text{ Mk.} < 283 \text{ Pf.}$

Aufgaben. Unter 1, 2, 3, 4 findet der Schüler je eine Ungleichung und eine Gleichung. Er folgere daraus in der eben angegebenen Weise gemäß Grundsatz IX die entsprechende Ungleichung.

1)	10 m > 90 dm 3 m = 30 dm.	3)	8 hl < 900 l 3 hl = 300 l.
2)	18 Mk. > 1700 Pf. 6 Mk. = 600 Pf.	4)	7 Km[1]) < 940 Dm[2]) 5 Km = 500 Dm.

§ 67. Lehrsätze über Dreiecksseiten.

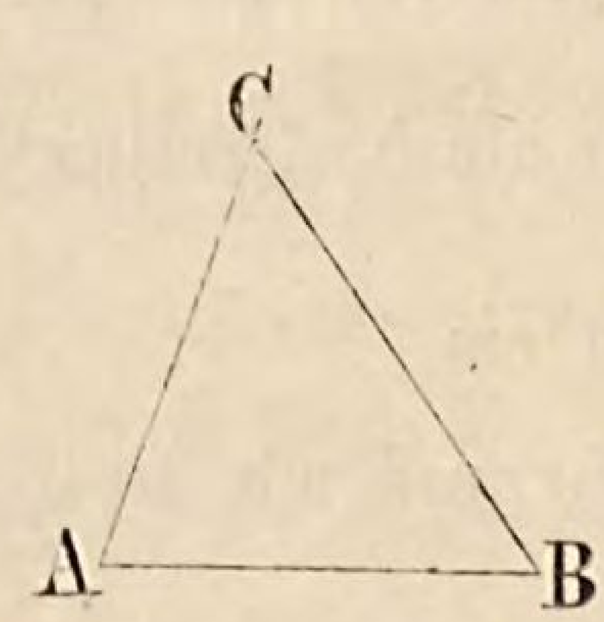


Fig. 9.

In dem Dreieck ABC (Figur 9) kann man auf zwei Wegen vom Punkte A zum Punkte B gelangen, wenn man an den Dreiecksseiten entlang geht. Man kann entweder die Gerade AB als Weg wählen, oder auf

[1]) Km bedeutet Kilometer, ein Kilometer ist gleich 1000 Metern. [2]) Dm bedeutet Dekameter, ein Dekameter ist gleich 10 Metern.

einer gebrochenen Linie über C von A nach B wandern. Wenn man den zuletzt genannten Weg einschlägt, muß man die Seite AC und dann die Seite CB, im Ganzen also

$$AC + CB$$

passiren. Nach der Definition, welche wir in § 13 a von den geraden Linien gegeben haben, ist die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, sie ist kürzer als alle krummen und gebrochenen Linien, welche durch A und B verbunden werden können. Demgemäß ist AB kürzer als der Weg $AC + CB$, in Zeichen

$$AB < AC + BC \text{ oder}$$
$$AC + BC > AB.$$

Ebenso ist $BA + AC > BC$
$AB + BC > AC.$

Diese drei Ungleichungen wollen wir aufmerksam betrachten. AC, BC, AB sind Dreiecksseiten; wir haben auf der linken Seite der Ungleichungen also **die Summe zweier Dreiecksseiten**, dann folgt das Zeichen für **größer als**, und auf der rechten Seite sehen wir die **dritte Dreiecksseite**. Demgemäß besteht der

Lehrsatz I. Bei einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

In Figur 2, Seite 73, sind a, b und c Dreiecksseiten, nach Lehrsatz I ist mithin:

$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c.$

Aufgaben. Figur 4 und 5 (Seite 74) sind zwei Dreiecke; der Schüler stelle gemäß Lehrsatz I die Ungleichungen zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite auf.

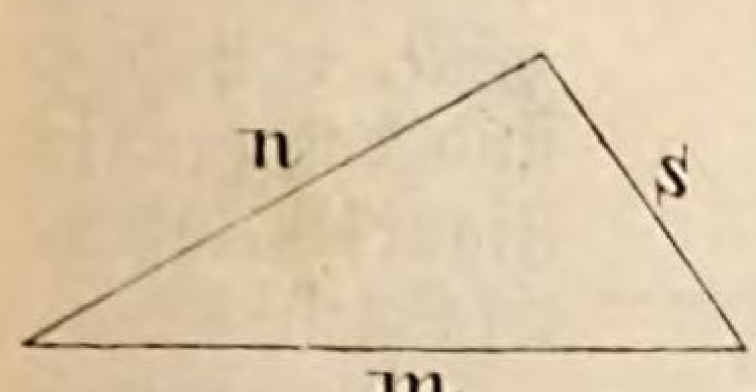


Fig. 10.

In Figur 10 sind m, n und s die Dreiecksseiten, darum ist:

1) $s + n > m$
und 2) $m + s > n$.

Wir können nun folgende Schlüsse ziehen:

$$\begin{array}{rl} 1)\ s + n > m & \\ n = n & \text{nach Gr. I.} \\ \hline s + n - n > m - n & \text{nach Gr. IX.} \\ \text{oder I.)}\ s > m - n. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2)\ m + s > n & \\ s = s & \text{nach Gr. I.} \\ \hline m + s - s > n - s & \text{nach Gr. IX.} \\ \text{oder II.)}\ m > n - s. & \end{array}$$

Für $s + n$ können wir schreiben $n + s$, wir haben darum auch die Ungleichung:

$$\begin{array}{rl} 3)\ n + s > m & \\ s = s & \text{nach Gr. I.} \\ \hline n + s - s > m - s & \text{nach Gr. IX.} \\ \text{oder III.)}\ n > m - s. & \end{array}$$

Wir sind auf diese Weise zu den folgenden drei Ungleichungen gelangt:

I.) $s > m - n$, II.) $m > n - s$, III.) $n > m - s$.

Dafür können wir auch schreiben:

I.) $m - n < s$
II.) $n - s < m$
III.) $m - s < n$.

Ueberlegen wir uns, was diese drei Ungleichungen bedeuten. m, n und s sind die drei Seiten eines Dreiecks. $m - n$, $n - s$, $m - s$ sind mithin die Differenzen[1]) zweier Dreiecksseiten. Rechts von dem Ungleichheitszeichen (<) finden wir die Dreiecksseite, welche zu den beiden links genannten als **dritte** gehört. Das Zeichen < (kleiner als) sagt uns mithin bei unseren drei Ungleichungen, daß die Differenz zweier Dreiecksseiten kleiner sei als die dritte. Wir haben den

Lehrsatz II. Bei einem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten immer kleiner als die dritte Seite.

---

[1]) In der Gleichung

$$18 - 5 = 13$$

bedeutet die linke Seite (18 — 5): die 5 **soll** von der 18 subtrahirt (abgezogen) werden, sie ist darum (vergleiche § 44 Seite 51) ein Befehls- oder **Imperativsatz**. Auf der rechten Seite ist die Aufforderung der linken ausgeführt, sie giebt uns das **Resultat** der Subtraction. Den Auseinandersetzungen in § 7 gemäß müßte in der Gleichung

$$18 - 5 = 13$$

die 13, also die rechte Seite, Differenz genannt werden, man bezeichnet mit dem Worte Differenz aber auch die linke Seite: 18 — 5, welche durch das Gleichheitszeichen mit der rechten verbunden ist. Ueberhaupt nennt man Differenz nicht blos das Resultat der Subtraction, sondern auch den Imperativsatz, welcher uns auffordert, die Subtraction zu vollziehen. Z. B. ist

20 — 11 die Differenz von 20 und 11,
100 — 33 die Differenz von 100 und 33,

demgemäß ist

m — n die Differenz der Seiten m und n,
n — s die Differenz der Seiten n und s,
m — s die Differenz der Seiten m und s.

Wir wollen jetzt die drei Seiten m, n und s in Figur 10 ausmessen und die Zahlenwerthe, welche sich bei der Messung ergeben, in die unter I, II und III genannten Ungleichungen für die Seiten einsetzen. Eine einfache Rechnung wird dann die Richtigkeit unseres Lehrsatzes bestätigen. m mißt 30, n 25 und s 15 Millimeter, in Zeichen:

$$m = 30 \text{ mm}, \; n = 25 \text{ mm}, \; s = 15 \text{ mm}.$$

Es ist mithin

$$m - n = 5 \text{ mm}, \quad n - s = 10 \text{ mm}, \quad m - s = 15 \text{ mm}.$$

Den drei Ungleichungen:

I.) $m - n < s$, II.) $n - s < m$, III.) $m - s < n$

entsprechen also die Zahlenwerthe

I.) 5 mm < 15 mm, II.) 10 mm < 30 mm, III.) 15 mm < 25 mm.

§ 68. **Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.** Man theilt die Dreiecke in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige ein.

Gleichseitig heißt ein Dreieck, wenn die **drei Seiten** desselben einander **gleich** sind.

Gleichschenklig wird ein Dreieck genannt, wenn in demselben **zwei Seiten gleich** sind.

Ungleichseitig heißt ein Dreieck, wenn in demselben **keine Seite** der andern **gleich** ist.

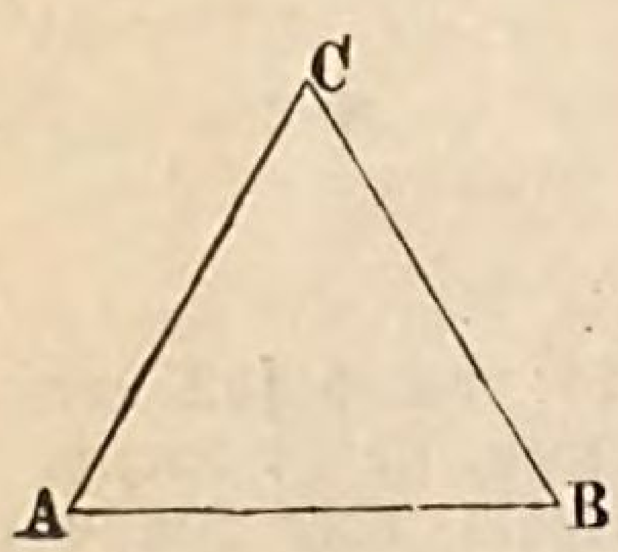


Fig. 11.

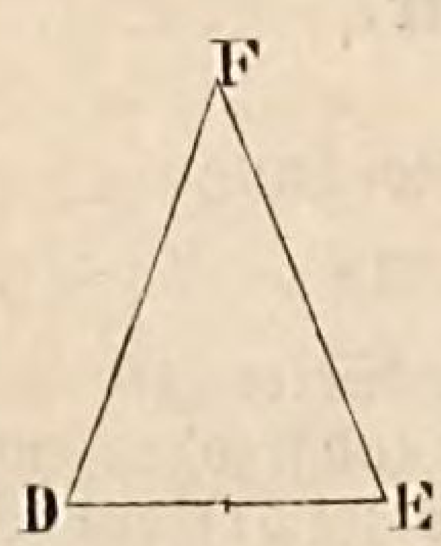


Fig. 12.

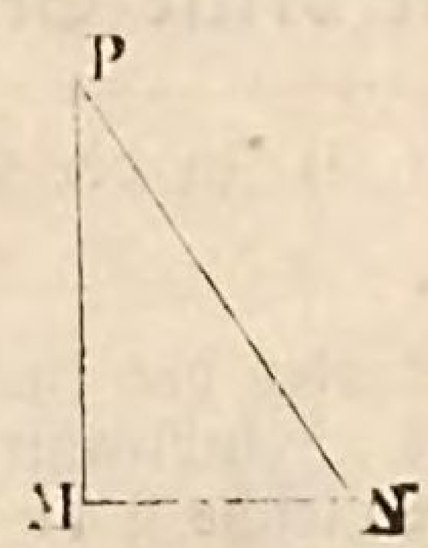


Fig. 13.

In Figur 11 ist

$$AB = AC = BC,$$

mithin ist Dreieck ABC gleichseitig.

In Figur 12 ist

$$DF = EF,$$

folglich ist Dreieck DEF gleichschenklig.

In Figur 13 ist

$$MN < MP \text{ und } MP < PN,$$

daher ist Dreieck MNP ungleichseitig.

Aufgaben. Der Schüler gebe an, ob die Dreiecke, welche durch Figur 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10 dargestellt werden, gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig sind.

B. Die Außenwinkel.

§ 69. Der Winkel δ in der unten stehenden Figur 14 ist dadurch entstanden, daß die Dreiecksseite AC über C hinaus bis F verlängert ist. Sein einer Schenkel ist die Dreiecksseite BC, sein anderer die Verlängerung CF der Seite AC. Weiter kann man die Lage des Winkels δ noch charakterisiren, wenn man angiebt, daß er ein Nebenwinkel des Dreieckswinkels γ ist.

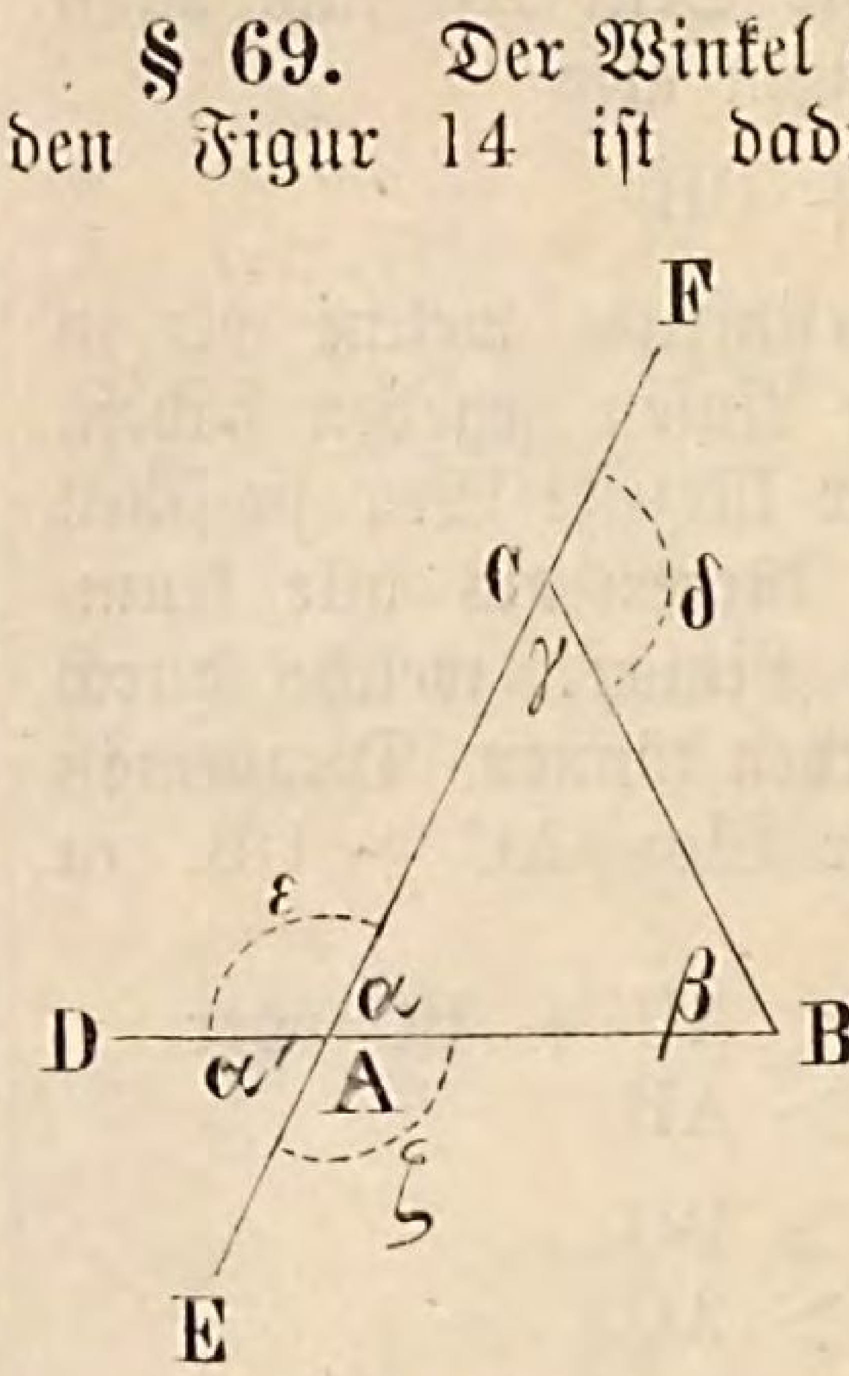


Fig. 14.

Alle Winkel, welche wie δ **Nebenwinkel eines Dreieckswinkels** sind, werden **Außenwinkel** genannt. Der **eine Schenkel** eines Außenwinkels ist immer eine **Dreiecksseite,** der **andere** die **Verlängerung einer Dreiecksseite.**

In Figur 14 bemerkt der Schüler außerhalb des Dreiecks noch die Winkel ε, ζ und α'. ε und ζ sind **Außenwinkel,** denn sie sind **Nebenwinkel** des Dreieckswinkels α.

Den Winkel α' darf man nicht Außenwinkel nennen, weil er **Scheitelwinkel,** aber nicht Nebenwinkel des Dreieckswinkels α ist.

Ebenso wenig kommt in Figur 15 den Winkeln α', β', γ' die Bezeichnung Außenwinkel zu. ε, ζ, η, ϑ, τ und φ sind dagegen in Figur 15 Außenwinkel.[1]) Die beiden griechischen Buchstaben τ und φ, mit welchen wir zwei von den Außenwinkeln benannt haben, sind dem Schüler noch nicht bekannt.


Fig. 15.

τ wird gesprochen wie t und genannt Tau;
φ wird gesprochen wie ph und genannt Phi.

---

[1]) ε, ζ, η, ϑ, τ und φ sind Außenwinkel, weil ε und ζ Nebenwinkel des Dreieckswinkels α, η und ϑ Nebenwinkel des Dreieckswinkels β, φ und τ Nebenwinkel des Dreieckswinkels γ sind.

$\tau = \varphi$ wird gesprochen:
der Winkel Tau ist gleich dem Winkel Phi.

Die Ungleichung $\tau > \varphi$,
spricht man:
der Winkel Tau ist größer als der Winkel Phi,

Wir wollen jetzt über die Außenwinkel einen Lehrsatz aufstellen.

In Figur 16 ist δ ein **Außenwinkel,** weil der Dreieckswinkel γ sein Nebenwinkel ist. α und β sind die beiden Dreieckswinkel, **welche nicht Nebenwinkel** von δ **sind.** Wenn wir α und β messen, finden wir, daß α 50 Grad und β 72 Grad beträgt in Zeichen:

$$\alpha = 50^0, \ \beta = 73^0.$$

α und β sind mithin zusammen gleich 50 und 72 oder gleich 122 Grad, in Zeichen

$$\alpha + \beta = 123^0.$$

Wie sich der Schüler durch Messung mit dem Transporteur überzeugen kann, beträgt δ auch 123 Grad; es ist also

$$\delta = \alpha + \beta$$

d. h. der Außenwinkel δ ist ebenso groß wie die Summe der beiden Winkel α und β, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

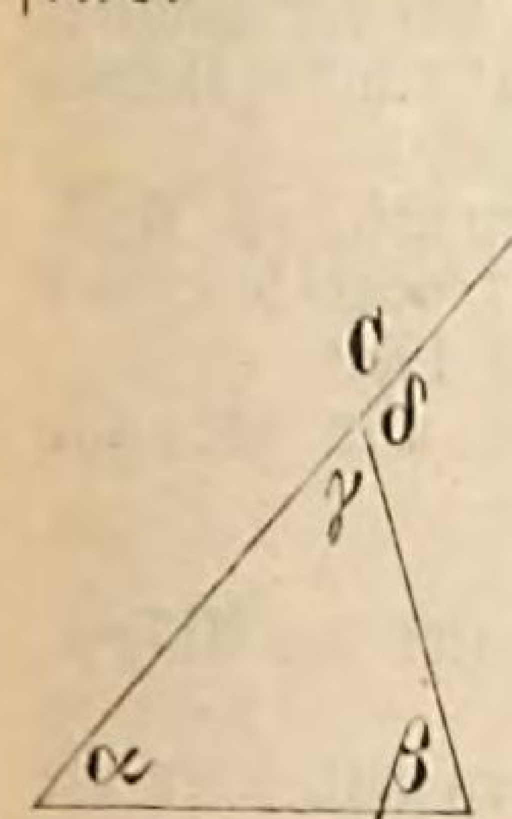


Fig. 16.

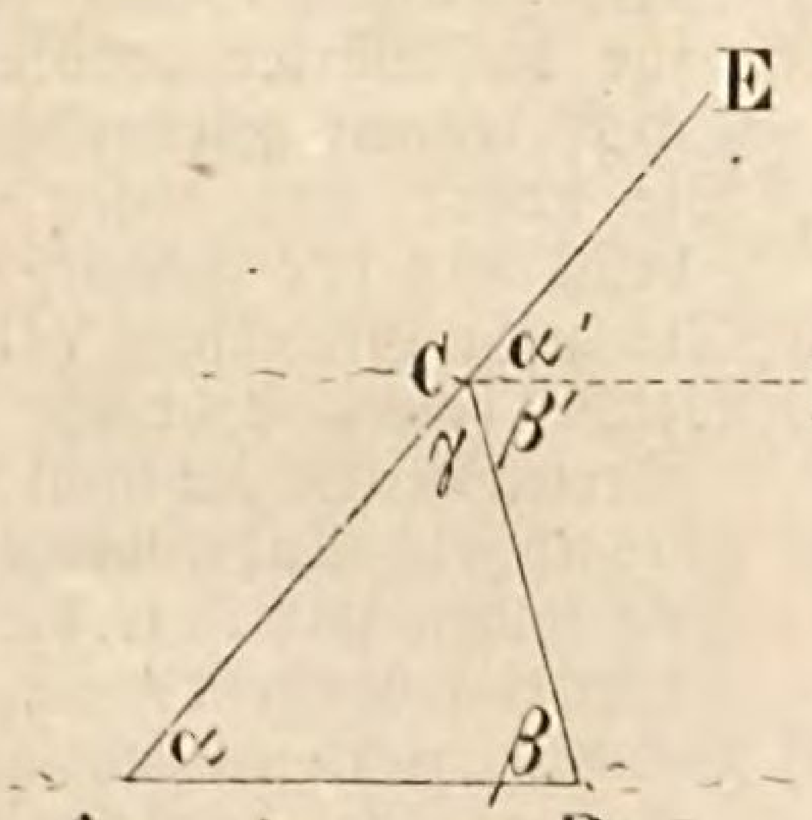


Fig. 17.

Wenn wir diesen Satz von einem Fall auf alle Fälle ausdehnen, haben wir den

Lehrsatz III. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist ebenso groß wie die Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

Es ist nicht schwer, einen streng mathematischen Beweis für diesen Satz zu liefern.

Voraussetzung. Es ist in Figur 16 das Dreieck ABC gegeben; ein Außenwinkel dieses Dreiecks ist δ; α und β sind die beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

Behauptung. $\delta = \alpha + \beta$.

Beweis. Wir wollen durch den Punkt C eine Parallele CD zu AB ziehen, dann wird der Winkel δ (siehe Figur 16) in die beiden Winkel α' und β' (siehe Figur 17) zerlegt. Die beiden Winkel α' und β' sind zusammen ebenso groß wie δ, in Zeichen

I. $\alpha' + \beta' = \delta$.

Es ist dann

II. $\alpha = \alpha'$ als Gegenw. bei den Parallelen[1]) AB und CD geschnitten von AE.
III. $\beta = \beta'$ als innere Wechselw. bei den Parallelen AB und CD geschnitten von BC[1]).

Wir wollen Gleichung II und III noch einmal übersichtlich hinschreiben, um weitere Schlüsse aus ihnen zu ziehen.

II. $\alpha = \alpha'$
III. $\beta = \beta'$

$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ nach Gr. III.
$\delta = \alpha' + \beta'$ gemäß Gleichung I.

$\alpha + \beta = \delta$ nach Gr. II.
oder $\delta = \alpha + \beta$, was behauptet war.

Bei der Behandlung des letzten Lehrsatzes haben wir zwei Figuren (16 und 17) gebraucht. Wir haben den Außenwinkel mit δ und seine Theile mit α' und β' bezeichnet; diese drei Buchstaben konnten wir nicht in einer Figur zusammendrängen, ohne zu verwirren. Eine Figur nämlich (17) hätte uns genügt, wenn wir die Winkel nicht mit griechischen, sondern mit drei großen lateinischen Buchstaben bezeichnet hätten. Wir hätten dann

statt δ, BCE statt β, ABC
statt α, BAC statt α', DCE
statt β', BCD.

setzen müssen.

Aufgaben I. Der Schüler wiederhole schriftlich die Voraussetzung, die Behauptung und den Beweis des vorstehenden Lehrsatzes; er bediene sich aber dabei nur der Figur 17 und benenne die Winkel nicht mit griechischen, sondern mit drei großen lateinischen Buchstaben.

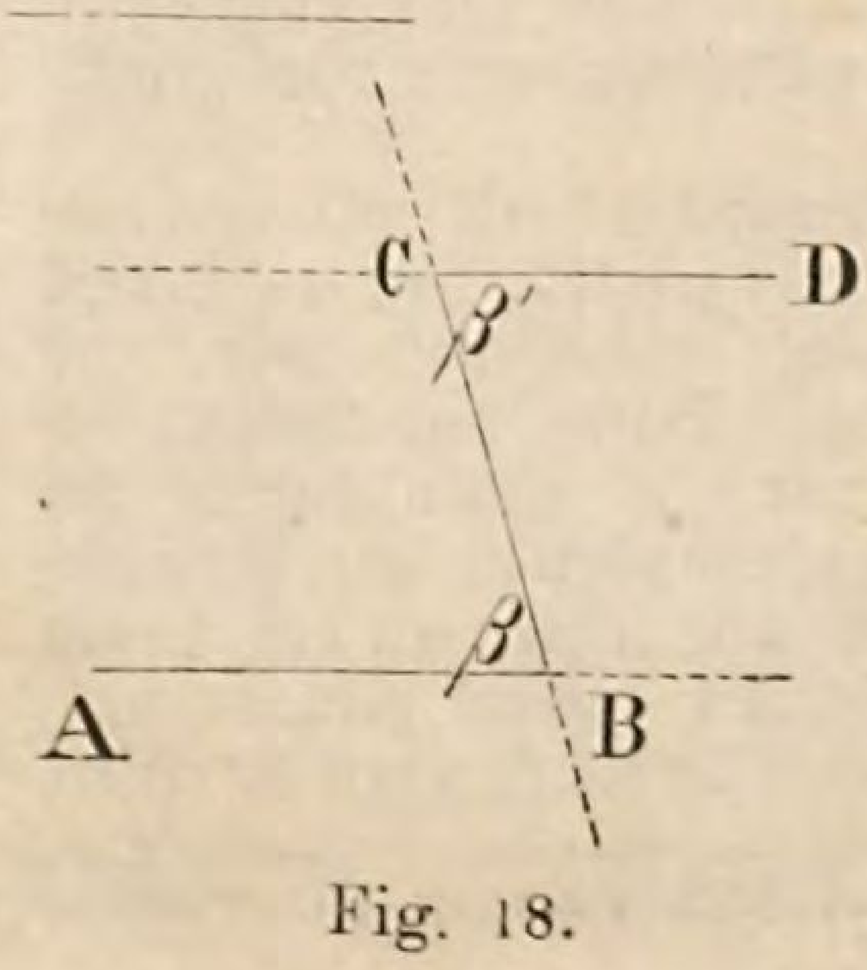


Fig. 18.

[1]) Fig. 18 bringt die Winkel β und β' losgelöst von dem übrigen Theil der Figur 17 zur Anschauung. Zugleich haben wir die Verlängerungen der Geraden BC, AB und CD durch Punkte angedeutet, damit der Schüler ohne Mühe erkenne, daß β und β' innere Wechselwinkel sind.

Wie wir bereits besprochen haben, sind in Figur 15 ε, ζ, η, ϑ, τ und φ Außenwinkel. Nach dem vorigen Lehrsatze ist darum:

$\left.\begin{matrix}\varepsilon = \beta + \gamma \\ \zeta = \beta + \gamma\end{matrix}\right\}$ denn die Dreiecksw. β und γ sind nicht Nebenw. der Außenw. ε und ζ.

$\left.\begin{matrix}\eta = \alpha + \gamma \\ \vartheta = \alpha + \gamma\end{matrix}\right\}$ denn die Dreiecksw. α und γ sind nicht Nebenw. der Außenw. η und ϑ.

$\left.\begin{matrix}\tau = \alpha + \beta \\ \varphi = \alpha + \beta\end{matrix}\right\}$ denn die Dreiecksw. α und β sind nicht Nebenw. der Außenw. τ und φ.

Aufgaben II. a) Der Schüler nenne die Zahl der Außenwinkel, welche ein Dreieck haben kann.

b) Er gebe in Figur 19 die Außenwinkel an, und setze jeden derselben der Summe derjenigen Dreieckswinkel gleich, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

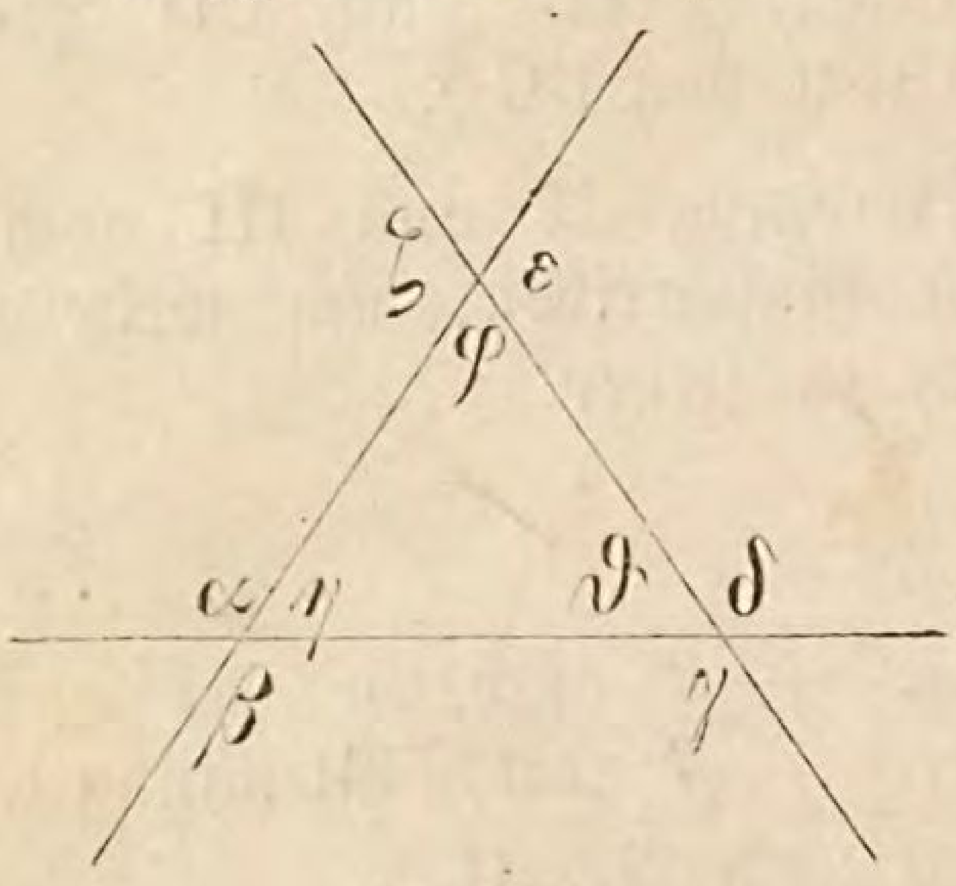


Fig. 19.

C. Recapitulation.

Nachdem wir in der **siebenten Lection** zunächst die Aufgaben des dritten Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, gingen wir zu einer eingehenden Behandlung der parallelen Linien über. Wir hatten schon im dritten Briefe die Parallelen definirt, indem wir sie im Zusammenhange mit einer dritten schneidenden Geraden betrachteten. Diese Definition mußte in uns einige Bedenken wachrufen, welche uns zu einer Fundamentaleigenschaft des Raumes und zu einem Satze über die Gleichheit zweier Gegen- und Wechselwinkel bei Parallelen führten. Um diesen außerordentlich wichtigen Lehrsatz einzuüben, brachten wir mehrere Beispiele und Aufgaben. Wir besprachen sodann die Gegen- und Wechselwinkel bei unvollständigen Figuren und zeigten, wie man durch einen Punkt zu einer geraden Linie eine Parallele ziehen könne. Daran schlossen wir einen Satz über die Gleichheit der Winkel, welche parallele Schenkel haben; und am Schlusse der siebenten Lection behandelten wir die entgegengesetzten Winkel, welche für spätere Erörterungen von großer Wichtigkeit sind.

Die **achte Lection** begannen wir mit der Betrachtung des Dreiecks; wir zeigten, daß ein Dreieck drei Ecken, drei Seiten und drei Winkel habe, und besprachen, wie die Ecken, Seiten und Winkel bezeichnet werden. Ehe wir die Eigenschaften des Dreiecks weiter erörterten, behandelten wir die sogenannten Ungleichungen und fügten zu den sieben Grundsätzen, die dem Schüler bereits bekannt sind, zwei neue hinzu, welche die Ungleichungen betreffen. Vermittelst der Ungleichungen konnten wir nun zwei Sätze über die Dreieckseiten mathematisch behandeln. Nachdem wir noch die Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten besprochen hatten, gingen wir zu den Außenwinkeln über. Wir beschrieben die Lage der Außenwinkel und bewiesen den wichtigen Satz, daß jeder derselben gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel sei, welche nicht seine Nebenwinkel sind. Mit einigen Aufgaben über Außenwinkel schlossen wir den Abschnitt B der achten Lection.

D. Wiederholungsfragen.

1) Von welcher Fundamentaleigenschaft des Raumes haben wir im Abschnitt C der siebenten Lection gesprochen?
2) Wie heißt der Satz, den wir aus dieser Fundamentaleigenschaft hergeleitet haben?
3) Welchen Lehrsatz haben wir über Winkel mit parallelen Schenkeln aufgestellt?
4) Was versteht man unter entgegengesetzten Winkeln?
5) Wie groß ist die Summe zweier entgegengesetzten Winkel, wenn zwei Parallele von einer dritten Geraden geschnitten werden?
6) Wie werden die Ecken und Seiten eines Dreiecks bezeichnet?
7) Wie bezeichnet man die Dreieckswinkel?
8) Was ist ein gleichseitiges, was ist ein ungleichseitiges Dreieck?
9) Was versteht man unter einem gleichschenkligen Dreieck?
10) Welche mathematischen Zeichen hat der Schüler für die Wörter „größer als“ und „kleiner als“ kennen gelernt?
11) Wie nennt man einen mathematischen Ausdruck von der Form: $9 > 7$ oder $5 < 8$?
12) Wie heißt Grundsatz VIII und IX?
13) Welche beiden Lehrsätze haben wir über die Dreieckseiten gebracht?
14) Was ist ein Außenwinkel?
15) Was haben wir über die Schenkel der Außenwinkel festgestellt?
16) Welchen wichtigen Lehrsatz haben wir über die Außenwinkel bewiesen?
17) Was ist die Summe der Zahlen 7 und 6, 12 und 13, was ist die Differenz der Zahlen 15 und 6, 28 und 24?
18) Wie heißen die acht Grundsätze, welche wir bisher aufgestellt haben?
19) Was versteht man unter der Entfernung zweier Punkte?
20) Welchen Lehrsatz haben wir auf Seite 19 über die geraden Linien aufgestellt?
21) Was versteht man unter einem convexen Winkel?
22) Was ist ein concaver Winkel?
23) Wie haben wir die Nebenwinkel definirt?
24) Welche Definition haben wir von den Scheitelwinkeln gegeben?
25) Was ist ein Centriwinkel?
26) Was ist ein Peripheriewinkel?
27) Wie viel Minuten hat ein Grad?
28) Wie viel Secunden hat eine Minute?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus. Lection 9 und 10. Planimetrie.	Als Manuscript gedruckt.

5. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

> Es giebt auf der Welt etwas, was besser ist als alle materiellen Genüsse, das ist die Hingabe an die Wissenschaft.

Lection 9.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 7.

Abschnitt C. §. 59. a) In Figur 5 ist:

$\alpha = \varepsilon$	als	Gegenwinkel	bei den	Parallelen AB	und CD	geschnitten von	EF
$\gamma = \eta$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF
$\delta = \vartheta$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF
$\beta = \zeta$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF.
$\alpha = \zeta$	„	äußere Wechselwinkel	bei den	Parallelen AB	und CD	geschnitten von	EF
$\delta = \eta$	„	äußere Wechselwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF
$\gamma = \vartheta$	„	innere Wechselwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF
$\beta = \varepsilon$	„	innere Wechselwinkel	„ „	Parallelen AB	„ CD	„ „	EF.

In Figur 6 ist:

$\alpha = \eta$	als	Gegenwinkel	bei den	Parallelen MN	und ST	geschnitten von	UV
$\beta = \zeta$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV
$\gamma = \varepsilon$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV
$\delta = \vartheta$	„	Gegenwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV
$\alpha = \vartheta$	„	äußere Wechselwinkel	bei den	Parallelen MN	und ST	geschnitten von	UV
$\gamma = \zeta$	„	äußere Wechselwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV
$\beta = \varepsilon$	„	innere Wechselwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV
$\delta = \eta$	„	innere Wechselwinkel	„ „	Parallelen MN	„ ST	„ „	UV.

b) In Figur 7 ist:

$\alpha = \eta$	als	Gegenwinkel	bei	Parallelen
$\varepsilon = \gamma$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\zeta = \delta$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\beta = \vartheta$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\alpha_1 = \eta_1$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\varepsilon_1 = \gamma_1$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\zeta_1 = \delta_1$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\beta_1 = \vartheta_1$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\alpha_2 = \eta_2$	als	Gegenwinkel	bei	Parallelen
$\varepsilon_2 = \gamma_2$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\zeta_2 = \delta_2$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\beta_2 = \vartheta_2$	„	Gegenwinkel	„	Parallelen
$\alpha = \vartheta$	„	äußere Wechselwinkel	bei	Parallelen
$\gamma = \zeta$	„	äußere Wechselwinkel	„	Parallelen
$\varepsilon = \delta$	„	innere Wechselwinkel	„	Parallelen
$\beta = \eta$	„	innere Wechselwinkel	„	Parallelen
$\alpha_1 = \vartheta_1$	„	äußere Wechselwinkel	„	Parallelen

$\gamma_1 = \zeta_1$ als äußere Wechselwinkel bei Parallelen
$\varepsilon_1 = \delta_1$ „ innere Wechselwinkel „ Parallelen
$\beta_1 = \eta_1$ „ äußere Wechselwinkel „ Parallelen
$\alpha_2 = \vartheta_2$ „ äußere Wechselwinkel „ Parallelen
$\gamma_2 = \zeta_2$ „ äußere Wechselwinkel „ Parallelen
$\varepsilon_2 = \delta_2$ „ innere Wechselwinkel „ Parallelen
$\beta_2 = \eta_2$ „ innere Wechselwinkel „ Parallelen.

§ 60. In Figur 12 ist
$\gamma = \gamma'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AC und BD geschnitten von BC
$\alpha = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AC und BD geschnitten von AB.

§ 62. 1) Wenn statt der Figur 14 die Figur 15 gegeben ist, muß sich die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis folgendermaßen gestalten:

Voraussetzung. In Figur 15 ist MP || ST und NP || UT.

Behauptung. $\delta = \varepsilon$.

Beweis. Wir verlängern die Gerade UT über T hinaus bis V, dann sind ε und ε' Gegenwinkel bei den Parallelen MP und ST geschnitten von UV, ebenso sind δ und ε' Gegenwinkel bei den Parallelen NP und UV geschnitten von PM. Darum ist:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$
$$\delta = \varepsilon'$$
$$\overline{\delta = \varepsilon} \text{ nach Gr. II,}$$

was behauptet war.

2) In Figur 16 ist:
$\beta = \zeta$, weil BP || HP_2 und DP || GP_2 ist,
$\gamma = \eta$, weil BP || TP_3 und CP || SP_3 ist,
$\delta = \vartheta$, weil AP || LP_4 und CP || MP_4 ist.

§ 63. Aufgaben I. a. Entgegengesetzte Winkel sind in Figur 20: a und g, e und c, b und h, f und d,
in Figur 21: m und v, r und s, n und u, p und t.

b) In Figur 2 sind entgegengesetzte Winkel:
1) a und d, b und c, h und e, g und f,
2) a_1 und d_1, b_1 und c_1, h_1 und e_1, g_1 und f_1,
3) a_2 und d_2, b_2 und c_2, h_2 und e_2, g_2 und f_2.

Aufgaben II. a) In Figur 2 haben wir:
1) $a + d = 2$ R, 2) $a_1 + d_1 = 2$ R, 3) $a_2 + d_2 = 2$ R
$b + c = 2$ R, $b_1 + c_1 = 2$ R, $b_2 + c_2 = 2$ R
$h + e = 2$ R, $h_1 + e_1 = 2$ R, $h_2 + e_2 = 2$ R
$g + f = 2$ R, $g_1 + f_1 = 2$ R, $g_2 + f_2 = 2$ R.

b) Entgegengesetzte Winkel bei Parallelen sind in Fig. 21: α und δ, ε und ϑ, ζ und η, β und γ,
in Fig. 22: α und δ, η und ζ, ϑ und ε, β und γ.

Darum haben wir in Fig. 22: $\alpha + \delta = 2$ R, $\varepsilon + \vartheta = 2$ R, $\zeta + \eta = 2$ R, $\beta + \gamma = 2$ R,
in Fig. 23: $\alpha + \delta = 2$ R, $\eta + \zeta = 2$ R, $\vartheta + \varepsilon = 2$ R, $\beta + \gamma = 2$ R.

Section 8.

Abschnitt A. § 64. a) In Fig. 4 haben wir die Eckpunkte D,E und F.

b) In Fig. 4 werden die Dreieckseiten mit DE, EF und FD, in Fig. 5 mit c, d und e bezeichnet.

c) In Fig. 4 können die Winkel
entweder mit: δ, ε, und ζ
oder „ D, E, und F
oder „ FDE, DEF, und EFD
oder „ EDF, FED, und DFE
bezeichnet werden.

§ 65. Die in den Aufgaben angeführten Ungleichungen werden der Reihe nach gesprochen:

1) 20 ist mehr als 15. 2) 72 ist weniger als 100. 3) 80 ist mehr als 69. 4) 33 ist weniger als 44. 5) 6 Meter sind größer als 75 Centimeter. 6) 33 Centimeter sind kleiner als 5 Decimeter. 7) 6 Decimeter sind größer als 80 Millimeter. 8) 2 Liter sind kleiner als 2 Hektoliter. 9) Winkel α ist größer als Winkel γ. 10) Winkel β ist kleiner als Winkel δ. 11) Winkel γ ist kleiner als Winkel ε. 12) Winkel α ist größer als Winkel δ.

§ 66. Aufgaben I. Nach Grundsatz VIII können wir schließen:

1) 3 hl > 75 l
1 hl = 100 l
3 hl + 1 hl > 75 l + 100 l
oder 4 hl > 175 l.

2) 9 Mk. > 325 Pf.
3 Mk. = 300 Pf.
9 Mk. + 3 Mk. > 325 Pf. + 300 Pf.
oder 12 Mk. > 625 Pf.

3) 701 cm < 12 m
500 cm = 5 m
701 cm + 500 cm < 12 m + 5 m
oder 1201 cm < 17 m.

4) 66 cm < 11 dm
40 cm = 4 dm
66 cm + 40 cm < 11 dm + 4 dm
oder 106 cm < 15 dm.

Aufgaben II. Nach Grundsatz IX kann gefolgert werden:

1) 10 m > 90 dm
3 m = 30 dm
10 m — 3 m > 90 dm — 30 dm
oder 7 m > 60 dm.

2) 18 Mk. > 1700 Pf.
6 Mk. = 600 Pf.
18 Mk. — 6 Mk. > 1700 Pf. — 600 Pf.
oder 12 Mk. > 1100 Pf.

3) 8 hl < 900 l
3 hl = 300 l
8 hl — 3 hl < 900 l — 300 l
oder 5 hl < 600 l.

4) 7 Km < 940 Dm
5 Km = 500 Dm
7 Km — 5 Km < 940 Dm — 500 Dm
oder 2 Km < 440 Dm.

§ 67. Bei dem einen Dreieck (Fig. 4) ist:
1) DE + EF > DF. 2) EF + FD > DE.
3) FD + DE > EF.

Bei dem andern Dreieck (Fig. 5) ist:
1) c + d > e. 2) d + e > c. 3) e + c > d.

§ 68. Gleichseitig ist:
1) $\triangle$ ABC (Fig. 3), weil AB = BC = CA ist,
2) $\triangle$ DEF (Fig. 4), weil DE = EF = FD ist,
3) Das Dreieck in Fig. 5, weil c = d = e ist.

Gleichschenklig ist:
1) $\triangle$ ABC (Fig. 1), weil AC = BC ist,
2) $\triangle$ ABC (Fig. 9), weil AB = AC ist.

Ungleichseitig ist:
1) das Dreieck in Fig. 2, weil $b > a$ und $a > c$ ist,
2) das Dreieck in Fig. 10, weil $m > n$ und $n > s$ ist.

§ 69. Aufgaben I.

Voraussetzung. Im Dreieck ABC (Figur 17) ist BCE ein Außenwinkel; BAC und ABC sind die beiden Dreieckswinkel, welche nicht Nebenwinkel des Außenwinkels sind.

Behauptung. BCE = BAC + ABC.

Beweis. CD werde parallel zu AB gezogen, dann ist: I BCE = DCE + BCD.

Es ist ferner
BAC = DCE als Gegenw. bei Parallelen.
ABC = BCD als Wechselw. bei Parallelen.
BAC + ABC = DCE + BCD nach Gr. III.
BCE = DCE + BCD nach Gleich. I.
BEC = BAC + ABC, was behauptet war.

Aufgaben II. a) Ein Dreieck hat sechs Außenwinkel. b) Es ist in Fig. 19
1) $\alpha = \varphi + \vartheta$, 3) $\gamma = \eta + \varphi$, 5) $\varepsilon = \eta + \vartheta$,
2) $\beta = \varphi + \vartheta$, 4) $\delta = \eta + \varphi$. 6) $\zeta = \eta + \vartheta$.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 8 gestellten Fragen.

1) Siehe § 58 Seite 68. 2) Siehe Seite 68 Lehrsatz I. 3) Winkel mit parallelen Schenkeln sind einander gleich. 4) Siehe § 63 Seite 71. 5) Gleich 2 Rechten. 6) Die Dreiecksecken werden mit einem großen, die Dreiecksseiten entweder mit zwei großen oder mit einem kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. 7) Die Dreieckswinkel bezeichnet man entweder mit einem kleinen griechischen, oder mit einem großen lateinischen oder mit drei großen lateinischen Buchstaben. 8) Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich, bei einem ungleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten ungleich. 9) Gleichschenklig wird ein Dreieck genannt, wenn zwei Seiten einander gleich sind. 10) Für „größer als" ein $>$, für „kleiner als" ein $<$. 11) Ein mathematischer Ausdruck von der Form: $9 > 7$ oder $5 < 8$ ist eine Ungleichung. 12) Siehe § 66 Seite 75 und 76. 13) Siehe § 67 Seite 77 Lehrsatz I und II. 14) Unter einem Außenwinkel versteht man den Nebenwinkel eines Dreieckswinkels. 15) Der eine Schenkel des Außenwinkels ist eine Dreiecksseite, der andere ist die Verlängerung einer Dreieckseite. 16) Siehe § 69 Seite 79 Lehrsatz III. 17) Die Summe der Zahlen 7 und 6 ist 13 oder 7 + 6, die Summe der Zahlen 12 und 13 ist 25 oder 12 + 13. Die Differenz der Zahlen 15 und 6 ist 9 oder 15 — 6, die Differenz der Zahlen 28 und 24 ist 4 oder 28 — 24. 18) Siehe Seite 14, 15, 16, 17 und 60. 19) Unter der Entfernung zweier Punkte versteht man die Länge der geraden Linie, welche die beiden Punkte mit einander verbindet. 20) Zwei gerade Linien fallen ganz zusammen, wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben. 21) Unter einem convexen Winkel versteht man einen Winkel, welcher größer ist als ein Gestreckter. 22) Ein concaver Winkel ist immer kleiner als ein Gestreckter. 23) Nebenwinkel sind solche Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine gerade Linie bilden. 24) Scheitelwinkel sind solche Winkel, bei welchen die Schenkel des einen Verlängerungen der Schenkel des andern sind. 25) Siehe § 30 Seite 30. 26) Siehe § 30 Seite 30. 27) Ein Grad ist gleich 60 Minuten. 28) Eine Minute hat 60 Secunden.

Die Abschnitte, welche die Lehre von den Winkeln bei Parallelen und von den Außenwinkeln umfaßten, ließen sich nicht leicht darstellen, weil wir unsere Auseinandersetzungen nicht durch Hinweis auf Beispiele aus dem Leben und die tägliche Umgebung des Schülers unterstützen konnten. Um so mehr sind wir darüber erfreut, daß die an uns gelangten Zuschriften durchweg von regem Interesse und von Verständniß Zeugniß ablegen.

Wir wenden uns nun zum nächsten Abschnitt.

C. Die Dreieckswinkel.

§ 70. Die Summe der Dreieckswinkel. Wenn wir in dem Dreieck ABC (Fig. 1) die drei Winkel α, β und γ mit dem Transporteur messen, finden wir, daß

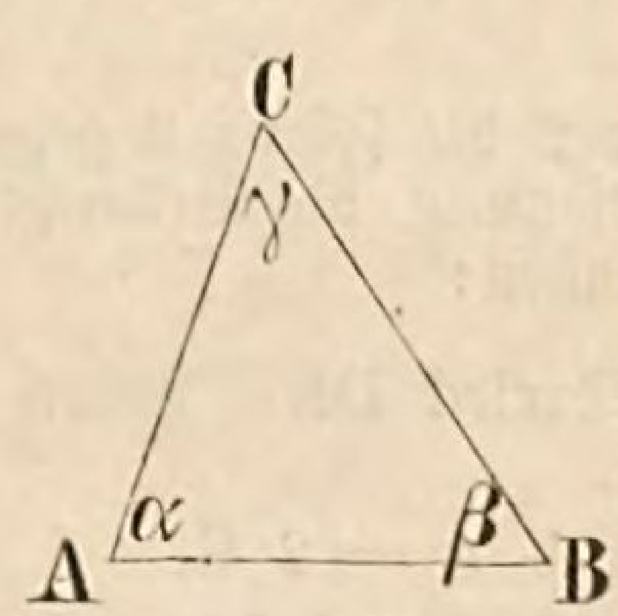


Fig. 1.

$\alpha = 73^0$
$\beta = 55^0$
$\gamma = 52^0$

ist. Demnach ist

$\alpha + \beta + \gamma = 73^0 + 55^0 + 52^0$
oder I. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

Ein Rechter beträgt 90 Grad, **zwei** Rechte 180 Grad; wir können darum für 180^0 in Gleichung I 2 R einsetzen, dann haben wir:

II. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R,

in Worten:

Im Dreieck ABC ist die Summe der drei Winkel α, β und γ gleich zwei Rechten.

Wenn wir diesen Satz verallgemeinern, ergiebt sich der

Lehrsatz I. In einem Dreieck ist die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

Zunächst wollen wir uns des Außenwinkelsatzes bedienen, um diesen Lehrsatz streng mathematisch zu beweisen.

Voraussetzung. In dem Dreieck ABC (Fig. 2) haben wir die drei Winkel α, β und γ.

Behauptung. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

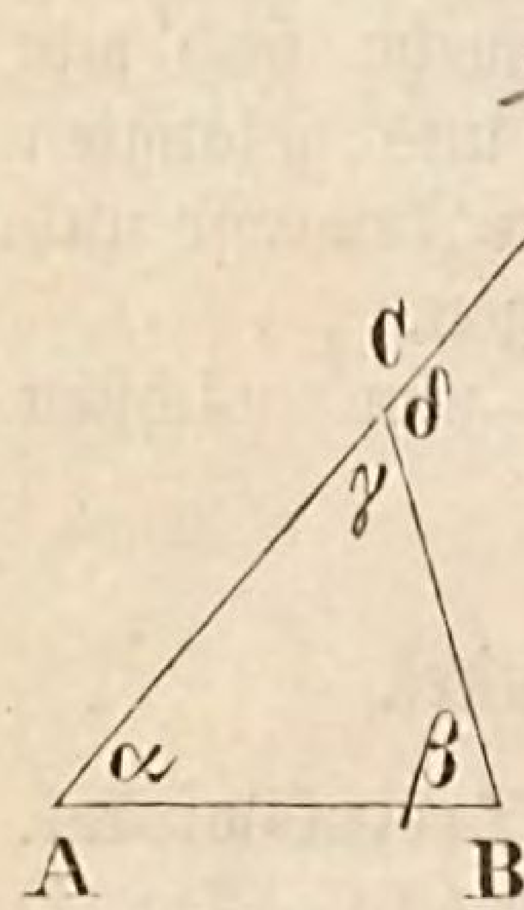
Beweis. Wir verlängern in Figur 2 AC über C hinaus bis D; es entsteht dann der Winkel δ. δ und γ sind Nebenwinkel, darum ist:

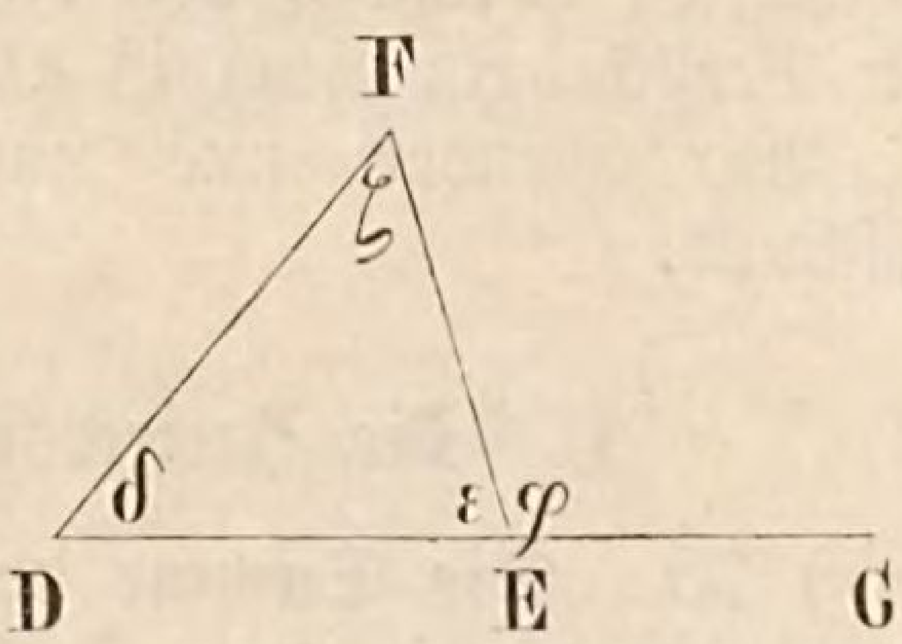
I. $\delta + \gamma = 2$ R.

Ferner ist δ Außenwinkel des Dreiecks ABC, daher haben wir nach § 69 Lehrs. III:

II. $\delta = \alpha + \beta$.

Setzen wir in Gleichung I für δ den gleichen Werth $\alpha + \beta$ ein, so erhalten wir: $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R, was behauptet war.


Fig. 2.


Fig. 3.

Wenn uns statt Figur 2 die Figur 3 gegeben ist, gestaltet sich die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis folgendermaßen:

Voraussetzung. Im Dreieck DEF haben wir die drei Winkel δ, ζ und ε.

Behauptung. $\delta + \zeta + \varepsilon = 2$ R.

Beweis. φ und ε sind Nebenwinkel; daher ist

I. $\varphi + \varepsilon = 2$ R.

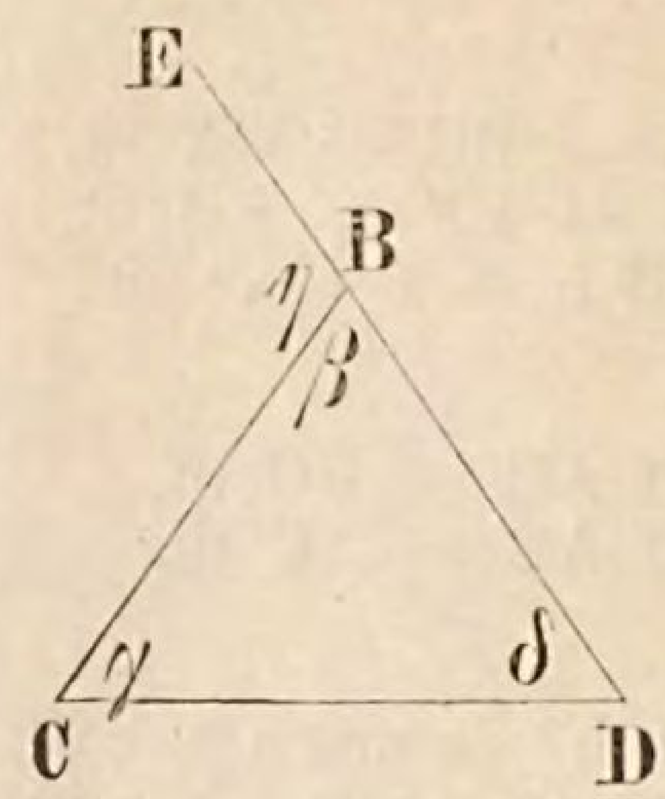
Ferner ist $\varphi = \delta + \zeta$,
weil φ Außenwinkel des Dreiecks DEF ist.

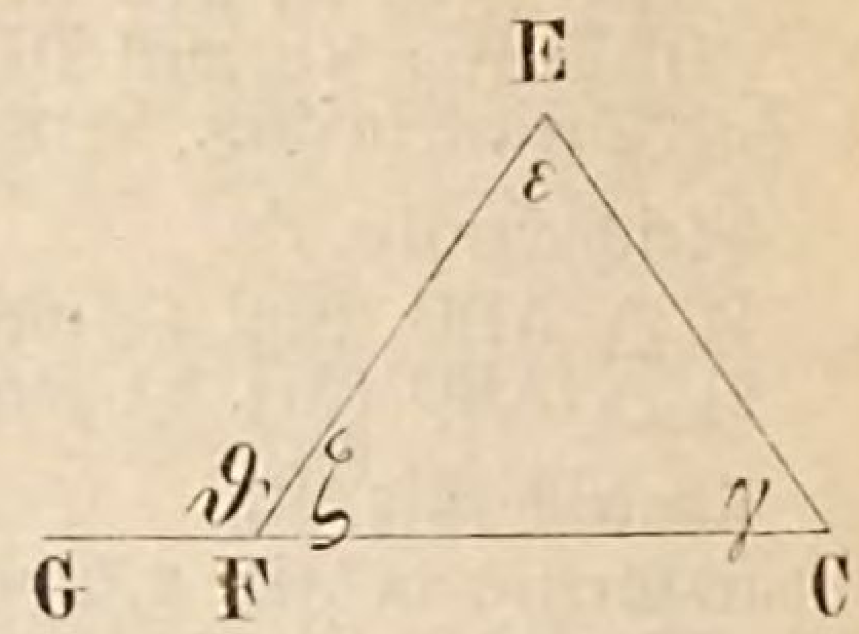
Setzen wir in Gleichung I für φ den gleichen Werth $\delta + \zeta$ ein, so ergiebt sich:

$\delta + \zeta + \varepsilon = 2$ R, was behauptet war.

Aufgaben I. Wie muß die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis ausfallen, wenn uns statt Figur 2 und 3 Figur 4 und 5 gegeben ist?

Wir haben den Lehrsatz I mit Hilfe des Außenwinkelsatzes bewiesen. Um den Schüler im Beweisverfahren zu üben, wollen wir ihn noch mit zwei anderen Beweisen für denselben Lehrsatz bekannt machen.


Fig. 4.

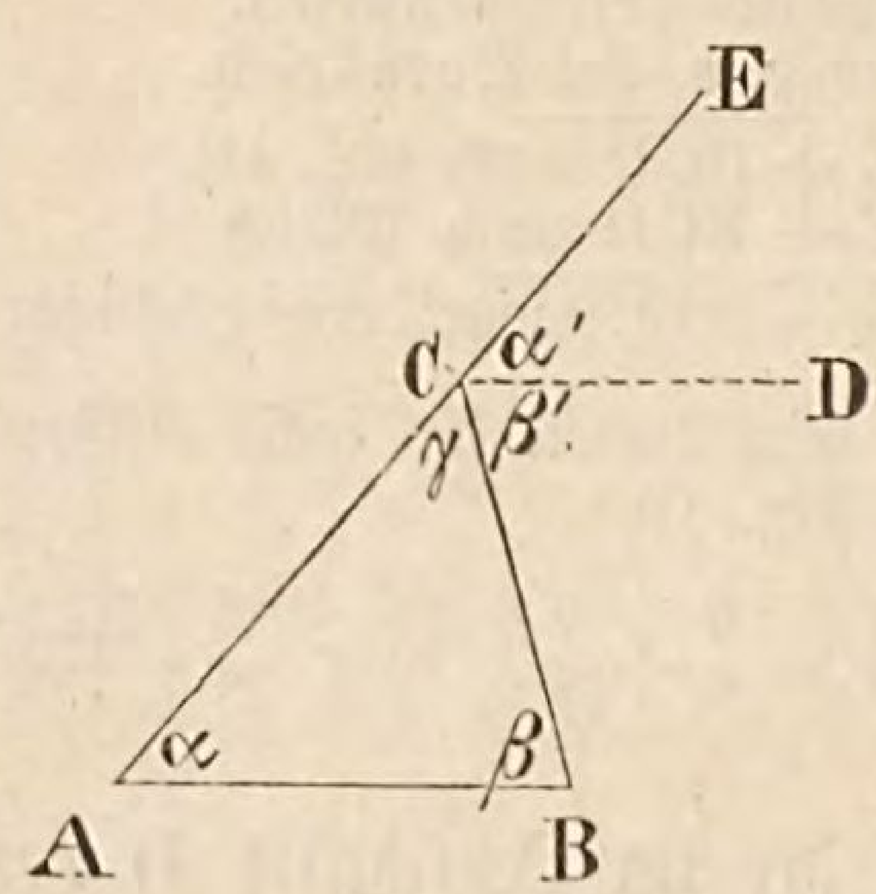

Fig. 5.

Zweiter Beweis für Lehrsatz I.

Voraussetzung. In dem Dreieck ABC (Fig. 6) haben wir die drei Winkel α, β und γ.

Behauptung. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

Beweis. Wir legen durch C zu AB die Parallele CD und verlängern AC über C hinaus bis E; dadurch entstehen die beiden Winkel α' und β'. Wie der Schüler sogleich bemerken wird, sind die drei Winkel α', β' und γ zusammen gleich einem Gestreckten oder gleich 2 Rechten, in Zeichen:


Fig. 6.

I. $\alpha' + \beta' + \gamma = 2$ R.

Es ist ferner

$\alpha = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von AE

und $\beta = \beta'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von BC.

Vertauschen wir in Gleichung I α' mit dem gleichen Winkel α und β' mit dem gleichen Winkel β, so haben wir:

II. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R, was behauptet war.

Wenn wir uns der Figur 7 statt der Figur 6 beim Beweise bedienen, verändert sich die Voraussetzung und die Behauptung nicht. Der Beweis gestaltet sich aber folgendermaßen.

Beweis. Durch A ziehen wir zu BC die Parallele AD und verlängern BA über A hinaus bis E; dann betragen die drei Winkel α, γ' und β' zusammen einen Gestreckten oder zwei Rechte, in Zeichen:

I. $\alpha + \beta' + \gamma' = 2$ R.

Ferner ist:

$\beta' = \beta$ als Gegenwinkel bei den Parallelen BC und AD geschnitten von BE.

$\gamma' = \gamma$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen BC und AD geschnitten von AC.

Setzen wir in Gl. I β für β' und γ für γ' ein, so ergiebt sich:

$$\text{II. } \alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ R.}$$

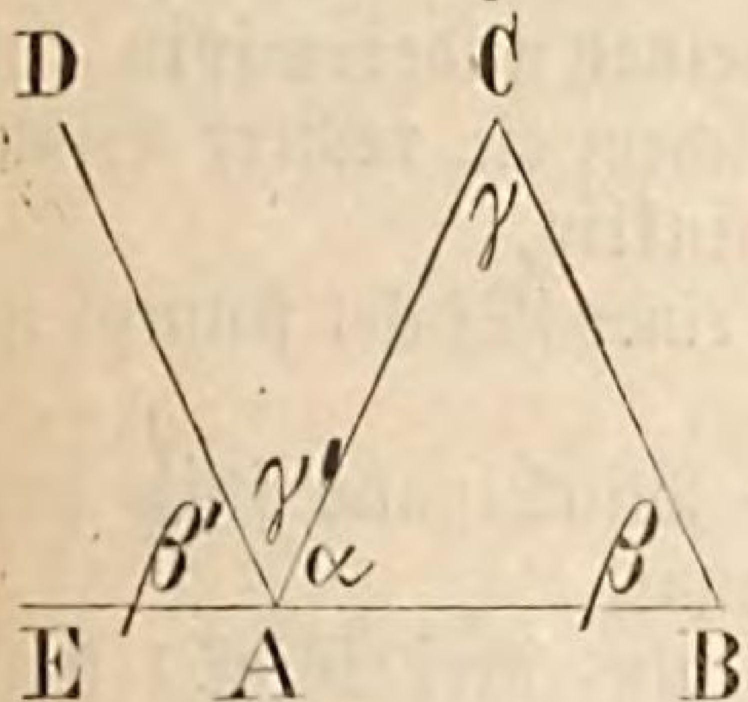


Fig. 7.

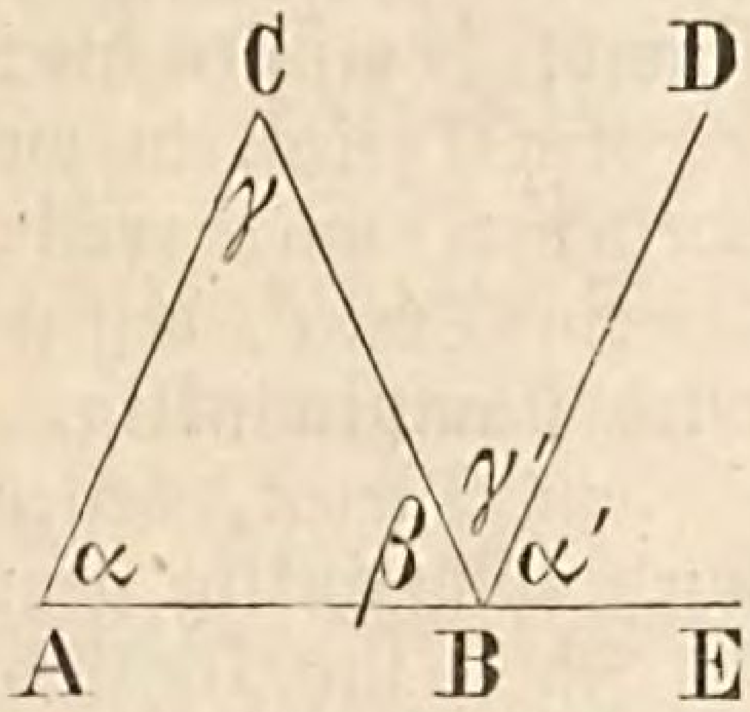


Fig. 8.

Aufgaben II. Wie wird die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis, wenn uns Figur 8 gegeben ist?

Dritter Beweis für Lehrsatz I.

Voraussetzung. Wir haben im Dreieck ABC (Fig. 9) die drei Winkel α, β und γ.

Behauptung. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

Beweis. Wir legen durch den Punkt C zu AB die Parallele DE, dann ist

$\alpha = \alpha'$[1]) als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und DE, geschnitten von AC.

$\beta = \beta'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und DE geschnitten von BC.

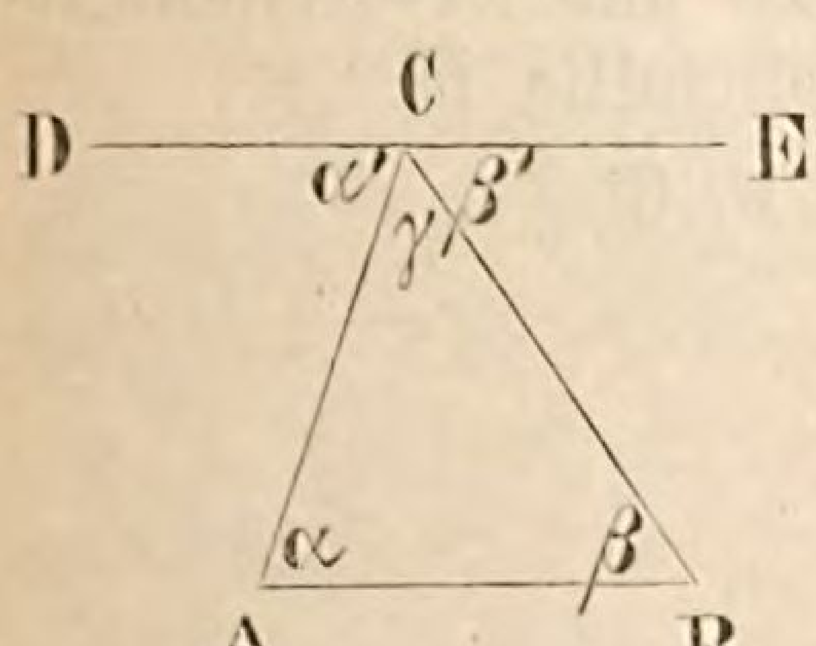


Fig. 9.

Die Winkel α', γ, β' sind zusammen gleich einem Gestreckten oder gleich zwei Rechten, in Zeichen:

$$\alpha' + \gamma + \beta' = 2 \text{ R}$$
oder
$$\alpha' + \beta' + \gamma = 2 \text{ R.}$$

Wenn wir in der letzten Gleichung für α' den gleichen Winkel α, für β' den gleichen Winkel β einführen, erhalten wir

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ R, was behauptet war.}$$

---

[1]) Wir haben in Figur 10 die Winkel α und α', in Figur 11 die Winkel β und β' von dem übrigen Theile der Figur 9 abgetrennt und dabei die Verlängerungen der Geraden BA, AC, BC durch Punkte angedeutet, damit der Schüler ohne Schwierigkeit sehe, daß α und α', ebenso wie β und β' liegen und darum als innere Wechselwinkel zu betrachten sind.

Aufgaben III. In Figur 12 ist durch C die Gerade FG parallel zu DE, in Figur 13 ist durch D die Gerade MN parallel zu EF

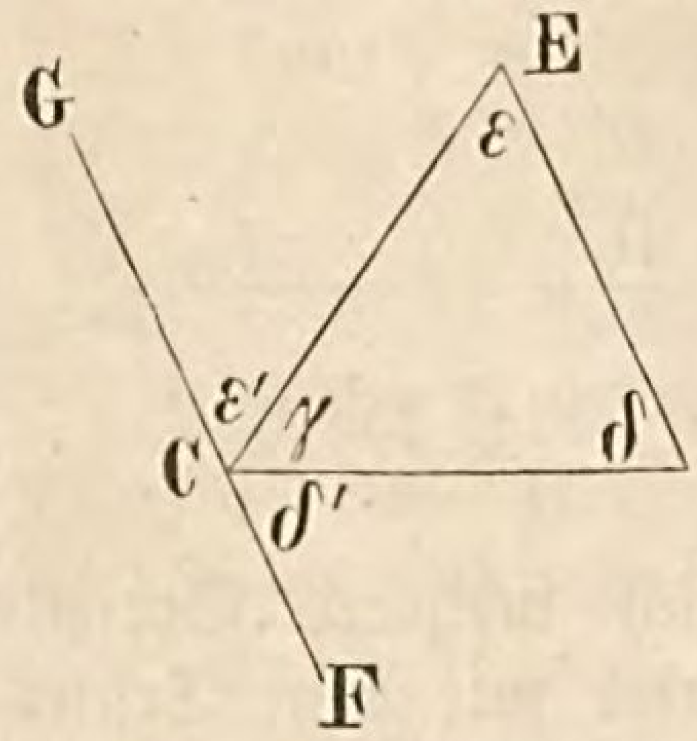


Fig. 12.

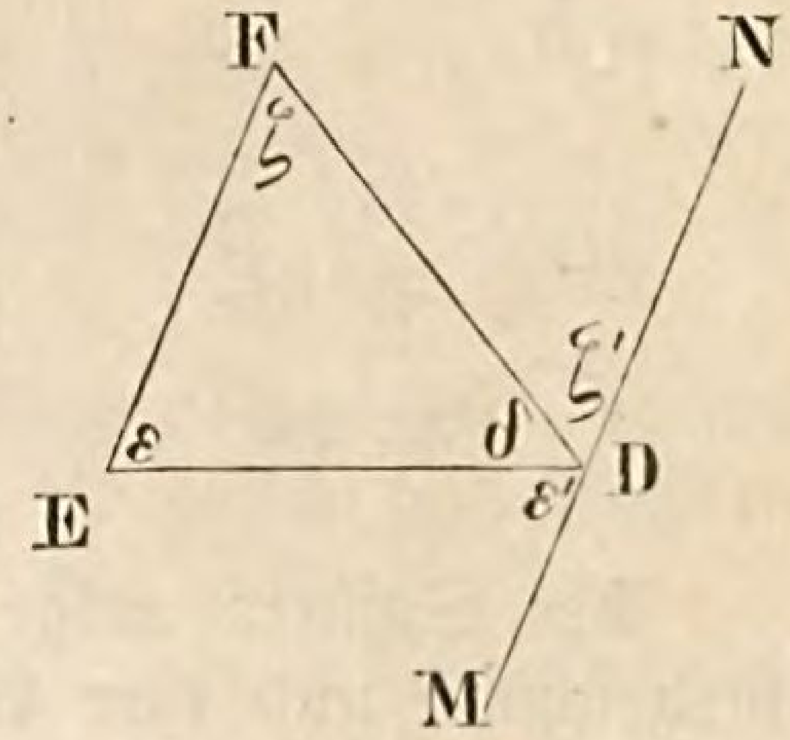


Fig. 13.

gezogen. Wie wird die Voraussetzung, die Behauptung und der Beweis ausfallen, wenn wir erst die Figur 12, dann die Figur 13 statt der Figur 9 verwenden?

§ 71. Die Gradsumme der Dreieckswinkel. Lehrsatz I heißt: Bei einem Dreieck ist die Summe der Winkel gleich zwei Rechten.

Zwei Rechte betragen 180 Grad; wir können darum dem eben genannten Satze auch folgende Fassung geben:

Bei einem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.

Wie sich der Schüler durch Messung mit dem Transporteur überzeugen kann, ist

in Figur 14 (siehe Seite 86):

$$\alpha = 61^0,\ \beta = 73^0,\ \gamma = 46^0, \text{ folglich}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 61^0 + 73^0 + 46^0 = 180^0,$$

in Figur 15 (siehe Seite 86):

$$\delta = 60^0,\ \varepsilon = 60^0 \text{ und } \zeta = 60^0, \text{ folglich}$$
$$\delta + \varepsilon + \zeta = 180^0.$$

---

1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) an verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden,
3) an verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden,
4) innerhalb des von den geschnittenen Geraden eingeschlossenen Raumes

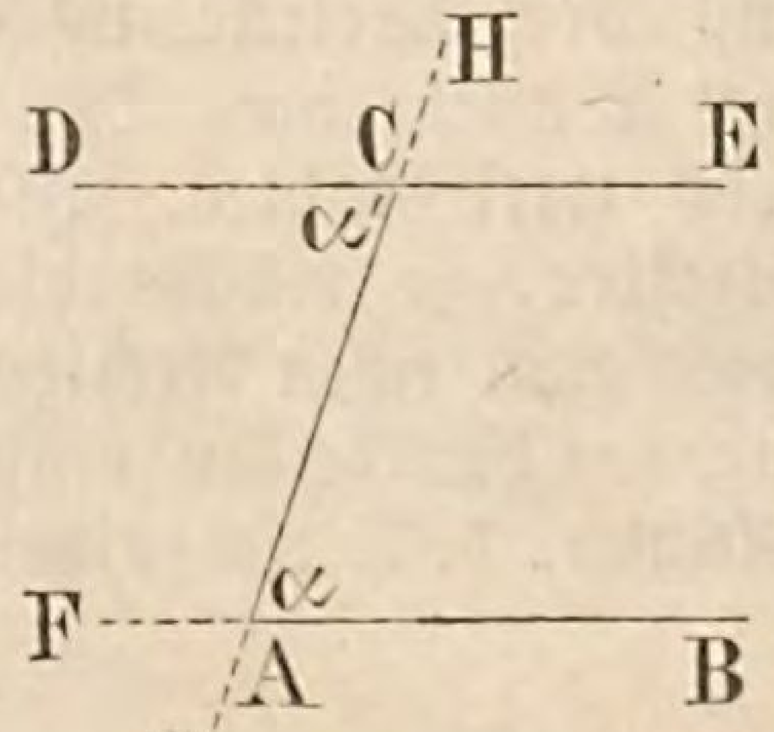


Fig. 10.

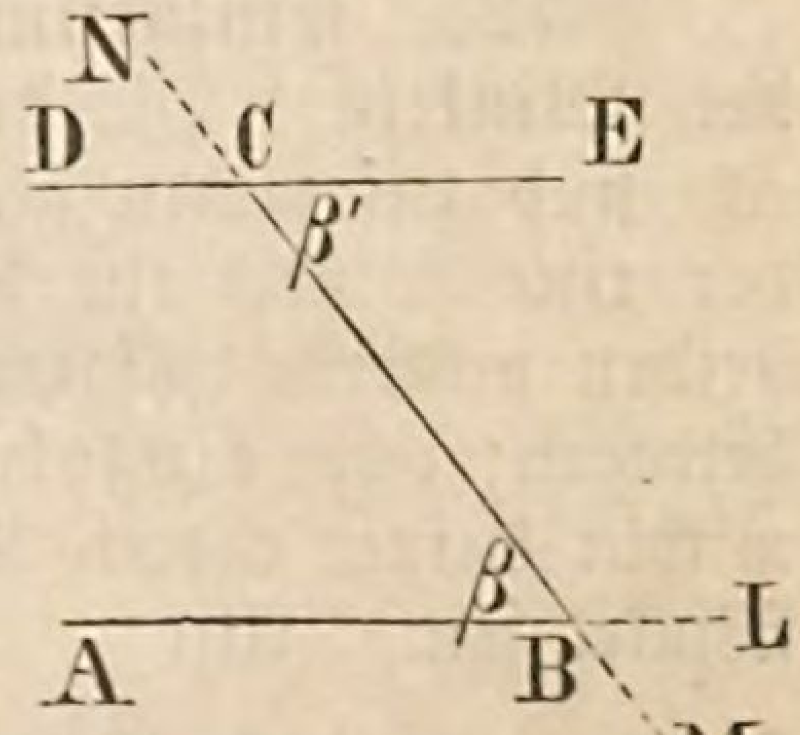


Fig. 11.

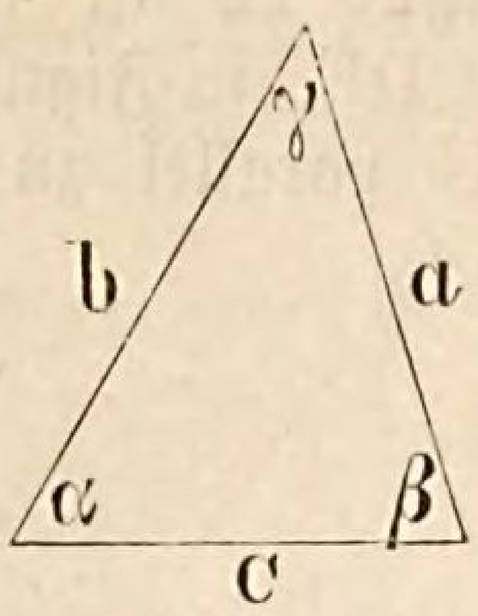


Fig. 14.

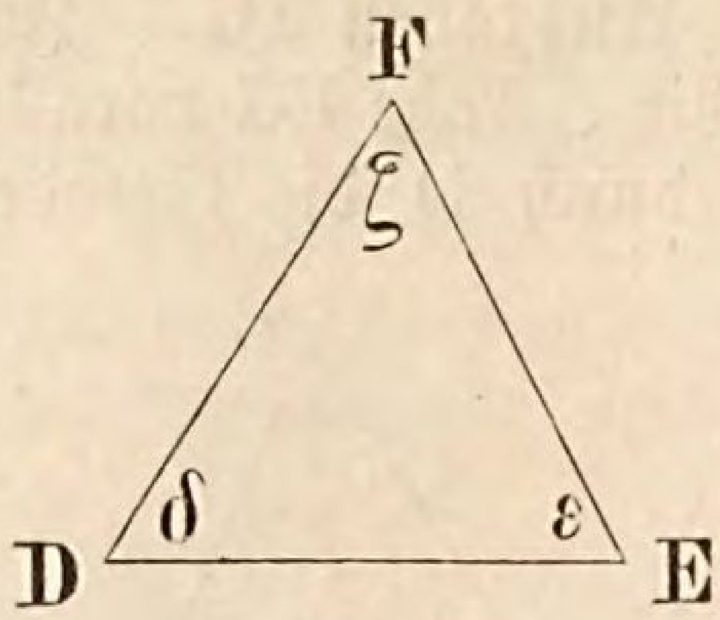


Fig. 15.

Der Schüler möge sich mehrere Dreiecke hinzeichnen und ihre Winkel mit dem Transporteur messen; er wird immer finden, daß die Winkel eines Dreiecks zusammen gleich 180 Grad sind.

Wenn uns **zwei Dreieckswinkel bekannt** sind, können wir **den dritten** leicht **finden.** Der eine Dreieckswinkel möge 40 Grad, der zweite 80 Grad betragen, dann muß der dritte gleich 60 Grad sein, denn es sind

$$40^0 + 80^0 + 60^0 = 180^0.$$

Wenn man die Gradsumme der beiden bekannten Winkel von 180 Grad abzieht, erhält man die Gradanzahl des dritten Winkels. Der eine Dreieckswinkel sei gleich 50, der zweite gleich 75 Grad; 50 Grad und 75 Grad sind zusammen gleich 125 Grad. Der dritte Winkel beträgt dann 55 Grad, denn es sind

$$55^0 = 180^0 - 125^0.$$

Aufgaben. Von den drei Winkeln eines Dreiecks sei

1) der eine gleich 49, der zweite gleich 51 Grad;
2) der eine gleich 72, der zweite gleich 86 Grad;
3) der eine gleich 27, der zweite gleich 69 Grad;
4) der eine gleich 120, der zweite gleich 19 Grad;
5) der eine gleich 63, der zweite gleich 55 Grad;
6) der eine gleich 57, der zweite gleich 47 Grad.

Wie viel Grad beträgt der dritte Winkel?

§ 72. Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

Die **drei** Winkel eines Dreiecks sind **zusammen** gleich **zwei** Rechten. Ist der **eine** Winkel ein **Rechter,** so müssen die **beiden anderen** zusammen auch einen **Rechten** betragen; jeder einzelne von den beiden muß mithin kleiner als ein Rechter, d. h. ein **spitzer** Winkel sein. Also:

In einem Dreieck kann nur ein rechter Winkel vorkommen; ist der eine Winkel ein Rechter, so müssen die beiden anderen spitz sein.

Wenn **der eine** Dreieckswinkel **stumpf** ist, d. h. mehr als einen Rechten beträgt, so müssen **die beiden anderen** zusammen kleiner sein als ein Rechter; jeder einzelne von den beiden anderen ist dann um so mehr kleiner als ein Rechter, mit anderen Worten, ein **spitzer** Winkel.

In einem Dreieck kann nur ein stumpfer Winkel vorkommen; ist der eine Winkel stumpf, so müssen die beiden anderen spitz sein.

Ein Dreieck, in welchem ein **rechter** Winkel vorkommt, wird **rechtwinklig,**

ein Dreieck, dessen einer Winkel **stumpf** ist, wird **stumpfwinklig,**

ein Dreieck, dessen Winkel alle **spitz** sind, wird **spitzwinklig** genannt.

In Figur 16 sind alle drei Winkel spitz; das Dreieck ABC ist darum spitzwinklig.

In Figur 17 ist Winkel D stumpf; das Dreieck DEF ist darum stumpfwinklig.

In Figur 18 ist Winkel M ein Rechter; das Dreieck MNP ist darum rechtwinklig.

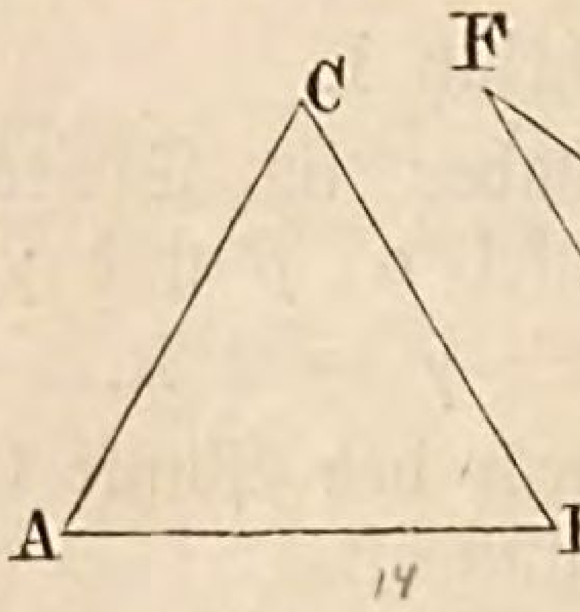


Fig. 16.

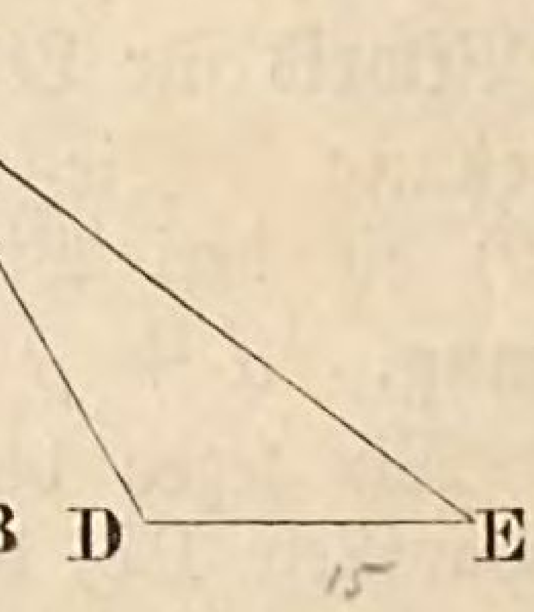


Fig. 17.

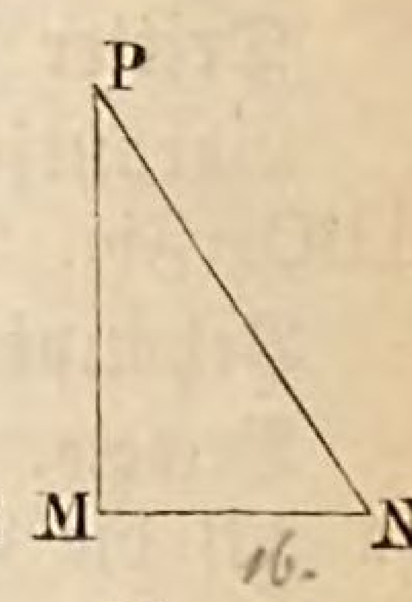


Fig. 18.

Aufgaben. a) Der Schüler gebe an, wie viel spitze Winkel ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck hat.

b) Er gebe ferner an, welches der Dreiecke in den Figuren 19, 20 und 21 rechtwinklig, spitzwinklig und stumpfwinklig ist.

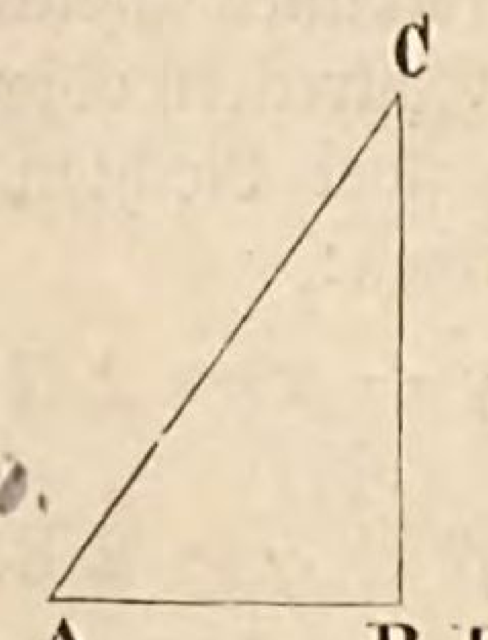


Fig. 19.

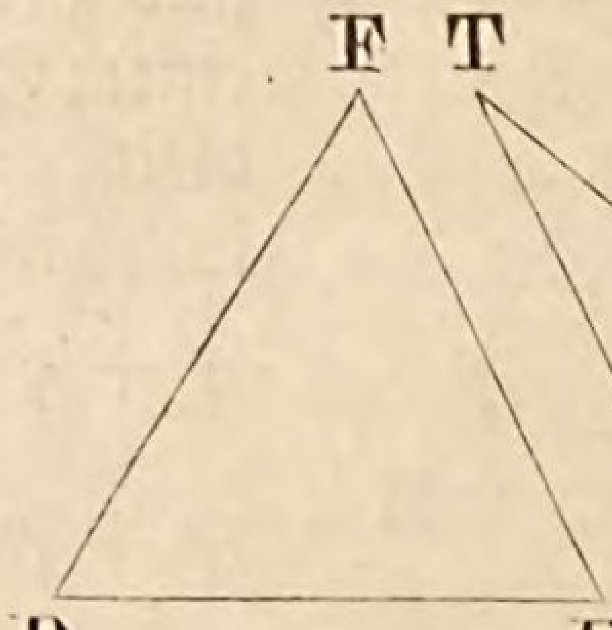


Fig. 20.

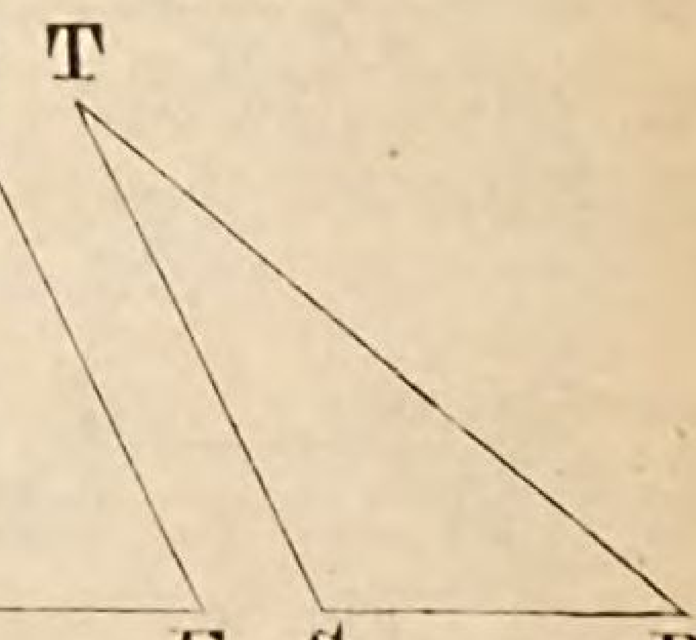


Fig. 21.

Bemerkung. Wir haben die Dreiecke nach den Seiten in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige, nach den Winkeln in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige eingetheilt. Diese beiden Eintheilungen laufen neben einander her, ohne sich, eine bestimmte später zu besprechende Einschränkung ausgenommen, gegenseitig zu stören. Es giebt z. B.

ungleichseitig-rechtwinklige,
ungleichseitig-stumpfwinklige,
ungleichseitig-spitzwinklige

Dreiecke u. s. w.

§ 73. Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks.

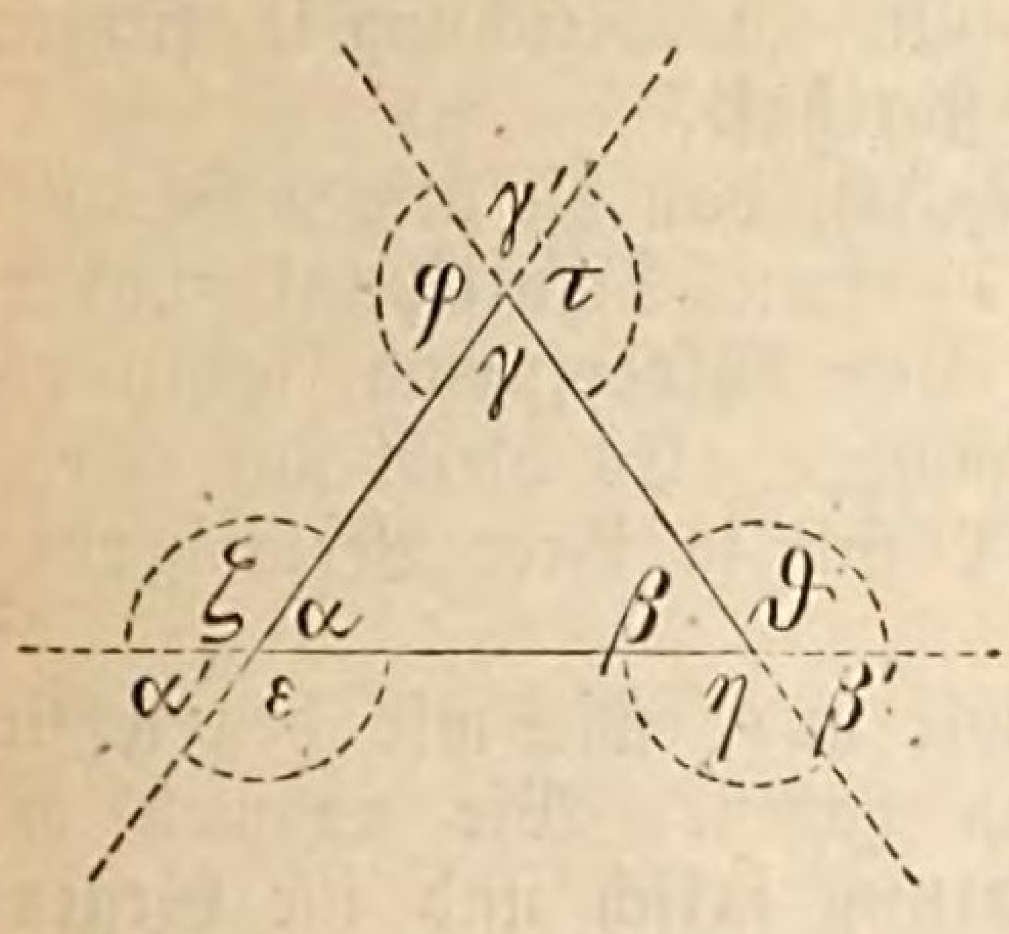


Fig. 22.

Wie wir schon in § 69 Seite 78 auseinandergesetzt haben, sind in Figur 22 ε, ζ, η, ϑ, τ und φ **Außenwinkel.**

Wenn wir diese 6 Außenwinkel addiren, erhalten wir als Summe

$$\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi.$$

Wir behaupten, daß diese Summe gleich **acht Rechten** sei, oder allgemein, daß die Summe der sechs Außenwinkel eines Dreiecks acht Rechte betrage.

Diese Behauptung wollen wir beweisen, indem wir uns auf die Sätze über die Summe der Dreieckswinkel und die Gleichheit der Scheitelwinkel stützen.

Lehrsatz II. Die Summe der sechs Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich acht Rechten.

Voraussetzung. Wir haben in Figur 22 ein Dreieck mit den sechs Außenwinkeln ε, ζ, η, ϑ, τ und φ.

Behauptung.

$$\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \vartheta = 8 \text{ R.}$$

Beweis. Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, beträgt nach § 47 Lehrsatz III vier Rechte; darum ist:

$$\varepsilon + \alpha + \zeta + \alpha' = 4 \text{ R},$$

ferner $\eta + \beta + \vartheta + \beta' = 4 \text{ R},$

drittens $\tau + \gamma + \varphi + \gamma' = 4 \text{ R},$ [1]

$$\varepsilon + \alpha + \zeta + \alpha' + \eta + \beta + \vartheta + \beta' + \tau + \gamma + \varphi + \gamma' = 4 \text{ R} + 4 \text{ R} + 4 \text{ R}, \text{ oder}$$

$$\varepsilon + \alpha + \zeta + \alpha' + \eta + \beta + \vartheta + \beta' + \tau + \gamma + \varphi + \gamma' = 12 \text{ R.}$$

Es ist gleichgiltig, in welcher Reihenfolge wir die Summanden addiren [2], darum können wir die vorige Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\text{I} \quad \varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi + \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 12 \text{ R.}$$

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich 2 Rechten, mithin ist:

$$\text{II} \quad \alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ R.}$$

α und α', β und β', γ und γ' sind Scheitelwinkel, darum ist:

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'.$$

Setzen wir in Gleichung II für α den gleichen Winkel α', für β den gleichen Winkel β', für γ den gleichen Winkel γ' ein, so ist

$$\text{III} \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 2 \text{ R.}$$

Die Gleichung II und Gleichung III wollen wir benutzen, um Gleichung I umzugegestalten; wir wollen in Gleichung I 2 R für $\alpha + \beta + \gamma$, ebenso 2 R für $\alpha' + \beta' + \gamma'$ einsetzen, dann erhalten wir:

$$\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi + 2 \text{ R} + 2 \text{ R} = 12 \text{ R}$$

oder IV $\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi + 4 \text{ R} = 12 \text{ R}$

$4 \text{ R} = 4 \text{ R}$ nach Gr. I.

$$\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi + 4 \text{ R} - 4 \text{ R} = 12 \text{ R} - 4 \text{ R} \text{ nach Gr. IV.}$$

oder $\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi = 8 \text{ R}$, was behauptet war.

---

[1]) Nach dem Grundsatz: **Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.** Wir erschließen hier nicht wie sonst aus **zwei** Gleichungen eine **dritte**, sondern aus **drei** Gleichungen eine **vierte**.

[2]) Es ist: $3 + 6 + 4 + 7 + 5 + 8 = 33,$
ebenso ist: $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33.$
Mithin können wir

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \text{ für } 3 + 6 + 4 + 7 + 5 + 8$$

sagen, also, wie schon auf Seite 72 bemerkt wurde, die Reihenfolge, in welcher wir die Summanden addiren, ist gleichgiltig, darum können wir auch

$$\varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \tau + \varphi + \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' \text{ statt}$$
$$\varepsilon + \alpha + \zeta + \alpha' + \eta + \beta + \vartheta + \beta' + \tau + \gamma + \varphi + \gamma' \text{ setzen.}$$

§ 74. **Daß zwei Parallele sich nicht schneiden,** wenn sie verlängert werden, haben wir wiederholt erwähnt, aber nicht bewiesen. Der Satz von der Summe der Dreieckswinkel setzt uns nun in den Stand, diese Eigenschaft der Parallelen streng mathematisch zu begründen.

Lehrsatz III. Zwei parallele Gerade schneiden sich nicht, so weit man sie auch verlängern mag.

Voraussetzung. In Figur 23 ist MN || ST.

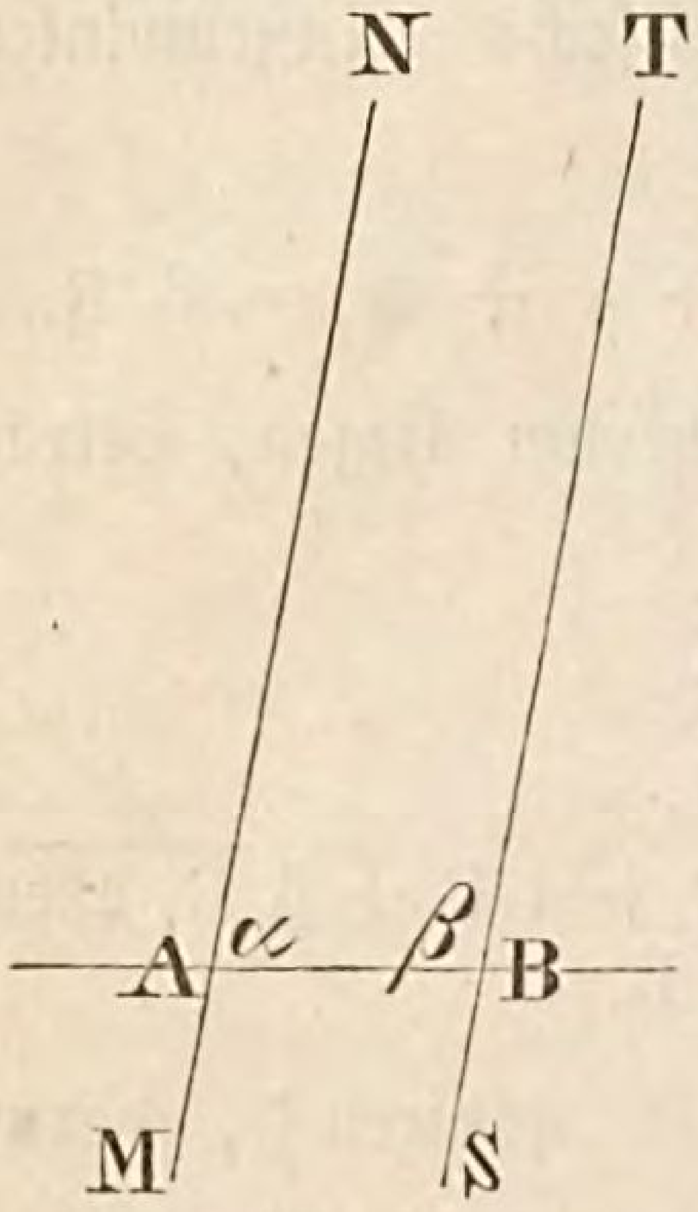


Fig. 23.

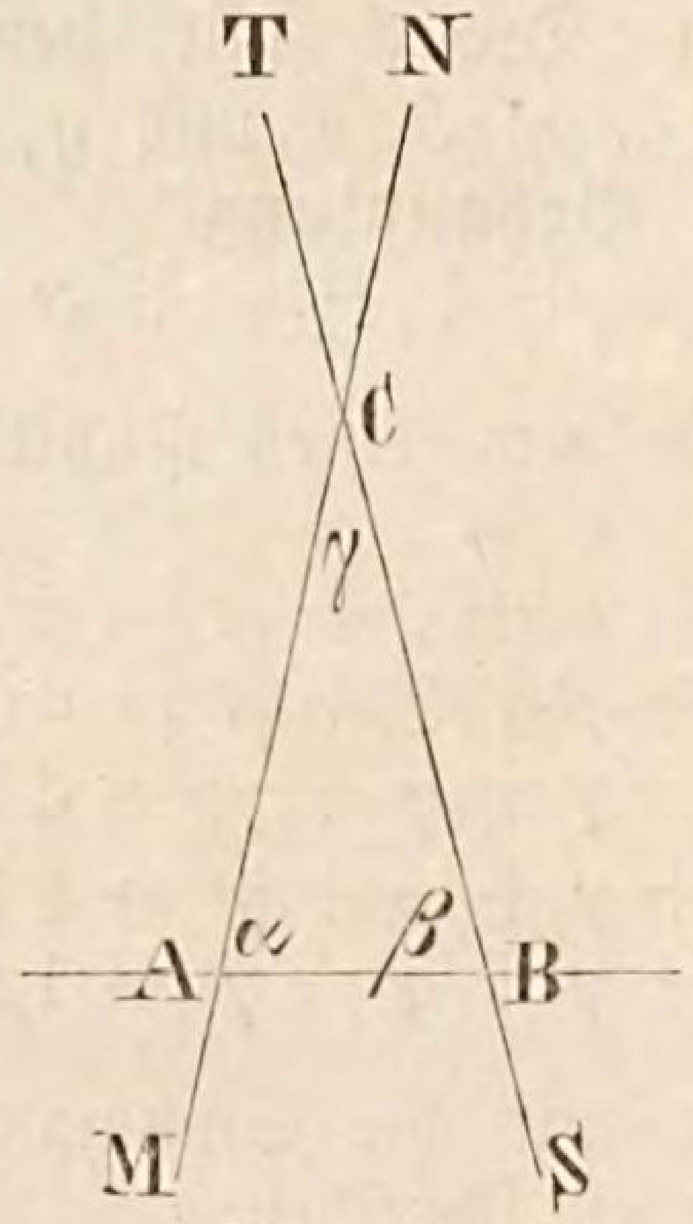


Fig. 24.

Behauptung. Die beiden Paralellen MN und ST schneiden sich in ihrer Verlängerung nicht.

Beweis. Zum Beweise legen wir durch die Geraden MN und ST die gerade Linie AB hindurch; die beiden Winkel α und β, welche dadurch entstehen, sind entgegengesetzte Winkel. Nach § 63 Lehrsatz III ist darum:

$$\text{I. } \alpha + \beta = 2 \text{ R.}$$

Nehmen wir nun an, die **Behauptung,** welche wir aufgestellt haben, wäre **falsch,** das Gegentheil derselben wäre **richtig,** mit andern Worten, **die Parallelen** liefen nicht beständig neben einander her, sondern sie **schnitten sich** in einem bestimmten Punkte etwa in C (Fig. 24), dann erhalten wir das Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ. Die Summe der Dreieckswinkel ist gleich zwei Rechten, folglich ist:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ R},$$

d. h. zu $\alpha + \beta$ muß noch γ hinzukommen, wenn sich zwei Rechte ergeben sollen. $\alpha + \beta$ ohne γ ist also kleiner als zwei Rechte, in Zeichen:

$$\text{II. } \alpha + \beta < 2 \text{ R.}$$

Die Gleichung II **widerspricht** der Gleichung

$$\text{I. } \alpha + \beta = 2 \text{ R},$$

welche wir bereits bewiesen haben. **Die Annahme,** welche uns zu Gleichung II führte, ist darum **nicht statthaft.**

Es ist **unmöglich,** daß die beiden Parallelen MN und ST einen **Schnittpunkt** haben. Wir stoßen auf einen **Widerspruch,** wenn wir diese Annahme machen. Es bleibt nur übrig, daß MN und ST sich in ihrer Verlängerung nicht schneiden.

Ueberlegen wir uns, wie wir den letzten Lehrsatz bewiesen haben. Wir nahmen an, daß die **Behauptung falsch** und ihr **Gegentheil richtig** sei; dadurch wurden wir zu einem **Widerspruch** geführt. Es zeigte sich als unmöglich, daß das Gegentheil zutreffe. Aus der **Unmöglichkeit des Gegentheils** erschlossen wir die **Richtigkeit der Behauptung.** Einen solchen Beweis nennt man einen **indirecten** oder **apagogischen Beweis.**

Bemerkung. In Figur 24 werden die beiden Geraden MN und ST von einer dritten Geraden im Punkte C geschnitten. Je weiter der Punkt C (Fig. 24) von der schneidenden Geraden fortrückt, um so kleiner wird auch der Winkel γ werden. Stellen wir uns vor, der Punkt C sei zwanzig Millionen Meilen[1]) von der schneidenden Geraden entfernt, so wird der **Winkel** γ **so klein** werden, daß für unsere Erdenverhältnisse seine Größe **nicht mehr in Betracht kommt.** Die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ R}$$

ist dann bis auf den **verschwindend kleinen** Werth von γ gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ R}$$

d. h. die beiden entgegengesetzten Winkel α und β sind zusammen nahezu gleich zwei Rechten, **die Geraden MN und ST sind nahezu parallel**[2]). In der Physik betrachtet man z. B. zwei **Sonnenstrahlen als parallel,** welche von einem Punkte ausgehen und verschiedene Punkte der Erde treffen, weil die beiden Strahlen bei der Entfernung der Sonne von der Erde einen verschwindend kleinen Winkel bilden. Aus demselben Grunde kann man auch die verticalen Richtungen an wenig von einander entfernten Punkten der Erde für parallel ansehen; sie treffen zwar im Mittelpunkt der Erde zusammen, aber sie schließen einen sehr kleinen Winkel mit einander ein.

D. Das Viereck.

Die Figur 25 (Seite 89) hat die **vier Ecken** A, B, C und D; sie wird darum ein **Viereck** genannt. Ein Viereck hat

vier Seiten und **vier Winkel.**

In Fig. 25 sind AB, BC, CD und DA die vier Seiten und α, β, γ, δ die vier Winkel.

---

[1]) So weit, wie die Sonne von uns entfernt ist. [2]) Denn nur bei Parallelen ist die Summe zweier entgegengesetzten Winkel gleich zwei Rechten.

Die gerade Linie, welche in einem Viereck die gegenüberliegenden Ecken mit einander verbindet, wird eine **Diagonale** genannt. In Fig. 26 ist die punktirte Gerade AC eine Diagonale. Von den Winkeln eines Vierecks wollen wir folgenden Satz beweisen.

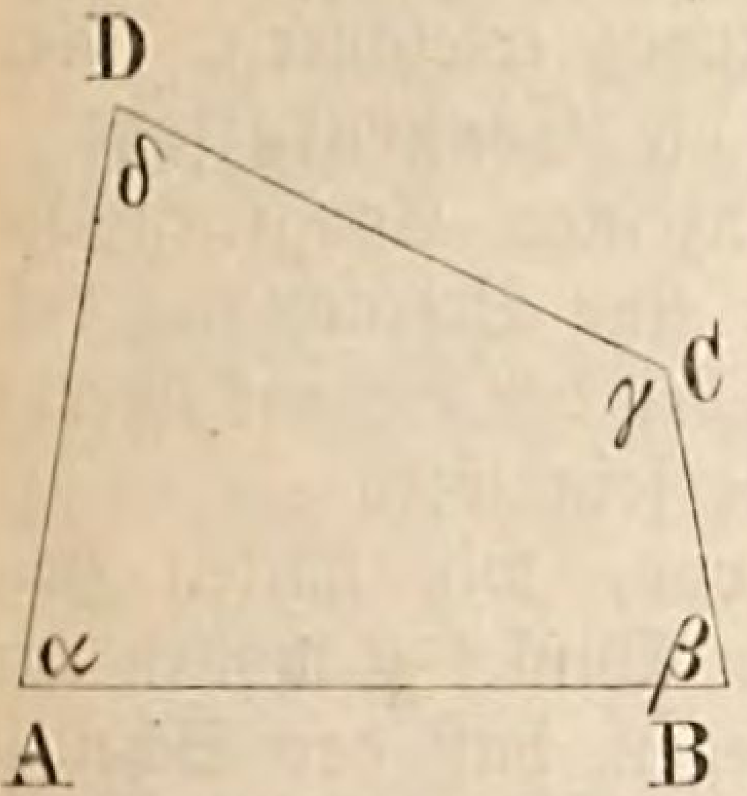


Fig. 25.

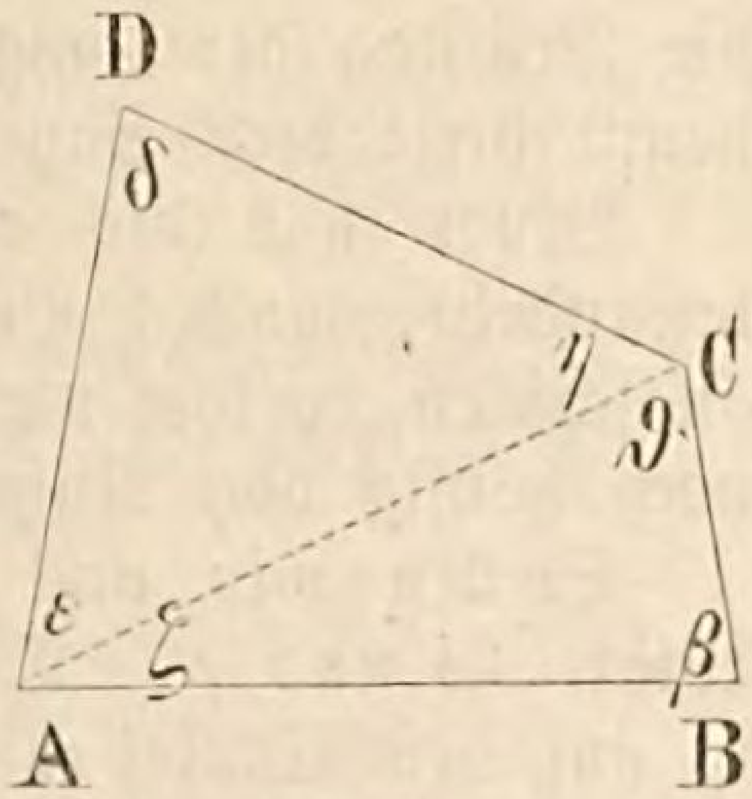


Fig. 26.

Lehrsatz IV. Die Summe aller Winkel eines Vierecks ist gleich vier Rechten.

Voraussetzung. Wir haben ein Viereck ABCD mit den vier Winkeln α, β, γ, δ (Fig. 25).

Behauptung. $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. = 4R

Beweis. Wir wollen uns das Viereck ABCD noch einmal hinzeichnen und die Diagonale AC ziehen, dann wird Winkel α (in Fig. 25) in die beiden Winkel ε und ζ (Fig. 26) und Winkel γ (in Fig. 25) in die beiden Winkel η und ϑ (Fig. 26) getheilt; es ist also

$$\alpha = \varepsilon + \zeta, \quad \gamma = \eta + \vartheta.$$

Durch die Diagonale AC wird das Viereck in die beiden Dreiecke ABC und ACD zerlegt. In jedem Dreiecke ist die Summe der Winkel gleich zwei Rechten, darum haben wir:

$$\varepsilon + \eta + \delta = 2\,\mathrm{R}$$
$$\text{und } \beta + \zeta + \vartheta = 2\,\mathrm{R}$$
$$\overline{\varepsilon + \eta + \delta + \beta + \zeta + \vartheta = 2\,\mathrm{R} + 2\,\mathrm{R}}$$
$$\text{oder } \varepsilon + \zeta + \beta + \eta + \vartheta + \delta = 4\,\mathrm{R}.$$

Setzen wir gemäß Grundsatz VII für $\varepsilon + \zeta$ den Winkel α und für $\eta + \vartheta$ den Winkel γ ein, so erhalten wir

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4$ R, was behauptet war.

Wenn eine Arbeit Dir als Pflicht ist auferlegt,
So säume nicht, wenn sich auch Unlust regt.

Lection 10.

A. Die Congruenz der Dreiecke.

§ 75. Congruente geradlinige Figuren. Congruente Dreiecke. Wie wir bereits in § 14 Seite 18 andeuteten, bezeichnet man mit dem Worte **congruent**[1]) Linien und Figuren, welche so aufeinander gelegt werden können, daß sie sich **decken**, oder mit anderen Worten in allen ihren Punkten **zusammenfallen**. Will der Schneider einen Rock anfertigen, so legt er das Muster auf die Fläche des Tuches und schneidet ein Tuchstück so zu, daß es dem Muster congruent ist. Wenn ein kleines Mädchen mehrere Bogen Papier fest zusammenlegt und mit der Scheere Puppen ausschneidet, so erhält es Figuren, die congruent sind. Uns interessiren zunächst die congruenten geradlinigen Figuren. Wenn zwei geradlinige Figuren sich decken, so müssen die Seiten und Winkel, welche über einander liegen, gleich groß sein, sonst könnten sie nicht zur Deckung gebracht werden. Wir haben also den Satz:

Bei congruenten geradlinigen Figuren sind die Seiten und Winkel gleich, welche bei der Deckung übereinander fallen.

Das Dreieck ist eine geradlinige Figur, darum gilt der

Lehrsatz I. In congruenten Dreiecken sind die Seiten und Winkel einander gleich, welche bei der Deckung übereinander fallen.

Die beiden Dreiecke in Figur 1 und 2 sind congruent, denn wenn wir sie ausschneiden, können wir sie in eine Lage bringen, daß sie sich vollkommen decken. Von den Seiten wird dabei d auf a, e auf b, und f auf c, von den Winkeln wird δ auf α,

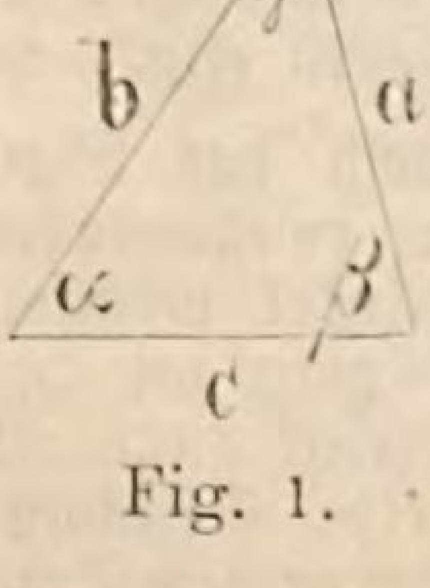


Fig. 1.

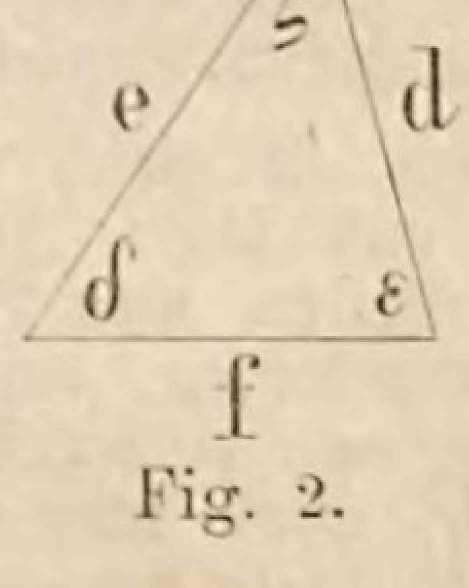


Fig. 2.

[1]) Wie wir schon auf Seite 18 angaben, kommt congruent von dem lateinischen congruens her, das zu deutsch zusammenfallend heißt.

ε auf β und ζ auf γ fallen. Nach dem Lehrsatz I ist also:

$$a = d, \quad b = e, \quad c = f$$
$$\alpha = \delta, \quad \beta = \varepsilon, \quad \gamma = \zeta.$$

Wie der Schüler sieht, liegt

der Seite a der Winkel α
der Seite d der Winkel δ

der Seite b der Winkel β
der Seite e der Winkel ε

der Seite c der Winkel γ
der Seite f der Winkel γ

gegenüber.

Die unter einander stehenden Gleichungen sagen uns mithin:

In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Wie wir bemerkt haben, sind zwei Dreiecke **congruent**, wenn sie vollständig **zur Deckung** gebracht werden können.

Hätten wir nur dieses eine Kennzeichen, um die Congruenz zu beurtheilen, so würde es oft unmöglich sein, zu untersuchen, ob zwei dreieckförmige Figuren congruent sind, oder nicht. Dreieckförmige Acker- und Wiesenstücke könnten wir z. B. nicht aufeinander legen. Es erhebt sich darum die Frage, ob wir nicht schon aus der Gleichheit einiger Seiten und Winkel auf die Congruenz der Dreiecke schließen können. In diesem Falle würde es nicht schwer sein, auch bei dreieckigen Ackerstücken festzustellen, ob sie congruent sind, denn einige Seiten und Winkel können wir leicht messen. In der That! Es ist nicht nöthig, zwei Dreiecke übereinander zu legen, um ihre Congruenz zu prüfen. Es giebt vier Sätze, welche uns die Prüfung der Congruenz erleichtern. Man nennt diese vier Sätze die **Congruenzsätze**.

Bevor wir die einzelnen Congruenzsätze behandeln, wollen wir eine Betrachtung vorausschicken, welche uns bei der Beweisführung noch häufig von Nutzen sein wird.

Stellen wir uns vor, wir hätten zwei Winkel α und β. Den Winkel β wollen wir so auf den Winkel α legen, daß der Scheitelpunkt des Winkels β auf den Scheitelpunkt des Winkels α und der eine Schenkel des Winkels β auf den einen Schenkel des Winkels α fällt. Der andere in Figur 3 und 5 punktirt gezeichnete Schenkel des Winkels β kann dann je nach der Größe des Winkels β

1) zwischen die Schenkel des Winkels α fallen wie in Figur 3; er kann sich
2) mit dem zweiten Schenkel des Winkels α decken, wie in Figur 4; er kann
3) ganz außerhalb des Winkels α liegen wie in Figur 5.

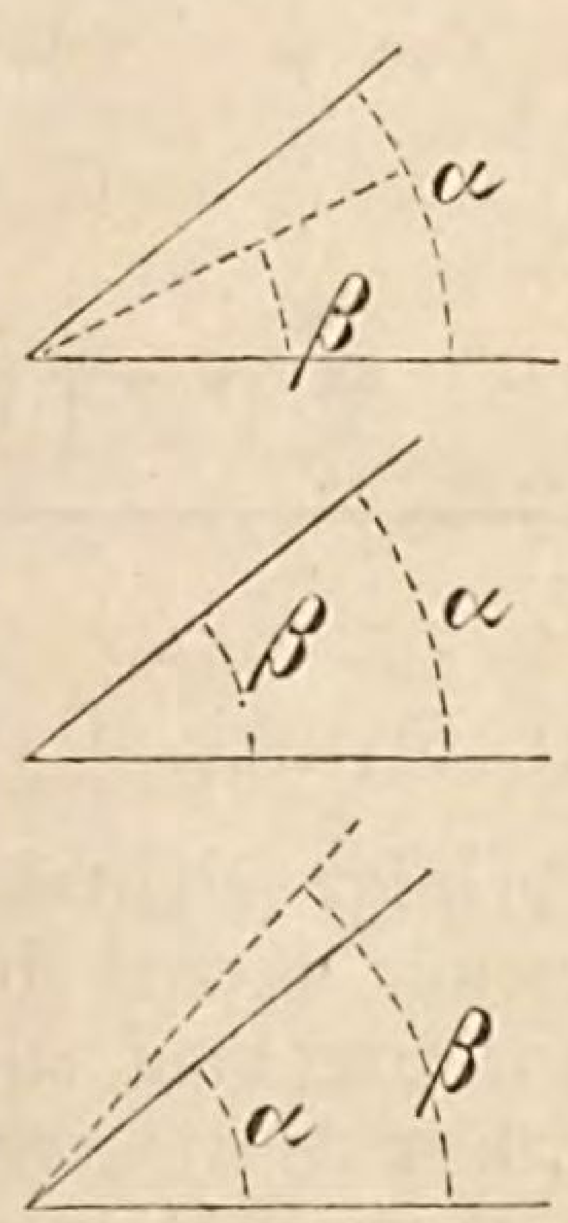


Fig. 3, 4, 5.

Der erste Fall wird eintreten, wenn der Winkel β kleiner ist als der Winkel α, den zweiten Fall werden wir haben, wenn die Winkel α und β gleich sind, der dritte Fall wird eintreten, wenn β größer ist als α. Für uns ist besonders der zweite Fall wichtig; wir können aus ihm folgenden Satz entnehmen:

Lehrsatz II. Wenn zwei Winkel gleich sind, können wir ihre Schenkel immer so auf einander legen, daß sie sich decken.

Noch eine zweite Bemerkung wollen wir machen, ehe wir mit den Congruenzsätzen beginnen.

Man hat für das Wort

congruent das **Zeichen** $\cong$

eingeführt. Es besteht aus einem Gleichheitszeichen und einer gekrümmten Linie.

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ EFG bedeutet:

Das Dreieck ABC ist congruent dem Dreieck EFG.

---

[1]) Dem Lehrsatz I giebt man häufig die einfache Fassung: **In congruenten Dreiecken sind die Seiten und Winkel einander gleich.** Indessen diese Fassung ist sehr **zweideutig**. Der Anfänger kann dem Wortlaut gemäß leicht denken; in jedem **einzelnen** der congruenten Dreiecke seien die Seiten und Winkel gleich, es sei etwa in Fig. 1 $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma$. Die Auffassung wäre falsch; aus der Congruenz folgt vielmehr, daß jede einzelne Seite des **einen** Dreiecks gleich einer Seite des **andern** Dreiecks und jeder Winkel des **einen** Dreiecks gleich einem Winkel des **andern** Dreiecks ist.

Seite a in Fig. 1 ist gleich Seite d in Fig. 2
Winkel α in Fig. 1 ist gleich Winkel δ in Fig. 2
Seite b in Fig. 1 ist gleich Seite e in Fig. 2
Winkel β in Fig. 1 ist gleich Winkel ε in Fig. 2 ꝛc.

Man fügt darum oft gleich noch das Wort **wechselseitig** hinzu und sagt: **In congruenten Dreiecken sind die Seiten und Winkel wechselseitig gleich**, um anzudeuten, daß man mit den Dreiecken **abwechseln**, von einem Dreieck zum andern übergehen muß, wenn man eine Gleichung zwischen Seiten oder Winkeln bei congruenten Dreiecken aufstellen will.

$\triangle$ MNP $\cong$ $\triangle$ STR bedeutet:

Das Dreieck MNP ist congruent dem Dreieck STR.

Aufgaben. Wie werden die folgenden Gleichungen gesprochen

1) $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ EFG 3) $\triangle$ MNP $\cong$ $\triangle$ SVU
2) $\triangle$ CDE $\cong$ $\triangle$ FGH 4) $\triangle$ PST $\cong$ $\triangle$ SUT?

§ 76. Der erste Congruenzsatz Nehmen wir an, in den beiden Dreiecken ABC und DEF (Fig. 6 und 7) sei

1) die Seite AB gleich der Seite DE
2) die Seite AC gleich der Seite DF
3) der Winkel α gleich dem Winkel δ.

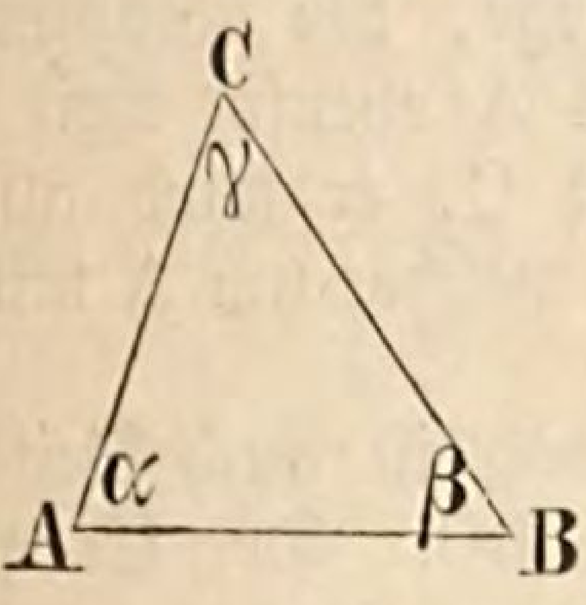


Fig. 6.

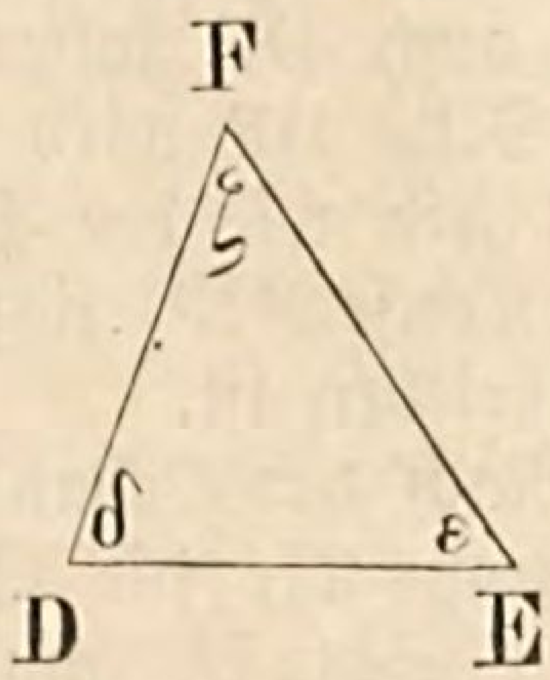


Fig. 7.

Sehen wir zu, welche Lage die beiden gleichen Winkel α und δ haben.

α wird von AB und AC
δ wird von DE und DF

eingeschlossen. Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also

in **zwei Seiten** und in dem **Winkel**

überein, welcher von den beiden Seiten **eingeschlossen** wird.

Wir behaupten, daß Dreiecke, bei denen diese Bedingungen stattfinden, congruent sind und stellen als ersten Congruenzsatz auf den

Lehrsatz III. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Figur 6 und 7, Seite 91) ist: 1) $\alpha = \delta$, 2) AB = DE, 3) AC = DF.

Behauptung. $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF

Beweis. Die Winkel α und δ sind nach der Voraussetzung einander gleich; die beiden Dreiecke ABC und DEF können darum in eine solche Lage gebracht werden, daß die Schenkel der gleichen Winkel α und δ sich decken. Wenn wir das Dreieck DEF in der eben angedeuteten Weise auf das Dreieck ABC legen, wird

der Punkt D auf den Punkt A
die Seite DE auf die Seite AB
die Seite DF auf die Seite AC

fallen.

Wie wir vorausgesetzt haben, ist die Gerade DE ebenso groß wie die Gerade AB und die Gerade DF ebenso groß wie die Gerade AC, darum wird auch

der Punkt E mit dem Punkt B und
der Punkt F mit dem Punkt C

zusammenfallen.

Die beiden Seiten EF und BC haben demgemäß die beiden Punkte E und B, F und C mit einander gemein. In Lehrsatz I auf Seite 19 haben wir nachgewiesen, daß zwei gerade Linien vollständig zusammenfallen, wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben, mithin werden sich auch

die Seiten EF und BC

vollkommen decken. Jetzt ist bewiesen, daß die beiden Dreiecke ABC zur Deckung gebracht werden können, oder anders ausgedrückt, daß

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF ist, was behauptet war.

Bemerkung. Wie wir vorausgesetzt haben, ist bei den Dreiecken ABC und DEF

$\alpha = \delta$, AB = DE, AC = DF.

Nach Lehrsatz I des vorigen Paragraphen sind bei congruenten Dreiecken alle Seiten und Winkel einander gleich, welche bei der Deckung zusammenfallen. Darum bestehen auch die Gleichungen: BC = EF, $\gamma = \zeta$, $\beta = \varepsilon$.

Aufgabe. Wie fällt der Beweis aus, wenn wir voraussetzen, daß in Fig. 6 und 7 AB = DE, BC = EF und $\beta = \varepsilon$ ist?

Zur Erläuterung des ersten Congruenzsatzes möge die folgende **Aufgabe** dienen. Nehmen wir an, es sei uns aufgetragen, die **Entfernung** der beiden Punkte A und B, welche durch einen Teich von einander **getrennt** sind, **festzustellen** (siehe Figur 8). Direct können wir diese Entfernung wegen des Teiches nicht messen; wir wollen zeigen, daß uns der erste Congruenzsatz ein Mittel zur Ausführung der Messung bietet.

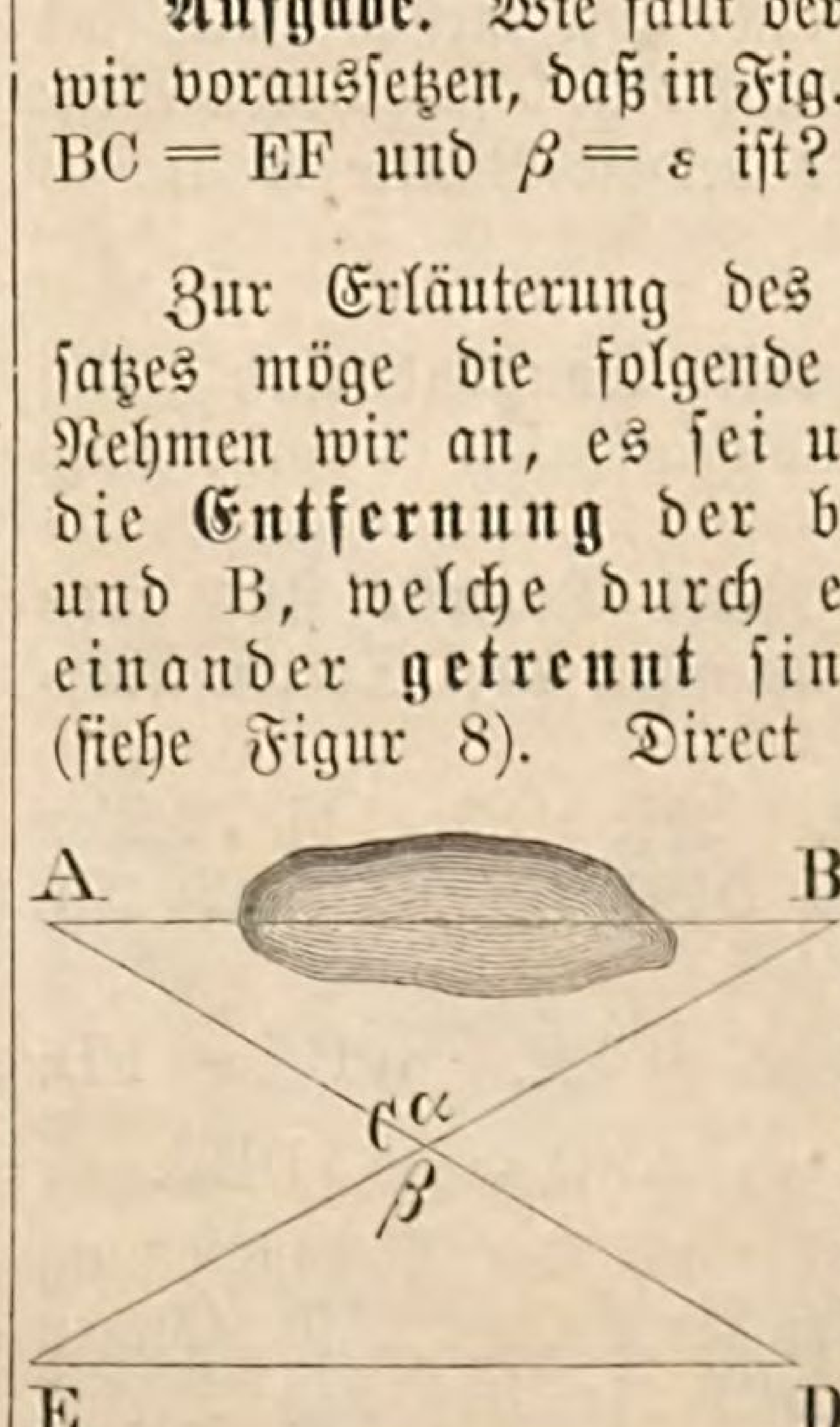


Fig. 8.

Wir wollen zunächst bei den Punk-

ten A und B einen Stab in die Erde stecken, ebenso bei einem dritten, ganz beliebig gewählten, Punkte C, der mit A und B, ohne Störung durch den Teich, geradlinig verbunden werden kann. Wenn wir diese geradlinige Verbindung etwa durch straffgespannten Bindfaden herstellen und uns die gerade Linie AB gezogen denken, haben wir ein Dreieck ABC, bei welchem wir die Seiten CA und CB und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel α messen können.

Es ist nun nicht schwer, auf freiem Felde ein dreieckiges Ackerstück zu construieren, welches dem oben besprochenen Dreieck congruent ist. Wenn man nämlich die Geraden AC und BC über C hinaus um sich selbst bis D und E verlängert und die Punkte D und E geradlinig verbindet, entsteht das Dreieck CDE. Nach der Construction ist:

$$AC = CD \text{ und } BC = CE.$$

Ferner ist: $\alpha = \beta$,
weil α und β Scheitelwinkel sind.

Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also in zwei Seiten und in dem Winkel überein, welcher von diesen Seiten eingeschlossen wird. Sie sind mithin nach dem ersten Congruenzsatze congruent. In congruenten Dreiecken sind die Seiten einander gleich, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. Es ist $\alpha = \beta$, folglich auch:

$$DE = AB$$

d. h. die gerade Linie DE ist gleich der Entfernung der beiden Punkte A und B. Die Strecke DE können wir messen; wir sind darum im Stande, auf dem besprochenen Wege die Entfernung der beiden Punkte A und B zu bestimmen.

§ 77. **Der zweite Congruenzsatz.** Unter dem zweiten Congruenzsatz versteht man gewöhnlich den

Lehrsatz IV. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.

Voraussetzung. Wir haben die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 9 und 10), bei denselben ist:

1) AB = DE. 2) BC = EF. 3) CA = FD.

Behauptung. △ ABC ≅ △ DEF.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung die Seite AB gleich der Seite DE ist, können wir das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC legen, daß

die Seite DE auf die Seite AB
der Punkt D auf den Punkt A
und der Punkt E auf den Punkt B
fällt.

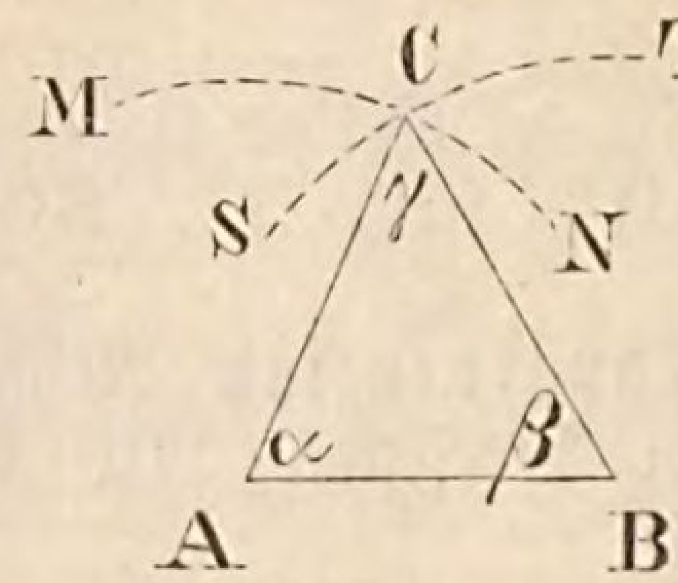


Fig. 9.

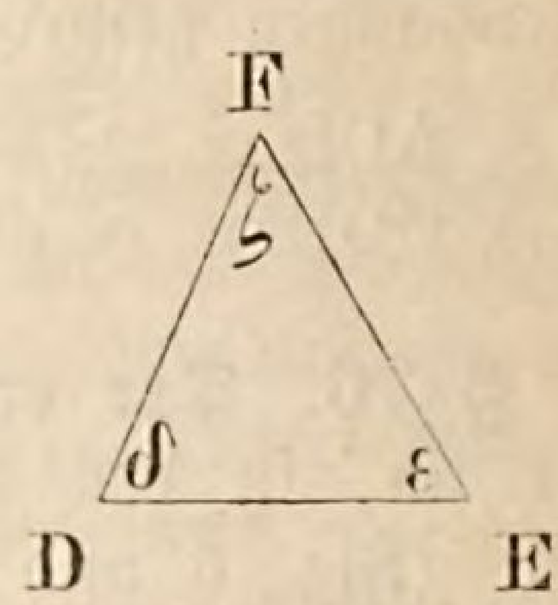


Fig. 10.

Wie wir vorausgesetzt haben, ist die Seite DF ebenso groß wie die Seite AC; wohin also auch DF fallen möge, der Endpunkt F der Seite DF wird von A ebenso weit entfernt sein wie der Punkt C, er wird also in dem Kreise MN[1]) liegen, welcher um A mit AC umschrieben ist.

Nach der Voraussetzung ist auch Seite EF so groß wie die Seite BC. Der Endpunkt F der Seite EF muß darum auch von B dieselbe Entfernung haben wie der Punkt C, er wird ein Punkt des Kreises ST[1]) sein, welcher um B mit BC geschlagen ist.

F liegt, wie wir gesehen haben, in dem Kreise MN und in dem Kreise ST; der einzige den beiden Kreisen gemeinschaftliche Punkt ist der Schnittpunkt C. Es muß darum

der Punkt F auf den Punkt C

fallen. Dann haben die beiden Geraden AC und DF die Punkte A und D, sowie C und F und die beiden Geraden BC und EF die Punkte B und E, sowie C und F mit einander gemein. Zwei gerade Linien fallen ganz zusammen, wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben. Folglich fällt auch

die Seite DF auf die Seite AC
und die Seite EF auf die Seite BC.

Die Dreiecke ABC und DEF decken sich mithin in allen ihren Punkten, in Zeichen: es ist:

△ ABC ≅ △ DEF, was behauptet war.

Aufgaben. Wir haben vorausgesetzt, daß in den Dreiecken ABC und DEF

AB = DE, BC = EF und AC = DF ist.

---

[1]) In Figur 9 sieht der Schüler von dem Kreise um A nur den Bogen MN und von dem Kreise um B nur den Bogen ST.

In congruenten Dreiecken sind auch die Winkel gleich, welche Gleichungen können wir demgemäß noch aufstellen?

§ 78. **Erster Theil des dritten Congruenzsatzes.** Wir kommen jetzt zum **dritten Congruenzsatze.** Ehe wir denselben in seiner allgemeinen Fassung geben, wollen wir den **ersten Theil** desselben beweisen, nämlich den

Lehrsatz V. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Figur 11 und 12) ist:

1) AB = DE, 2) $\alpha = \delta$, 3) $\beta = \varepsilon$.

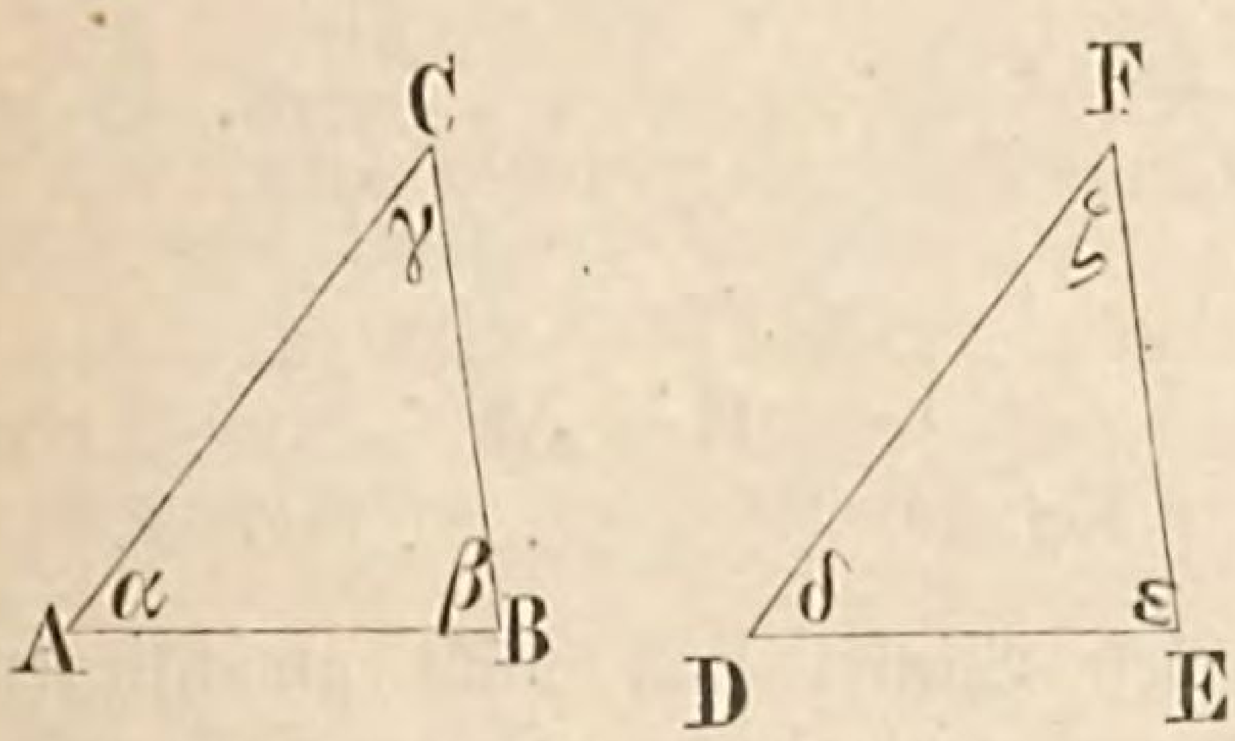


Fig. 11. Fig. 12.

Behauptung. △ ABC ≅ △ DFF.

Beweis. Weil die beiden Seiten AB und DE einander gleich sind, können wir das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC legen, daß der Punkt D auf den Punkt A und der Punkt E auf den Punkt B fällt. Die beiden

Seiten AB und DE

werden sich dann decken. Ferner wird

die Seite DF auf die Seite AC
und die Seite EF auf die Seite BC

fallen, weil nach der Voraussetzung die Winkel α und δ, β und ε gleich sind.

Die beiden Dreiecke ABC und DEF decken sich also vollständig, in Zeichen, es ist

△ ABC ≅ △ DEF, was behauptet war.

§ 79. **Ein Hilfssatz.** Wir können dem Lehrsatz V noch eine andere Fassung geben, wenn wir einen Hilfssatz beweisen.

Wir wollen annehmen, wir hätten zwei Dreiecke, das eine mit den Winkeln δ, ε, ζ, das andere mit den Winkeln η, ϑ, φ. Stellen wir uns weiter vor, wir hätten durch Messung mit dem Transporteur gefunden, daß in den beiden Dreiecken **zwei** Winkel wechselseitig gleich sind, daß etwa $\delta = \eta$ und $\varepsilon = \vartheta$ sei. Es erhebt sich dann die Frage, wie sich die dritten Winkel ζ und φ zu einander verhalten. Wir behaupten, daß sie einander gleich sind, daß also

$$\zeta = \varphi \text{ sei.}$$

Diese Behauptung ist erwiesen, wenn wir den Beweis liefern von dem

Hilfssatz. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines zweiten Dreiecks gleich sind, so muß auch der dritte Winkel des ersten Dreiecks dem dritten Winkel des zweiten Dreiecks gleich sein.

Voraussetzung. Wir haben im Dreieck ABC (Fig. 11) die Winkel α, β und γ und im Dreieck DEF (Fig. 12) die Winkel δ, ε und ζ. Von diesen Winkeln ist

$$\alpha = \delta; \quad \gamma = \zeta.$$

Behauptung. Es ist $\beta = \varepsilon$.

Beweis. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich 2 Rechten; darum ist im Dreieck ABC (Fig. 11)

$$\beta + \alpha + \gamma = 2 \text{ R}$$

und in Fig. 12

$$\varepsilon + \delta + \zeta = 2 \text{ R}.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, folglich ist

$$\text{I. } \beta + \alpha + \gamma = \varepsilon + \delta + \zeta$$

Nach der Voraussetzung haben wir:

$$\alpha = \delta$$
$$\gamma = \zeta$$

$$\text{II. } \alpha + \gamma = \delta + \zeta \text{ nach Gr. III.}$$

Wenn wir Gleichung I und Gleichung II noch einmal hinschreiben, haben wir

$$\text{I. } \beta + \alpha + \gamma = \varepsilon + \delta + \zeta$$
$$\text{II. } \alpha + \gamma = \delta + \zeta.$$

Gleiches von Gleichem subtrahirt, (weggenommen) giebt Gleiches, folglich ist:

$\beta = \varepsilon$[1]), was behauptet war.

§ 80. **Der zweite Theil des dritten Congruenzsatzes.** Beim ersten Theile des dritten Congruenzsatzes setzten wir voraus, daß zwei Dreiecke in einer Seite und den **beiden anliegenden** Winkeln übereinstimmen;

[1]) Wenn wir $\alpha + \gamma$ von $\beta + \alpha + \gamma$ wegnehmen, (subtrahiren), bleibt β, und wenn wir $\beta + \zeta$ von $\varepsilon + \delta + \zeta$ wegnehmen (subtrahiren), erhalten wir ε.

wir konnten dann behaupten, daß die beiden Dreiecke congruent sind.

Wir wollen nun annehmen, wir hätten durch Messung festgestellt, daß in den beiden Dreiecken ABC und DEF (Figur 11 und 12)

$$1)\ AB = DE,\quad 2)\ \alpha = \delta,\quad 3)\ \gamma = \zeta$$

sei, mit andern Worten; daß die Dreiecke ABC und DEF

in einer Seite,
in **einem anliegenden**
und in dem **gegenüberliegenden**

Winkel übereinstimmen. Wir werden sehen, daß wir auch in diesem Falle die Congruenz beweisen können, indem wir auf den ersten Theil des dritten Congruenzsatzes zurückgehen.

Aus den Gleichungen 2 und 3 können wir erschließen, daß

$$\beta = \varepsilon$$

ist. Demnach haben wir die drei Gleichungen

$$\text{I. } AB = DE,\quad \text{II. } \alpha = \delta,\quad \text{III. } \beta = \varepsilon.$$

also: Wenn uns die Gleichungen 1, 2, 3 gegeben sind, so bestehen auch die Gleichungen I, II und III, oder mit anderen Worten:

Wenn zwei Dreiecke in **einer Seite, einem anliegenden** und einem **gegenüberliegenden** Winkel übereinstimmen, so stimmen die beiden Dreiecke auch in einer Seite und den **beiden anliegenden** Winkeln überein, d. h. sie sind **congruent**.

Wir haben darum den

Lehrsatz VI. Wenn zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie congruent.

Diesen Lehrsatz wollen wir den **zweiten Theil** des dritten Congruenzsatzes nennen.

§ 81. Der dritte Congruenzsatz in allgemeiner Fassung. Es ist nicht schwer, den ersten und zweiten Theil des dritten Congruenzsatzes in einen Satz zusammenzuschmelzen. Der erste Theil sagt aus, zwei Dreiecke seien congruent, wenn eine Seite und die **beiden anliegenden** Winkel wechselseitig gleich sind, der zweite Theil behauptet von zwei Dreiecken die Congruenz, wenn sie in einer Seite, dem **einen der anliegenden** und **dem gegenüberliegenden** Winkel übereinstimmen. Fassen wir die Congruenz-Bedingungen des ersten und zweiten Theiles zusammen, so ergiebt sich als **dritter Congruenzsatz** der

Lehrsatz VII. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

Wir bitten den Schüler, besonders auf das Wort **gleichliegend** zu achten. In den Dreiecken DEF und MNP (Fig. 13 und 14) sind auch zwei Winkel und eine Seite wechselweise gleich, nämlich es ist:

Seite DE gleich der Seite MN
Winkel D gleich Winkel M
Winkel E gleich Winkel P,

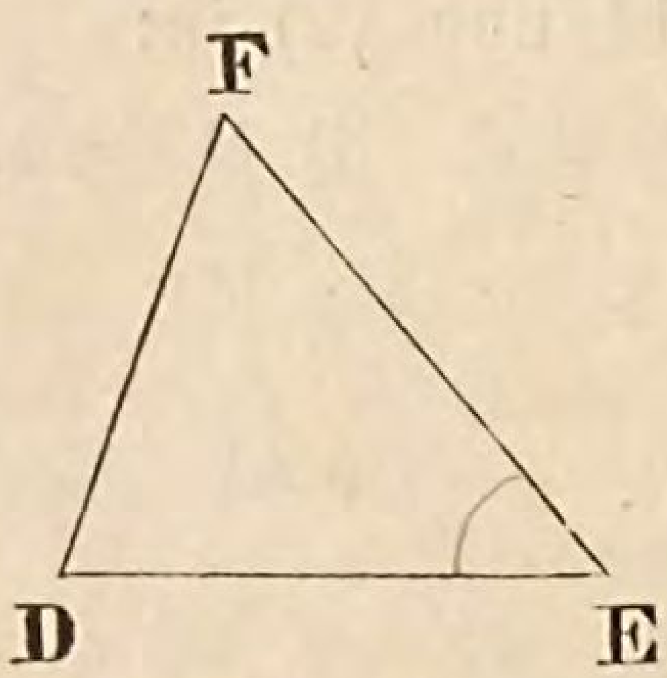


Fig. 13.

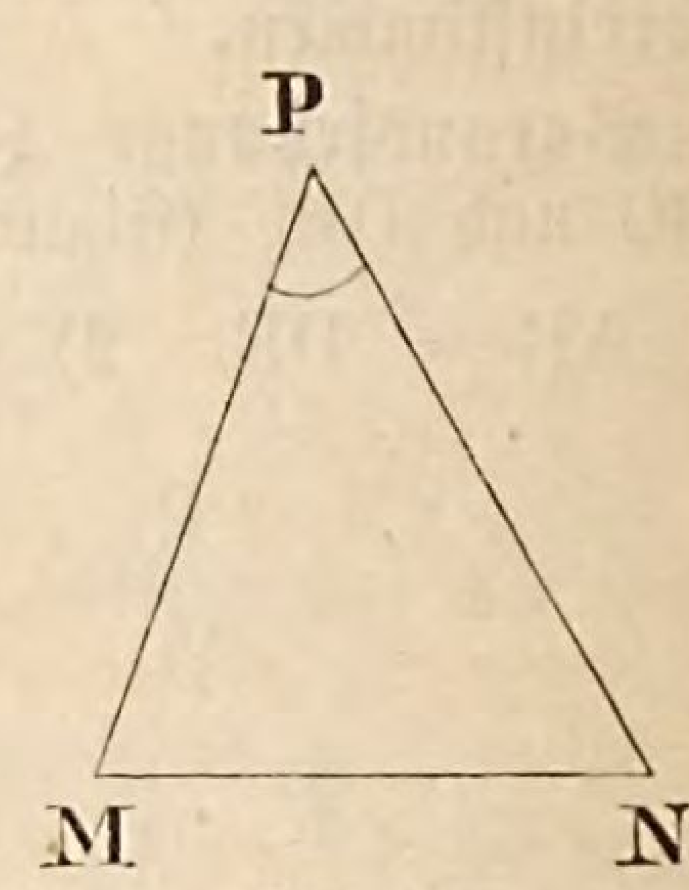


Fig. 14.

aber diese Winkel sind nicht gleichliegend in Bezug auf die gleichen Seiten DE und MN. D und E sind anliegende Winkel, dagegen ist M ein anliegender und P ein gegenüberliegender Winkel. Wir können in diesem Falle aus der Gleichheit einer Seite und zweier Winkel nicht auf die Congruenz der Dreiecke DEF und MNP schließen.

§ 82. Aufgabe. Man kann den dritten Congruenzsatz benutzen, um die Entfernung zweier Punkte zu messen, von welchen nur der eine zugänglich ist. Es sei uns die Aufgabe gestellt, anzugeben, wie weit die Kirche A vom Baume B (Fig. 15) entfernt

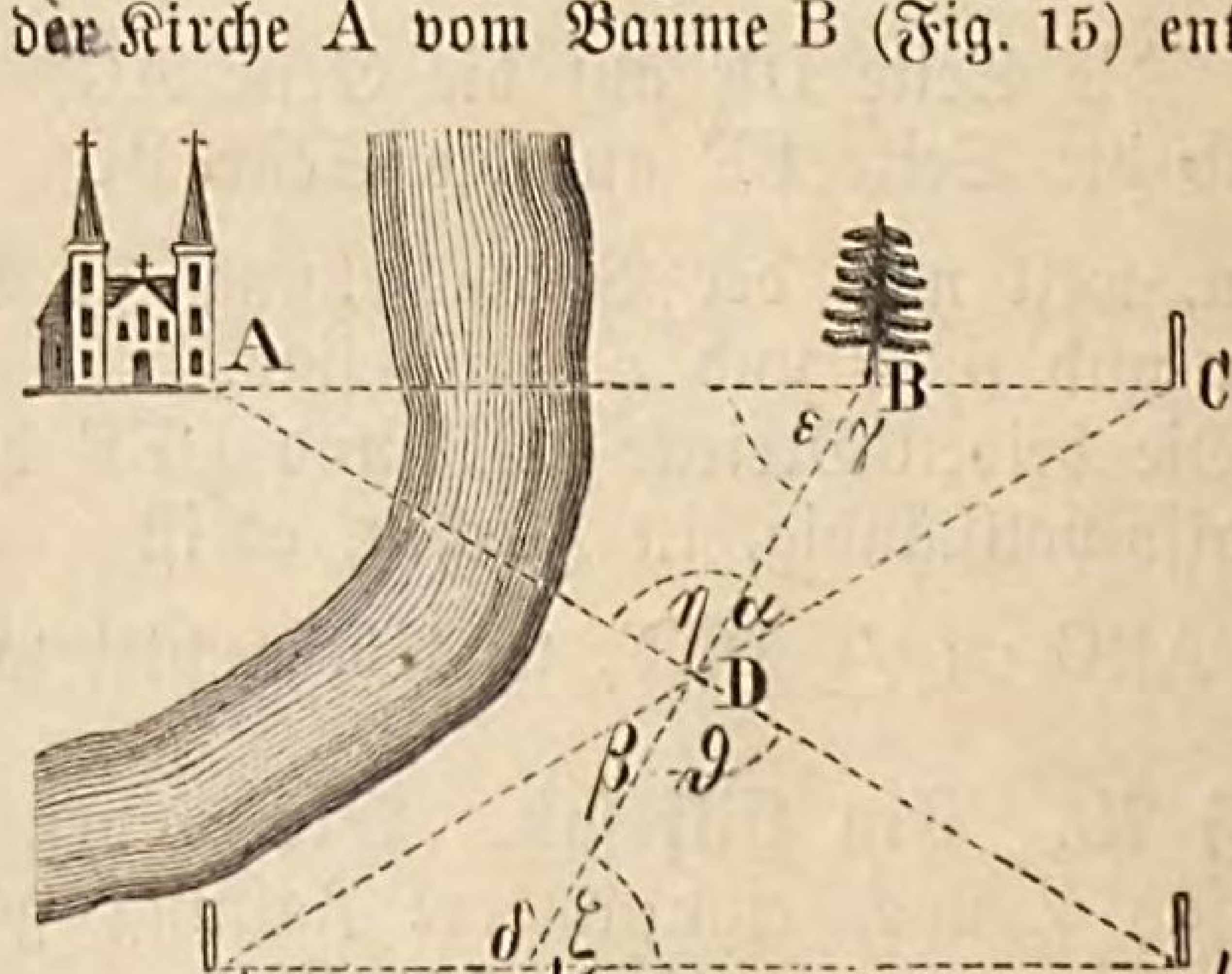


Fig. 15.

ist. Weil der Baum von der Kirche durch einen Fluß getrennt ist, kann eine directe Messung schwer vorgenommen werden. Um unsere Aufgabe zu lösen, bestimmen wir zunächst durch Visiren irgend einen Punkt C, welcher mit A und B in einer geraden Linie liegt und stecken bei diesem Punkte einen Stab

in die Erde. Durch einen zweiten Stab markiren wir einen beliebigen Punkt D. Wir messen sodann die geraden Linien CD und BD.

Die Geraden BD und CD verlängern wir um sich selbst über D hinaus bis B′ und C′, so daß

CD = C′D und BD = B′D ist.

Dann ziehen wir uns die gerade Linie C′B′ und gehen in dieser geraden Linie über B′ hinaus so lange fort, bis wir durch Visiren einen Punkt A′ finden, der mit D und A in einer geraden Linie liegt. Wir stellen nun die

Behauptung auf, daß B′A′ gleich der Entfernung der beiden Punkte A und B sei. Für diese Behauptung wollen wir den

Beweis liefern. Wir betrachten zunächst die beiden Dreiecke BCD und B′C′D′. In denselben ist nach der Construction:

CD = C′D, BD = B′D

ferner $\alpha = \beta$ als Scheitelwinkel,

d. h. die beiden Dreiecke BCD und B′C′D stimmen in zwei Seiten und in dem Winkel überein, welche von diesen Seiten eingeschlossen werden. Nach dem ersten Congruenzsatze ist darum:

$\triangle BCD \cong \triangle B'C'D$.

In congruenten Dreiecken sind die Winkel gleich, welche gleichen Seiten gegenüber liegen. In den Dreiecken BCD und B′C′D liegen den gleichen Seiten CD und C′D′ die Winkel γ und δ gegenüber, es ist darum:

$\gamma = \delta$.

Die Gleichheit der beiden Winkel δ und ε wollen wir benutzen, um die Congruenz der beiden Dreiecke ABD und A′B′D nachzuweisen.

Ist nämlich γ gleich δ, so müssen auch die Nebenwinkel von γ und δ gleich sein, d. h. wir haben

$\varepsilon = \zeta$.[1])

Berücksichtigen wir noch, daß

$\eta = \vartheta$

ist, weil η und ϑ Scheitelwinkel sind, und daß

BD = B′D

ist, weil wir BD um sich selbst bis D′ verlängert haben, so sehen wir, daß die beiden Dreiecke ABD und A′B′D in einer Seite und den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen, daß also nach der ersten Form des dritten Congruenzsatzes

ABD ≅ A′B′D ist.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Den gleichen Winkeln η und ϑ entsprechen als gegenüberliegende Seiten AB und A′B′. Folglich ist

AB = A′B′ oder A′B′ = AB

d. h. die Strecke A′B′ ist gleich der Entfernung der Punkte A und B, was behauptet war.

§ 83. Vierter Congruenzsatz.

Als wir die Bedingungen für die Congruenz der Dreiecke besprachen, haben wir angegeben, daß wir vier Congruenzsätze behandeln würden. Drei derselben haben wir bereits angeführt; wir kommen jetzt zum vierten Congruenzsatze.

Die beiden Figuren 16 und 17 stellen uns zwei Dreiecke ABC und DEF dar. Wir wollen uns vorstellen, wir hätten durch Messung gefunden, daß

1) die Seite AC gleich der Seite DF
2) die Seite BC gleich der Seite EF
und 3) der Winkel α gleich dem Winkel δ

sei, mit anderen Worten, daß die Gleichungen bestehen:

1) AC = DF, 2) BC = EF, 3) $\delta = \alpha$.

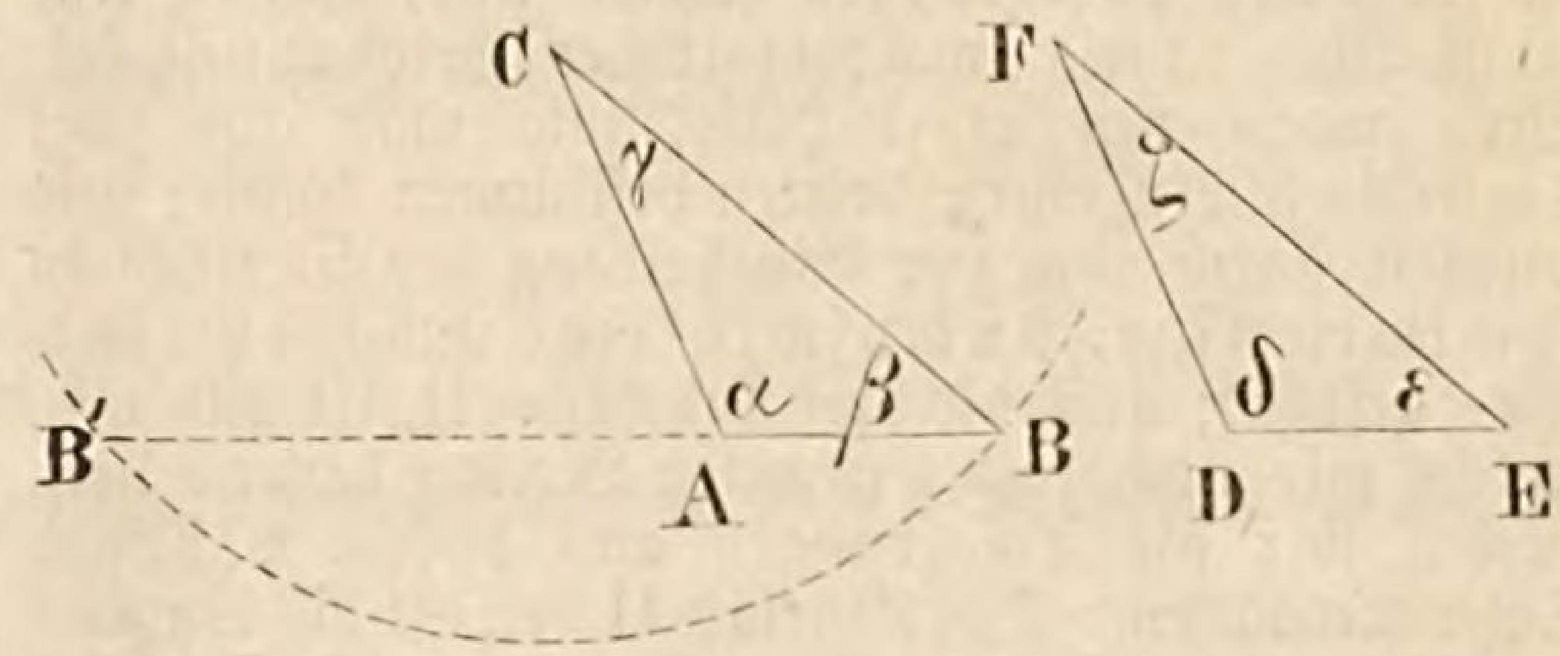


Fig. 16. Fig. 17.

Es frägt sich jetzt, welche Lage die gleichen Winkel α und δ zu den gleichen Seiten haben.

α liegt der Seite BC
δ „ „ „ EF

gegenüber. Wie sich der Schüler durch eine Messung überzeugen kann, ist:

AC = 18 mm, DF = 18 mm
BC = 26 mm, EF = 26 mm.

Demnach ist:

BC > AC. und EF > DF.

Die Winkel α und δ liegen also der größeren der beiden Seiten gegenüber, welche in den Dreiecken ABC und DEF wechselseitig gleich sind; die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen mithin überein

in **zwei Seiten** und
in dem **Winkel**, welcher der **größeren der beiden Seiten** gegenüberliegt.

Wir behaupten, daß zwei Dreiecke, bei welchen diese Bedingungen zutreffen, congruent sind, und stellen als **vierten Congruenzsatz** auf den

Lehrsatz VIII. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und in dem Winkel übereinstimmen, welcher der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegt.

Den Beweis dieses Lehrsatzes wollen wir im nächsten Briefe liefern.

---

[1]) Die Summen $\varepsilon + \gamma$ und $\zeta + \delta$ sind nach dem Nebenwinkelsatze gleich 2 R, daher:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon + \gamma &=& \zeta + \delta \\ \gamma &=& \delta \\ \hline \varepsilon &=& \zeta. \end{array}$$

B. Recapitulation.

Die beiden ersten Abschnitte der **neunten Lection** enthalten die Lösungen der Aufgaben des vierten Briefes und die Antworten auf die Wiederholungsfragen; den dritten Abschnitt begannen wir mit dem wichtigen Satze, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten sei. Wir benutzten diesen Satz zugleich, um unsere Schüler im Beweisverfahren zu üben; darum bewiesen wir ihn auf eine dreifache Weise und gaben auch unseren Schülern Gelegenheit, an fünf Figuren, welche von uns noch nicht verwendet waren, den Beweis selbstständig auszuführen.

Der Satz über die Summe der Dreieckswinkel ist einer der wichtigsten Lehrsätze der Planimetrie; wir werden ihn fast in jedem Abschnitte zum Beweise anderer Lehrsätze mehrmals gebrauchen. Schon die folgenden Paragraphen zeigten uns, daß er eine reichhaltige Quelle mathematischer Erkenntnisse sei. Wir fanden mit seiner Hilfe, wie man aus zwei Dreieckswinkeln einen dritten bestimmen könne; wir wurden durch ihn zur Eintheilung der Dreiecke in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige geführt; auch die drei Lehrsätze (II, III und IV), welche wir noch in der neunten Lection behandelten, dürfen wir als Folgerungen aus diesem wichtigen Satze betrachten. Der Lehrsatz II betrifft die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks und in Lehrsatz III wird behauptet, daß zwei parallele Gerade sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern mag. Wir haben diese Eigenschaft der parallelen Geraden schon öfter erwähnt: aber erst der Satz über die Summe der Dreieckswinkel setzte uns in den Stand, sie mathematisch zu beweisen, und zwar unterschied sich der Beweis, welchen wir für Lehrsatz III gaben, wesentlich von den früheren; wir erschlossen die Richtigkeit der Behauptung indirect aus der Unmöglichkeit des Gegentheils und nannten darum diese Methode die indirecte Beweismethode. Im Abschnitt D der neunten Lection gingen wir zum Viereck über. Wir zeigten, daß ein Viereck vier Ecken, vier Seiten und vier Winkel habe, besprachen, was man unter der Diagonale eines Vierecks verstehe, und bewiesen dann den Satz, daß in jedem Viereck die Summe der Winkel gleich vier Rechten sei.

In der **zehnten Lection** behandelten wir die Congruenz der Dreiecke. Wir besprachen zunächst den Sinn des Wortes congruent und zeigten, daß bei congruenten geradlinigen Figuren die Seiten und Winkel einander gleich sind, welche bei der Deckung übereinander liegen. Darauf gingen wir zur Congruenz der Dreiecke über. Wir erörterten, daß es schwer fallen würde, die Congruenz der Dreiecke zu beweisen, wenn man sie immer zur Deckung bringen müsse und nicht aus der Gleichheit einiger Seiten und Winkel die Congruenz folgern könne; wir konnten sogleich hinzufügen, daß es in der That Sätze gebe, welche uns gestatten, aus der Gleichheit gewisser Dreiecksstücke auf die Congruenz zu schließen, nämlich die vier Congruenzsätze. Nachdem wir noch einen Hilfs-Satz über Winkel mit gleichen Schenkeln gebracht und das Zeichen für das Wort congruent angegeben hatten, gingen wir an die Behandlung der einzelnen Congruenzsätze. Den ersten Congruenzsatz erläuterten wir durch die Aufgabe, die Entfernung zweier uns zugänglichen Punkte festzustellen, die durch einen Teich von einander getrennt sind. Der zweite Congruenzsatz machte uns keine besondere Schwierigkeit; den dritten erhielten wir indem wir zwei Sätze mit einander verschmolzen. Vermittelst des dritten Congruenzsatzes lösten wir die interessante Aufgabe, die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, welche durch einen Fluß von einander getrennt sind. Vom vierten Congruenzsatz konnten wir in diesem Brief nur den Wortlaut angeben. Den Beweis wird erst die nächste Lection bringen.

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie groß ist die Summe der drei Winkel eines Dreiecks?
2) Bei einem Dreieck möge die Gradanzahl zweier Winkel bekannt sein; wie findet man dann die Gradanzahl des dritten Winkels?
3) Wie viel stumpfe Winkel können in einem Dreieck vorkommen?
4) Wie viel rechte Winkel kann ein Dreieck haben?
5) Wie viel spitze Winkel müssen wenigstens in in einem Dreiecke sein?
6) Was versteht man unter einem rechtwinkligen Dreiecke?
7) Was ist ein spitzwinkliges, was ist ein stumpfwinkliges Dreieck?
8) Wie groß ist die Summe der sechs Außenwinkel eines Dreiecks?
9) Welcher drei Lehrsätze haben wir uns bedient, um den Satz über die Summe des Außenwinkels zu beweisen?
10) Dürfen sich parallele gerade Linien schneiden?
11) Wie viel Ecken, Seiten und Winkel hat ein Viereck?
12) Was versteht man unter der Diagonale eines Vierecks?
13) Wie groß ist die Summe der Winkel eines Vierecks?
14) Wie heißt der erste Congruenzsatz?
15) Welche Aufgabe haben wir mit Hilfe des ersten Congruenzsatzes gelöst?
16) Wie heißt der zweite Congruenzsatz?
17) Aus welchen beiden Sätzen haben wir den dritten Congruenzsatz zusammengesetzt?
18) Welche Aufgabe haben wir im Anschluß an dritten Congruenzsatz behandelt?
19) Wie heißt der vierte Congruenzsatz?
20) Welche Lehrsätze haben wir mit Hilfe des Satzes bewiesen, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten sei?
21) Welche Sätze haben wir über die Außenwinkel eines Dreiecks aufgestellt?
22) Mit Hilfe welches Satzes haben wir beim ersten Congruenzsatze bewiesen, daß die Seiten BC und EF sich decken, nachdem wir wußten, daß die Punkte B und E, C und F zusammenfallen?
23) Wie viel Grad betragen zusammen zwei entgegengesetzte Winkel bei Parallelen?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 11 und 12.
Planimetrie.

6. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Als Manuscript gedruckt.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner und Gelehrten bearbeitet von

W. Burckhardt.

Was heute nicht geschieht,
Ist morgen nicht gethan,
Und keinen Tag soll man vergessen.
(Goethe.)

Lection 11.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 9.

Abschnitt C. § 70. Aufgaben I. Wenn wir die Figur 4 benutzen, wird die

Voraussetzung. Im Dreieck BCD haben wir die drei Winkel β, γ und δ.

Behauptung. $\beta + \gamma + \delta = 2$ R.

Beweis. β und η sind Nebenwinkel, darum ist

I. $\beta + \eta = 2$ R.

Ferner ist $\eta = \gamma + \delta$,

weil η Außenwinkel des Dreiecks BCD ist.

Vertauschen wir in Gleichung I η mit der gleichen Größe $\gamma + \delta$, so ergiebt sich:

$\beta + \gamma + \delta = 2$ R, was behauptet war.

Wenn wir Figur 5 verwenden, ist die

Voraussetzung. Im Dreieck CEF haben wir die Winkel γ, ε und ζ.

Behauptung. $\gamma + \varepsilon + \zeta = 2$ R.

Beweis. ϑ und ζ sind Nebenwinkel, folglich ist

I. $\vartheta + \zeta = 2$ R.

Ferner haben wir $\vartheta = \gamma + \varepsilon$,

weil ϑ ein Außenwinkel des Dreiecks CEF ist.

Wird in Gleichung I für ϑ die gleiche Größe $\gamma + \varepsilon$ eingesetzt, so erhalten wir:

$\gamma + \varepsilon + \zeta = 2$ R, was behauptet war.

Aufgaben II. Wenn wir uns der Figur 8 bedienen, gestaltet sich die

Voraussetzung. Es ist uns das Dreieck ABC mit den Winkeln α, β und γ gegeben.

Behauptung. $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

Beweis. Wir legen durch den Punkt B die Parallele BD zu AC und verlängern AB über B hinaus bis E, dann bilden die drei Winkel β, α' und γ' zusammen einen Gestreckten; wir haben daher:

I. $\beta + \alpha' + \gamma' = 2$ R.

Es ist ferner:

$\alpha' = \alpha$ als Gegenwinkel bei den Parallelen BD und AC geschnitten von AE, und

$\gamma' = \gamma$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen BD und AC geschnitten von BC.

Führen wir in Gleichung I für α' den gleichen Winkel α und für γ' den gleichen Winkel γ ein, erhalten wir:

$\beta + \alpha + \gamma = 2$ R.

Wenn wir die Summanden der linken Seite in geeigneter Weise umstellen, ergiebt sich:

$\alpha + \beta + \gamma = 2$ R, was behauptet war.

Aufgaben III. Wenn wir Figur 12 verwenden, erhalten wir als

Voraussetzung. Im Dreieck CDE haben wir die Winkel γ, δ und ε.

Behauptung. $\gamma + \delta + \varepsilon = 2$ R.

Beweis. Es ist:

$\delta = \delta'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen DE und FG geschnitten von CD.

$\varepsilon = \varepsilon'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen DE und FG geschnitten von CE.

Die Winkel γ, δ' und ε' bilden zusammen einen gestreckten Winkel, deswegen ist

$\gamma + \delta' + \varepsilon' = 2$ R.

Vertauschen wir in der letzten Gleichung δ' mit dem gleichen Winkel δ und ε' mit dem gleichen Winkel ε, so haben wir

$\gamma + \delta + \varepsilon = 2$ R, was behauptet war.

Wenn uns Figur 13 gegeben ist, wird die

Voraussetzung. Wir haben im Dreieck DEF die Winkel δ, ε und ζ.

Behauptung. $\delta + \varepsilon + \zeta = 2$ R.

Beweis. Es ist

$\varepsilon' = \varepsilon$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen EF und MN geschnitten von ED.

$\zeta' = \zeta$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen EF und MN geschnitten von DF.

Die drei Winkel δ, ε' und γ' sind zusammen gleich einem Gestreckten, in Zeichen:

$\delta + \varepsilon' + \zeta' = 2$ R.

Setzen wir für ε' den gleichen Winkel ε und für ζ' den gleichen Winkel ζ ein, so erhalten wir:

$\delta + \varepsilon + \zeta = 2$ R, was behauptet war.

§ 71. Der dritte Winkel beträgt

1) 80°, 2) 22°, 3) 84°, 4) 41°, 5) 62°, 6) 76°.

Denn es sind

1) $49^0 + 51^0 = 100^0$; $180^0 - 100^0 = 80^0$.
2) $72^0 + 86^0 = 158^0$; $180^0 - 158^0 = 22^0$.
3) $27^0 + 69^0 = 96^0$; $180^0 - 96^0 = 84^0$.
4) $120^0 + 19^0 = 139^0$; $180^0 - 139^0 = 41^0$.
5) $63^0 + 55^0 = 118^0$; $180^0 - 118^0 = 62^0$.
6) $57^0 + 47^0 = 104^0$; $180^0 - 104^0 = 76^0$.

§ 71. a) Ein rechtwinkliges und ebenso ein stumpfwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.

b) Dreieck ABC (Fig. 19) ist rechtwinklig, Dreieck DEF (Fig. 20) ist spitzwinklig, Dreieck SPT (Fig. 21) ist stumpfwinklig.

Lection 10.

§ 75. $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ EFG wird gesprochen: Dreieck ABC ist congruent dem Dreieck EFG

$\triangle$ CDE $\cong$ $\triangle$ EFG wird gesprochen: Dreieck CDE ist congruent dem Dreieck EFG.

$\triangle$ MNP $\cong$ $\triangle$ SUV wird gesprochen: Dreieck MNP ist congruent dem Dreieck SUV, und

$\triangle$ PST $\cong$ $\triangle$ SUT spricht man Dreieck PST ist congruent dem Dreieck SUT.

§ 76. Wenn vorausgesetzt wird, daß in den Figuren 6 und 7 AB $\cong$ DE und $\beta \cong \varepsilon$ ist, fällt der Beweis folgendermaßen aus.

Beweis. Weil die Winkel β und ε einander gleich sind, können die beiden Dreiecke ABC und DEF so aufeinander gelegt werden, daß die Schenkel der gleichen Winkel sich decken. Wenn wir die Dreiecke in eine derartige Lage bringen, wird

der Punkt E auf den Punkt B
die Seite EF auf die Seite BC
die Seite ED auf die Seite BA

fallen. Wie wir vorausgesetzt haben, sind die beiden Geraden EF und BC, ebenso ED und BA gleich groß, mithin wird auch

der Punkt F mit dem Punkt C
und der Punkt D mit dem Punkt A

zusammenfallen.

Die beiden Seiten DF und AC haben demgemäß zwei Punkte mit einander gemein, nämlich die Punkte F und C, D und A; sie decken sich daher gemäß Lehrsatz I Seite 19 in allen ihren Punkten. Jetzt haben wir bewiesen, daß die Dreiecke ABC und DEF sich decken, in Zeichen, daß

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF ist, was behauptet war.

B. Antworten auf die in Abschnitt C der Lection 10 gestellten Fragen.

1) Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten oder gleich 180 Grad. 2) Man findet die Gradanzahl des dritten Winkels, wenn man die Gradsumme der beiden bekannten Winkel von 180 Grad abzieht. 3) In einem Dreieck kann nur ein stumpfer Winkel vorkommen. 4) Ein Dreieck kann nur einen rechten Winkel haben. 5) In einem Dreieck müssen wenigstens zwei Winkel spitz sein. 6) Ein Dreieck wird rechtwinklig genannt, wenn in demselben ein rechter Winkel vorkommt. 7) Man nennt ein Dreieck spitzwinklig, wenn die Winkel desselben spitz sind, stumpfwinklig, wenn in demselben ein stumpfer Winkel vorkommt. 8) Die Summe der sechs Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich 8 Rechten. 9) Wir haben zum Beweise die drei Lehrsätze gebraucht: Die Summe der Winkel um einen Punkt herum ist gleich 4 Rechten, die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich 2 Rechten, Scheitelwinkel sind einander gleich. 10) Parallele gerade Linien schneiden sich niemals, so weit man sie auch verlängern mag. 11) Ein Viereck hat vier Ecken, vier Seiten und vier Winkel. 12) Bei einem Viereck versteht man unter einer Diagonale die gerade Linie, welche die gegenüberstehenden Ecken eines Vierecks verbindet. 13) Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich 4 Rechten. 14) Siehe Lehrsatz III Seite 91. 15) Mit Hilfe des ersten Congruenzsatzes haben wir die Aufgabe gelöst, die Entfernung zweier Punkte zu messen, welche durch einen Teich von einander getrennt sind. 16) Siehe Lehrsatz IV Seite 92. 17) Wir haben den dritten Congruenzsatz aus Lehrsatz V und VI zusammengesetzt. 18) Mit Hilfe des zweiten Congruenzsatzes haben wir die Entfernung zweier Punkte bestimmt, deren einer uns unzugänglich ist. 19) Siehe Lehrsatz VII Seite 95. 20) Lehrsatz II, III und IV in Lection 9. 21) Ueber die Außenwinkel haben wir 1) Lehrsatz III Seite 79 und 2) Lehrsatz II Seite 87 aufgestellt. 22) Mit Hilfe des Satzes: Zwei gerade Linien fallen in allen ihren Punkten zusammen, wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben. 23) Zwei entgegengesetzte Winkel bei Parallelen sind zusammen immer gleich zwei Rechten oder gleich 180 Grad.

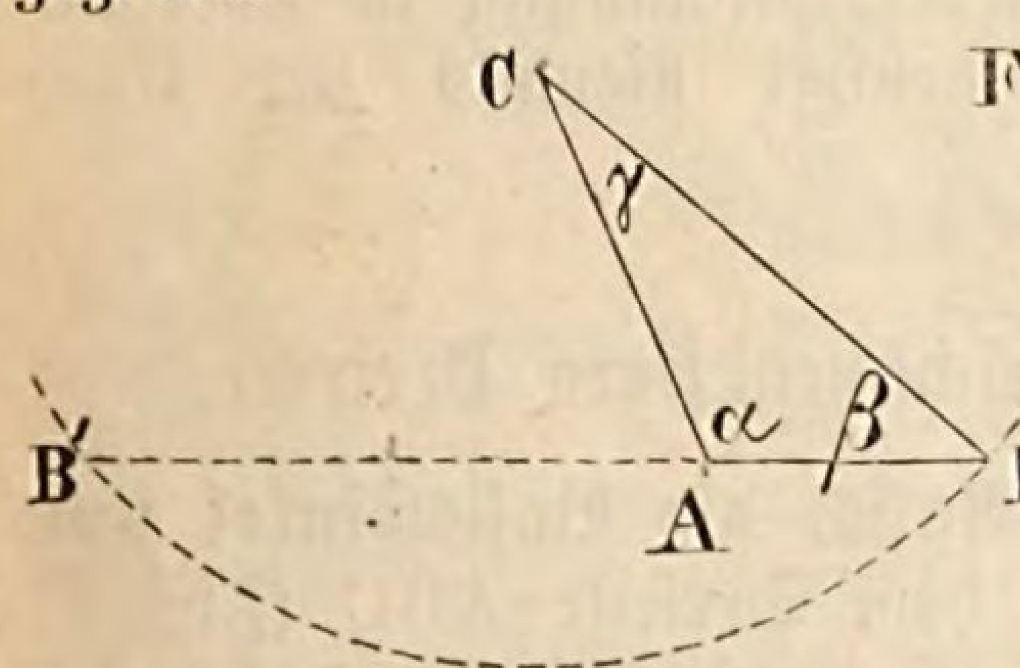
C. Der vierte Congruenzsatz.

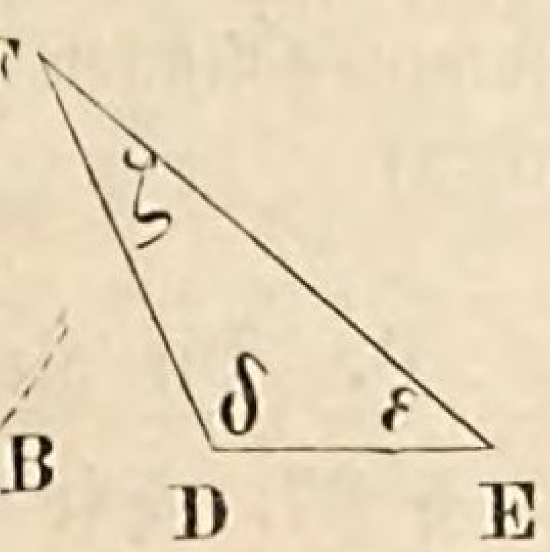
§ 84. Beweis des vierten Congruenzsatzes. Schon im letzten Briefe haben wir den vierten Congruenzsatz erläutert und seinen Wortlaut angegeben; aber der Raum gestattete

uns nicht, ihn zu beweisen. Wir wollen jetzt den Beweis liefern.

Lehrsatz I. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und in dem Winkel, welcher der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt.

Voraussetzung. Es sind uns die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 1 und 2) gegegeben.


Fig. 1.


Fig. 2.

In denselben ist:

1) $\alpha = \delta$ 2) AC = DF 3) BC = EF,

und zwar ist:

BC > AB und EF > DE.

Behauptung. $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF.

Beweis. Nach der Voraussetzung sind die beiden Winkel α und δ einander gleich; wir können darum das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC legen, daß die Schenkel der gleichen Winkel sich decken. Es wird dann

der Punkt D auf den Punkt A,
die Seite DE auf die Seite AB,
und die Seite DF auf die Seite AC

fallen. Wie wir vorausgesetzt haben, ist AC = DF; es fällt darum auch

der Punkt F auf den Punkt C.

Es fragt sich jetzt noch, welche Lage der Punkt E einnimmt, wenn wir die Dreiecke in der erwähnten Weise übereinander legen. Nach der Voraussetzung ist FE = CB; wohin also auch der Punkt E fallen möge, er wird von C ebenso weit entfernt sein als der Punkt B; er wird also innerhalb des Kreises liegen, welcher um C mit CB geschlagen ist.

E ist ferner ein Punkt der Seite DE, DE fällt auf AB, wie wir schon bewiesen haben, es wird also E auch in die Gerade AB hineinfallen.

E ist ein Punkt des Kreises, E liegt auch in der Geraden AB. Der einzige Punkt, welchen der Kreis und die Gerade AB mit einander gemein haben, ist der Punkt B, denn der Punkt B′ liegt ja in der Verlängerung der Geraden AB.

Es muß also

der Punkt E auf den Punkt B

fallen.

Wir wissen jetzt, daß die beiden Geraden

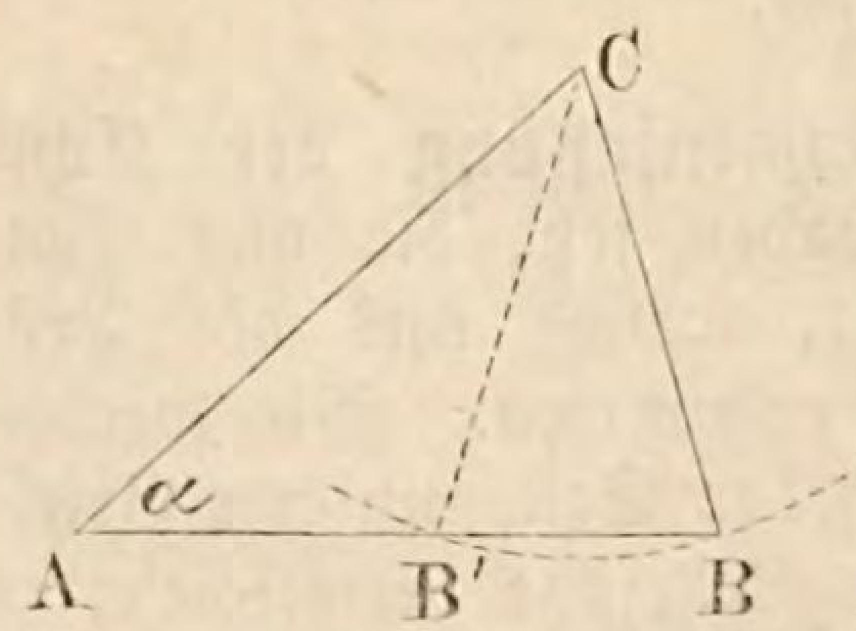
EF und BC

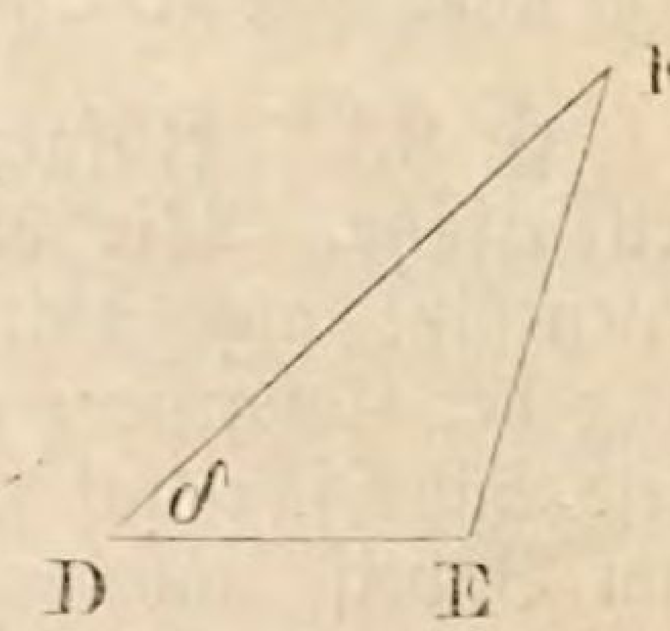
die Punkte F und C und E und B gemein haben; sie müssen sich darum in allen ihren Punkten decken. Jetzt haben wir bewiesen, daß die beiden Dreiecke ABC und DEF in allen Punkten zusammenfallen, in Zeichen:

daß $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF ist, was behauptet war.

§ 85. **Bemerkung zum vierten Congruenzsatze.** Der Schüler wird sich wundern, weshalb wir im vierten Congruenzsatze fordern, daß zwei Dreiecke in zwei Seiten und in dem Winkel übereinstimmen, welcher der größeren der wechselseitig gleichen Seiten gegenüberliegt. Er wird sich fragen, ob der Beweis, welchen wir für Lehrsatz I gegeben haben, nicht auch für den Fall paßt, daß in den beiden Dreiecken zwei Seiten wechselseitig gleich sind und der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt. War doch in dem ganzen Beweis von einer größeren Seite gar nicht die Rede. Wir wollen über diesen Punkt sogleich Klarheit verbreiten.

In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Fig. 3 und 4) messen die beiden Seiten AC und


Fig. 3.


Fig. 4.

DF 28 Millimeter, die beiden Seiten BC und EF 20 Millimeter, es ist darum:

AC = DF und BC = EF,
ferner AC > BC und DF > EF.

Die Winkel α und δ betragen beide 42 Grad, mithin ist auch:

$$\alpha = \delta.$$

α liegt BC und δ liegt EF gegenüber. **Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also in zwei Seiten überein und in dem Winkel, welcher der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegt.** Wir wollen zusehen, ob wir die Congruenz der Dreiecke ABC und DEF beweisen können.

Wie aus der Gleichheit der beiden Winkel α und δ folgt, können wir die Dreiecke DEF und ABC so über einander legen, daß

der Punkt D auf den Punkt A,
die Seite DE auf die Seite AB
und die Seite EF auf die Seite BC

fällt. Weil DF = AC ist, müssen auch

die beiden Punkte F und C zusammenfallen.

Wenn wir nun noch beweisen könnten, daß
der Punkt E auf den Punkt B
fällt, so würden wir wissen, daß die Dreiecke ABC und DEF sich decken, mit anderen Worten, daß sie congruent sind.

Die Seiten CB und FE sind gleich, wie die Messung ergeben hat. Welche Lage also auch die Seite FE annehmen möge, der Punkt E wird von C eben so weit entfernt sein, wie der Punkt B, er wird also ein Punkt des Kreises sein, welcher um C mit CB beschrieben ist.

E ist zweitens ein Punkt der Geraden DE, und weil DE und AB über einander fallen, liegt E auch in der Geraden AB.

Wir haben jetzt erfahren, daß E in dem Kreise und in der Geraden AB liegt. Soweit stimmen unsere Auseinandersetzungen mit dem Beweise überein, welchen wir für Lehrsatz I gegeben haben. Jetzt folgt aber der Unterschied. In Figur 1 wird die Seite AB von dem Kreise nur einmal im Punkte B geschnitten, der andere Schnittpunkt B′ liegt in der Verlängerung der Geraden AB. In Figur 3 dagegen schneidet der Kreis die Seite AB zweimal, in B und in B′; in Figur 3 hat der Kreis mit der Seite AB nicht blos einen, sondern zwei Punkte gemein, es ist also nicht nothwendig, daß E auf B fällt, E kann auch auf B′ fallen, wie es ersichtlich bei den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 3 und 4) zutrifft; es können also Fälle eintreten, in denen zwei Dreiecke, welche in **zwei Seiten** und dem der **kleineren Seite** gegenüberliegenden **Winkel** übereinstimmen, sich **nicht** decken, d. h. **nicht** congruent sind.

§ 86. Zusammenfassung der Congruenzsätze. Wir haben jetzt die vier Congruenzsätze aufgestellt, welche uns die Prüfung der Congruenz erleichtern. Wir werden diese Sätze fast auf jeder Seite unserer Briefe zum Beweise anderer Lehrsätze verwenden; es ist daher nöthig, daß der Schüler sich dieselben sicher und fest einpräge. Wenn wir die vier Congruenzsätze überschauen, finden wir, daß immer **die Gleichheit dreier Stücke** zur Congruenz erforderlich ist, denn zwei Dreiecke sind congruent,

1) wenn sie in **zwei Seiten** und dem **eingeschlossenen Winkel,**
2) wenn sie in **drei Seiten,**
3) wenn sie in **einer Seite** und **zwei gleichliegenden Winkeln,**
4) wenn sie in **zwei Seiten** und **dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel**

übereinstimmen. Der Schüler wird an uns die Frage stellen wollen, weshalb zwei Dreiecke nicht auch congruent sind, wenn in ihnen die drei Winkel wechselseitig gleich sind; da drei gleiche Winkel doch auch drei gleiche Dreiecksstücke darstellen.

Diese Frage läßt sich ohne Schwierigkeit beantworten. Die drei Winkel eines Dreiecks sind allerdings drei Dreiecksstücke, aber sie sind nicht unabhängig von einander; wie wir gesehen haben, können wir den dritten Winkel leicht berechnen, wenn uns zwei Winkel gegeben sind. Wir dürfen die drei Winkel eines Dreiecks darum nicht als drei, sondern nur als zwei Bestimmungsstücke ansehen; und die Uebereinstimmung in zwei Bestimmungsstücken genügt niemals zur Congruenz. /~ 21. V. 10.

D. Die gleichschenkligen Dreiecke.

§ 87. Die Basis, die Basiswinkel und die Spitze. In dem Dreiecke ABC (Fig. 5) sind die beiden Seiten AC und BC gleich groß; das Dreieck ABC ist daher nach § 68 Seite 78 gleichschenklig. Die dritte Seite AB, welche in unserem Falle kleiner ist als AC und BC, bildet gewissermaßen die Grundlage, oder das Fundament des ganzen Dreiecks,

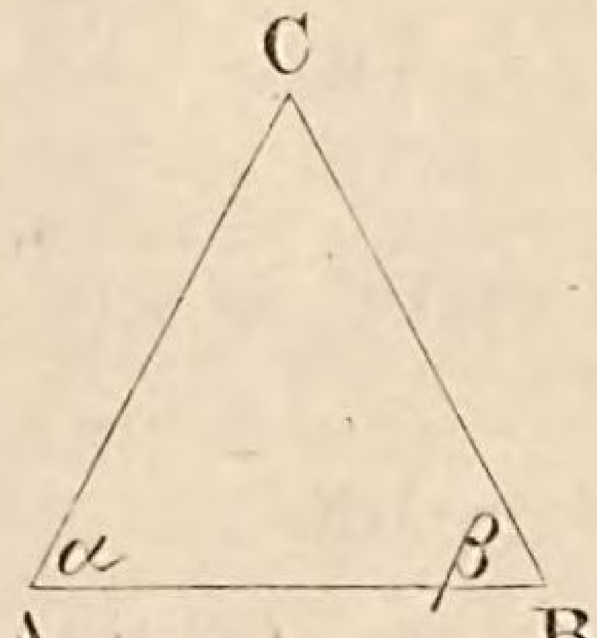


Fig. 5.

denn das Dreieck würde auf AB ruhen, wenn man es an dem Punkte C anfaßte und durch Drehung in eine verticale Lage überführte; AB wird deswegen die **Grundlinie** oder noch häufiger mit einem griechischen Worte die **Basis**[1]) des gleichschenkligen Dreiecks ABC genannt. Der Scheitelpunkt C, welcher der Basis AB gegenüberliegt, heißt die **Spitze,** und die Winkel α und β, welche der Basis AB anliegen, führen den Namen **Basiswinkel.**

Die gleichschenkligen Dreiecke zeichnet man gewöhnlich so, daß sie auf der **Seite** ruhen, **von welcher eine Gleichheit mit einer andern Seite nicht behauptet wird;** diese Seite heißt deswegen bei allen gleichschenkligen Dreiecken die **Basis** oder **Grundlinie;** der **Scheitelpunkt,** welcher **der Basis gegenüberliegt,** heißt immer **die Spitze,** und die **Winkel,** welche der **Basis anliegen,** werden immer die **Basiswinkel** genannt.

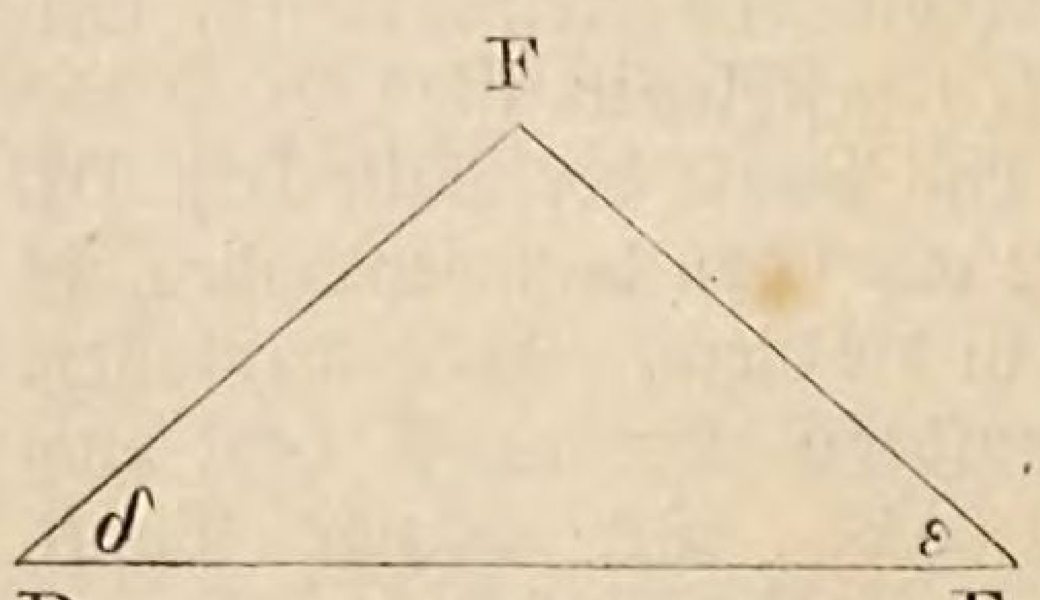


Fig. 6.

[1]) Basis heißt zu deutsch: Grundlage, Grundlinie.

Das Dreieck DEF (Fig. 6) ist gleichschenklig, weil die Seite DE = EF ist; in demselben ist die dritte größere

Seite DE die Basis,
δ und ε sind die Basiswinkel
und der Punkt F ist die Spitze.

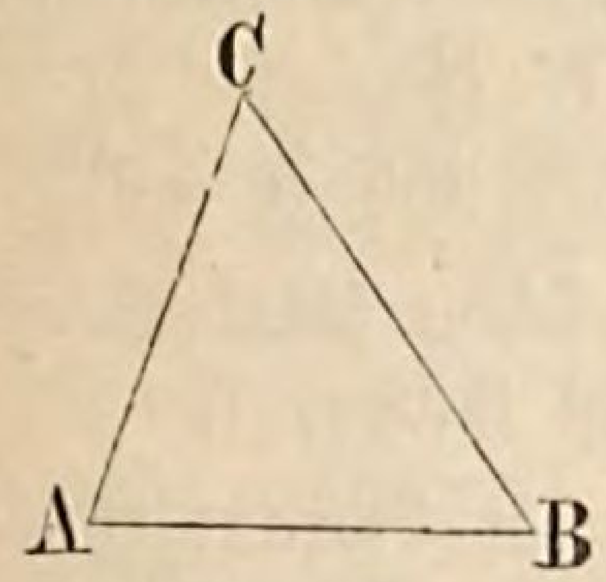


Fig. 7.

Im Dreieck ABC (Fig. 7) ist die Seite AB ebenso groß wie die Seite AC; das Dreieck ABC ist aus diesem Grunde gleichschenklig. Trotzdem es **nicht** auf der dritten ungleichen Seite BC ruht, wird BC auch in diesem Falle die Basis genannt;

die Winkel B und C sind die Basiswinkel
und der Punkt A ist die Spitze
des gleichschenkligen Dreiecks.

Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten einander gleich; ein gleichseitiges ist also zugleich gleichschenklig; jede der drei Seiten kann als Basis aufgestellt werden.[1])

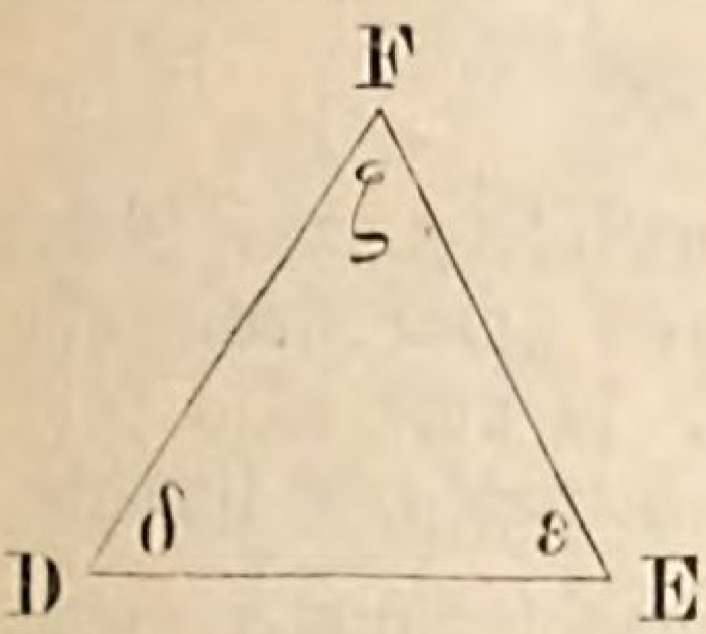


Fig. 8.

Das Dreieck DEF (Fig. 8) ist gleichseitig, weil DE = EF = FD ist. Sowohl DE als EF und FD darf man als Basis ansehen.

§ 88. Die Gleichheit der Basiswinkel.

Wie der Schüler durch Messen finden wird, sind in dem Dreieck ABC (Fig. 9) die beiden Seiten AC und BC einander gleich; das Dreieck ABC ist deswegen gleichschenklig. AB ist die Basis α und β sind die Basiswinkel; wir behaupten, daß $\alpha = \beta$ sei und kleiden diese Behauptung in den

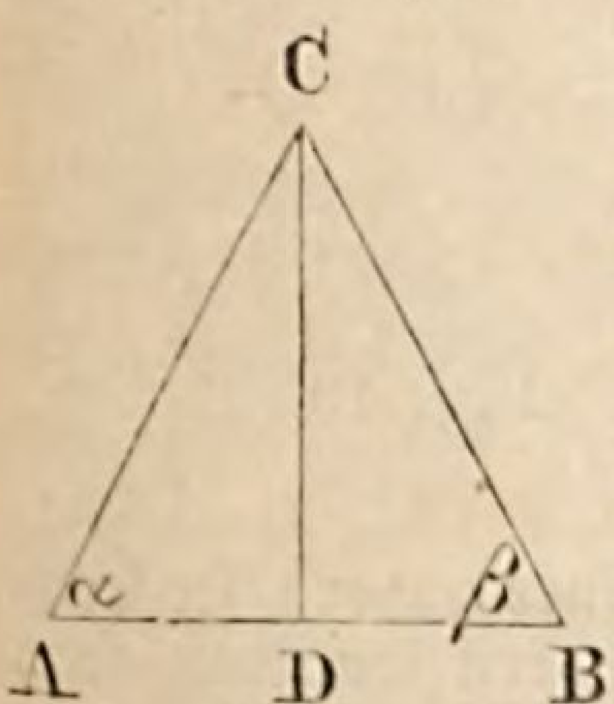


Fig. 9.

Lehrsatz II. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

Voraussetzung. In dem Dreieck ABC (Fig. 9) ist AC = BC.

Behauptung. $\alpha = \beta$.

Beweis. Um diese Behauptung zu beweisen, theilen wir die Basis AB in in zwei gleiche Theile AD und BD, so daß

AD = BD ist,

und verbinden die Spitze C mit dem Punkte D durch die Gerade CD. Dann entstehen die beiden Dreiecke

ACD und BCD.

In denselben ist:
AC = BC nach der Voraussetzung,
AD = BD nach der Construction,
CD = CD nach Grundsatz I.

Diese drei Gleichungen zeigen, daß die beiden Dreiecke ACD und BCD in ihren drei Seiten übereinstimmen; sie sind daher nach dem zweiten Congruenzsatze einander congruent. In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, es ist AD = BD.

Daher auch: $\alpha = \beta$, was behauptet war.

§ 89. Die Winkel im gleichseitigen Dreieck.

Wie wir bereits im § 87 besprochen haben, kann im gleichseitigen Dreieck jede Seite als Basis eines gleichgeschnittenen Dreiecks angesehen werden. Möge in dem gleichseitigen Dreieck DEF (Fig. 10) zunächst DE die Basis sein, dann sind δ und ε die Basiswinkel, und nach Lehrsatz II haben wir die Gleichung:

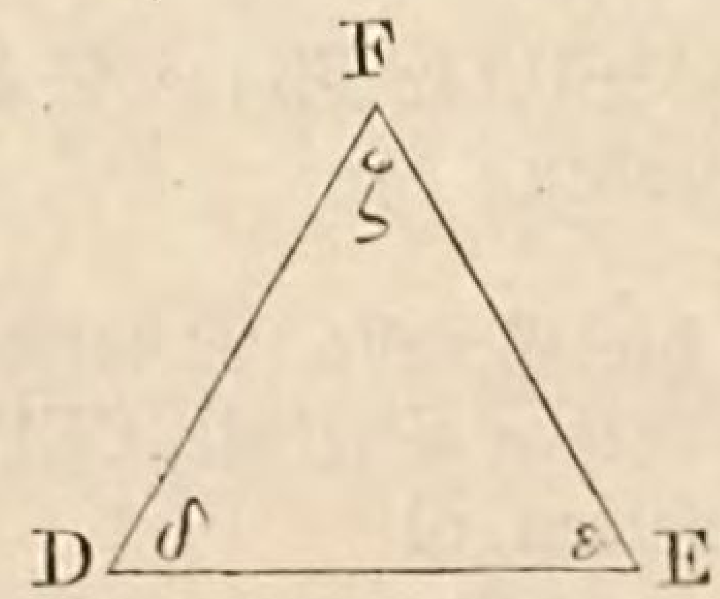


Fig. 10.

$$\delta = \varepsilon.$$

Betrachten wir EF als Basis, so sind ε und ζ die Basiswinkel; es besteht nach Lehrsatz II die Gleichung:

$$\delta = \zeta.$$

Wenn wir die beiden freistehenden Gleichungen zusammenfassen, erhalten wir

$$\delta = \varepsilon = \zeta,$$

das bedeutet:

In einem gleichseitigen Dreieck sind die Winkel einander gleich.

Die Winkel δ, ε und ζ betragen zusammen 180 Grad. Da sie einander gleich sind, müssen auf jeden gleichviel Grad, also 60 Grad kommen; es ist

$\delta = 60^0$, $\varepsilon = 60^0$, $\zeta = 60^0$, das heißt:

In einem gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel 60 Grad.

[1]) Man sieht dann davon ab, daß sie den anderen Seiten gleich sei, mit anderen Worten, man behauptet ihre Gleichheit nicht.

§ 90. Zwei Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks. Wie die Messung leicht ergiebt, sind in dem Dreiecke CDE (Fig. 11) die beiden Seiten CE und und DE einander gleich; das Dreieck CDE ist darum gleichschenklig. Die Basis CD ist in die beiden gleichen Theile CP und DP zerlegt, und der Mittelpunkt P der Basis ist mit der Spitze E durch die Gerade PE verbunden. An der Spitze E des gleichschenkligen Dreiecks liegt der Winkel CED; derselbe wird durch die Gerade PE in die beiden Winkel ε und ζ getheilt. Wir behaupten nun, daß

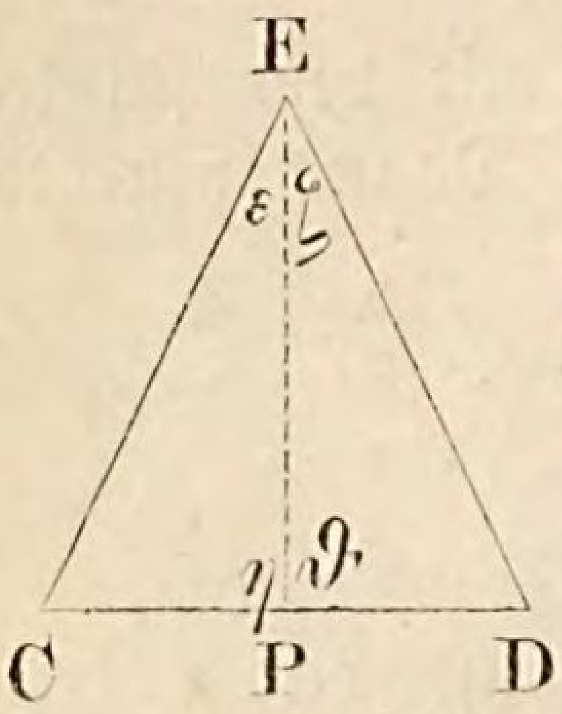


Fig. 11.

$$\varepsilon = \zeta$$

sei, mit anderen Worten, daß der Winkel an der Spitze durch die Gerade PE halbirt werde. Verallgemeinern wir diese Behauptung, so haben wir den

Lehrsatz III. Die Gerade, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, halbirt den Winkel an der Spitze.

Voraussetzung. In dem Dreiecke CDE ist

$$CE = DE,\ CP = DP,$$

und der Punkt P ist mit der Spitze E durch die Gerade PE verbunden.

Behauptung. $\varepsilon = \zeta$.

Beweis. Durch die Gerade PE wird das Dreieck CDE in die beiden Dreiecke CEP und DEP zerlegt, in denselben ist

CE = DE nach der Voraussetzung,
ebenso CP = DP nach der Voraussetzung
und PE = PE nach Grundsatz I.

Zwei Dreiecke, welche in allen drei Seiten übereinstimmen, sind nach dem zweiten Congruenzsatze congruent, darum ist

$$\triangle\ CEP \cong \triangle\ DEP.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, wie wir vorausgesetzt haben, ist CP = DP, darum muß auch

$\varepsilon = \zeta$ sein, was behauptet war.

In diesem Paragraphen wollen wir noch eine andere Eigenschaft der gleichschenkligen Dreiecke besprechen. Wir behaupten nämlich, daß in dem Dreieck CDE (Fig. 11) die beiden Winkel η und ϑ Rechte seien und demgemäß EP senkrecht stehe auf CD.

Lehrsatz IV. Die gerade Linie, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, steht auf der Basis senkrecht[1]**.**

Voraussetzung. Im Dreieck CDE ist

$$CE = DE,\ CP = DP$$

und die Gerade EP verbindet den Mittelpunkt P der Basis mit der Spitze E.

Behauptung. $\eta = R$[2]) und $\vartheta = R$.

Beweis.[3]) Wie wir schon beim Beweise des vorigen Briefes gezeigt haben, ist

CE = DE nach der Voraussetzung,
ebenso CP = DP nach der Voraussetzung
und EP = EP nach Grundsatz I.

Nach dem zweiten Congruenzsatz ist daher

$$\triangle\ CEP \cong \triangle\ DEP.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; nach der Voraussetzung ist CE = DE, darum ist auch:

$$\eta = \vartheta.$$

η und ϑ sind Nebenwinkel; zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte, sind sie beide einander gleich, so muß also jeder von ihnen einen Rechten betragen, es ist daher:

$\eta = R$ und $\vartheta = R$, was behauptet war.

Aufgaben. Der Schüler gebe in den beiden Dreiecken STU[4]) und BCD (Fig. 12).

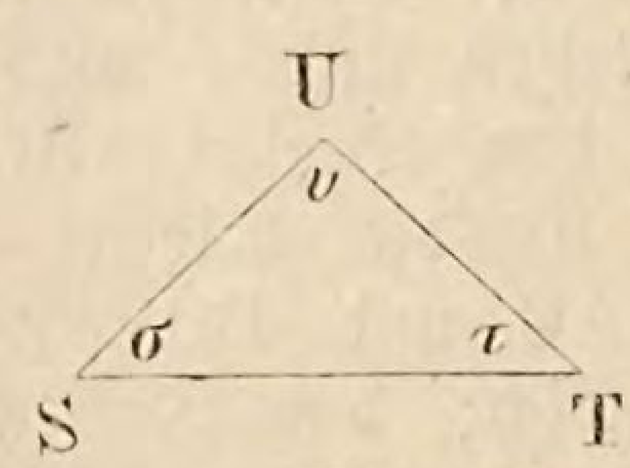


Fig. 12.

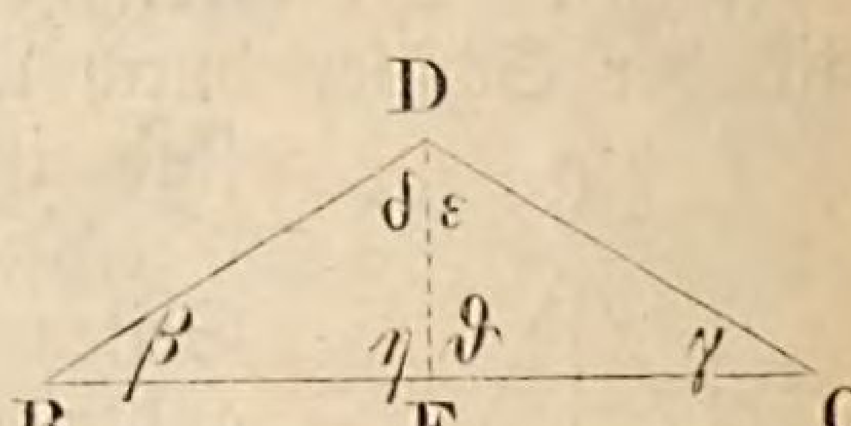


Fig. 13.

---

[1]) Eine Gerade steht auf einer andern senkrecht, bedeutet: sie bildet mit der andern Geraden rechte Winkel, siehe Seite 22 Definition III. [2]) R ist eine Abkürzung für „rechter“ Winkel. [3]) Die Beweise der drei letzten Lehrsätze sind alle sehr ähnlich; es wird immer der zweite Congruenzsatz zum Beweise herangezogen; wir haben trotzdem jeden einzelnen Fall ausführlich behandelt, um dem Schüler wiederholt zu zeigen, in welcher Weise die Congruenz der Dreiecke verwerthet werden kann. [4]) Im Dreieck STU bemerkt der Schüler zwei griechische Buchstaben υ und σ, welche ihm noch unbekannt sind.

υ wird gesprochen wie ü und genannt Ypsilon,
σ wird gesprochen wie s und genannt Sigma.

Wie spricht man demgemäß $\upsilon = \sigma$, $\upsilon > \sigma$, $\sigma > \upsilon$, $\upsilon < \sigma$?

und 13) 1) die Basis, 2) die Basiswinkel, 3) die Spitze an.

Er benutze ferner das Dreieck BCD um Lehrsatz II und IV noch einmal zu beweisen.

§ 91. Die Zergliederung einer Constructionsaufgabe. Wir haben uns schon öfter die Aufgabe gestellt, geometrische Gebilde zu construiren; wir haben uns z. B. mit der Aufgabe beschäftigt, zwei gerade Linien zu zeichnen, welche einander parallel laufen, aber diese Aufgaben sind von uns nicht so behandelt worden, wie es die strenge mathematische Methode erfordert. Der Schüler wird bald bemerken, daß es nicht leicht ist, die Lösung einer Aufgabe den Ansprüchen der Methode gemäß zu beschreiben. Wir wollen indessen nicht lange bei allgemeinen Betrachtungen verweilen, sondern sogleich zu einem bestimmten Beispiel übergehen.

Es sei uns die **Aufgabe** gestellt, **ein Dreieck zu construiren, wenn die drei Seiten gegeben sind.**

Bei dieser Aufgabe wird **vorausgesetzt,**
daß uns drei Seiten gegeben sind,
es wird **gefordert,**
daß aus diesen drei Seiten ein Dreieck construirt werde.

Die Zergliederung der Aufgabe ergiebt also, daß wir **zwei** Theile zu unterscheiden haben, in dem einen Theile wird eine **Voraussetzung** gemacht, in dem andern wird eine **Forderung** an uns gestellt. Diese beiden Theile werden gewöhnlich unter der Bezeichnung **Voraussetzung** und **Forderung** wiederholt, aber man gebraucht dabei nicht die allgemeinen Ausdrücke der Aufgabe, sondern man benennt die gegebenen Stücke mit Buchstaben, bedient sich der mathematischen Zeichen, mit anderen Worten, man kleidet, was in der Aufgabe gesagt ist, in die Sprache der Mathematik.

In unserm Falle muß die Voraussetzung und die Forderung folgende Form annehmen.

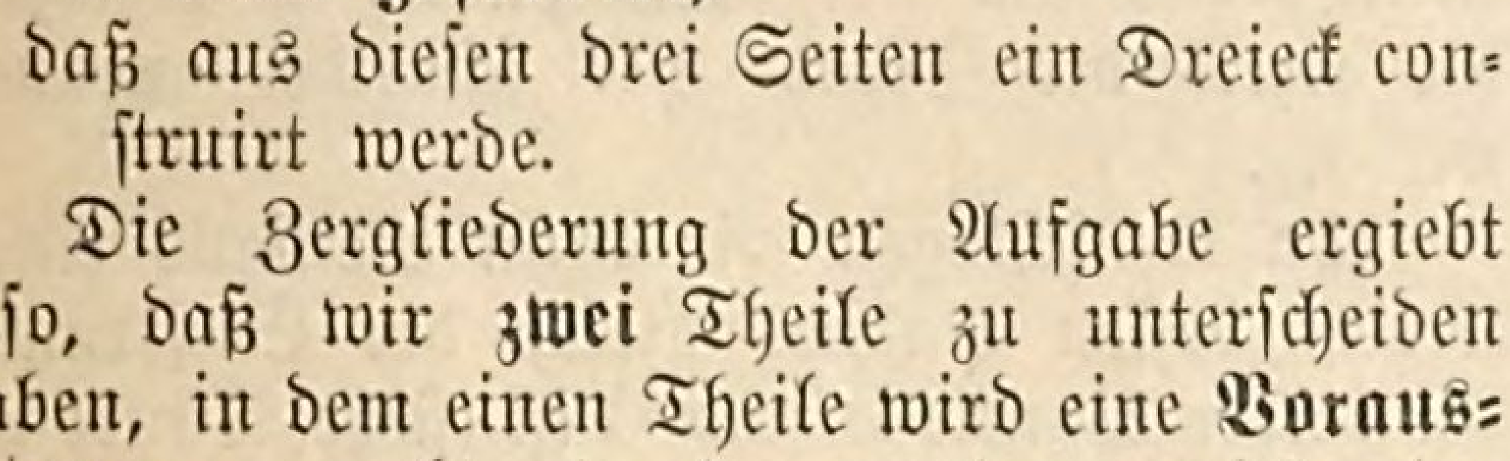


Fig. 14.

Voraussetzung. Gegeben sind uns die drei Strecken a, b und c. (Fig. 14.)

Forderung. Es soll ein Dreieck construirt werden, dessen Seiten die drei Strecken a, b und c sind.

Dieser Forderung müssen wir nun nachkommen, die Construction des verlangten Dreiecks muß ausgeführt werden; deswegen wird der nächste Abschnitt die **Construction** sein. Wir wollen für unsere Aufgabe die Construction sogleich bringen.

Construction. Wir ziehen uns eine gerade Linie AB (Fig. 14), welche ebenso groß ist wie die Strecke c, nehmen die Strecke b in den Zirkel und schlagen damit um den Punkt A einen Kreis, ebenso beschreiben wir mit der Strecke a als Radius um den Punkt B einen Kreis. Die beiden Kreise mögen sich in dem Punkte C schneiden. Wir verbinden nun A und B mit C durch gerade Linien und stellen die

Behauptung auf, daß die Seiten des Dreiecks ABC gleich den gegebenen Strecken a, b und c seien.

Hiermit haben wir zugleich den Abschnitt gefunden, welcher regelmäßig der Construction folgt. Wenn wir die verlangte Figur construirt haben, werden wir *behaupten*, daß sie der Forderung entspreche; diese Behauptung gehört nicht in die Construction, sie bildet einen besonderen Abschnitt für sich.

Diese Behauptung muß nun auch bewiesen werden; es wird ihr also noch der *Beweis* folgen. Der

Beweis ist in unserem Falle sehr einfach. In dem Dreieck ABC ist:

$$AB = c,$$

weil wir AB ebenso groß gezeichnet haben wie c. Es ist ferner

$$AC = b \text{ und } BC = a$$

weil AC der Radius eines mit b und BC der Radius eines mit a beschriebenen Kreises ist. Die Seiten des Dreiecks ABC sind also den gegebenen Strecken a, b, c gleich, was behauptet war.

Bemerkungen. An die soeben behandelte Aufgabe wollen wir noch einige Bemerkungen anknüpfen.

a) Wie aus den obigen Auseinandersetzungen hervorgeht, haben wir im Ganzen sechs Theile zu unterscheiden, wenn wir eine Aufgabe lösen, nämlich

---

[1]) In Figur 14 ist der Kreis um A nur durch den Bogen ST und der Kreis um B nur durch den Bogen MN angedeutet.

1) Die Aufgabe, 2) die Voraussetzung, 3) die Forderung, 4) die Construction, 5) die Behauptung, 6) den Beweis.

b) Wir haben in Figur 14 um A und B einen Kreis beschrieben. Die beiden Kreise schneiden sich nicht blos in dem Punkte C, sondern auch in dem Punkte D (siehe Fig. 15).

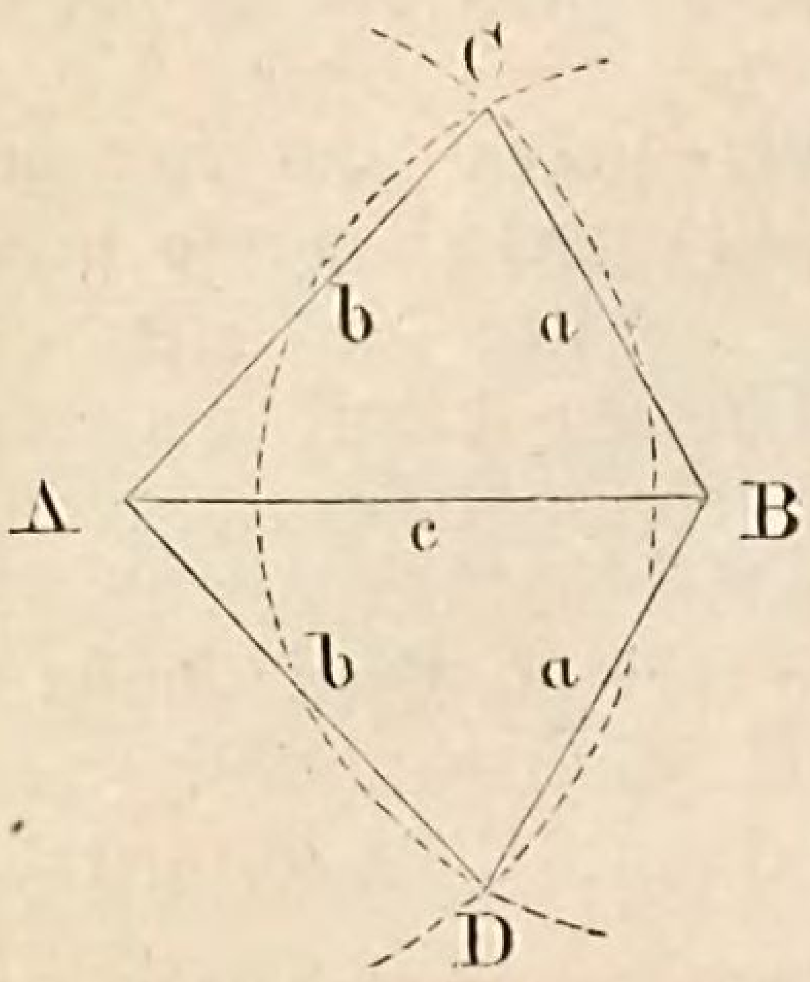


Fig. 15.

Wenn wir auch D mit A und B durch gerade Linien verbinden, erhalten wir ein zweites Dreieck ABD, welches auch der Forderung entspricht. Es ist

$\triangle ABD \cong \triangle ABC$,

weshalb?

c) Es ist nicht immer möglich, aus drei Seiten ein Dreieck zu construiren. Wie wir auf Seite 77 gesehen haben, muß die Summe zweier Dreiecksseiten immer größer sein, als die dritte. Wenn also drei Strecken eine solche Länge haben, daß zwei zusammen gleich der dritten sind, oder daß zwei zusammen kleiner sind als die dritte, so lassen sie sich nicht zu einem Dreieck zusammensetzen.

d) Wenn wir ein gleichschenkliges Dreieck construiren sollen, müssen uns zwei Seiten gegeben sein. Soll ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, so müssen wir eine Seite kennen.

§ 92. Eine zweite Constructionsaufgabe. Wir haben schon im zweiten Briefe vermittelst des Transporteurs die Aufgabe gelöst, einen Winkel von gegebener Größe an eine gerade Linie in einem bestimmten Punkte anzutragen. Diese Lösung hatte manche Mängel. Es ist uns ein richtig eingetheilter Transporteur nicht immer zur Hand; wir müssen uns zweitens in der Planimetrie mit den einfachsten Mitteln behelfen und bestrebt sein, kein anderes Instrument zu benutzen, als Zirkel und Lineal. Nachdem wir jetzt unsere Kenntnisse bereichert haben, können wir eine zweite Lösung geben, welche unsere Ansprüche mehr befriedigt.

Aufgabe. Es soll an eine gerade Linie in einem bestimmten Punkte ein Winkel von gegebener Größe angetragen werden.

Voraussetzung. Es ist uns ein Winkel α, eine Gerade MN und in derselben ein Punkt P gegeben. (Fig. 16.)

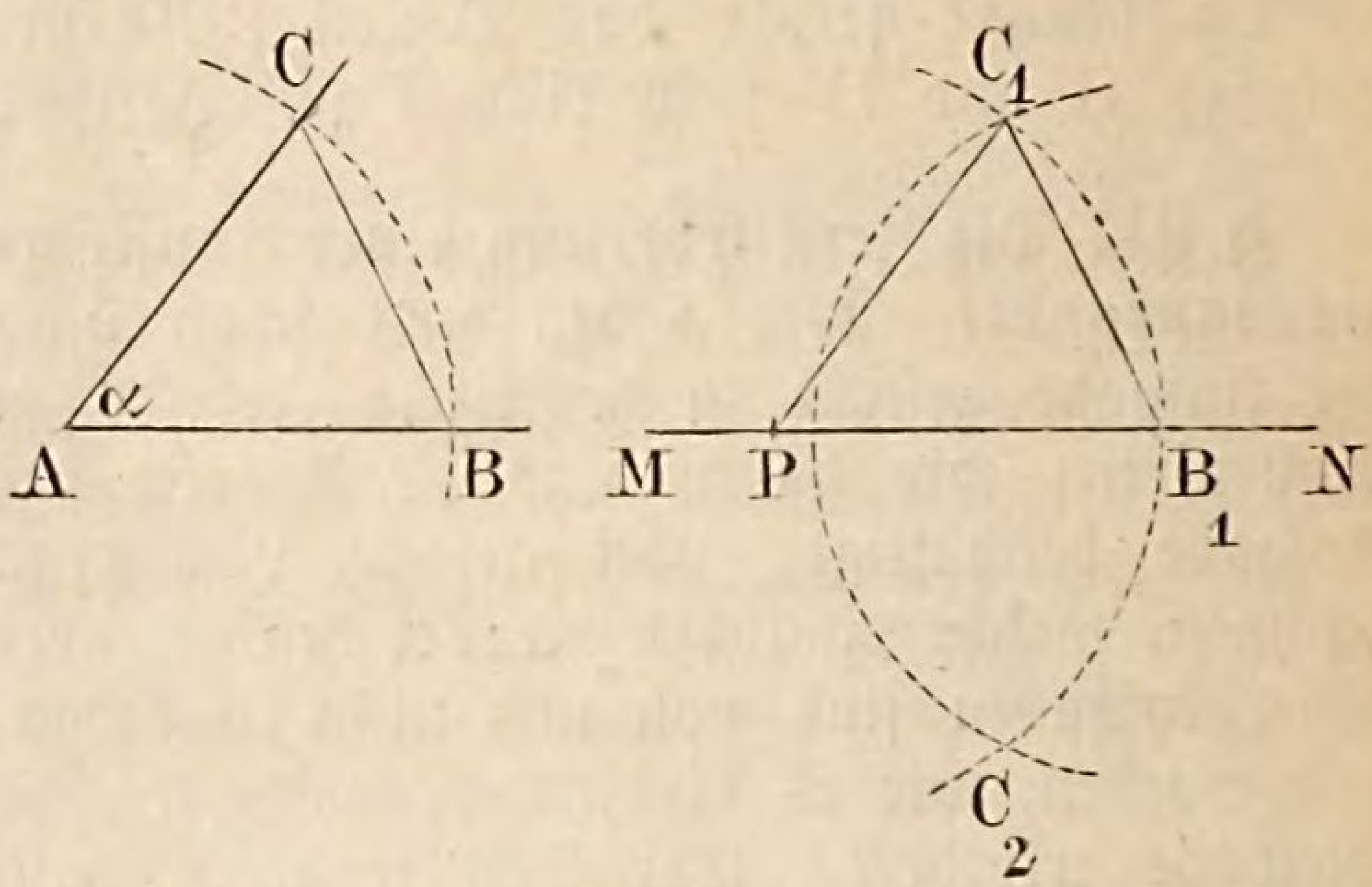


Fig. 16.

Forderung. An MN im Punkte P soll ein Winkel angetragen werden, welcher dem Winkel α gleich ist.

Construction. Wir schlagen um den Scheitelpunkt A des Winkels α einen Kreis von beliebigem Radius. Dieser Kreis möge die Schenkel des Winkels α in den Punkten B und C schneiden. Die Strecke AB nehmen wir nun in den Zirkel und beschreiben damit einen Kreis um P. Den Punkt, in welchem der Kreis die Gerade PN schneidet, nennen wir B_1.

Um B_1 schlagen wir dann ebenfalls einen Kreis, dessen Radius gleich der Entfernung der beiden Punkte B und C ist (siehe Winkel α). Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten, deren einen wir mit C_1 bezeichnen wollen. C_1 verbinden wir mit P durch eine gerade Linie.

Behauptung. Es ist $\angle C_1PB_1 = \angle \alpha$.

Beweis. Zum Beweise ziehen wir die beiden Geraden BC und B_1C_1; dann entstehen die beiden Dreiecke BAC und B_1PC_1. In denselben ist

$$AB = PB_1$$
$$\text{ferner } AC = PC_1$$

denn die beiden Kreise um A und P haben gleiche Radien. Es ist drittens

$$BC = B_1C_1,$$

weil der Kreis um B_1 einen Radius hat, welcher der Construction gemäß gleich BC ist.

Die beiden Dreiecke ABC und B_1PC_1 stimmen also in allen drei Seiten überein, sie sind daher congruent, in Zeichen, es ist:

$$\triangle ABC \cong \triangle PB_1C_1.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen

Seiten gleiche Winkel gegenüber, wie wir gezeigt haben, ist:

$$BC = B_1C_1, \text{ folglich ist auch}$$
$$\angle B_1PC_1 = \angle \alpha, \text{ was behauptet war.}$$

Bemerkung. 1) Die beiden Kreise, welche um die Punkte P und B_2 beschrieben sind, schneiden sich außer in dem Punkte C_1 auch noch in dem Punkte C_2. Wenn wir C_2 mit P verbinden würden, erhielten wir den Winkel B_1PC_2, welcher auch gleich α ist.

2) Wenn man die eben beschriebene Construction ausführt, pflegt man zu sagen: **man habe an MN im Punkte P den Winkel $C_1PN = \alpha$ angetragen.**

3) Die Aufgabe, **einen Winkel zu zeichnen, welcher einem gegebenen gleich ist,** kann leicht auf den vorigen Fall zurückgeführt werden. Man braucht nur eine beliebige Gerade hinzuzeichnen und an derselben in einem beliebigen Punkte in der eben beschriebenen Weise einen Winkel anzutragen, welcher dem gegebenen gleich ist, dann haben wir die Aufgabe gelöst.

Verderben würde, sterben Fleiß und Kunst,
Wär' ohne Zweck ihr Streben.

Lection 12.

A. Fortsetzung der Constructionsaufgaben.

§ 93. Aufgabe. Es soll ein Dreieck construirt werden, von welchem ein Winkel gegeben ist und die beiden Seiten, welche diesen Winkel einschließen.

Voraussetzung. Gegeben ist der Winkel α und die beiden Strecken a und b (Fig. 1).

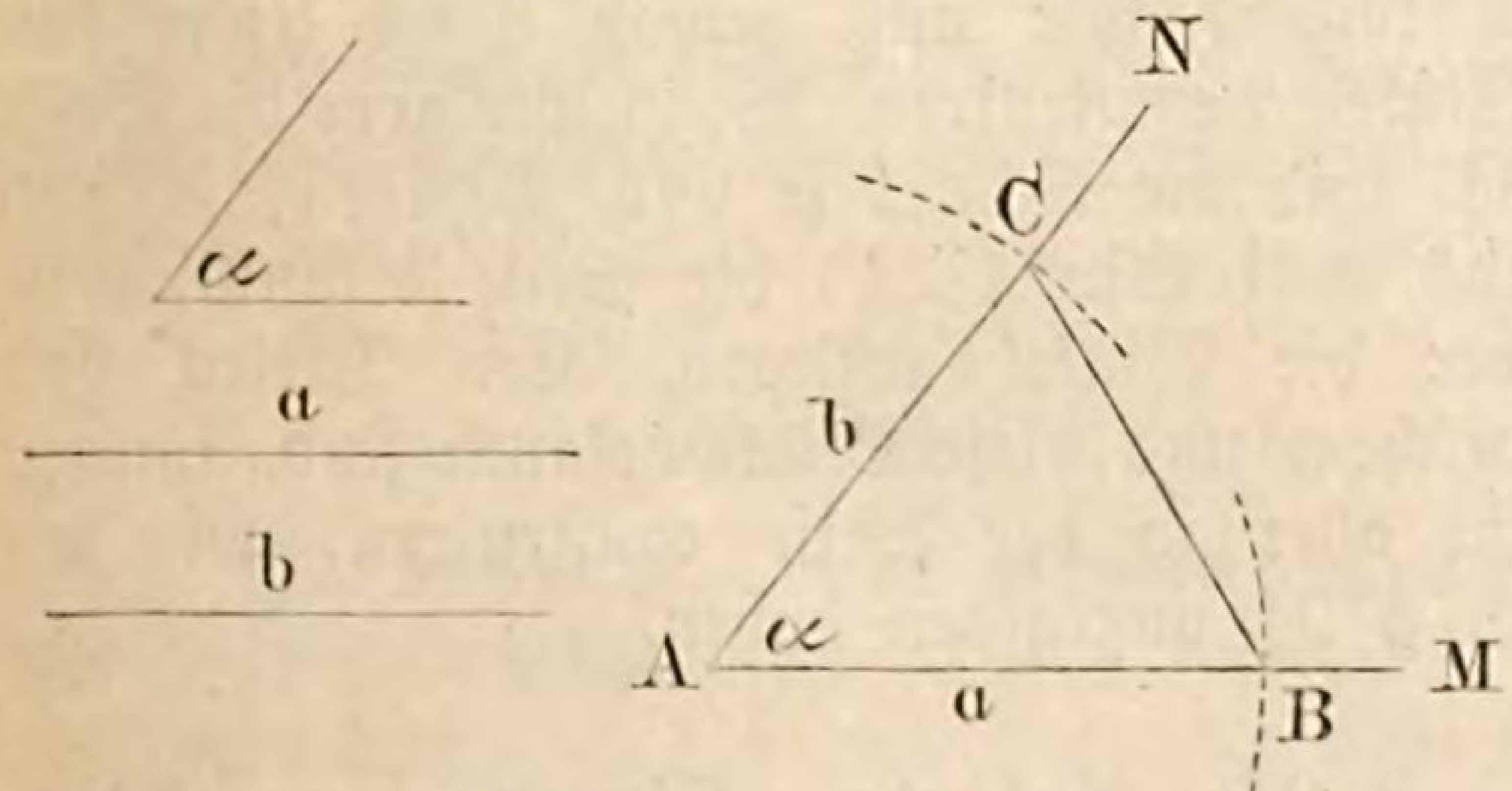


Fig. 1.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck zeichnen, in welchem zwei Seiten gleich a und b sind und den Winkel α einschließen.

Construction. Wir zeichnen uns den Winkel α noch einmal hin und schlagen dann um den Scheitelpunkt A des Winkels α erst einen Kreis mit der Strecke a als Radius[1]), derselbe möge den Schenkel AM im Punkte B schneiden. Um denselben Punkt A beschreiben wir darauf mit b als Radius noch einen zweiten Kreis, von welchem der Schenkel AN im Punkte C geschnitten wird. Die beiden Punkte B und C verbinden wir durch eine gerade Linie.

Behauptung. Das Dreieck ABC entspricht der Forderung.

Beweis. Das Dreieck enthält den Winkel α; α wird von den beiden Seiten AB und AC eingeschlossen, und zwar ist AB = a und AC = b nach der Construction[1]). Das Dreieck entspricht also der Forderung, wie behauptet war.

§ 94. Aufgabe. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Voraussetzung. Gegeben ist die Strecke c und die beiden Winkel α und β (Fig. 2).

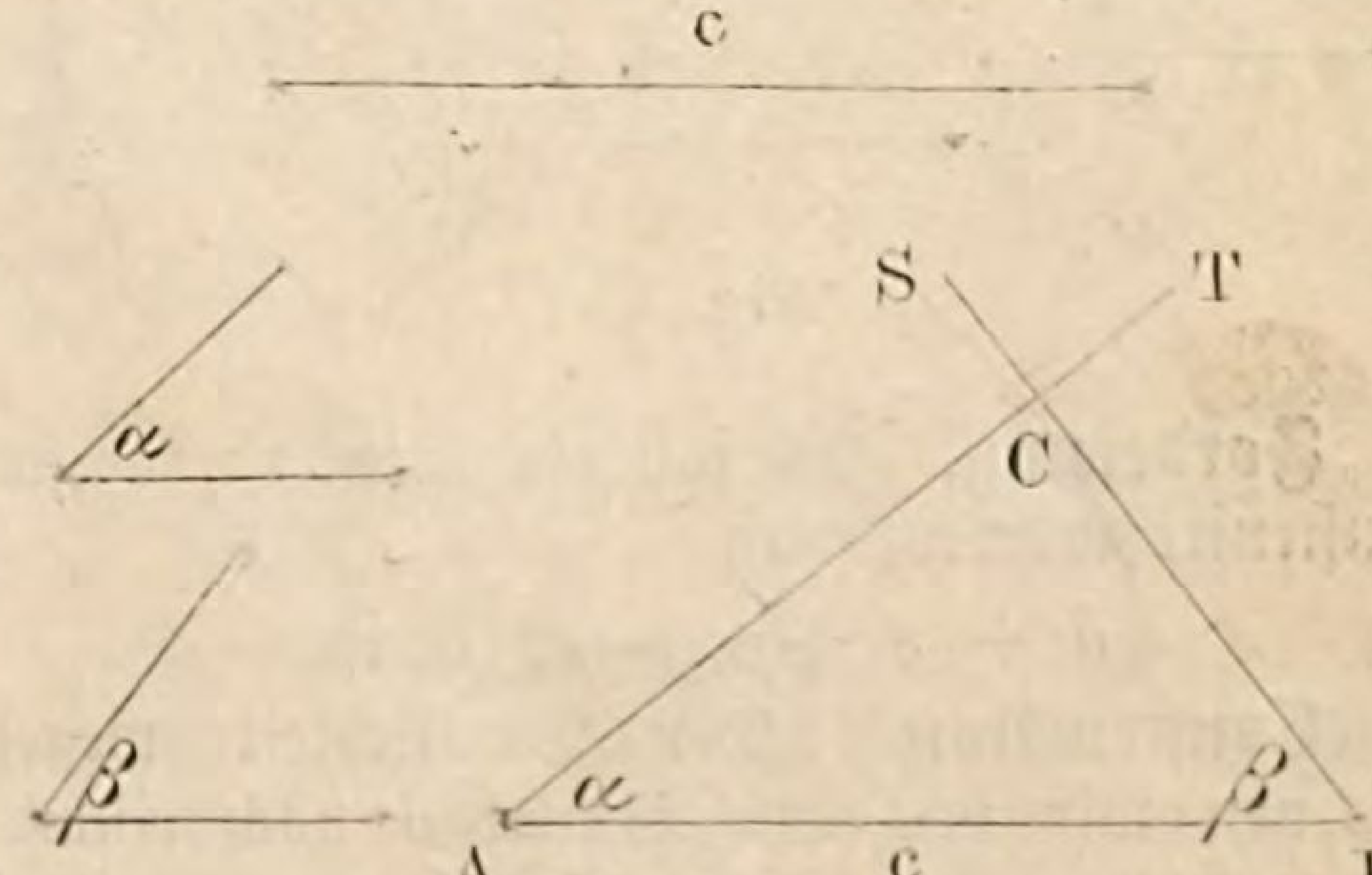


Fig. 2.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck construiren; in demselben soll die eine Seite

---

[1]) Wie früher deuten wir die Kreise nur durch punktirte Kreisbogen an.

[1]) AB ist ja der Radius eines Kreises, der mit a, AC ist der Radius eines Kreises, der mit b als Radius beschrieben ist.

gleich der Strecke c sein, und die Winkel, welche dieser Seite anliegen, sollen ebenso groß sein wie die gegebenen Winkel α und β.

Construction. Wir zeichnen uns eine Gerade AB = c und tragen[1]) an AB im Punkte A den Winkel α und im Punkte B den Winkel β an; der eine Schenkel der beiden Winkel ist dann AB, die beiden anderen AT und BS mögen sich in dem Punkte C schneiden.

Behauptung. Es ist AB = c, ferner

$$\angle CAB = \angle \alpha \text{ und } \angle CBA = \angle \beta.$$

Beweis. Die Seite AB haben wir ebenso groß gezeichnet wie c; nach der Construction ist ferner auch

$$\angle CAB = \angle \alpha \text{ und } \angle CBA = \angle \beta,$$

die Behauptung ist also richtig.

Bemerkung. Da die Summe aller drei Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, müssen die beiden gegebenen Winkel α und β zusammen weniger betragen als zwei Rechte, sonst ist die Construction eines Dreiecks unmöglich. ~25.V.10.

§ 95. Aufgabe. Es soll ein Winkel gefunden werden, welcher mit zwei anderen zusammen gleich zwei Rechten ist.

Voraussetzung. Es sind uns die beiden Winkel δ und ε gegeben (siehe Figur 3).

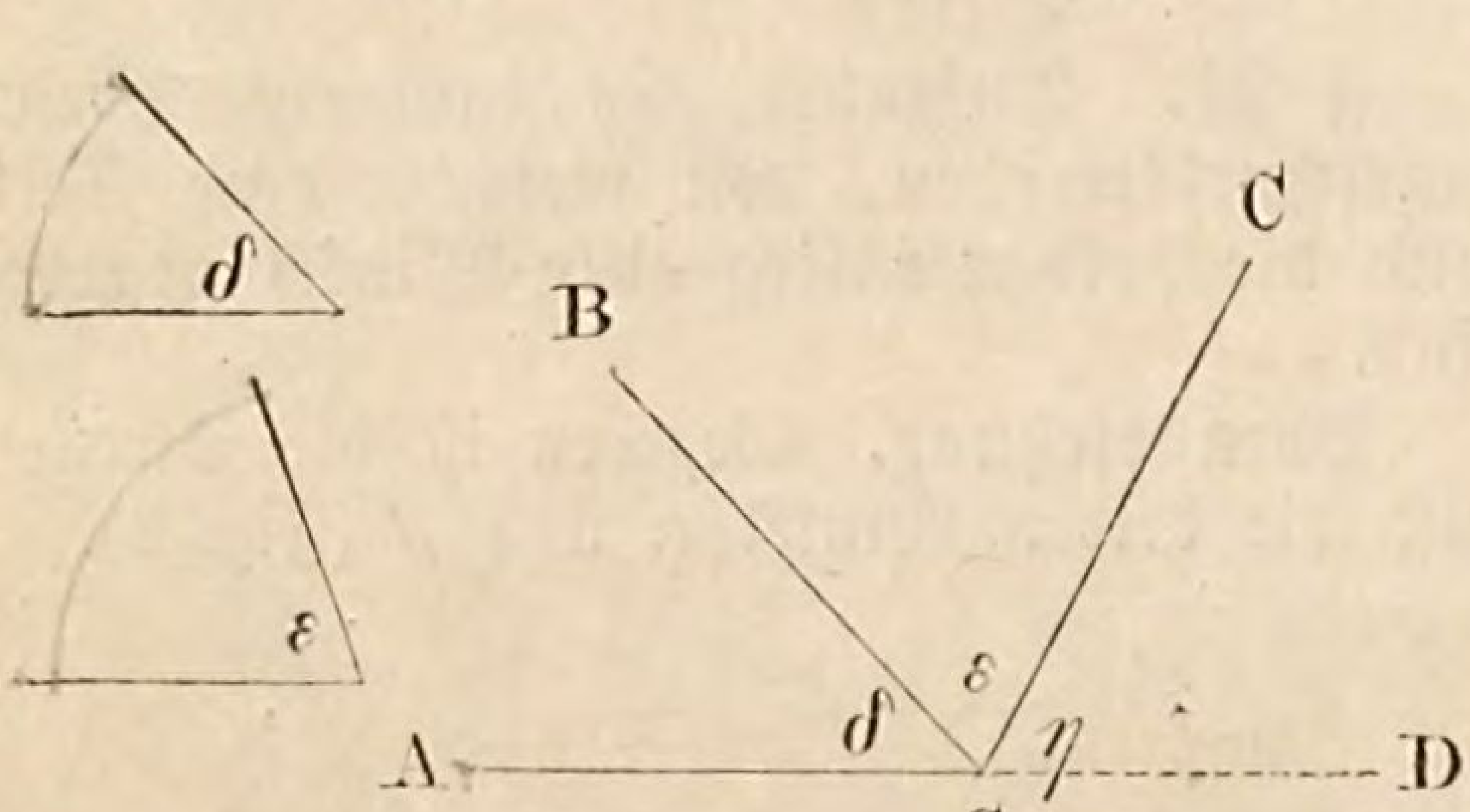


Fig. 3.

Forderung. Es soll ein Winkel η derart construirt werden, daß

$$\delta + \varepsilon + \eta = 2 \text{ R ist.}$$

Construction. Der Deutlichkeit wegen zeichnen wir uns den Winkel δ noch einmal hin und benennen seinen Scheitelpunkt mit S und seine Schenkel mit SA und SB. Darnach tragen wir gemäß § 92 an SB im Punkte S den Winkel BSC = ε an. Wenn wir nun die Gerade AS über S hinaus bis D verlängern, erhalten wir einen neuen Winkel CSD oder η.

Behauptung. η ist der verlangte Winkel, d. h. es ist:

$$\delta + \varepsilon + \eta = 2 \text{ R}.$$

Beweis. Die drei Winkel δ, ε und η machen zusammen einen Gestreckten aus, es ist darum:

$$\delta + \varepsilon + \eta = 2 \text{ R, was behauptet war.}$$

Die Lösung der vorigen Aufgabe setzt uns in den Stand, an eine neue wichtige Aufgabe heranzutreten. Wir wollen annehmen, es werde von uns gefordert, wir sollten das Dreieck ABC (Figur 4) construiren, wenn uns die eine Seite AB, der anliegende Winkel α und der gegenüberliegende Winkel γ gegeben ist. Wir werden uns dann erinnern, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten sei, daß also der Winkel β mit den beiden gegebenen Winkeln α und γ zusammen zwei Rechte beträgt. Sind uns also die beiden Winkel α und γ gegeben, so können wir uns gemäß § 94 leicht den Winkel β construiren. Wenn wir aber die Seite AB und die Winkel α und β haben, so sind uns zwei Winkel und die Seite bekannt, welcher die Winkel anliegen. Ein Dreieck von welchem uns diese Stücke bekannt sind, können wir aber in der Weise construiren, wie wir im § 94 angegeben haben.

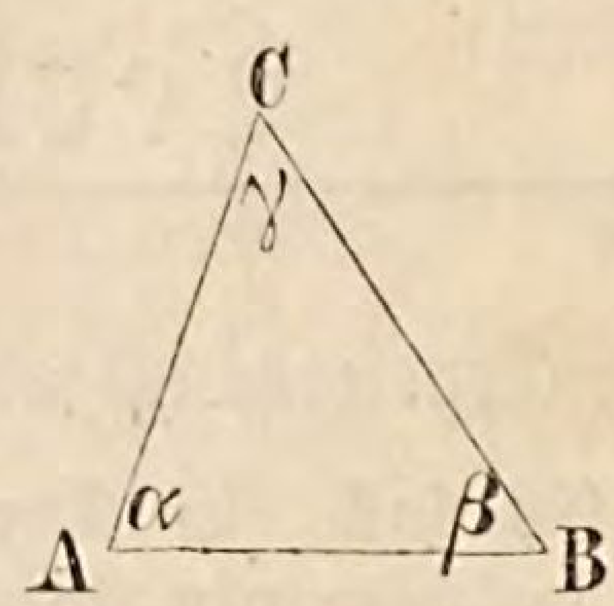


Fig. 4.

§ 96. Aufgabe. Ein gegebener Winkel soll halbirt werden.

Voraussetzung. Es ist ein Winkel MPN gegeben (siehe Fig. 5).

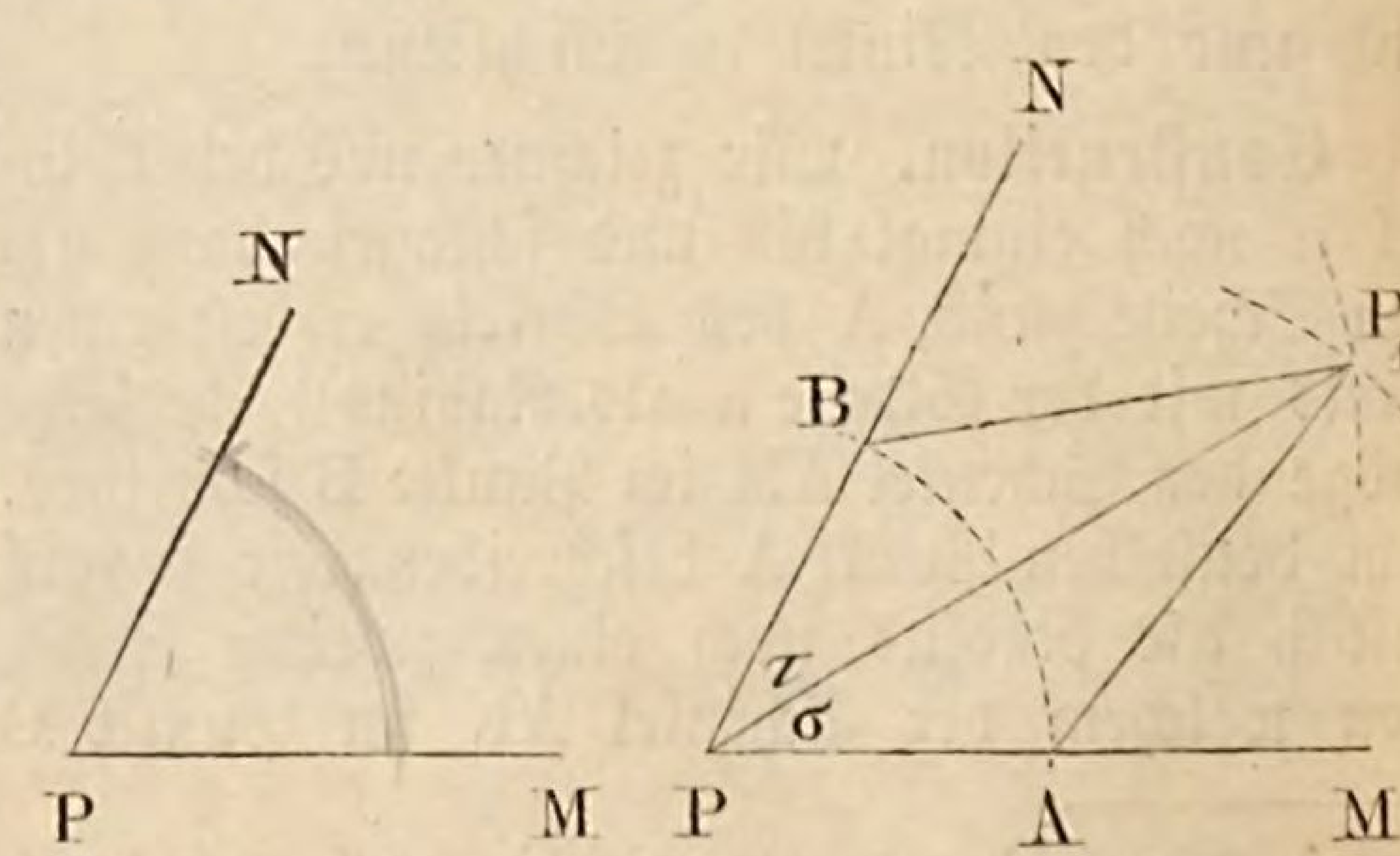


Fig. 5.

[1]) Wir verfahren dabei, wie wir in § 92 beschrieben haben.

Forderung. Der Winkel MPN soll in die beiden Winkel σ und τ zerlegt werden, so daß $\sigma = \tau$ ist.

Construction. Wir zeichnen uns den Winkel MPN noch einmal hin und schlagen um den Scheitelpunkt P mit einem beliebig gewählten Radius einen Kreis, welcher die beiden Schenkel PM und PN in den Punkten A und B durchschneiden möge. Darauf beschreiben wir auch um die Punkte A und B mit gleichen, aber beliebig gewählten Radien Kreise, deren einen Schnittpunkt wir mit P_1 bezeichnen wollen. Die beiden Punkte P und P_1 verbinden wir durch eine gerade Linie und benennen den Winkel APP_1 mit σ, den Winkel BPP_1 mit τ.

Behauptung. Durch die Gerade PP_1 ist der Winkel MPN in die beiden Hälften σ und τ getheilt, es ist $\sigma = \tau$.

Beweis. Wenn wir die geraden Linien AP_1 und BP_1 ziehen, entstehen die beiden Dreiecke PAP_1 und PBP_1, in denselben ist:

$PP_1 = PP_1$ nach Grundsatz I.
PA = PB[1]) nach der Construction.
$P_1A = P_1B$[2]) nach der Construction.

Die beiden Dreiecke PAP_1 und PBP_1 sind mithin congruent, denn sie stimmen in allen drei Seiten überein, in Zeichen:

$$\triangle\ PAP_1 \cong \triangle\ PBP_1$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; wie wir gesehen haben, ist

$P_1A = P_1B$, darum auch
$\sigma = \tau$, was behauptet war.

§ 97. Aufgabe. Eine gegebene Strecke soll halbirt werden.

Voraussetzung. Es ist uns eine Strecke AB gegeben. (Figur 6.)

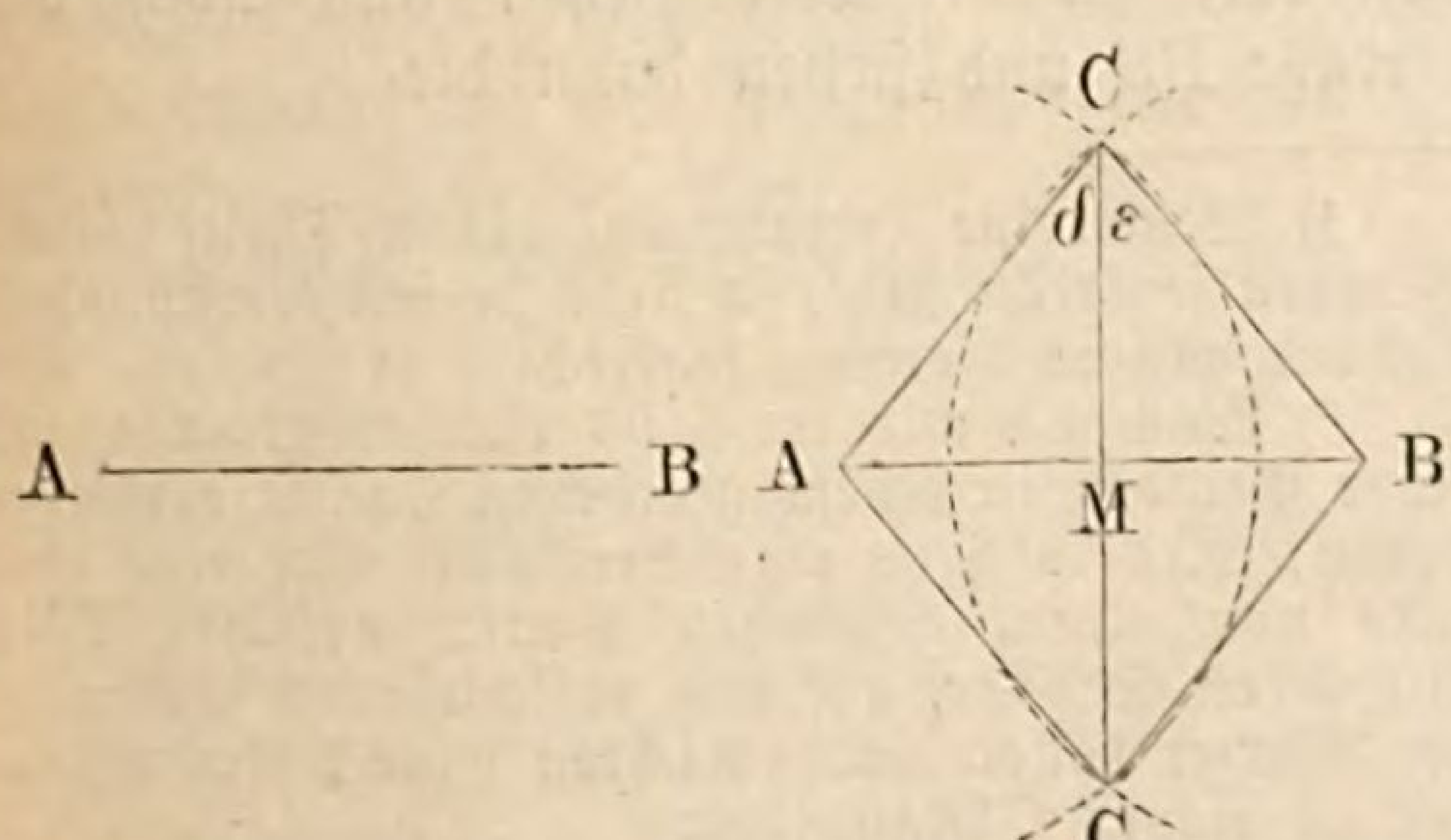


Fig .6.

1) Denn PA und PB sind Radien desselben Kreises. 2) Denn P_1A und P_1B sind Radien zweier Kreise, welche mit gleichen Radien beschrieben sind.

Forderung. Es soll auf der Strecke AB ein Punkt M gefunden werden, so daß AM = BM ist.

Construction. Wir legen uns der Deutlichkeit halber die Strecke AB noch einmal hin und schlagen um die Punkte A und B Kreise mit gleichen, beliebig gewählten Radien. Die beiden Kreise mögen sich in den Punkten C und C_1 schneiden. Wir ziehen nun die Gerade CC_1, welche die gegebene Strecke AB im Punkte M durchschneidet.

Behauptung. M ist der Mittelpunkt der Strecke AB, es ist AM = BM.

Beweis. Wir verbinden die Punkte C und C_1 mit A und B durch gerade Linien, dann erhalten wir die beiden Dreiecke CAC_1 und CBC_1.

Die Seiten AC und BC sind Radien zweier Kreise, welche mit gleichen Radien beschrieben sind; ebenso verhält es sich mit AC_1 und BC_1. Es ist darum

AC = BC
$AC_1 = BC_1$
ferner ist $CC_1 = CC_1$ nach Grundsatz I

d. h. die beiden Dreiecke CAC_1 und CBC_1 stimmen in ihren drei Seiten überein, sie sind congruent, in Zeichen:

$$\triangle\ CAC_1 \cong \triangle\ CBC_1.$$

Wie wir wissen, ist: $C_1A = C_1B$, darum sind auch die gegenüberliegenden Winkel einander gleich, es ist

$$\delta = \varepsilon.$$

Die Gleichung zwischen den beiden Winkeln δ und ε setzt uns in den Stand, auch die Congruenz der beiden Dreiecke CAM und CBM zu beweisen. Wie wir bereits festgestellt haben, ist

$\delta = \varepsilon$
AC = BC
ferner ist CM = CM nach Grundsatz I.

Die beiden Dreiecke stimmen daher in zwei Seiten und in dem eingeschlossenen Winkel überein, sie sind nach dem ersten Congruenzsatze congruent, in Zeichen:

$$\triangle\ CAM \cong \triangle\ CBM.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber; es ist:

$$\delta = \varepsilon$$

darum auch AM = BM, was behauptet war.

§ 98. Aufgabe. In einem bestimmten Punkte einer geraden Linie soll eine Senkrechte[1]) errichtet werden.

Voraussetzung. Gegeben ist uns die Gerade MN und in derselben ein Punkt P, (Fig. 7).

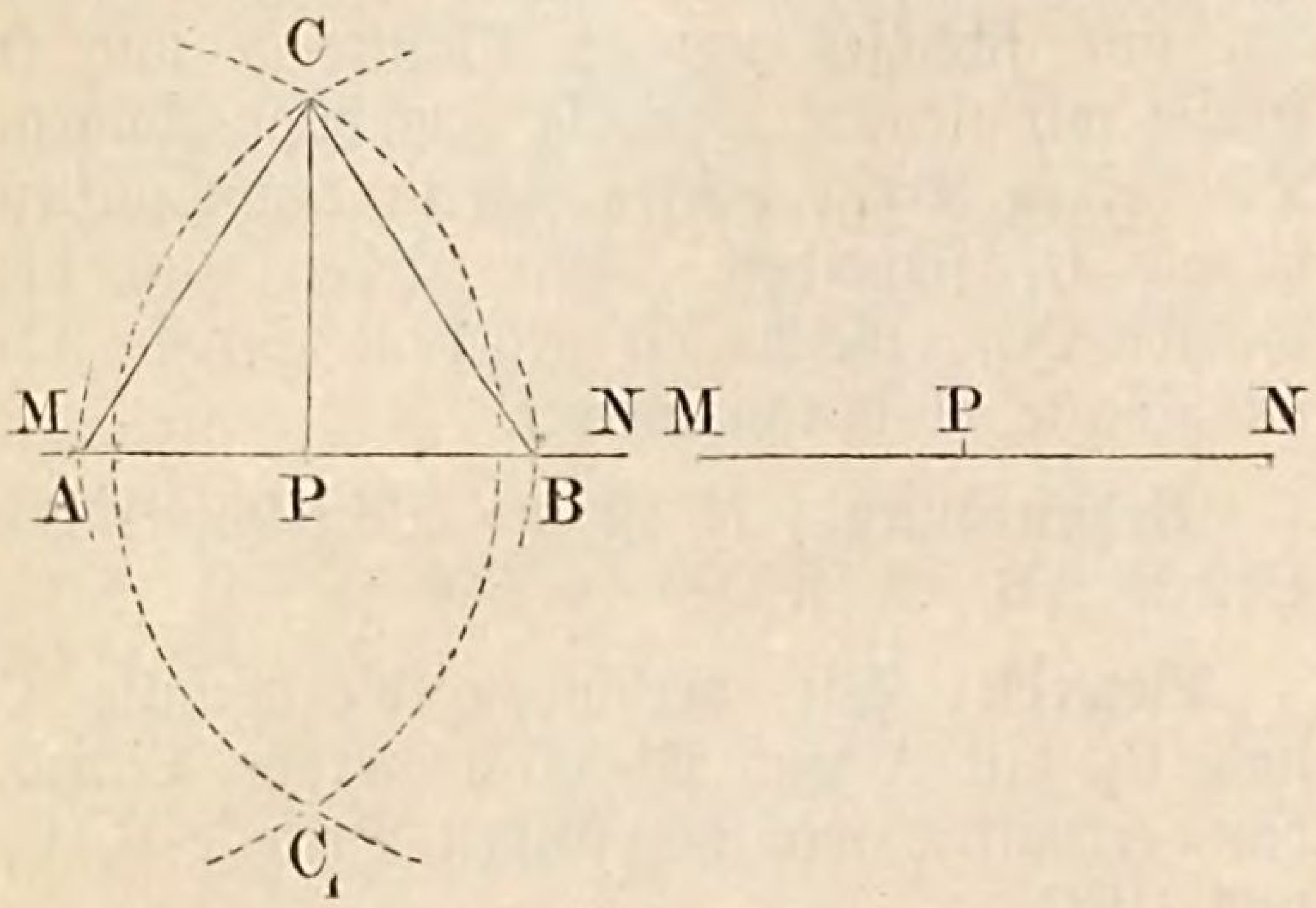


Fig. 7.

Forderung. Es soll eine gerade Linie gezeichnet werden, welche auf MN im Punkte P senkrecht steht, also mit MN rechte Winkel bildet.

Construction. Wir legen uns die Gerade MN noch einmal hin und schlagen um P mit einem beliebigen Radius einen Kreis, welcher die Gerade MN in den Punkten A und B durchschneidet. Um die Punkte A und B beschreiben wir ebenfalls Kreise und zwar mit gleichen Radien; dieselben schneiden sich in zwei Punkten; der eine derselben möge C heißen. Den Punkt C verbinden wir mit P durch eine gerade Linie.

Behauptung. Die Gerade CP steht auf MN senkrecht, mit anderen Worten, Winkel CPM und CPN sind Rechte, in Zeichen:

$CP \perp MN$ oder $\angle CPM = R$ und $CPN = R$.

Beweis. Wenn wir die beiden Punkte A und B mit C verbinden, erhalten wir das Dreieck ABC, in demselben ist

$$AC = BC^{2)}.$$

Das Dreieck ABC ist deshalb gleichschenklig. In diesem gleichschenkligen Dreieck ist

der Punkt C die Spitze
und die Seite AB die Basis.

Durch den Punkt P wird die Basis AB in die beiden gleichen Theile AP und BP zerlegt[3]). P ist daher der Mittelpunkt der Basis AB.

[1]) D. h. eine Gerade, welche senkrecht steht.

[2]) Es ist AC = BC, weil wir um A und B Kreise mit gleichen Radien geschlagen haben, welche sich in C schneiden.

[3]) Die beiden Theile AP und BP sind als Radien desselben um P beschriebenen Kreises einander gleich.

Die Gerade, welche in einem gleichschenkligen Dreieck die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet, steht nach § 90 Lehrsatz III auf der Basis senkrecht, darum steht

$$CP \perp AB \text{ oder } CP \perp MN^{1)},$$

oder es ist $\angle CPM = R$ und $\angle CPN = R$, was behauptet war.

Bemerkung. Die beiden Kreise, welche um A und B beschrieben sind, schneiden sich auch im Punkte C_1. Wenn man die Gerade C_1P zieht, ist auch

$$C_1P \perp MN.$$

Der Schüler möge den Beweis dafür liefern.

§ 99. Aufgabe. Auf eine gerade Linie soll von einem Punkte außerhalb derselben eine Senkrechte gefällt[2]) werden.

Voraussetzung. Es ist uns eine gerade Linie c und außerhalb derselben ein Punkt P gegeben (siehe Fig. 8).

Forderung. Es soll eine Gerade PS construirt werden, welche auf c senkrecht steht, in Zeichen, es soll $PS \perp c$ sein.

Construction. Wir beschreiben um den Punkt P einen Kreis, der die Gerade c in den beiden Punkten M und N durchschneiden möge. Darauf halbiren wir die Strecke MN nach dem Verfahren, welches wir im § 97 angegeben haben. Der Mittelpunkt von MN sei S. Wir ziehen nun noch die Gerade PS und stellen dann die

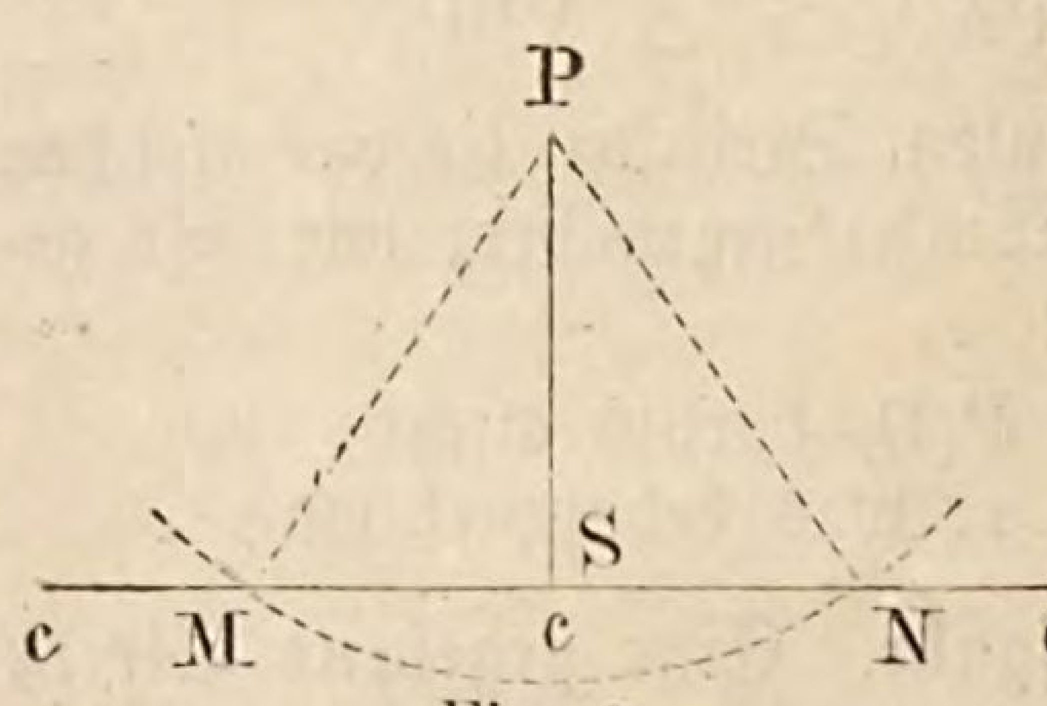


Fig. 8.

[1]) Wenn eine Gerade auf einem Theile einer Geraden senkrecht steht, so steht sie selbstverständlich auf der ganzen Geraden senkrecht.

[2]) Während wir im § 98 eine Senkrechte auf einer Geraden **in** einem gegebenen Punkte **errichtet** haben, wird in § 99 eine Senkrechte auf eine Gerade **von** einem gegebenen Punkte **gefällt**. Wir bitten den Schüler, auf den verschiedenen Gebrauch der Wörter **fällen** und **errichten** seine Aufmerksamkeit zu richten. Man sagt:

in einem Punkte **auf einer** Geraden eine Senkrechte **errichten**,

wenn der Punkt innerhalb der Geraden liegt, und

von einem Punkte **auf eine** Gerade eine Senkrechte **fällen**,

wenn der Punkt außerhalb der Geraden liegt.

Behauptung auf: PS ⊥ c oder $\angle$ PSM = R und $\angle$ PSN = R.

Beweis. Wir verbinden die beiden Punkte M und N mit P durch gerade Linien und erhalten auf diese Weise das Dreieck MPN; dieses Dreieck ist gleichschenklig, weil die beiden Seiten PM und PN als Radien desselben Kreises einander gleich sind. Von den Dreiecksstücken ist

P die Spitze
MN die Basis

und S der Construction gemäß die Mitte der Basis.

Die Gerade PS verbindet also die Spitze mit der Mitte der Basis und steht nach § 90 Lehrsatz III auf MN oder c senkrecht, in Zeichen:

PS ⊥ c oder $\angle$ PSM = R und $\angle$ PSN = R,

was behauptet war.

§ 100. Aufgabe. In § 98 haben wir besprochen, wie man auf einer geraden Linie in einem gegebenen Punkte eine Senkrechte errichten könne. Der Schüler wird sich noch erinnern, daß wir beim Beginn der Construction um den gegebenen Punkt P einen Kreis beschrieben haben, welcher zwei andere Punkte der geraden Linie durchschnitt. Diese Construction werden wir nicht immer ausführen können. Nehmen wir an, der gegebene Punkt, in welchem die Senkrechte errichtet werden soll, sei der Endpunkt einer begrenzten Strecke, dann wird der Kreis, welchen wir um ihn schlagen, die Strecke nur in einem Punkte schneiden; der andere Schnittpunkt wird in der Verlängerung der Strecke liegen. Wenn nun für die Verlängerung ein Hinderniß besteht, wie es im practischen Leben häufig vorkommt, wird die Construction in dieser Weise unmöglich sein. Wir müssen dann den bei der Behandlung der folgenden Aufgabe beschriebenen Weg einschlagen.

Aufgabe. Auf einer gegebenen Strecke soll in einem der Endpunkte eine Senkrechte errichtet werden.

Voraussetzung. Uns ist eine begrenzte Strecke AB gegeben. (Fig. 9.)

Forderung. Es soll eine Gerade AE gezeichnet werden, so daß AE ⊥ AB steht.

Construction. Wir tragen von A aus auf der Geraden AB die Strecke AC ab, deren Länge wir beliebig wählen. Ueber AC errichten wir ein gleichseitiges Dreieck ACD[1]). Darauf verlängern wir die Gerade CD über D hinaus bis E um sich selbst, so daß CD = DE ist, und verbinden die beiden Punkte A und E durch eine Gerade.

Behauptung. AE ⊥ AB oder anders ausgedrückt, $\angle$ EAB = R.

Beweis. Wie wir in § 91 aus einander gesetzt haben, beträgt im gleichseitigen Dreiecke jeder Winkel 60°. Der Construction gemäß ist das Dreieck ACD gleichseitig; es ist daher

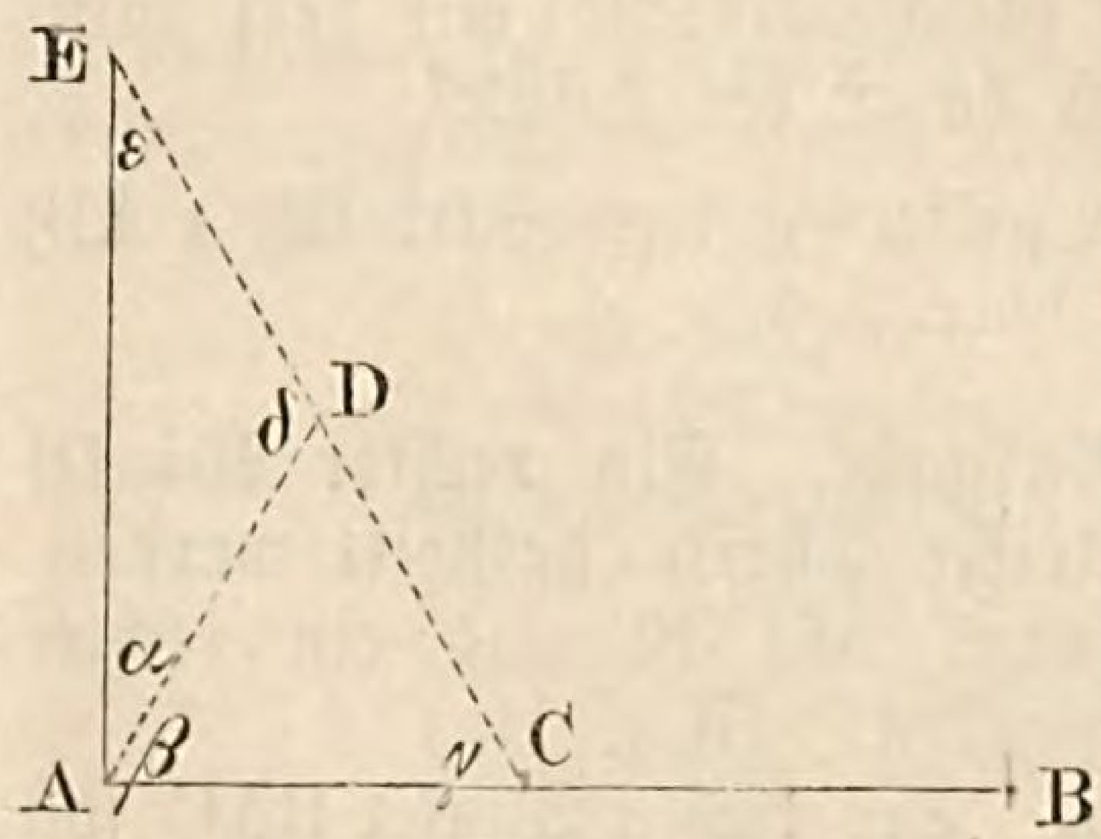


Fig.

$\beta = 60^0$
und $\gamma = 60^0$.

δ ist ein Außenwinkel des Dreiecks ADC; er ist darum nach § 68 Lehrs. III gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind; in Zeichen, es ist

$$\delta = \beta + \gamma, \text{ mithin}$$
$$\delta = 60^0 + 60^0 = 120^0.$$

Sehen wir uns jetzt das Dreieck ADE genauer an; eine leichte Ueberlegung wird uns lehren, daß in demselben die beiden Seiten AD und DE einander gleich sind. AD und CD sind nämlich Seiten des gleichseitigen Dreiecks ACD, daher haben wir:

AD = CD, nach der Construction ist ferner:
DE = CD

AD = DE nach Gr. II.

Das Dreieck ADE ist aus diesem Grunde gleichschenklig; AE ist in demselben die Basis und α und ε sind die Basiswinkel. Die Gradanzahl des Winkels δ ist uns schon bekannt, er beträgt 120 Grad. Die Summe aller drei Winkel α, ε und δ beträgt nach § 71 Lehrs. I 180 Grad; es werden also

auf α und ε zusammen 60 Grad

fallen. Da nun α und ε als Basiswinkel

---

[1]) Das gleichseitige Dreieck ACD können wir leicht gemäß § 91 construiren. Wir brauchen nur die Gerade AC in den Zirkel zu nehmen und damit um A und C zwei Kreise zu beschreiben. Diese beiden Kreise werden sich in zwei Punkten schneiden; der eine derselben wird D sein. Wenn wir A und C mit D geradlinig verbinden, erhalten wir das gleichseitige Dreieck ACD.

eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, muß jeder von ihnen 30 Grad betragen, d. h. es ist

$$\alpha = 30^0 \text{ und } \varepsilon = 30^0.$$

Wie wir schon bewiesen haben, ist $\beta = 60^0$, es wird also

$$\alpha + \beta = 90^0 = R \text{ sein.}$$

$\alpha + \beta$ ist gleichbedeutend mit dem Winkel EAB, es ist daher der Winkel

EAB = R oder anders ausgedrückt: EA ⊥ AB, was behauptet war.

§ 101. Aufgabe. Ein rechter Winkel soll in drei gleiche Theile getheilt werden.

Voraussetzung. Es ist uns ein rechter Winkel BAC gegeben. (Fig. 10.)

Forderung. Der rechte Winkel BAC soll in drei gleiche Winkel α, β, γ zerlegt werden.

Construction. Wir schneiden von AB ein beliebiges Stück AD ab und errichten über AD gemäß § 91 ein gleichseitiges Dreieck ADE. Darauf halbiren wir den Winkel DAE durch die Gerade AH und zerlegen ihn dadurch in die beiden gleichen Winkel β und γ. Den Winkel CAE bezeichnen wir mit α.

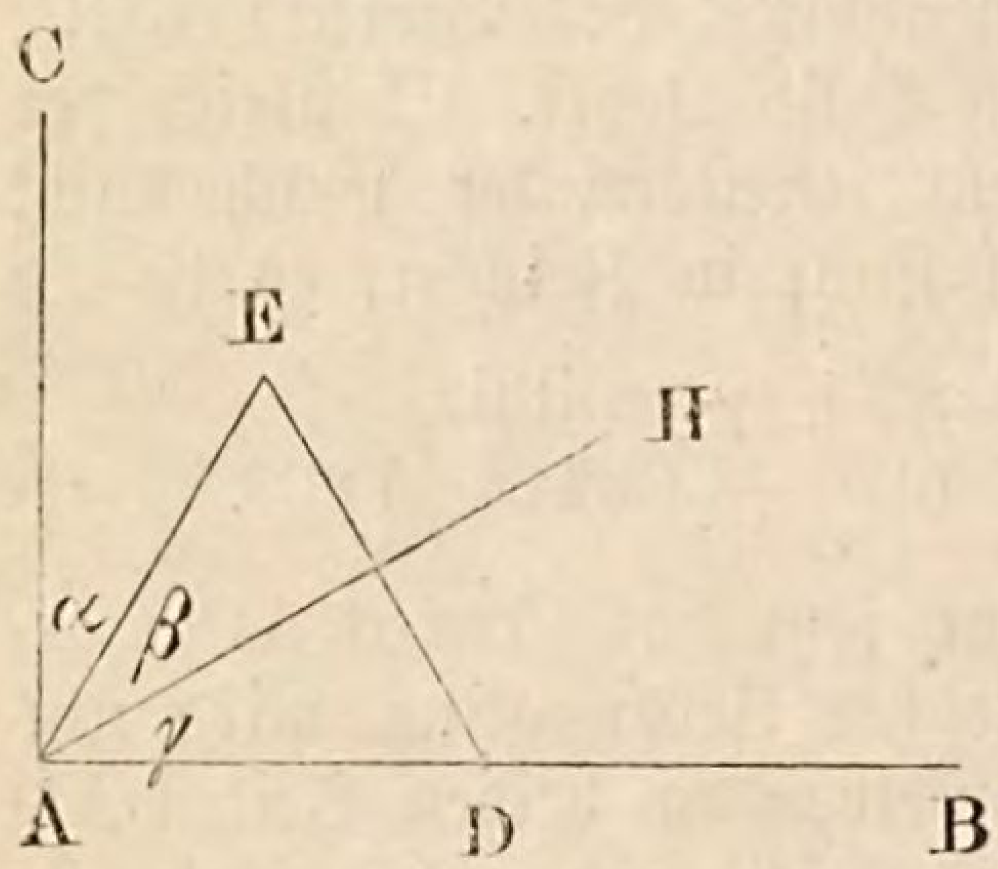


Fig. 10.

Behauptung. Die drei Winkel α, β und γ, welche zusammen den rechten Winkel BAC ausmachen, sind einander gleich, in Zeichen:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Beweis. Jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck beträgt 60 Grad; da das Dreieck DAE nach der Construction gleichseitig ist, muß der

Winkel DAE gleich 60 Grad sein.

Durch die Gerade AH ist der Winkel DAE in die beiden Hälften β und γ getheilt, es wird darum

β sowohl wie γ 30 Grad betragen.

Die drei Winkel α, β und γ machen zusammen den Winkel BAC aus, der nach der Voraussetzung gleich einem Rechten, oder, anders ausgedrückt, gleich 90 Grad ist, in Zeichen:

es ist $\quad \alpha + \beta + \gamma = 90^0.$

Auf β und γ zusammen fallen schon 60 Grad, auf α werden daher 30 Grad kommen. Wir haben daher

$$\alpha = 30^0,\ \beta = 30^0,\ \gamma = 30^0 \text{ und}$$

$$\alpha = \beta = \gamma, \text{ was behauptet war.}$$ 29. V. 10.

Bemerkung. Ein rechter Winkel läßt sich leicht in drei gleiche Theile zerlegen, wie wir soeben gezeigt haben. Es ist aber noch **nicht** gelungen mit **Zirkel und Lineal einen jeden beliebigen Winkel in drei gleiche Winkel zu theilen.** Nur mit Hilfe einer krummen Linie, welche wir erst im dritten Cursus kennen lernen werden, läßt sich diese Dreitheilung ohne Transporteur ausführen. Wenn man sich dagegen des Transporteurs bedienen will, ist die Dreitheilung sehr leicht; man braucht nur den Winkel, welcher in drei Theile zerlegt werden soll, auszumessen und die gefundene Gradanzahl durch 3 zu dividiren.

§ 102. Im Dreieck ABC (Fig. 11) ist zu AB die Parallele EF gezogen. Durch eine einfache Messung werden wir finden, daß EF ebenso groß ist wie die beiden unteren Abschnitte AE und BF zusammen, oder mit anderen Worten, daß EF an Länge der Summe der beiden unteren Abschnitte AE und BF gleichkommt. Nehmen wir an, es sei uns nur das Dreieck ABC gegeben und wir sollten EF construiren, so würden wir die Aufgabe zu lösen haben:

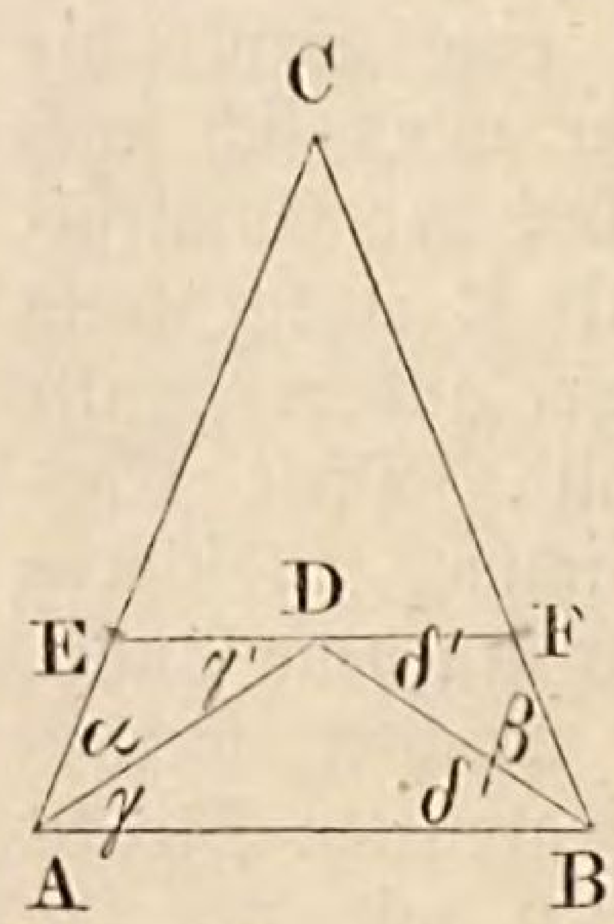


Fig. 11.

In einem bestimmten Dreieck soll zu einer bestimmten Seite eine Parallele so gelegt werden, daß sie gleich der Summe der unteren Abschnitte ist.

Voraussetzung. Es ist uns ein Dreieck ABC gegeben (Fig. 11).

Forderung. Wir sollen die Gerade EF ziehen, so daß EF ∥ AB und AE + BF = EF ist.

Ueberlegen wir uns jetzt, **wie** wir unsere Aufgabe **lösen** werden. Wir wollen uns zu diesem Zwecke vorstellen, **die Construction sei bereits ausgeführt,** EF in Figur 11 entspreche der Forderung; dann können wir uns EF in zwei Stücke ED und DF theilen, daß

AE = ED und DF = BF ist.

Wenn wir nun die Punkte A und B mit

D verbinden, so entstehen zwei Dreiecke ADE und BDF, von welchen wir zunächst das Dreieck ADE betrachten wollen.

In demselben ist AE = DE; das Dreieck ADE ist darum gleichschenklig und zwar ist AD die Basis, und α und γ' sind die Basiswinkel. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich, darum ist:

$$\alpha = \gamma'$$
$$\text{ferner ist } \gamma = \gamma' \text{ }^{1)}$$
$$\overline{\alpha = \gamma \text{ nach Gr. II.}}$$

d. h. der Winkel bei A ist in die beiden gleichen Winkel α und γ getheilt, oder anders ausgedrückt, er ist halbirt.

Ebenso ist das Dreieck BFD gleichschenklig, weil BF = DF ist; die Winkel β und δ' sind Basiswinkel; wir haben darum

$$\beta = \delta'$$
$$\text{ferner ist } \delta = \delta' \text{ }^{2)}$$
$$\overline{\beta = \delta \text{ nach Gr. II.}}$$

also auch der Winkel bei B ist in die beiden gleichen Winkel β und δ getheilt, mit andern Worten, er ist halbirt.

Jetzt werden wir wissen, wie wir die **Construction** einzurichten haben. Wir werden zunächst die beiden Winkel bei A und bei B halbiren nach dem Verfahren, welches wir im § 96 angegeben haben. Die Halbirungslinien der beiden Winkel mögen sich im Punkte D schneiden. Durch D legen wir die Parallele EF. Wir werden dann **behaupten**, daß EF die gewünschte Parallele sei, daß nämlich die Gleichung EF = AE + BF bestehe.

Indessen wir werden die Construction, die Behauptung und den Beweis mit allen Einzelheiten in dem folgenden Briefe bringen. Wir wollen nur noch einmal den Inhalt unserer Erwägungen wiederholen. Um uns zu überlegen, welchen Weg wir bei der Construction einzuschlagen haben, stellten wir uns vor, die Construction sei ausgeführt. Wir nahmen dann eine Theilung der Geraden EF und zogen einige Hilfslinien und fanden, daß die Winkel A und B durch die Geraden AD und BD halbirt werden. Damit hatten wir unsere Aufgabe auf zwei schon früher in § 96 und 61 behandelte zurückgeführt und konnten nun die Construction leicht vornehmen.

---

[1] Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und EF geschnitten von AD. [2] Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und EF, geschnitten von BD.

Die Ueberlegung, welche uns zur Construction führt, pflegt man **Analysis** zu deutsch **Auflösung** zu nennen, weil die Figur dabei gewissermaßen in ihre Bestandtheile aufgelöst und so gründlich durchdacht wird.

Die Analysis wird sich an die Forderung anschließen, die Construction wird ihr folgen, d. h. mit anderen Worten, die Analysis ist zwischen die Forderung und die Construction einzuschieben. Demgemäß werden wir bei einer Constructionsaufgabe nach einander die folgenden Abschnitte zu behandeln haben:

1) die Aufgabe,
2) die Voraussetzung,
3) die Forderung,
4) die Analysis,
5) die Construction,
6) die Behauptung,
7) den Beweis.

Wie man auch sonst im gewöhnlichen Leben nicht immer über den Gang, sondern mehr über die Resultate der Ueberlegung spricht, so wird man auch in der Mathematik bei Constructionsaufgaben nicht immer den Weg angeben, auf welchem man zur Construction gelangt ist, oder anders ausgedrückt, man wird nicht zu jeder Constructionsaufgabe die Analysis hinzusetzen.

Von den Constructionsaufgaben, welche wir in diesem Briefe besprochen haben, sind viele für den Fortgang der Studien außerordentlich wichtig; wir werden künftig z. B. immer voraussetzen müssen, daß der Schüler eine gegebene Strecke, einen gegebenen Winkel regelrecht halbiren und eine Senkrechte errichten und fällen könne.

Wir bitten den Schüler deshalb, gerade diesen Aufgaben seine volle Aufmerksamkeit zuzuwenden. Es genügt nicht, daß er unsere Erörterungen verstanden hat; er wird vielmehr gut thun, schriftlich die Constructionsaufgaben vollkommen regelrecht zu wiederholen, dabei aber die Figuren zu verändern. Aus der selbstständigen Behandlung einer einzigen Aufgabe wird der Schüler dann mehr Nutzen schöpfen, als wenn er unsere Auseinandersetzungen über die Constructionsaufgaben flüchtig durchfliegt. Wir wiederholen, daß wir gern bereit sind, die Lösungen, welche uns eingesandt werden, durchzusehen und die Zuschriften zu beantworten. Der Schüler wird auf diese Art der Uebung um so mehr Fleiß verwenden können, als wir ihm diesmal der Natur des behandelten Stoffes gemäß wenig Aufgaben stellen konnten.

B. Recapitulation.

In den beiden ersten Abschnitten der **elften Lection** erledigten wir die Aufgaben und Wiederholungsfragen des fünften Briefes und setzten dann die Behandlung des vierten Congruenzsatzes fort, von dem wir schon in der zehnten Lection gesprochen hatten. Nachdem wir noch im Anschluß an diesen Satz erörtert hatten, wie sich Dreiecke zu einander verhalten, die in zwei Seiten übereinstimmen und in dem Winkel, welcher der kleineren von ihnen gegenüberliegt, faßten wir die vier Congruenzsätze zusammen und sahen, daß immer die Gleichheit dreier Stücke zur Congruenz erforderlich sei. Wir fügten hinzu, daß die Uebereinstimmung zweier Dreiecke in den drei Winkeln zur Congruenz nicht genüge, weil die drei Winkel nicht drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke des Dreiecks sind. In der That, es ist nicht schwer, sich zwei Dreiecke zu construiren, die zwar in den Winkeln übereinstimmen, aber doch nicht zur Deckung gebracht werden können, man braucht nur in ein Dreieck ein kleineres hineinzuzeichnen, daß die Seiten der beiden Dreiecke parallel sind. Der Zusammenfassung der Congruenzsätze ließen wir im Abschnitt D die Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks folgen.

Wir besprachen, was man beim gleichschenkligen Dreieck unter der Basis, den Basiswinkeln und der Spitze verstehe und bewiesen, daß die Basiswinkel einander gleich seien und daß jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck 60 Grad betrage. Nachdem wir noch zwei weitere wichtige Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks erörtert hatten, gingen wir im folgenden Abschnitt zur Behandlung der Constructionsaufgaben über. An der ersten Aufgabe, die wir uns stellten, erläuterten wir das streng mathematische Verfahren, welches man bei der Lösung einer Constructionsaufgabe in Anwendung bringt. Wir zeigten, daß wir sechs Bestandtheile zu unterscheiden haben, nämlich die Voraussetzung, die Forderung, die Construction, die Behauptung und den Beweis. Die zweite Aufgabe hatten wir schon vermittelst des Transporteurs gelöst, wir gaben nun noch in der elften Lection eine andere Lösung.

In der **zwölften Lection** fuhren wir fort, Aufgaben zu behandeln. In den beiden ersten Paragraphen construirten wir Dreiecke aus gegebenen Stücken, dann lehrten wir einen Winkel finden, welcher mit zwei anderen zusammen zwei Rechte ausmacht und zeigten, wie ein gegebener Winkel und eine gegebene Strecke halbirt werden können. Darauf fällten und errichteten wir Senkrechte und theilten einen rechten Winkel in drei gleiche Theile. Wir bemerkten dabei, daß es bisher nicht gelungen sei, einen beliebigen Winkel ohne Transporteur mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Winkel zu zerlegen, obwohl sich schon viele scharfsinnige Köpfe mit dieser Aufgabe befaßt haben. Zum Schluß wandten wir uns einer Aufgabe zu, welche zu einem neuen Moment in der mathematischen Methode führte. Wir überlegten uns, wie die Aufgabe gelöst werden könne, und nahmen zu diesem Zwecke an, daß die Construction bereits ausgeführt sei. Nachdem wir mehrere Hilfslinien gezogen hatten, gelang es uns, die Aufgabe auf andere Aufgaben zurückzuführen, welche wir bereits behandelt hatten. Wir erklärten, daß man eine Ueberlegung, welche zur Construction führt, Analysis nennt, und lernten in der Analysis einen wichtigen Bestandtheil bei der Lösung der Aufgaben kennen. Damit schlossen wir den Abschnitt A der zwölften Lection.

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie heißen die vier Congruenzsätze, welche wir aufgestellt haben?
2) Was versteht man unter einem gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieck?
3) Was versteht man beim gleichschenkligen Dreieck unter der Basis, den Basiswinkeln und der Spitze?
4) Welchen Lehrsatz haben wir über die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks aufgestellt? ~31. V. 10.
5) Wie viel Grad beträgt jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck?
6) Welche beiden Lehrsätze hat der Schüler über die gerade Linie kennen gelernt, welche bei einem gleichschenkligen Dreieck die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet?
7) Welche Bestandtheile haben wir bei der Behandlung der Constructionsaufgaben zu unterscheiden?
8) Welche Aufgaben haben wir in Lection 11 gelöst?
9) Welche Aufgaben haben wir in § 93 und § 94 gelöst?
10) Auf welchen Satz stützten wir uns bei der Behandlung der Aufgabe in § 95?
11) In § 95 haben wir die Aufgabe gestellt, ein Dreieck zu construiren, von welchem eine Seite, ein anliegender, ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind. Auf welche frühere Aufgabe haben wir diese Aufgabe zurückgeführt?
12) Weshalb haben wir in § 97 die Congruenz der beiden Dreiecke CAC_1 und CBC_1 bewiesen?
13) Was versteht man unter einer Senkrechten?
14) Wann braucht man den Ausdruck, eine Senkrechte errichten, wann sagt man eine Senkrechte fällen?
15) Welche Winkel kann man in drei gleiche Theile zerlegen?
16) Was versteht man unter der Analysis?
17) Zwischen welche Abschnitte ist die Analysis bei der Behandlung der Aufgabe zu setzen?
18) Was bedeutet Analysis zu Deutsch?
19) Wie wird v und σ gesprochen?
20) Welche Lehrsätze haben wir über das gleichschenklige Dreieck aufgestellt?
21) Wie haben wir die Dreiecke nach den Winkeln eingetheilt?
22) Weshalb darf in einem rechtwinkligen Dreieck nur ein rechter, in einem stumpfwinkligen Dreieck nur ein stumpfer Winkel vorkommen?
23) Was versteht man unter Gegenwinkeln, Wechselwinkeln und entgegengesetzten Winkeln?
24) Welche Sätze haben wir über die Summe und Differenz zweier Dreiecksseiten aufgestellt?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 13 und 14.
Planimetrie.

Als
Manuscript
gedruckt.

7. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung
hervorragender Fachmänner und Gelehrten
bearbeitet von

W. Burckhardt.

Zwei Dinge gehören zur Bildung des Verstandes, ohne welche kein Fortschreiten möglich ist: ein ernstes Einsammeln von Kenntnissen und eine stete Uebung der Kräfte.
(Schiller.)

Lection 13.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 11.

Abschnitt D. § 90. In Figur 12 ist ST die Basis, σ und τ die Basiswinkel und U die Spitze; in Figur 13 ist BC die Basis, β und γ sind die Basiswinkel und D ist die Spitze.

Wenn wir Figur 13 benutzen, um Lehrsatz II zu beweisen, haben wir:

Voraussetzung. In Figur 13 ist BD = CD.

Behauptung. $\beta = \gamma$.

Beweis. Der Mittelpunkt der Basis BC sei E; den Punkt E verbinden wir mit der Spitze D durch die Gerade DE, dann entstehen die beiden Dreiecke BDE und CDE; in denselben ist:

BD = CD nach der Voraussetzung,
DE = DE nach Grundsatz I,
BE = CE, weil E der Mittelpunkt der Basis BC ist.

Nach dem zweiten Congruenzsatze ist deshalb

$$\triangle BDE \cong \triangle CDE.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; es ist DE = DE, darum auch

$\beta = \gamma$, was behauptet war.

Der Beweis für Lehrsatz IV gestaltet sich folgendermaßen:

Voraussetzung. In Figur 13 ist BD = CD und BE = CE.

Behauptung. DE $\perp$ BC oder $\eta = R$ und $\vartheta = R$.

Beweis. In den beiden Dreiecken BDE und CDE ist

BD = CD nach der Voraussetzung,
BE = CE nach der Voraussetzung,
DE = DE nach Grundsatz I.

Die beiden Dreiecke BDE und CDE sind darum nach dem zweiten Congruenzsatz congruent, in Zeichen:

$$\triangle BDE \cong \triangle CDE.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, es ist BD = CD daher auch

$$\eta = \vartheta.$$

Im Uebrigen gestaltet sich der Beweis gerade so, wie § 90.

Andere Aufgaben haben wir im sechsten Briefe der Beschaffenheit des behandelten Stoffes wegen nicht bringen können; wir haben nur in einigen Paragraphen in den Text selbst Fragen eingefügt, welche wir jetzt beantworten wollen.

Seite 102 Anmerkung 4. Es wird gesprochen:

$\upsilon = \sigma$, Winkel Ypsilon ist gleich Winkel Sigma,
$\upsilon > \sigma$, Winkel Ypsilon ist größer als Winkel Sigma,
$\sigma > \upsilon$, Winkel Sigma ist größer als Winkel Ypsilon,
$\upsilon < \sigma$, Winkel Ypsilon ist kleiner als Winkel Sigma.

§ 91. Seite 104. Bemerkung b. Die beiden Dreiecke ABC und ABD (Fig. 15) sind nach dem zweiten Congruenzsatze einander congruent, weil wir haben:

1) AB = AB nach Grundsatz I.
2) BC = BD als Radien desselben um B beschriebenen Kreises.
3) AC = AD als Radien desselben um A geschlagenen Kreises.

Lection 12.

Abschnitt A. § 98. Bemerkung.

Behauptung. In Figur 7 ist $C_1P \perp MN$.

Beweis. Wenn wir A und B mit C_1 geradlinig verbinden, erhalten wir das Dreieck ABC_1, in demselben ist

$$AC_1 = BC_1,$$

weil wir um A und B Kreise mit gleichen Radien geschlagen haben, welche sich in C_1 schneiden. Das Dreieck ABC_1 ist darum gleichschenklig und zwar ist C_1 die Spitze und AB die Basis.

AB zerfällt in die beiden Theile AP und BP, welche als Radien desselben um P beschriebenen Kreises einander gleich sind. P ist also der Mittelpunkt der Basis.

Nach § 90 Lehrsatz III steht die Gerade, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, auf der Basis senkrecht. Daher ist:

$C_1P \perp AB$, was behauptet war.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 12 gestellten Fragen.

1) Siehe Lehrsatz III Seite 91, Lehrsatz IV Seite 92, Lehrsatz VII Seite 94, Lehrsatz VIII Seite 95. 2) In einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten, in einem gleichseitigen drei Seiten einander gleich. 3) In einem gleichschenkligen Dreieck nennt man diejenige Seite, von welcher eine Gleichheit mit den anderen nicht behauptet wird, die Basis. Die der Basis anliegenden Winkel heißen Basiswinkel, und die Ecke, welche der Basis gegenüberliegt, wird Spitze genannt. 4) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich. 5) 60 Grad beträgt jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck. 6) Die gerade Linie, welche in einem gleichschenkligen Dreieck die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet, steht 1) senkrecht auf der Basis und halbirt 2) den Winkel an der Spitze. 7) Wenn wir eine Constructionsaufgabe lösen, haben wir nach einander zu behandeln: a) die Aufgabe, b) die Voraussetzung, c) die Forderung, d) die Analysis, e) die Construction, f) die Behauptung, g) den Beweis. Die Analysis kann ausfallen. 8) Wir haben ein Dreieck construirt, wenn die drei Seiten gegeben sind und einen Winkel von gegebener Größe an eine Gerade in einem gegebenen Punkte angetragen. 9) In § 93 haben wir ein Dreieck construirt, von welchem ein Winkel gegeben war und die Seiten, welche diesen Winkel einschließen. In § 94 haben wir ein Dreieck gezeichnet, von welchem wir eine Seite und die beiden anliegenden Winkel kannten. 10) Bei der Behandlung der Aufgabe in § 95 stützten wir uns auf den Satz, daß ein Winkel, dessen Schenkel in einer geraden Linie liegen, gleich zwei Rechten ist. 11) Auf die in § 94 behandelte Aufgabe. 12) Die Congruenz der beiden Dreiecke CAC_1 und CBC_1 haben wir bewiesen, um zu zeigen, daß $\delta = \varepsilon$ ist. 13) Unter einer Senkrechten versteht man eine gerade Linie, welche auf einer anderen senkrecht steht. 14) Man errichtet eine Senkrechte auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte, wenn der Punkt in der Geraden liegt; man fällt eine Senkrechte auf eine Gerade von einem gegebenen Punkte, wenn der Punkt außerhalb der Geraden liegt. 15) Rechte Winkel kann man in drei gleiche Theile zerlegen. 16) Unter der Analysis versteht man die Ueberlegung, wie eine Constructionsaufgabe zu lösen ist. 17) Die Analysis ist zwischen die Forderung und Construction zu zu setzen. 18) Analysis bedeutet zu deutsch Auflösung. 19) v wird wie ü gesprochen und Ypsilon genannt, σ wird wie s gesprochen und Sigma genannt. 20) Siehe Lehrsatz II Seite 101, Lehrsatz III und IV Seite 102. 21) In rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige haben wir die Dreiecke eingetheilt. 22) Weil die Summe aller drei Winkel eines Dreiecks immer gleich zwei Rechten ist. 23) Siehe § 58 und § 63. 24) Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite; die Differenz zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte Seite.

C. Das Verhältniß der Seiten und Winkel eines Dreiecks.

§ 103. Gleiche Seiten und Winkel im Dreieck. Im vorigen Briefe haben wir den Lehrsatz bewiesen, daß im gleichschenkligen Dreiecke die Basiswinkel einander gleich seien; diesen Lehrsatz können wir in einer andern Fassung aussprechen, wenn wir erwägen, daß die beiden Basiswinkel den beiden gleichen Seiten des gleichschenkligen Dreiecks gegenüberliegen. Das Dreieck ABC (Fig. 1) ist gleichschenklig, weil die beiden Seiten BC und AC gleich groß sind; den **gleichen Seiten** BC und AC **liegen** die **gleichen** Basis**winkel** α und β **gegenüber;** wir haben also den

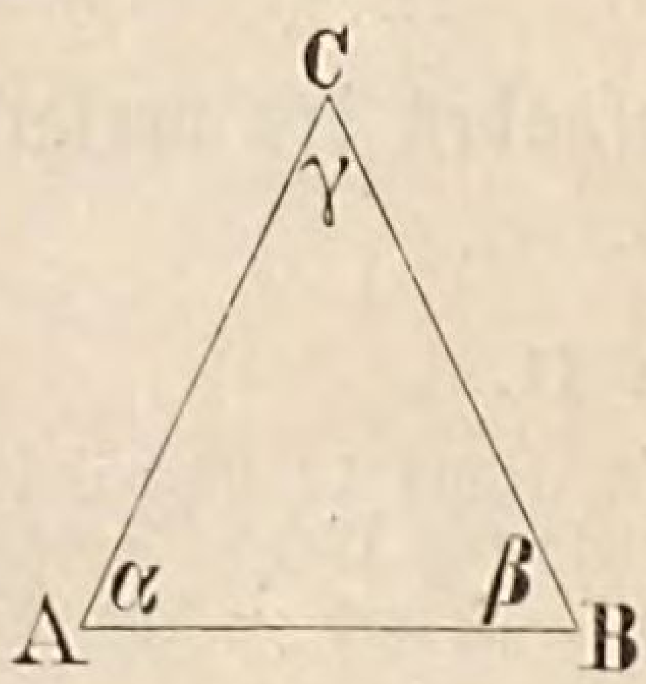


Fig. 1.

Lehrsatz I. In einem Dreiecke liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber.[1])

In diesem Satze wird vorausgesetzt, daß uns mehrere Seiten eines Dreiecks als gleich bekannt sind, es wird behauptet, daß die gegenüberliegenden Winkel einander gleich seien. Wir wollen nun die Voraussetzung zur Behauptung, und die Behauptung zur Voraussetzung machen; mit anderen Worten, wir wollen den **Satz umkehren;** dann müssen wir die Gleichheit mehrerer Winkel voraussetzen und die Gleichheit der entsprechenden[2]) Seiten

---

[1]) In einem gleichseitigen Dreiecke müssen demnach alle drei Winkel einander gleich sein; wie wir bereits wissen, beträgt jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck 60 Grad. [2]) D. h. die Gleichheit der Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen.

behaupten. Es ergiebt sich auf diese Weise der Satz:

Wenn in einem Dreiecke mehrere Winkel gleich sind, so müssen auch die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein, oder kürzer ausgedrückt:

Lehrsatz II. In einem Dreieck liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber.

Diesen Satz wollen wir beweisen, indem wir Figur 2 benutzen.

Voraussetzung. In Fig. 2 ist $\alpha = \beta$.

Behauptung. BC = AC.

Beweis. Wir zerlegen den Winkel ACB in die beiden Winkel γ und δ, indem wir ihn gemäß § 97 durch die Gerade CM halbiren. In den beiden Dreiecken ACM und BCM ist dann:

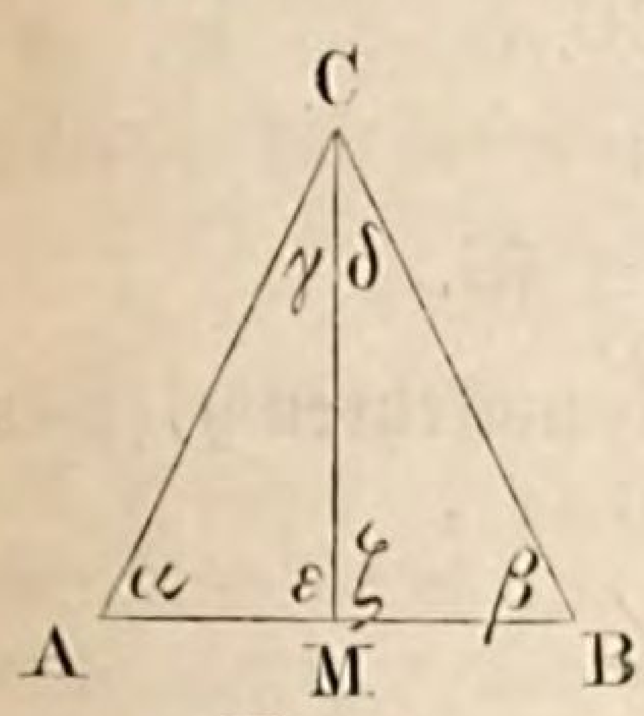


Fig. 2.

CM = CM nach Grundsatz I

$\gamma = \delta$ [1])

$\alpha = \beta$ nach der Voraussetzung.

Die beiden Dreiecke stimmen also in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln überein; sie sind nach dem zweiten Congruenzsatze einander congruent, in Zeichen:

$$\triangle\ ACM \cong \triangle\ BCM.$$

In congruenten Dreiecken sind diejenigen Seiten wechselseitig gleich, welche bei der Deckung übereinander fallen, es ist darum:

BC = AC, was behauptet war.

Bemerkung. 1) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so sind nach unsern Lehrsatz auch zwei Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig.

Sind alle drei Winkel des Dreiecks gleich groß, so sind alle drei Seiten gleich, das Dreieck ist gleichseitig.

2) Wir haben den Lehrsatz II aus Lehrsatz I hergeleitet, indem wir den Lehrsatz I umkehrten. Man spricht von dem Umkehren eines Lehrsatzes immer, wenn die Behauptung zur Voraussetzung und die Voraussetzung wenigstens zum Theil zur Behauptung gemacht wird.

§ 104. Der letzte Satz setzt uns in den Stand, die Aufgabe zu Ende zu führen, welche wir in § 102 begonnen haben. Die Analysis, welche wir schon in § 102 ausführlich behandelt haben, wollen wir nicht wiederholen, dagegen wollen wir der bessern Uebersicht halber die Aufgabe selbst, die Voraussetzung und die Forderung noch einmal bringen.

Aufgabe. In einem Dreieck soll zu einer Seite eine Parallele so gelegt werden, daß sie gleich der Summe der unteren Abschnitte der andern Seite ist.

Voraussetzung. Es ist uns ein Dreieck ABC gegeben. (Fig. 3.)

Forderung. Es soll zu AB eine Parallele EF so gelegt werden, daß EF = AE + BF ist.

Construction. Wir halbiren die beiden Winkel A und B; die Halbirungslinien mögen sich in dem Punkte D schneiden. Durch D legen wir zu AB die Parallele EF.

Behauptung. I. EF ∥ AB
und II. EF = AE + BF.

Beweis. Nach der Construction ist

I. EF ∥ AB, was behauptet war.

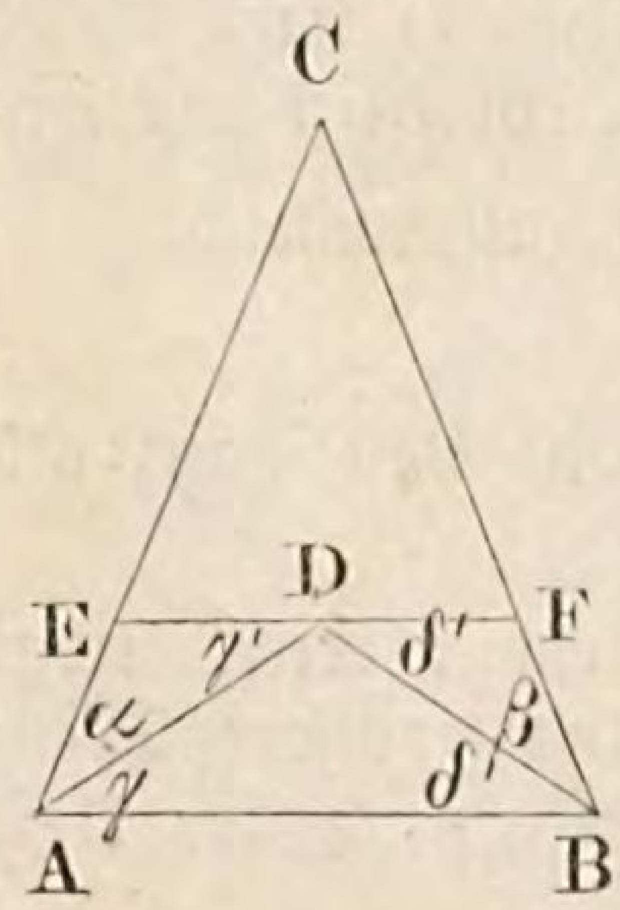


Fig. 3.

Wie wir wissen, ist der Winkel bei A durch die Halbirungslinie AD in die beiden gleichen Winkel α und γ zerlegt, in Zeichen, es ist:

$\alpha = \gamma$, wir haben ferner

$\gamma' = \gamma$ [1])

$\alpha = \gamma'$ nach Grundsatz II

α und γ' sind Winkel des Dreiecks ADE, in einem Dreiecke liegen nach Lehrsatz II gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber, darum ist:

a) ED = AE.

Auch der Winkel B ist halbirt, er ist durch die Gerade BD in die beiden gleichen Winkel β und δ getheilt, in Zeichen, es ist:

$\beta = \delta$, ferner ist

$\delta' = \delta$ [2])

$\beta = \delta'$ nach Grundsatz II.

β und δ' sind Winkel des Dreiecks BEF; da gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüberliegen, haben wir:

b) DF = BF.

Wir wissen jetzt, daß

a) ED = AE

b) DF = BF ist.

ED + DF = AE + BF nach Grundsatz III.

ED + DF ist so groß wie EF; wenn wir in der vorigen Gleichung ED + DF mit EF vertauschen, erhalten wir:

II. EF = AE + BF, was behauptet war.

§ 105. Ungleiche Dreiecksseiten und ungleiche Dreieckswinkel. Wie wir in § 103 erfahren haben, liegen in einem Dreieck gleichen Seiten auch gleiche Winkel und glei-

---

[1]) Weil wir den Winkel ACB durch die Gerade CM in die beiden gleichen Winkel γ und δ zerlegt haben.

[1]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und EF geschnitten von AD. [2]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und EF geschnitten von BD.

chen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber. Es wird sich jetzt fragen, wie sich die Winkel bei ungleichen Seiten und die Seiten bei ungleichen Winkeln verhalten. Werden dann auch ungleichen Seiten ungleiche Winkel und ungleiche Winkel ungleichen Seiten entsprechen? Wird der größern Seite auch der größere Winkel und der kleinern Seite auch der kleinere Winkel gegenüberliegen?

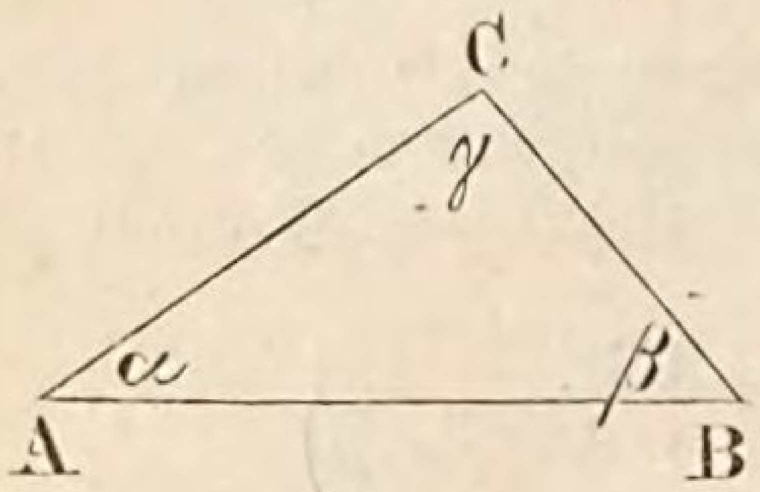


Fig. 4.

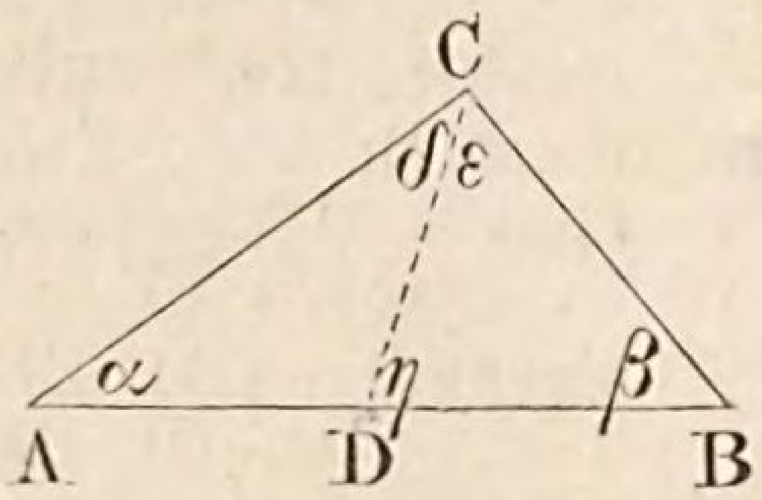


Fig. 5.

In dem Dreieck ABC (Fig. 4) trifft dieses mathematische Gesetz zu; wie ein Blick lehrt, ist

$AB > BC$ und dem entsprechend
$\angle C > \angle A$[1]).

Wir wollen nun beweisen, daß ganz allgemein gilt der

Lehrsatz III. In einem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel und der kleineren Seite auch der kleinere Winkel gegenüber.

Voraussetzung. Im Dreieck ABC (Fig. 4)

$$AB > BC.$$

Behauptung. $\angle C > \angle A$.

Beweis. Wir zeichnen uns das Dreieck ABC noch einmal hin (Fig. 5), schneiden auf AB von B aus die Strecke $BD = BC$ ab und ziehen die Gerade CD. Das Dreieck CBD, welches dann entsteht, ist gleichschenklig, weil in demselben $BC = BD$ ist. CD ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, η und ε sind die Basiswinkel. Weil die Basiswinkel eines Dreiecks einander gleich sind, haben wir:

$$\eta = \varepsilon.$$

η ist ferner Außenwinkel des Dreiecks ACD, folglich ist nach § 69 Lehrs. III

$$\eta = \alpha + \delta.$$

Zu α muß also noch δ hinzukommen, wenn sich η ergeben soll; es ist mithin:

$$\eta > \alpha.$$

[1]) Der größern Seite AB liegt also der größere Winkel C, und der kleineren Seite BC liegt auch der kleinere Winkel A gegenüber.

Setzen wir in diese Ungleichung für η die gleiche Größe ε ein, so erhalten wir:

$\varepsilon > \alpha$, um so mehr aber
$\angle ACB$[1]) $> \alpha$, oder wenn wir auf Fig. 4 zurücksehen

$\angle C$[2]) $> \angle A$, was behauptet war.

§ 106. In dem letzten Paragraphen haben wir als Lehrsatz III den Satz aufgestellt, daß in einem Dreieck der größern Seite auch der größere Winkel gegenüberliege. Um diesen Lehrsatz zu beweisen,

setzten wir voraus, daß in Figur 4

$$AB > BC,$$

und **behaupteten,** daß

$\angle C > \angle A$ sei.

Wenn wir Lehrsatz III **umkehren**[3]), werden wir **voraussetzen,** daß

$$\angle C > \angle A$$

und **behaupten,** daß

AB[4]) $<$ BC[4]) ist,

oder allgemeiner ausgedrückt, wir werden die Voraussetzung machen, daß in einem Dreieck ein Winkel größer sei als ein anderer, und die Behauptung aufstellen, daß dem größern der beiden Winkel auch die größere Seite, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüberliege. Wenn wir die Voraussetzung und die Behauptung zu einem kurzen Satze zusammenfügen, erhalten wir den

Lehrsatz IV. In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Voraussetzung. In Figur 4 ist

$$\angle C > \angle A.$$

Behauptung. $AB > BC$.

Wir wollen diesmal einen indirecten[5]) **Beweis** geben. Nehmen wir an, die Behauptung wäre falsch, es wäre nicht

[1]) Denn Winkel ACB ist doch noch ersichtlich größer als Winkel ε. [2]) In Figur 4 ist die Bezeichnung: $\angle$ C unzweideutig, in Figur 5 könnte man zwei Winkel darunter verstehen. [3]) Wie wir in § 103 bemerkt haben, kehrt man einen Satz um, indem man die Behauptung zur Voraussetzung und die Voraussetzung oder wenigstens einen Theil derselben zur Behauptung macht. [4]) AB liegt dem Winkel C und BC liegt dem Winkel A gegenüber. [5]) Was man unter einem indirecten Beweis versteht, haben wir in § 74 auseinandergesetzt.

AB > BC, dann müßte
entweder I. AB = BC
oder II. AB < BC sein[1]).

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß sowohl die Gleichung I als die Ungleichung II auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung führt.

Wäre AB = BC, so müßte auch
∠ C = ∠ A[2]) sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Hätten wir AB < BC, so wäre auch
∠ C < ∠ A[3]), was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Die Annahme, daß die Behauptung falsch sei, hat, wie wir sehen, Widersprüche im Gefolge. Die Behauptung muß also richtig sein, d. h. es muß die Ungleichung bestehen,

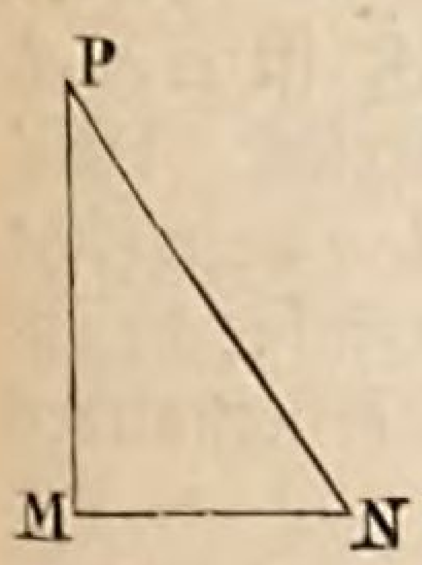
AB > BC.

§ 107. Folgerungen aus Lehrsatz IV. Wie wir in § 72 gezeigt haben, enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen rechten und zwei spitze Winkel, ein stumpfwinkliges Dreieck einen stumpfen und zwei spitze Winkel. Ein rechter und ein stumpfer Winkel ist immer größer als ein spitzer, darum ist im

rechtwinkligen Dreiecke der **rechte**
und im **stumpfwinkligen** Dreiecke der **stumpfe**

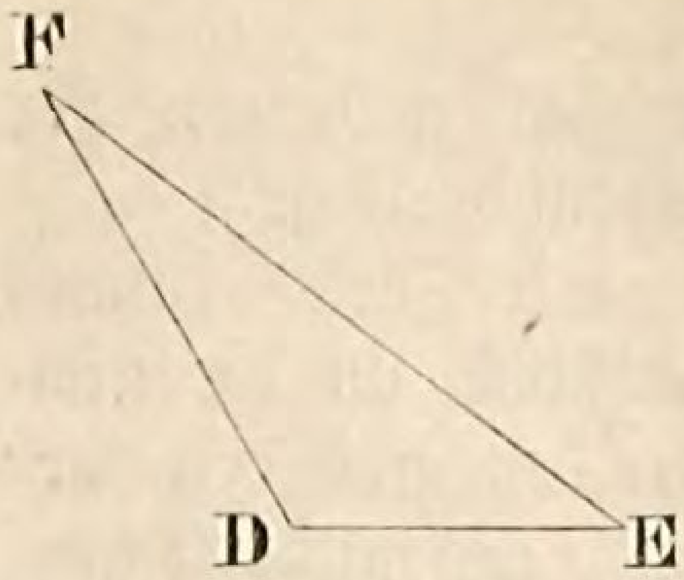
Winkel der **größte** unter den Dreieckswinkeln. Dem größten Winkel muß nach Lehrsatz IV auch die größte Seite gegenüberliegen, deshalb haben wir den

Lehrsatz V. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die dem rechten Winkel, im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.


Fig. 6.

Das Dreieck MNP (Fig. 6) ist rechtwinklig, weil der Winkel M einen Rechten beträgt. Dem rechten Winkel M liegt die Seite PN gegenüber; diese Seite muß nach dem vorigen Satze größer sein als die beiden anderen Dreiecksseiten MP und MN.

Das Dreieck DEF (Fig. 7) ist stumpfwinklig, denn D ist ein stumpfer Winkel. Weil die Seite EF dem stumpfen Winkel D gegenüberliegt, ist sie die größte unter den Seiten des Dreiecks DEF, d. h. sie ist größer als DE und DF.


Fig. 7.

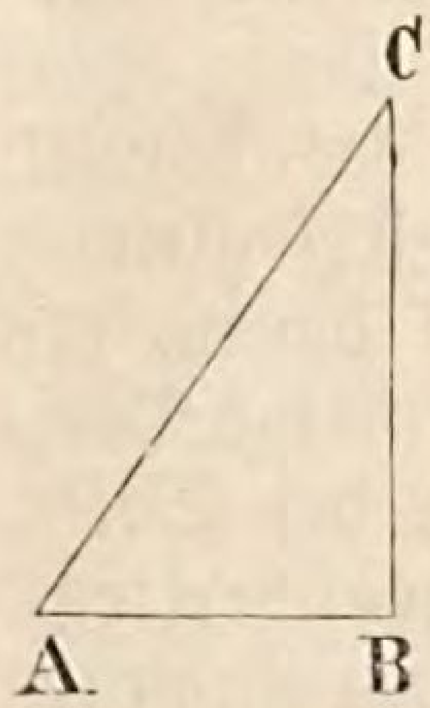
Soweit der Lehrsatz V das rechtwinklige Dreieck angeht, wollen wir seine Fassung ändern, indem wir die **Bezeichnung** einführen, welche für die Seiten **des rechtwinkligen Dreiecks** in Gebrauch sind.

Man nennt im **rechtwinkligen Dreiecke**

die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die **Hypotenuse**
und die beiden Seiten, von welchen der rechte Winkel eingeschlossen wird, die **Katheten,** jede einzelne, eine **Kathete.**

Im Dreieck MNP (Fig. 6) ist

NP die Hypotenuse,
MN eine Kathete
und MP eine Kathete.


Fig. 8.

Im Dreieck ABC (Fig. 8) ist

AC die Hypotenuse
AB ist eine Kathete
und BC ist eine Kathete.

Blicken wir nach dieser Auseinandersetzung auf Lehrsatz V zurück; derselbe sagt uns, daß im rechtwinkligen Dreieck die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, größer ist als die beiden anderen Seiten. Wenn wir uns der Ausdrücke Hypotenuse und Kathete bedienen, so haben wir darum den Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede der beiden Katheten.

Im Dreieck MPN (Fig. 6) ist demnach:

NP > MN und
NP > MP.

und im Dreieck ABC (Fig. 8) haben wir:

AC > BC
AC > AB.

§ 108. Der vierte Congruenzsatz bei stumpfwinkligen und rechtwinkligen Dreiecken.

Nach dem vierten Congruenzsatze können wir die Congruenz zweier Dreiecke erschließen, wenn wir wissen, daß in denselben wechselseitig gleich sind:

[1]) Denn eine Strecke kann entweder größer, gleich oder kleiner sein als eine zweite Strecke. [2]) Denn gleichen Seiten liegen nach Lehrsatz I gleiche Winkel gegenüber. [3]) Denn der kleineren Seite liegt nach Lehrsatz III auch der kleinere Winkel gegenüber.

1) zwei Seiten,
2) der Winkel, welcher der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt.

Es scheint, als ob wir erst immer durch Messung feststellen müßten, ob die gleichen Winkel auch wirklich der größern der wechselseitig gleichen Seiten gegenüberliegen. Indessen in zwei Fällen, die für uns besonders wichtig sind, bleibt uns die Messung erspart, wenn wir den Lehrsatz V berücksichtigen.

Wir wollen annehmen, wir hätten zwei stumpfwinklige Dreiecke, dieselben mögen übereinstimmen:

1) in der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt,
2) in einer andern Seite,
3) in dem stumpfen Winkel. Aus Lehrsatz V wissen wir nun, ohne eine Messung vorzunehmen, daß die Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, die größte der Dreiecksseiten ist, daß ihr keine andere von den Dreiecksseiten gleichkommt. Daher genügen unsere beiden stumpfwinkligen Dreiecke vollständig den Bedingungen des vierten Congruenzsatzes, denn es sind in ihnen zwei Seiten wechselseitig gleich und der Winkel, welcher der größeren der wechselseitig gleichen Seiten gegenüberliegt. Wir haben darum den

Lehrsatz VI. Zwei stumpfwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, in einer andern Seite und in dem stumpfen Winkel übereinstimmen.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist, wie wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben, die Hypotenuse größer als jede der Katheten. Wenn also zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und in einer der Katheten übereinstimmen, so sind in ihnen zwei Seiten[1]) wechselseitig gleich und der Winkel[2]), welcher der größeren der Seiten gegenüberliegt; die beiden Dreiecke sind deshalb nach dem vierten Congruenzsatze mit einander congruent. Wir haben demnach den

Lehrsatz VII. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Hypotenuse und in einer der Katheten übereinstimmen.

Die beiden Dreiecke EMF (Fig. 9) und SPT (Fig. 10) sind rechtwinklig, denn die beiden Winkel M und P betragen einen Rechten. Wenn wir die beiden Hypotenusen EF und ST

[1]) Die Hypotenuse und eine Kathete. [2]) Der rechte Winkel, welcher der Hypotenuse gegenüberliegt.

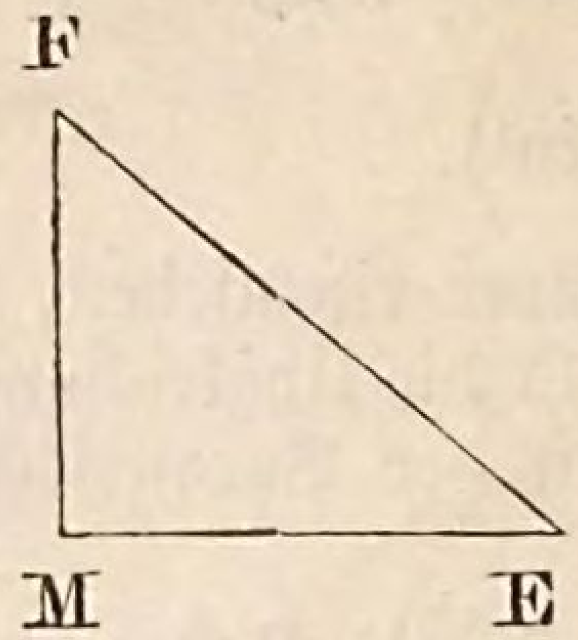


Fig. 9.

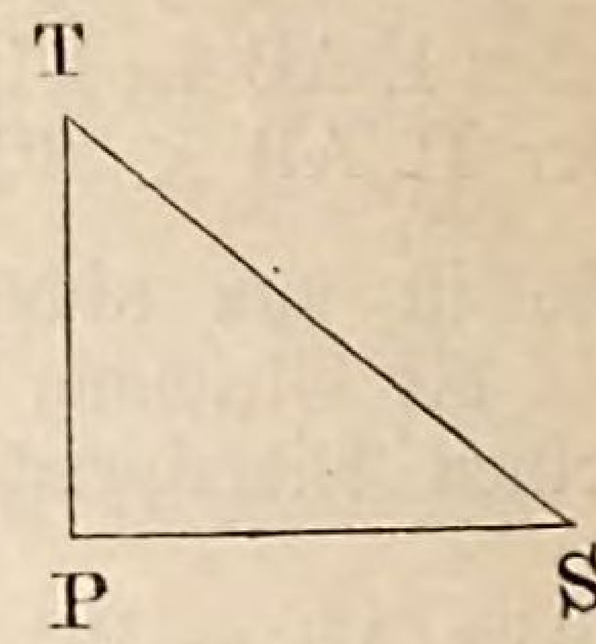


Fig. 10.

ausmessen, werden wir finden, daß EF = ST ist. Ebenso wird die Messung ergeben, daß die beiden Katheten PS und ME einander gleich sind. Wir wissen dann, daß die beiden rechtwinkligen Dreiecke EMF und SPT in der Hypotenuse und in einer Kathete übereinstimmen und können nach dem vorigen Lehrsatze schließen, daß

$$\triangle\ EMF \cong \triangle\ SPT \text{ ist.}$$

Aufgaben zum Abschnitt A. 1) In dem Dreieck ABC (Fig. 11) ist AB = AC, in dem

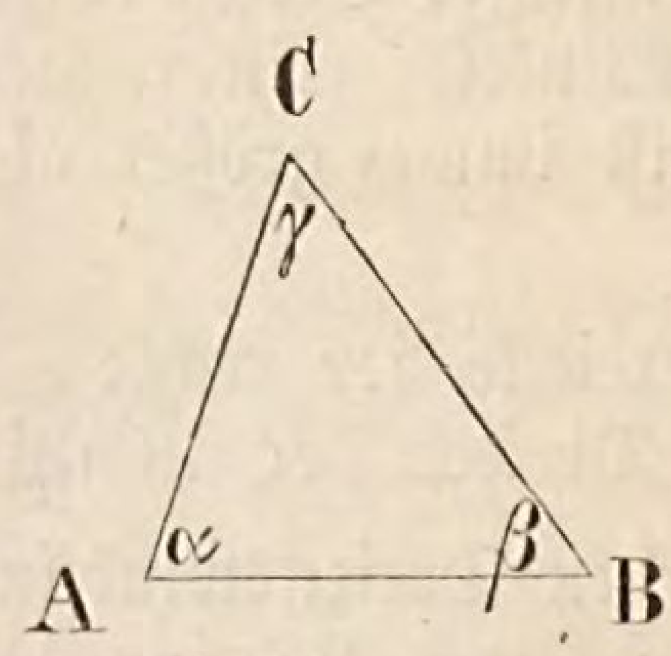


Fig. 11.

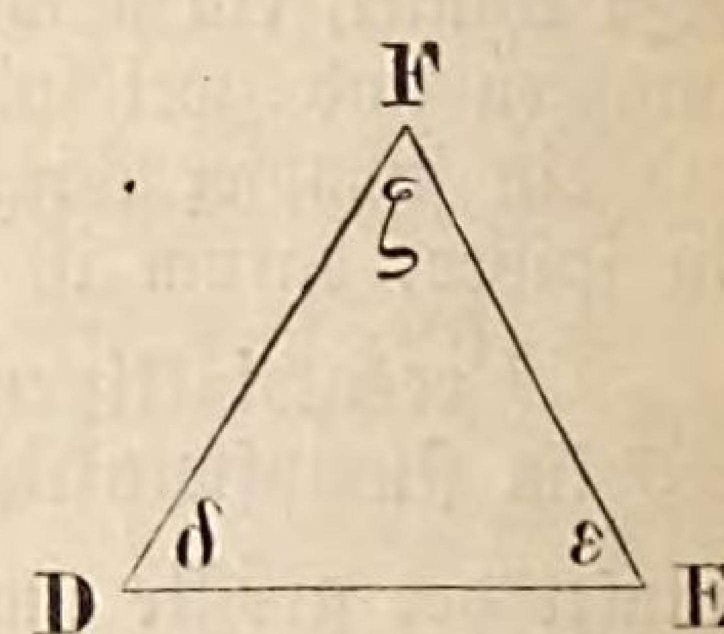


Fig. 12.

Dreieck DEF (Fig. 12) ist DE = EF = FD. Welche Winkel sind nach Lehrsatz I in den beiden Dreiecken einander gleich?

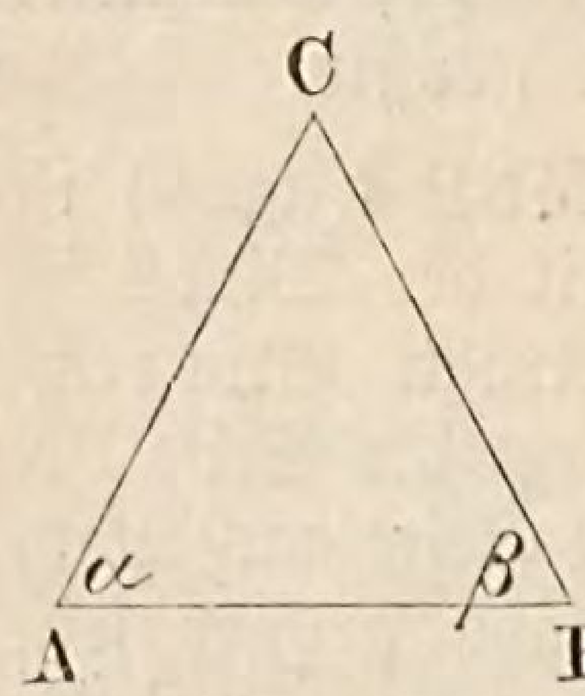


Fig. 13.

2) In dem Dreieck ABC (Fig. 13) ist $\alpha = \beta$, in dem Dreieck DEF (Fig. 14) ist $\delta = \varepsilon$; welche Seiten sind in Folge dessen nach Lehrsatz II einander gleich?

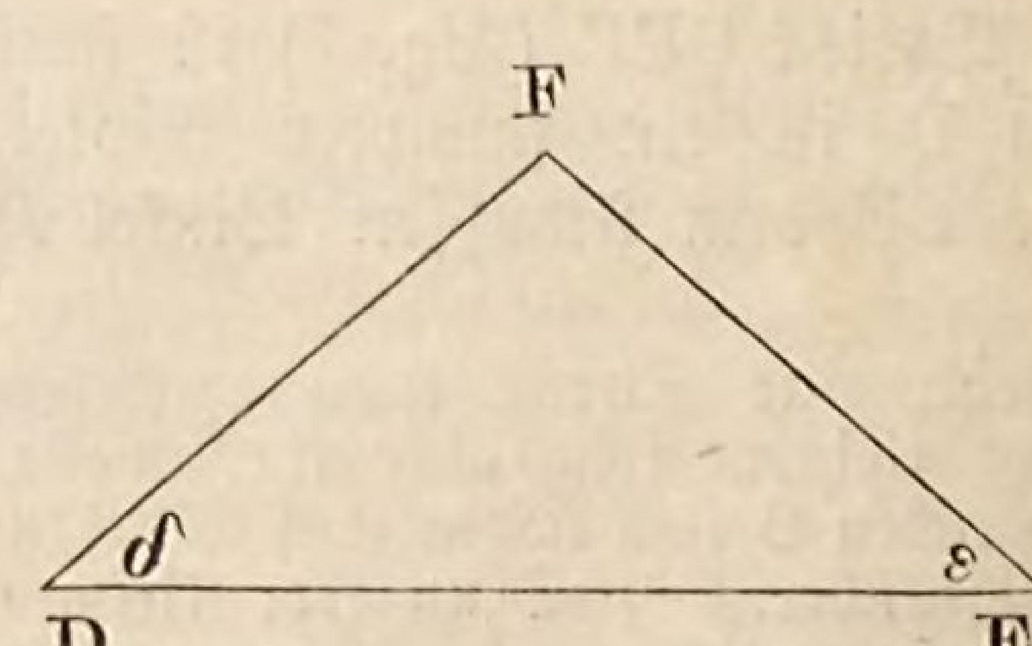
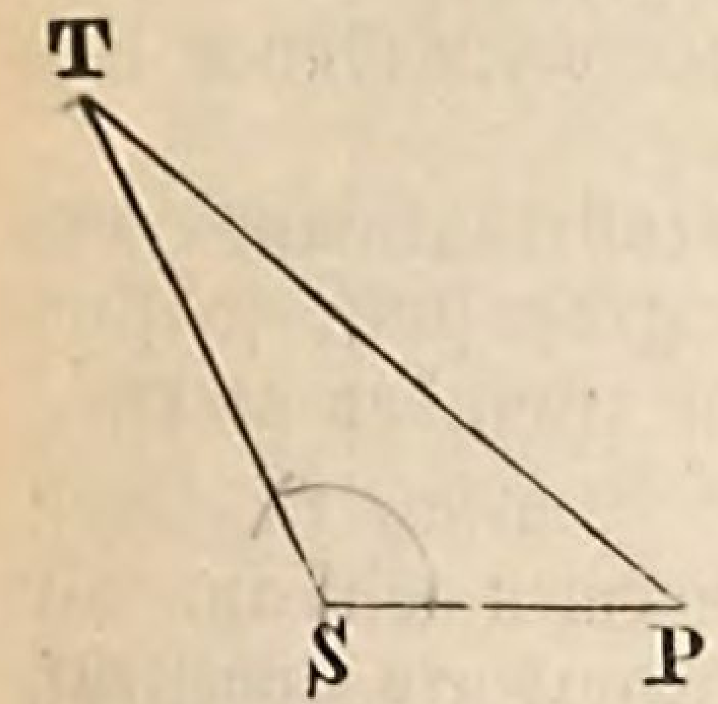
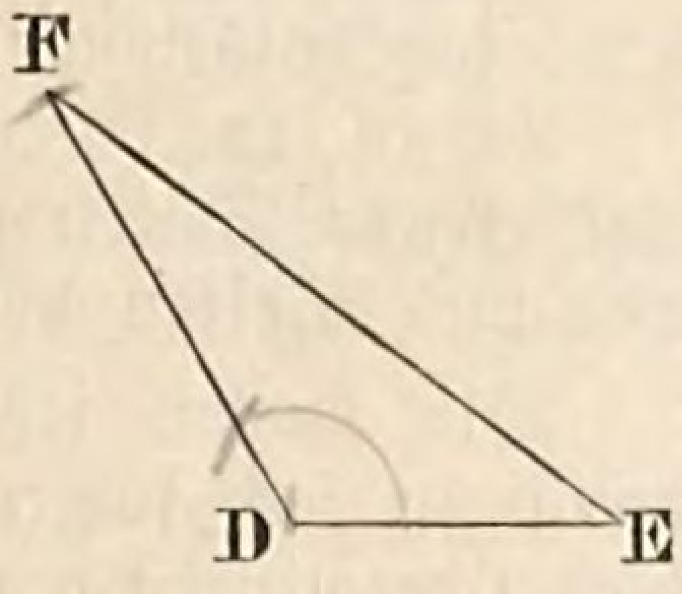


Fig 14.

3) In dem Dreieck SPT (Fig. 15) ist PT > ST und ST > PS. Welche Ungleichungen hingegen bestehen deshalb zwischen den Winkeln des Dreiecks SPT?


Fig. 15.

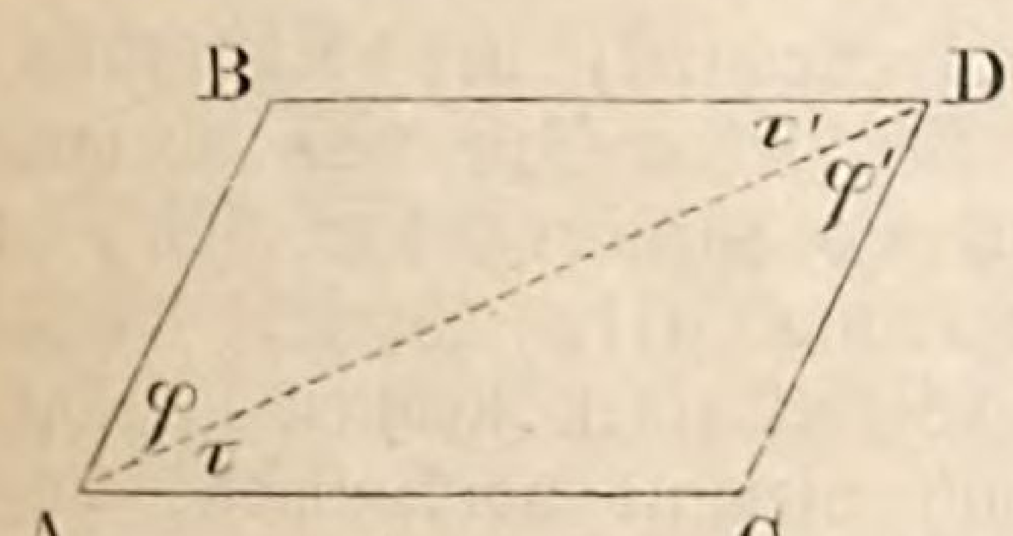

Fig. 16.

4) Die Messung mit dem Transporteur möge ergeben haben, daß in Dreieck DEF (Fig. 16) der Winkel D größer sei als der Winkel F, was folgt daraus für die gegenüberliegenden Seiten?

5) Im Dreieck SPT (Fig 15) ist S ein stumpfer Winkel, im Dreieck DEF (Fig. 16) ist D ein stumpfer Winkel, welche Seiten sind in Folge dessen die größten in den stumpfwinkligen Dreiecken PST und DEF?

D. Das Parallelogramm.

§ 109. Definition des Parallelogramms. Schon im fünften Briefe sind wir auf das Viereck eingegangen; wir haben die Seiten- und Winkelzahl desselben festgestellt, wir haben besprochen, was man unter einer Diagonale versteht und bewiesen, daß die Summe der Winkel eines Vierecks immer gleich 4 Rechten sei. In diesem Abschnitte wollen wir Vierecke von ganz besonderer Beschaffenheit, nämlich mit parallelen Seiten, behandeln. In Figur 17 sehen wir das Viereck ABCD, der erste Blick lehrt uns, daß die Gegenseiten


Fig. 17.

d. h. die Seiten, welche einander gegenüberliegen, parallel laufen.

AC ist parallel BD und
AB ist parallel CD, in Zeichen:
AC || BD und AB || CD.

Ein Viereck wie ABCD nennt man ein Parallelogramm. Man versteht unter einem **Parallelogramm** immer ein **Viereck**, dessen **Gegenseiten parallel** sind.

Wenn wir die Seiten des Parallelogramms ABCD in Fig. 17 messen, finden wir, daß die parallelen Gegenseiten einander gleich sind; es ist nämlich

$$AC = BD \text{ und } AB = CD.$$

Wird diese Beobachtung verallgemeinert, so gelangen wir zu dem

Lehrsatz VIII. Bei einem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

Wir wollen diesen Lehrsatz beweisen, indem wir uns auf den oft verwendeten Satz stützen, daß innere Wechselwinkel bei Parallelen einander gleich sind.

Voraussetzung. Das Viereck ABCD in Figur 17 ist ein Parallelogramm, d. h. es ist AC || BD und AB || CD.

Behauptung. AC = BD und AB = CD.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, ziehen wir uns die Diagonale AD. Durch die Diagonale wird das Parallelogramm in die beiden Dreiecke ACD und ABD zerlegt.

In denselben ist

AD = AD nach Grundsatz I.
$\tau = \tau'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AC und BD, geschnitten von AD.
$\varphi = \varphi'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD, geschnitten von AD.

Die beiden Dreiecke ACD und ABD stimmen also in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein; sie sind nach dem dritten Congruenzsatz mit einander congruent, in Zeichen, es ist

$$\triangle ACD \cong \triangle ABD.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; wie wir bewiesen haben, ist

$\varphi' = \varphi$, folglich auch
AC = BD, was behauptet war.

Ferner ist, wie wir gezeigt haben,

$\tau = \tau'$, daher auch
AB = CD, was behauptet war.

Wir kommen jetzt zu einem **zweiten wichtigen Lehrsatze** über das Parallelogramm. In dem Parallelogramm ABDC (Fig. 17) liegen die Winkel

A[1]) und D[1]), B und C

[1]) Unter A verstehen wir den Winkel BAC und unter D den Winkel BDC. A ist durch die Diago-

einander gegenüber. Wir behaupten, daß A = D und B = C ist und kleiden diese Behauptung in den

Lehrsatz IX. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Voraussetzung. Das Viereck ABDC (Fig. 17, siehe Seite 119) ist ein Parallelogramm, d. h. es ist

$$AC \parallel BD \text{ und } AB \parallel CD.$$

Behauptung. Unter den vier Winkeln des Parallelogramms bestehen folgende Gleichungen:

$$A = D, \quad B = C.$$

Beweis. Wir beweisen gerade ebenso wie beim vorigen Lehrsatze, daß

$$\triangle\ ACD \cong \triangle\ ABD \text{ ist,}$$

und machen dann folgende Schlüsse:

Wie wir wissen, ist

$$AD = AD;$$

der Seite AD liegt im Dreieck ACD der Winkel C und Dreieck ABD der Winkel B gegenüber. In congruenten Dreiecken sind die Winkel gleich, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, daher ist

$C = B$ oder $B = C$, was behauptet war.

Es ist ferner:

$$\tau = \tau'$$
$$\varphi = \varphi'$$
$$\tau + \varphi = \tau' + \varphi'$$

oder, wie in der Anmerkung erläutert ist:

$A = D$, was behauptet war.

~3.II.10.

§ 110. Folgerungen aus den beiden letzten Lehrsätzen. Wie der Schüler sich durch eine Messung überzeugen kann, sind in dem Parallelogramm ABCD (Fig. 18) die beiden **anstoßenden Seiten** AB und AD einander **gleich;** in Zeichen, es ist

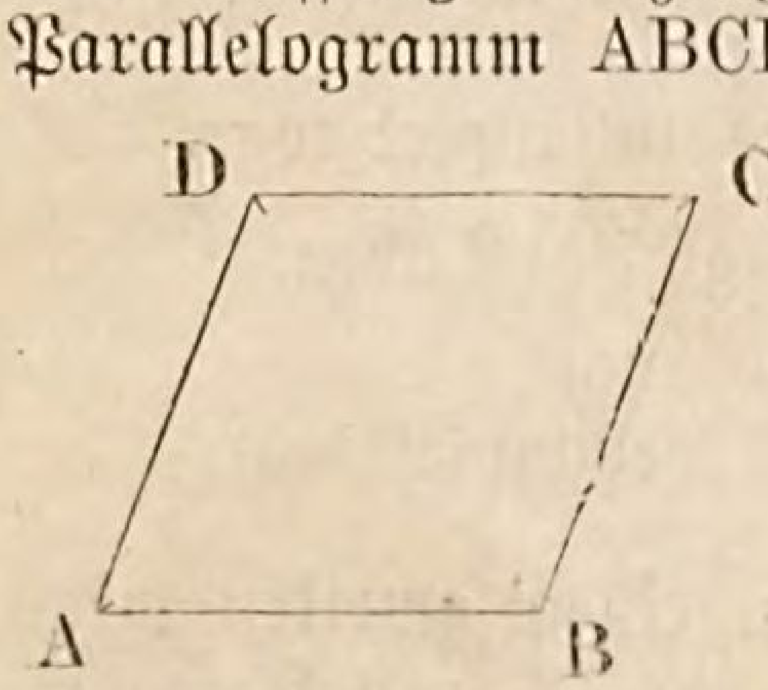


Fig. 18.

$$AB = AD.$$

Wie wir durch Lehrsatz VIII erfahren haben, sind in einem Parallelogramm die Gegenseiten gleich groß; es ist darum:

AB = CD und AD = BC, also im Ganzen[1])

$$AB = AD = CD = BC$$

d. h. in Worten, alle **vier Seiten** des Parallelogramms sind einander **gleich.**

Aus den fettgedruckten Worten können wir den Satz entnehmen:

Wenn in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich groß sind, so sind alle vier Seiten desselben einander gleich.

Wir wollen jetzt aus Lehrsatz IX einen wichtigen Satz folgern. Nehmen wir an, wir hätten vermittelst des Transporteurs festgestellt, daß der Winkel α in Fig. 19 einen Rechten

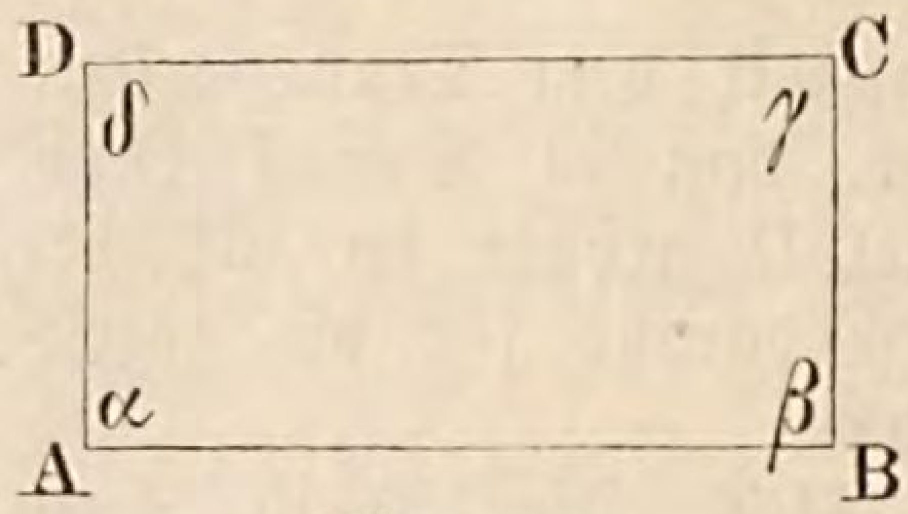


Fig. 19.

beträgt. Wie wir aus Lehrsatz IX wissen, muß auch der gegenüberliegende Winkel γ gleich einem Rechten sein, α und γ betragen mithin zwei Rechte. Weil nun in jedem Viereck die Summe aller vier Winkel gleich vier Rechten ist, müssen die Winkel β und δ auch zwei Rechte ausmachen. β und δ sind aber gleich groß, weil sie sich in dem Parallelogramm ABCD gegenüberliegen. Es muß also β sowohl wie δ auch gleich einem Rechten sein. Wir wissen jetzt, daß $\alpha = R$, $\beta = R$, $\gamma = R$ und $\delta = R$ ist.

Also: wenn α einen Rechten beträgt, so müssen auch β, γ und δ gleich einem Rechten sein, oder allgemein:

Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein Rechter ist, so betragen alle vier Winkel einen Rechten.

§ 111. Das Rechteck, der Rhombus, das Quadrat. Der letzte Satz des vorigen Paragraphen hat uns darüber belehrt, daß in einem Parallelogramm alle Winkel Rechte sind, wenn ein Winkel einen Rechten beträgt. Es kann demnach niemals vorkommen, daß ein Parallelogramm rechte und schiefe[2]) Winkel zugleich enthält. Wir finden in einem Parallelogramm entweder rechte oder schiefe Winkel. Man spricht deshalb in der Mathematik häufig von **rechtwinkligen** und **schiefwinkligen Parallelogrammen.**

Ein **Parallelogramm,** dessen Winkel **Rechte sind,** wird ein **Rechteck** genannt.

ABCD (Fig. 19) ist deshalb ein Rechteck.

---

nale AD in die beiden Winkel τ und φ und D in die beiden Winkel τ' und φ' zerlegt. A ist deswegen gleich $\tau + \varphi$ und D ist gleich $\tau' = \varphi'$.

---

[1]) Weil, wie vorausgesetzt, AB = AD. [2]) Unter schiefen Winkeln versteht man spitze und stumpfe Winkel.

Die Parallelogramme werden ferner nach den Seiten eingetheilt. Man nennt nämlich **Parallelogramme ungleichseitig,** wenn die anstoßenden Seiten[1]) ungleich sind und **gleichseitig,** wenn die Seiten alle gleich sind.

Das Parallelogramm ABCD (Fig. 17) ist ungleichseitig, weil AC > AB und BD > CD.

Dagegen sind die beiden Parallelogramme ABCD (Fig. 20) und EFGH (Fig. 21) gleichseitig, weil in Figur 20

AB = BC = CD = DA

und in Figur 21

EF = FG = GH = HE ist.

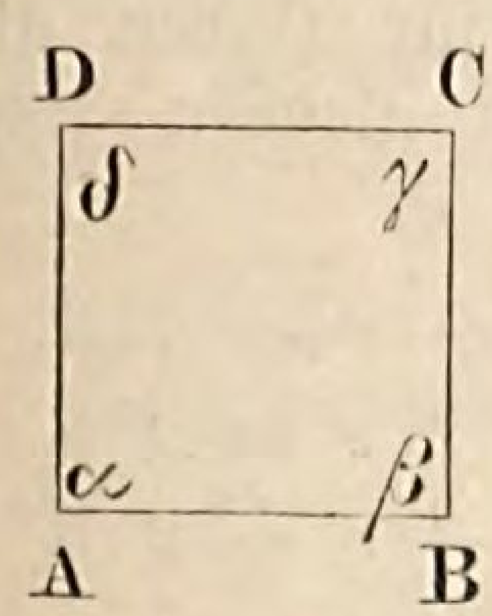


Fig. 20.

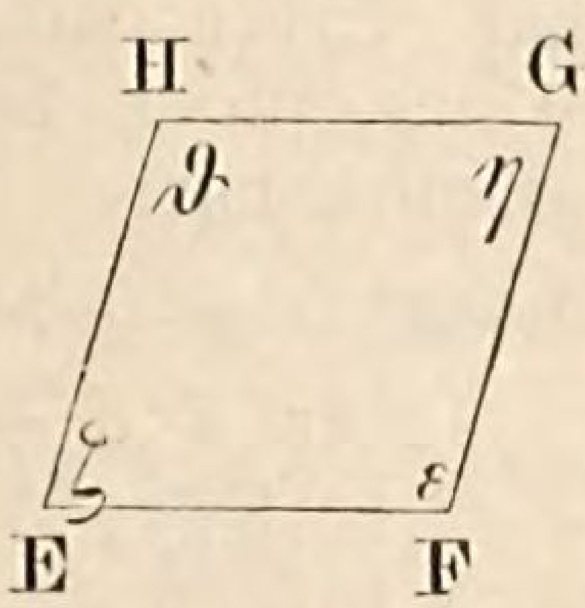


Fig. 21.

Bei gleichseitigen Parallelogrammen unterscheidet man **Quadrate** und **Rhomben.**

Ein **gleichseitiges Parallelogramm** heißt ein **Quadrat,** wenn seine Winkel **Rechte** sind. Ein Quadrat ist also ein Rechteck, dessen Seiten gleich sind[2]).

Ein gleichseitiges Parallelogramm heißt ein **Rhombus**[3]), wenn seine Winkel **schief** sind.

Das Viereck ABCD ist ein Quadrat, das das Viereck EFGH ein Rhombus.

§ 112. Umkehrung des Lehrsatz VIII. Beim Lehrs. VIII § 109 haben wir vorausgesetzt, daß uns ein Parallelogramm gegeben ist, und wir haben behauptet, daß die Gegenseiten einander gleich seien. Wenn wir den Lehrsatz VIII umkehren, d. h. die Behauptung zur Voraussetzung und die Voraussetzung zur Behauptung machen, erhalten wir den

Lehrsatz X. Ein Viereck, bei welchem die Gegenseiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Voraussetzung. Uns ist in Figur 22 ein Viereck STUV gegeben; in demselben ist

ST = UV und SV = UT.

Behauptung. Das Viereck STUV ist ein Parallelogramm, d. h. ST ‖ UV und SV ‖ UT.

Beweis. Wir ziehen uns die Diagonale TV, dann erhalten wir die beiden Dreiecke SVT und UVT. In denselben ist:

TV = TV nach Grundsatz I.
ST = UV nach der Voraussetzung.
SV = UT nach der Voraussetzung.

Die beiden Dreiecke SVT und UVT stimmen also in allen drei Seiten überein; sie sind daher nach dem zweiten Congruenzsatze mit einander congruent, in Zeichen:

$\triangle$ SVT $\cong$ $\triangle$ UVT.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber; wie wir wissen, ist

SV = UT, daher auch
$\sigma = \varphi$.

Es ist ferner ST = UV, mithin auch
$\upsilon = \tau$.

Sehen wir uns zunächst die beiden Winkel σ und φ genauer an; wir werden dann leicht bemerken, daß σ und φ innere Wechselwinkel sind bei den Geraden ST und UV geschnitten von TV. Nun wird sich der Schüler noch des Satzes[1]) erinnern: Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, sind parallel, wenn zwei Wechselwinkel gleich sind.

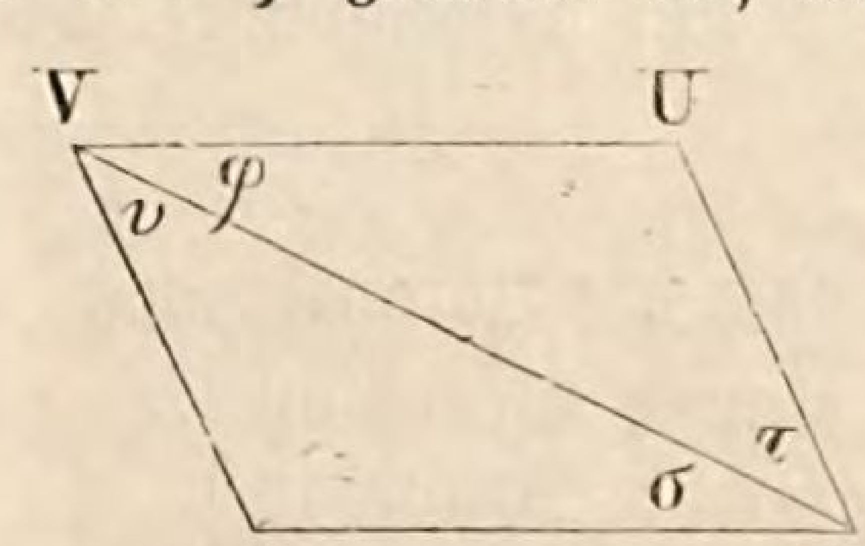


Fig. 22.

Die Wechselwinkel σ und φ sind gleich groß, darum laufen die Geraden ST und UV parallel, in Zeichen, es ist:

ST ‖ UV, was behauptet war.

Wir hatten ferner die Gleichung $\upsilon = \tau$. υ und τ sind Wechselwinkel bei den Geraden SV und UT, geschnitten von TV; nach dem eben angeführten Satze ist deshalb auch:

SV ‖ UT, was behauptet war.

---

[1]) Die gegenüberliegenden Seiten müssen immer gleich groß sein, wie wir in § 109 bewiesen haben.
[2]) In einigen mathematischen Lehrbüchern wird das Quadrat nicht zu den Rechtecken gerechnet; man faßt vielmehr als Rechteck nur ein rechtwinkliges Parallelogramm auf, bei dem die anstoßenden Seiten ungleich sind, wie in Fig. 19. Ein solches ungleichseitiges Rechteck ist langgestreckt, es wird darum auch Oblongum (länglich, langgestreckt) genannt.
[3]) Für Rhombus hat man auch den Ausdruck Raute.

[1]) Siehe Lehrsatz VII Seite 63. Wir haben die Fassung des Lehrsatzes so verändert, daß sie für unsern Fall paßt.

§ 113. a. **Ein Hilfssatz.** Wir wollen in diesem Paragraphen einen Satz behandeln, welcher zwar nicht Eigenschaften eines Parallelogramms betrifft aber zum Beweise des folgenden Lehrsatzes gebraucht wird. In Figur 23 werden die beiden Geraden MN und ST von der dritten Geraden UV geschnitten; es entstehen dadurch die entgegengesetzten Winkel

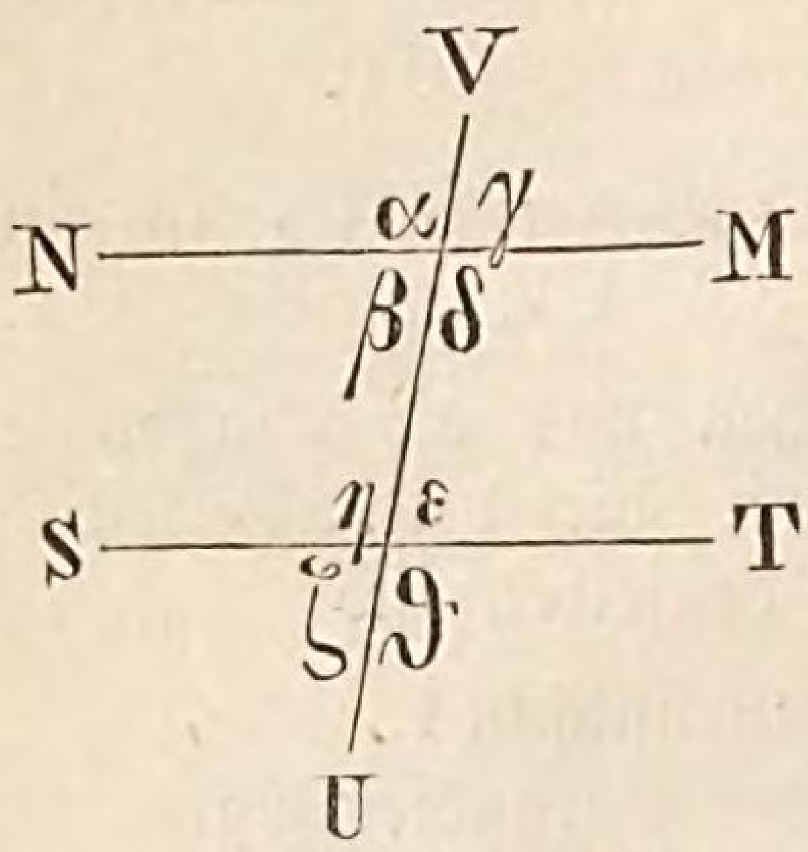


Fig. 23.

β und η $\quad$ γ und ϑ
α und ζ $\quad$ δ und ε.

Wir behaupten nun, daß die beiden geschnittenen Geraden MN und ST parallel sind, wenn zwei entgegengesetzte Winkel zusammen gleich zwei Rechten sind, wenn wir also etwa haben $\beta + \eta = 2$ R. Verallgemeinern wir die Behauptung, so ergiebt sich der

Hilfssatz. Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, laufen parallel.

Voraussetzung. $\beta + \eta = 2$ R.

Behauptung. MN || ST.

Beweis. α und β sind Nebenwinkel, darum ist:

$\alpha + \beta = 2$ R
$\eta + \beta = 2$ R nach der Voraussetzung
$\alpha + \beta = \eta + \beta$ nach Grundsatz II.
$\beta = \beta$ nach Grundsatz I.
$\alpha + \beta - \beta = \eta + \beta - \beta$ nach Grundsatz IV,
oder $\alpha = \eta$.

α und η sind aber Gegenwinkel, und wenn zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel gleiche Größe haben, sind sie nach Lehrsatz VII Seite 63 einander parallel. Es ist darum:

MN || ST, was behauptet war.

§ 113. b. **Umkehrung des Lehrsatz IX.** Der Lehrsatz IX heißt:

In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

Wenn wir diesen Lehrsatz umkehren, erhalten wir

Lehrsatz XI. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Voraussetzung. Wir haben das Viereck DEFG (Fig. 24); in demselben ist: $\delta = \zeta$ und $\varepsilon = \eta$.

Behauptung. Das Viereck DEFG ist ein Parallelogramm, d. h. in dem Viereck DEFG ist:

DG || EF und DE || FG.

Beweis. Die Summe der vier Winkel eines Vierecks ist gleich vier Rechten, also ist:

$$\delta + \varepsilon + \zeta + \eta = 4 \text{ R},$$

oder in anderer Reihenfolge:

$$\delta + \zeta + \varepsilon + \eta = 4 \text{ R}.$$

Es ist $\delta = \zeta$ und $\varepsilon = \eta$ nach der Voraussetzung. Setzen wir für ζ den gleichen Winkel δ und für η den gleichen Winkel ε ein, so erhalten wir:

I. $\delta + \delta + \varepsilon + \varepsilon = 4$ R.
oder $2\,\delta + 2\,\varepsilon = 4$ R.
daher $\delta + \varepsilon = 2$ R[1]).

δ und ε sind entgegengesetzte Winkel bei den Geraden DG und EF geschnitten von DE. Nach dem vorigen Hilfssatz sind zwei gerade Linien parallel, welche von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen. Es ist daher:

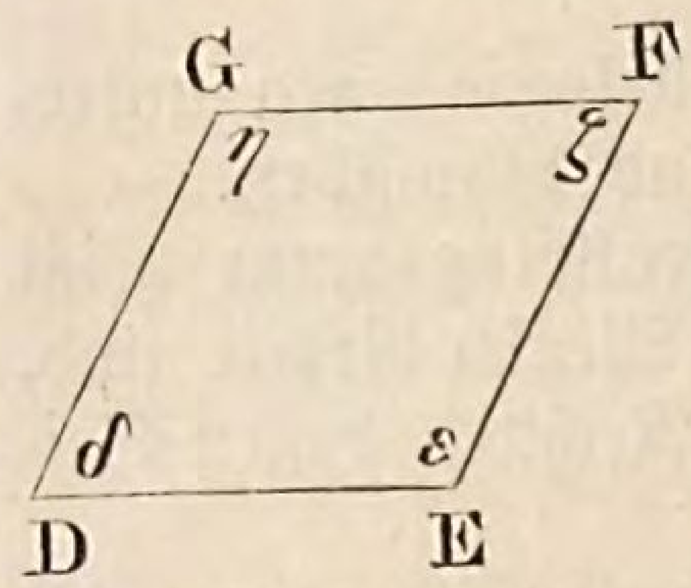


Fig. 24.

DG || EF, was behauptet war.

Wir hatten die Gleichung:

I. $\delta + \zeta + \varepsilon + \eta = 4$ R.

Vertauschen wir wieder ζ und δ, aber nicht wie vorher η mit ε, sondern ε mit η, so ergiebt sich:

II. $\delta + \delta + \eta + \eta = 4$ R
oder $2\,\delta + 2\,\eta = 4$ R
daher $\delta + \eta = 2$ R[2]).

δ und η sind entgegengesetzte Winkel bei den Geraden DE und FG geschnitten von DG. Weil δ und η zusammen zwei Rechte betragen, sind nach dem Hilfssatz DE und FG parallel, in Zeichen:

DE || FG, was behauptet war.

---

[1]) Denn $\delta + \varepsilon$ ist die Hälfte von $2\,\delta + 2\,\varepsilon$.
[2]) Denn $\delta + \eta$ ist die Hälfte von $2\,\delta + 2\,\eta$.

Einem Herzen, das will, ist nichts unmöglich.

Lection 14.

A. Fortsetzung der Lehre vom Parallelogramm.

§ 114. Zwei gleiche und parallele Gegenseiten beim Viereck. In dem Viereck ABCD (Fig. 1) mögen die beiden Seiten AC und BD gleich und parallel sein; wir behaupten dann, daß die beiden anderen Gegenseiten AB und CD auch parallel sind, daß also das Viereck ABCD ein Parallelogramm sei. Wird diese Behauptung verallgemeinert, so erhalten wir den

Lehrsatz I. Ein Viereck, bei welchem zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

Voraussetzung. Im Viereck ABCD (Fig. 1) ist 1) AC = BD, 2) AC ‖ BD.

Behauptung. Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis. Wir verbinden die Punkte A und D durch die Diagonale AD; es entstehen dann die beiden Dreiecke ACD und ABD, in denselben ist:

AC = BD nach der Voraussetzung,
AD = AD nach Grundsatz I.

Ferner ist $\tau = \tau'$ [1]).

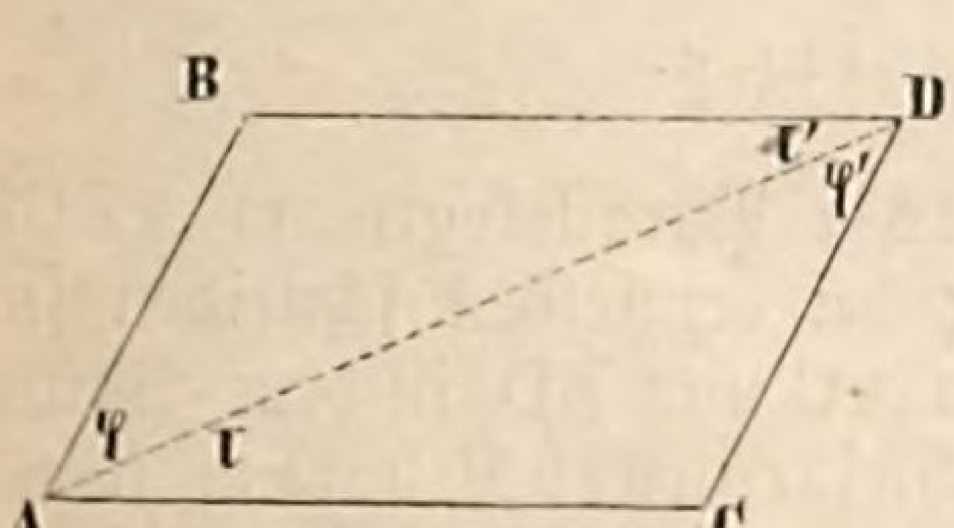


Fig. 1.

Die beiden Dreiecke ABD und ACD stimmen also in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein; sie sind nach dem ersten Congruenzsatze congruent, in Zeichen

$\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ ACD.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber, es ist

$\tau = \tau'$, daher auch
CD = AB.

Wir wissen jetzt, daß in dem Viereck ABCD ist: AC = BD nach der Voraussetzung
und CD = AB, wie eben bewiesen.

[1]) $\tau = \tau'$ als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AC und BD geschnitten von AD.

Es sind also die Gegenseiten einander gleich. Ein Viereck, welches diese Eigenschaften hat, ist nach § 112 Lehrs. X ein Parallelogramm. Das Viereck ABCD ist deswegen ein Parallelogramm, wie behauptet war.

§ 115. Die Diagonalen eines Parallelogramms. In dem Parallelogramm ABCD (Fig. 2) sind die Ecken A und C durch die Diagonale AC, und die Ecken B und D durch die Diagonale BD mit einander verbunden. Die beiden Diagonalen schneiden sich in dem Punkte E. Wenn wir die Strecken AE und EC, ferner BE und DE messen, finden wir, daß

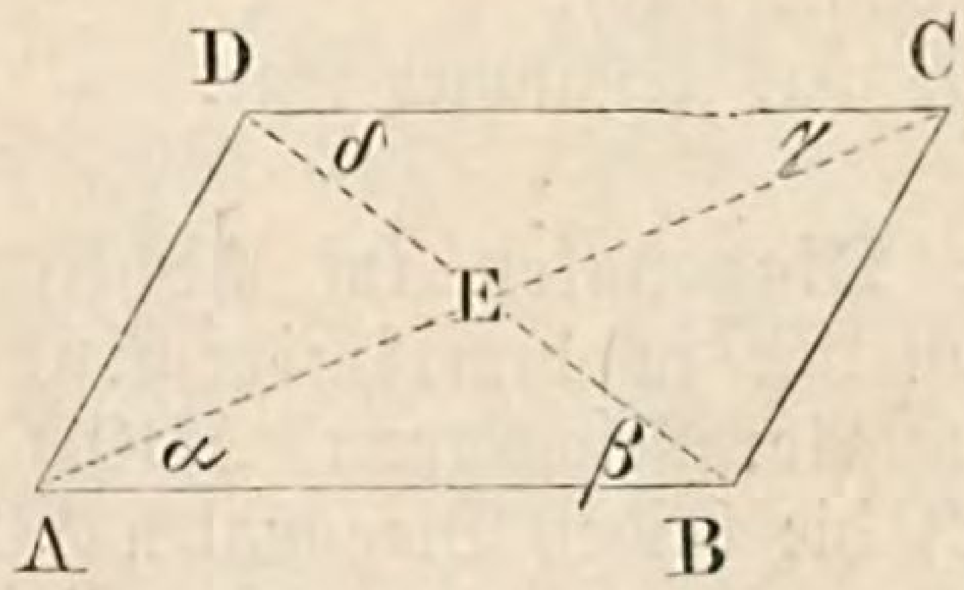


Fig. 2.

AE = EC und BE = ED ist.

AC ist also ebenso wie BD im Schnittpunkte E halbirt, die beiden Diagonalen AC und BD halbiren sich gegenseitig. Wenn wir diese Beobachtung in einen allgemeinen Satz kleiden, erhalten wir den

Lehrsatz II. In einem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

Voraussetzung. Das Viereck ABCD (Fig. 2) ist ein Parallelogramm, d. h. es ist:

AB ‖ CD und AD ‖ BC.

In diesem Parallelogramm haben wir die Diagonalen AC und BD, welche sich im Punkte E schneiden.

Behauptung. Es ist AE = EC und BE = ED.

Beweis. Wir wollen die beiden Dreiecke ABE und CDE betrachten, in denselben ist:

AB = CD [1])
$\alpha = \gamma$ [2])
$\beta = \delta$ [3]).

[1]) Denn die Gegenseiten in einem Parallelogramm sind einander gleich. [2]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von AC. [3]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von BD.

Die beiden Dreiecke ABE und CDE stimmen also in einer Seite überein und in den Winkeln, welche dieser Seite anliegen; sie sind daher nach dem ersten Theile des dritten Congruenzsatzes congruent, in Zeichen; es ist:

$\triangle ABE \cong \triangle CDE.$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber, es ist:

$\beta = \delta$, folglich auch
AE = EC, was behauptet war.

Es ist ferner:

$\alpha = \gamma$, daher auch:
BE = ED, was behauptet war.

~4. VI. 10.

§ 116. Die Diagonalen im Rechteck.

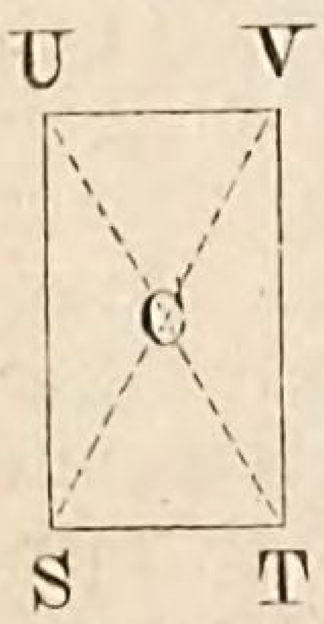


Fig. 3.

Wenn wir in dem schiefwinkligen Parallelogramm ABCD (Fig. 2) die beiden Diagonalen AC und BD messen, finden wir, daß sie nicht gleich groß sind. BD ist kleiner als AC. Anders verhält es sich dagegen **bei einem** rechtwinkligen Parallelogramm oder einem **Rechteck.** In dem Rechteck STUV (Fig. 3) ist jede der beiden **Diagonalen** SV und TU 30 Millimeter lang; sie sind also **gleich groß.** Allgemein haben wir den

Lehrsatz III, In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich groß.

Voraussetzung. Wir haben das Rechteck STUV (Fig. 3).

Behauptung. Es ist SV = TU.

Beweis. Wir wollen die beiden Dreiecke STU und STV[1]) betrachten. In denselben ist:

ST = ST nach Grundsatz I.
SU = TV[2])
$\angle TSU = \angle STV$[3]).

Die beiden Dreiecke stimmen also in zwei Seiten überein und in dem Winkel, welcher von diesen Seiten eingeschlossen wird; sie sind darum nach dem ersten Congruenzsatze mit einander congruent; in Zeichen

$\triangle STU \cong \triangle STV.$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber; es ist

$\angle TSU = \angle STV$, folglich auch
SV = TU, was behauptet war.

Folgerungen aus Lehrsatz III. Wie wir wissen, halbiren sich in einem Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig, es ist deswegen im Rechteck STUV CS = CV und CT = CU. Da nun im Rechteck die ganzen Diagonalen gleiche Größe haben, werden auch die Hälften gleich groß sein, wir werden haben:

CS = CV = CT = CU, d. h.

im Rechteck ist der Schnittpunkt C der Diagonalen von allen vier Ecken gleich weit entfernt.

§ 117. Die Diagonalen im Rhombus und Quadrat. In der Figur 4 haben wir

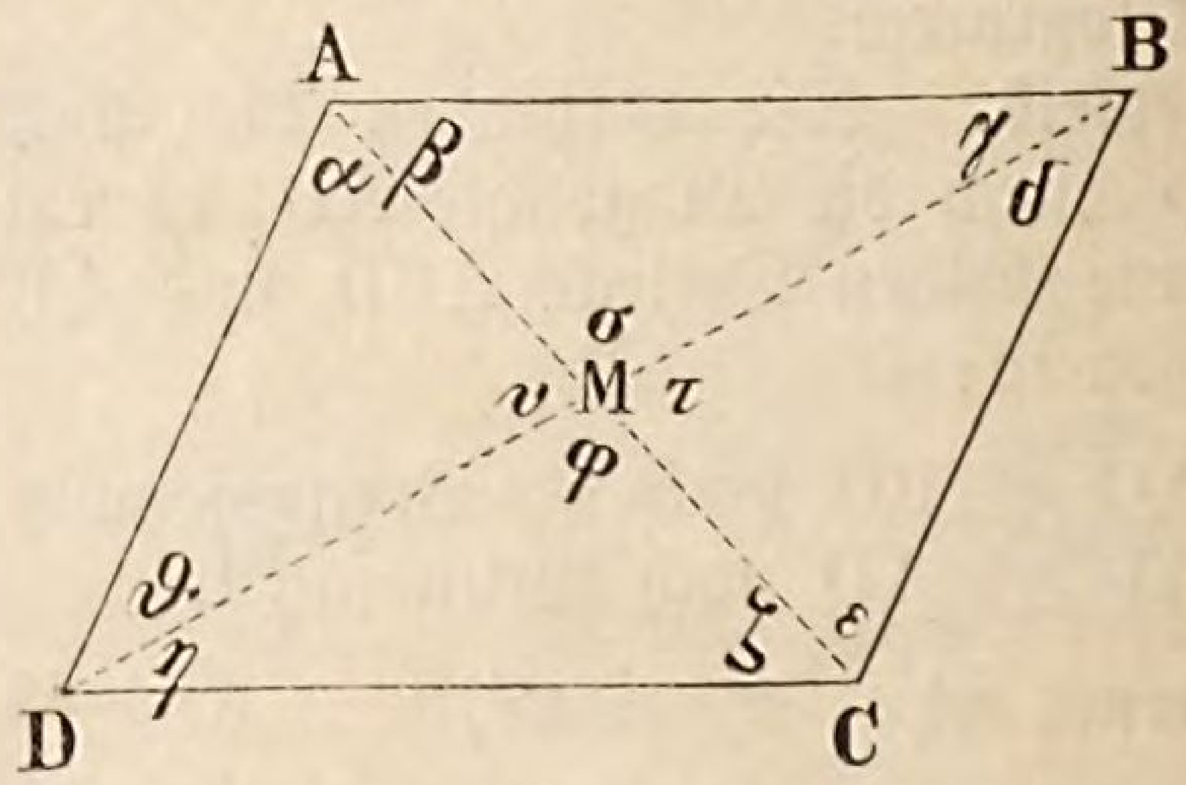


Fig. 4.

ein gleichseitiges[1]) Parallelogramm ABCD (einen Rhombus); bei demselben schneiden sich die Diagonalen AC und BD in dem Punkte M. Um den Schnittpunkt M herum liegen die vier Winkel σ, τ, φ, υ. Die Messung mit dem Transporteur ergiebt, daß diese vier Winkel Rechte sind. Noch auf eine weitere Eigenschaft des gleichseitigen Parallelogramms ABCD wollen wir aufmerksam machen. Die Diagonalen zerlegen jeden der Winkel A, B, C, D des Parallelogramms in zwei Winkel, die wir in Fig. 4 mit griechischen Buchstaben bezeichnet haben. Messen wir diese Winkel, so finden wir, daß

$\alpha = \beta, \quad \varepsilon = \zeta, \quad \gamma = \delta, \quad \eta = \vartheta$ sei,

d. h. die Winkel des gleichseitigen Parallelogramms werden durch die Diagonalen halbirt.

---

[1]) Die beiden Dreiecke STU und STV liegen theilweise in einander, sie haben das kleine Dreieck SCT mit einander gemein. Will sich der Schüler das Dreieck STU für sich allein vorstellen, so muß er sich die Strecke SC fortdenken, will er das Dreieck STV für sich haben, so muß er sich die Strecke TC fortdenken. [2]) Denn bei jedem Parallelogramm, also auch beim Rechteck sind die Gegenseiten gleich groß. [3]) Beide Winkel sind Rechte, denn ein Rechteck ist ja ein Parallelogramm, dessen vier Winkel einen Rechten betragen.

[1]) ABCD ist leider nicht vollkommen gleichseitig, daher sind auch σ, τ, υ, φ nicht vollkommene Rechte.

Wir haben also den

Lehrsatz IV. Die Diagonalen im gleichseitigen Parallelogramm schließen rechte Winkel mit einander ein und halbiren die vier Winkel des Parallelogramms.

Voraussetzung. Wir haben das Parallelogramm ABCD, in demselben ist

$$AB = BC = CD = DA.$$

Behauptung. Es ist:

1) $\sigma = R$, 2) $v = R$, 3) $\tau = R$, 4) $\varphi = R$ und
5) $\alpha = \beta$, 6) $\varepsilon = \zeta$, 7) $\gamma = \delta$, 8) $\eta = \vartheta$.

Beweis. Wir betrachten die beiden Dreiecke ABM und ADM, in denselben ist:

AM = AM nach Grundsatz I.
AB = AD nach der Voraussetzung.
BM = DM[1]).

Die beiden Dreiecke ABM und ADM stimmen also in allen drei Seiten überein; sie sind nach dem zweiten Congruenzsatze mit einander congruent, in Zeichen:

$$\triangle\ ABM \cong \triangle\ ADM.$$

Gleichen Seiten liegen in congruenten Dreiecken gleiche Winkel gegenüber; wie wir wissen, ist

AB = AD; daher auch
$\sigma = v$.

Die beiden Winkel σ und v betragen zusammen zwei Rechte, weil sie einen Gestreckten bilden, da sie nun gleich groß sind, wird jeder von ihnen gleich einem Rechten sein, d. h.

1) $\sigma = R$ und 2) $v = R$, was behauptet war.

Wie wir auf Seite 53 bewiesen haben, sind die vier Winkel, welche von zwei sich schneidenden Geraden eingeschlossen werden, rechte Winkel, wenn einer von ihnen einen Rechten beträgt; daher ist auch

3) $\tau = R$ und 4) $\varphi = R$, was behauptet war.

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke ABM und ADM können wir noch mehr folgern; weil DM = BM ist, muß auch

5) $\alpha = \beta$ sein, was behauptet war.

Es ist weiter: $\alpha = \varepsilon$[2])
$\beta = \zeta$[3]).

[1]) Denn die Diagonalen im Parallelogramm halbiren sich gegenseitig. [2]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AD und BC geschnitten von AC. [3]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von AC.

Setzen wir in Gleichung 5 für α den gleichen Winkel ε und für β den gleichen Winkel ζ ein, so haben wir

6) $\varepsilon = \zeta$, was behauptet war.

Ferner sind die beiden Dreiecke ABM und BCM congruent, denn es ist in ihnen

BM = BM nach Grundsatz I,
AB = BC nach der Voraussetzung
und AM = CM[1]).

Den gleichen Seiten AM und CM liegen die Winkel γ und δ gegenüber, folglich ist auch:

7) $\gamma = \delta$, was behauptet war.

Wir haben weiter: $\gamma = \eta$[2])
$\delta = \vartheta$[3]).

Vertauschen wir in Gleichung 7 γ mit η und δ mit ϑ, so ergiebt sich:

8) $\eta = \vartheta$, was behauptet war.

Bemerkung. Wir haben den Lehrsatz IV an einen Rhombus bewiesen; statt des Rhombus hätten wir auch ein Quadrat wählen können, denn Lehrsatz IV gilt ganz allgemein von gleichseitigen Parallelogrammen. Der Beweis, welchen wir geliefert haben, würde ebenso gut zutreffen, wenn wir den Rhombus ABCD so verschoben, daß ein Quadrat daraus wird.

Aufgaben zur Lehre vom Parallelogramm.

1) In § 109 haben wir bewiesen, daß die Gegenseiten im Parallelogramm gleich sind. Welche Gleichungen können wir demgemäß zwischen den Seiten der Parallelogramme in Figur 5 und 6 aufstellen?

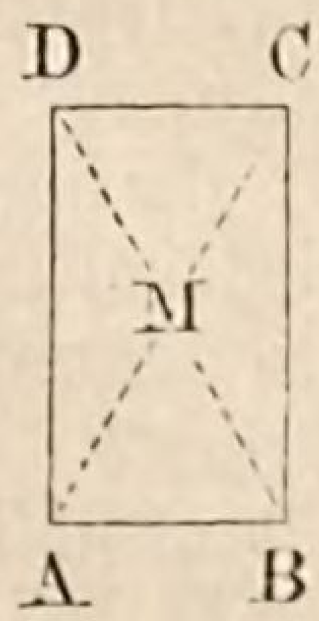


Fig. 5.

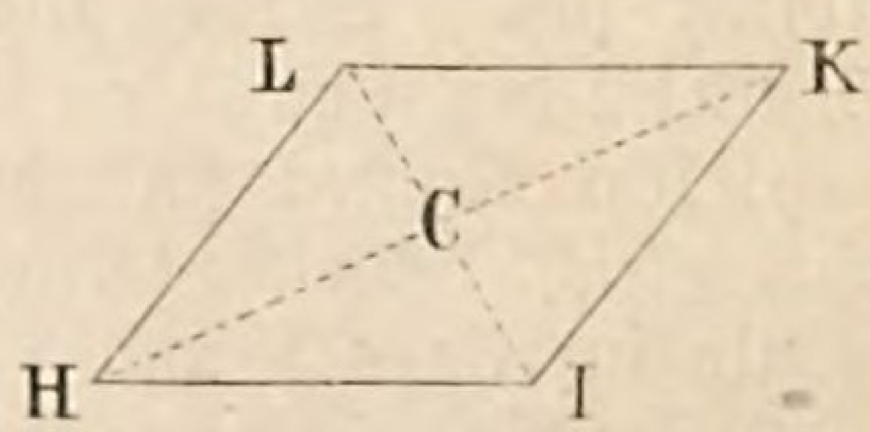


Fig. 6.

2) Gemäß § 109 sind in einem Parallelogramm die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Der Schüler möge angeben, welche Winkel wir aus diesem Grunde in Figur 5 und 6 gleich zu setzen haben.

[1]) Denn die Diagonalen halbiren sich gegenseitig. [2]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD geschnitten von BD. [3]) Als innere Wechselwinkel bei den Parallelen BC und AD geschnitten von BD.

3) Stellen wir uns vor, wir hätten vier Parallelogramme; in jedem derselben mögen die vier Winkel α, β, γ, δ heißen. α und γ, β und δ mögen sich gegenüberliegen. In dem ersten Parallelogramm möge α 50 Grad, in dem zweiten 72 Grad, im dritten 90 Grad, im vierten 120 Grad betragen. Wie groß ist dann:

1) γ[1]), 2) $\beta + \delta$[1]), 3) β, 4) δ

im ersten, zweiten, dritten und vierten Parallegramme?

4) Nehmen wir an, wir hätten durch Messung gefunden, daß in dem Parallelogramm DEFG (Fig. 7) die beiden anstoßenden Seiten DE und DF, in dem Parallelogramm MNPR (Fig. 8) die anstoßenden Seiten MN und MP gleich seien. Was können wir daraus nach § 110 schließen?

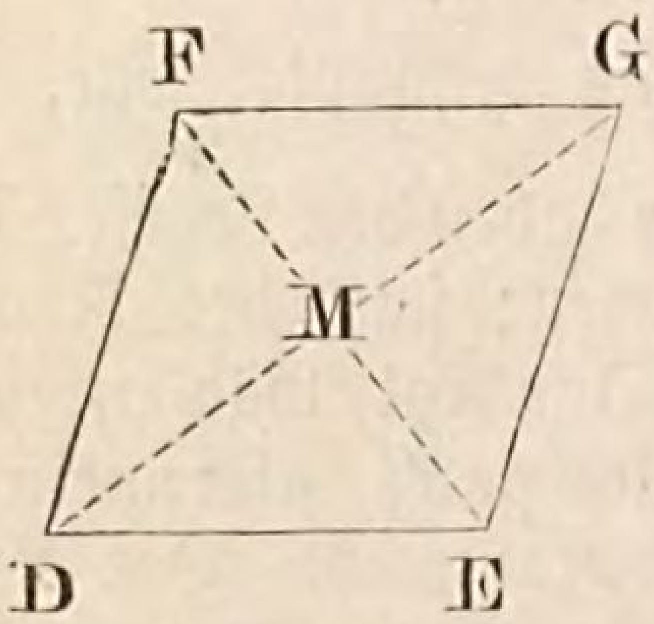


Fig. 7.

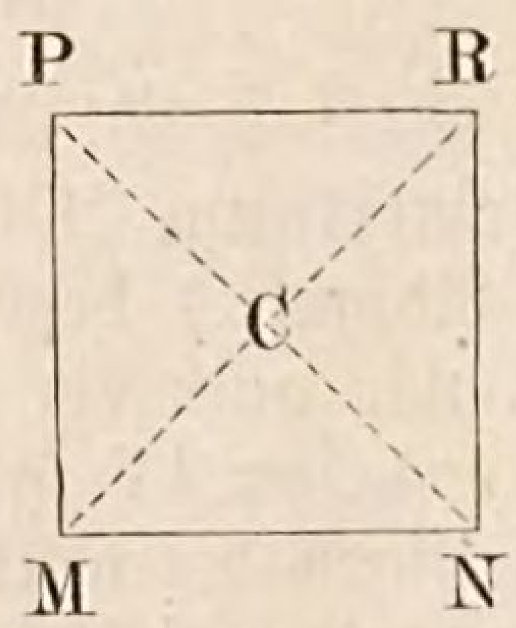


Fig. 8.

5) Was versteht man unter schiefwinkligen und rechtwinkligen, gleichseitigen und ungleichseitigen Parallelogrammen? Was ist ein Rechteck, ein Rhombus und ein Quadrat?

6) Der Schüler suche unter den Figuren 5, 6, 7, 8 1) die Rechtecke, 2) den Rhombus, 3) das Quadrat heraus.

7) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich. Welche Diagonalenstücke sind deshalb in den Figuren 5, 6, 7, 8 gleich groß?

8) Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich. Welche Gleichungen können wir deshalb in Figur 5 und 8 aufstellen?

9) Im Rhombus und im Quadrat schließen die Diagonalen mit einander rechte Winkel ein und halbiren die Rhombus- und Quadratwinkel. Welche Winkel[2]) sind demgemäß in Figur 7 und 8 Rechte und welche Winkel werden halbirt? ~6. VI. 10.

[1]) Die Gradanzahl des Winkels γ ist gemäß § 109 leicht zu finden, denn γ liegt dem Winkel α gegenüber. Um dann zu berechnen, welche Gradanzahl auf $\beta + \delta$ kommt, möge der Schüler erwägen, daß
1) α und γ bekannt sind und daß
2) die Summe aller vier Winkel in einem Viereck 4 Rechte oder 360 Grad betragen.
Ist $\beta + \delta$ bekannt, so ist β und δ leicht zu finden. [2]) Der Schüler möge die Winkel immer mit drei großen Buchstaben bezeichnen.

B. Das Höhenmessen.

§ 117. Die astronomische, absolute und relative Höhe. Wenn der Schüler die Ueberschrift liest, wird er glauben, wir wollten ihn in diesem Abschnitt lehren, wie die Höhe des Chimborasso, des Kinchinginga oder des Köllner Doms bestimmt werden könne. Leider sind wir noch nicht im Stande, seine Erwartungen zu befriedigen; wir müssen ihn vielmehr auf eine spätere Stufe des mathematischen Unterrichts vertrösten. Vorläufig genügen unsere Hilfsmittel nur, um zu zeigen, wie kleinere Höhenunterschiede gemessen werden. Und in der That! es ist oft sehr wichtig, kleinere Höhenunterschiede festzustellen. Oft tritt an den Feldmesser, den Bautechniker, den Landwirth die Aufgabe heran, anzugeben, um wie viel eine Stelle des Erdbodens höher oder niedriger ist als eine andere, sei es, daß ein Canal gebaut, eine Straße angelegt werden solle, sei es, daß man eine Quelle in Röhren fortleiten will oder daß der Landmann durch Abzugsgräben und Drainirröhren seine Felder und Wiesen von der erkältenden Nässe zu befreien und aus saurem Boden fruchtbares Ackerland zu machen wünscht.

Bevor wir zu den Höhenmessungen übergehen, werden wir vorerst genau erwägen müssen, was man unter Höhe versteht. Wir gehen dabei am besten von der Kugelgestalt der Erde aus und sagen, ein Gegenstand liege um so höher, je weiter er vom Mittelpunkt der Erde entfernt ist, er sei um so niedriger, je kleiner seine Entfernung vom Erdmittelpunkt ist. Die Wolken sind höher als die Erdrinde, die Spitzen der Berge höher als ihr Fußpunkt. Die Höhe eines Punktes wäre also vollkommen bestimmt, wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkt der Erde oder mit andern Worten die Länge der verticalen[1]) Linie angiebt, welche den Punkt mit dem Centrum der Erde verbindet. Eine solche Bestimmung der Höhe wäre zwar richtig, aber außerordendlich umständlich und unpractisch. Man benutzt zwar

[1]) Denn die verticale Gerade, welche zu einem bestimmten Punkte gehört, ist, wie in § 20 auseinandergesetzt wurde, gleichbedeutend mit der geraden Linie, welche den Punkt mit dem Mittelpunkt der Erde verbindet. Wir müssen dem Schüler recht dringend rathen, sich zum Studium dieses Capitels noch einmal § 20 bis § 23 im ersten Briefe anzusehen.

zum Messen der Höhe auch die verticale Linie, man sieht aber nur zu, wie weit die Verticale, welche zu dem Bestimmungspunkt gehört, über die Oberfläche des Meeres, über die Oberfläche des nächsten Gewässers oder über eine bestimmte horizontale Fläche hinausragt. Durch Figur 9 werden unsere Auseinandersetzungen deutlicher werden. Der Kreis um M stelle den Durchschnitt durch die Erdkugel[1]) dar, M sei der Mittelpunkt der Erde; die Kreislinie selbst bedeute das Meer, S sei eine kleine Wolke, der Complex AB sei ein Landstrich mit einem

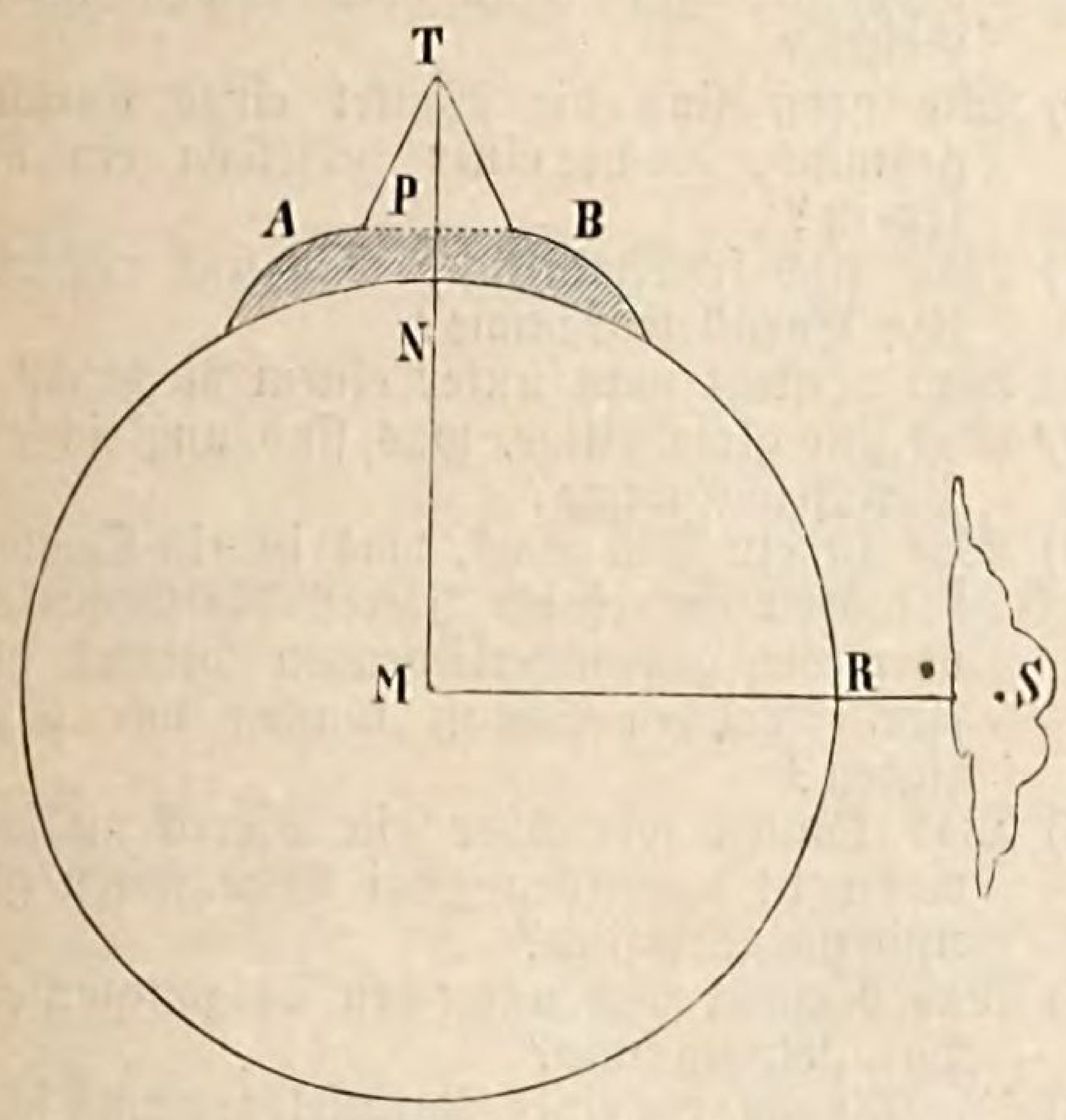


Fig. 9.

hohen Berge, dessen Spitze T ist. Verbinden wir S und T mit M, so ist nach § 20 SM die Verticale, welche zum Punkte S, und TM die Verticale, welche zum Punkte T gehört. Die Höhe der Bergspitze T werden wir kennen, wenn wir angeben

entweder die Länge der Geraden MT,
oder „ „ „ „ NT,
oder „ „ „ „ PT.

MT möge die **astronomische Höhe**[2]) heißen; unter der astronomischen Höhe verstehen wir den Abstand des Bestimmungspunktes vom Mittelpunkt der Erde.

NT wollen wir die **absolute Höhe** nennen, die absolute Höhe ist demnach die Strecke der Verticallinie, welche zwischen dem Bestimmungspunkte und der allgemein verbreitet gedachten Meeresoberfläche liegt.

PT soll die **relative Höhe** heißen; unter der relativen Höhe versteht man den Abstand des Bestimmungspunktes von einer bestimmten horizontalen[1]) Ebene,
möge diese Ebene nun die Oberfläche eines Flusses oder ein horizontales Ackerfeld oder der horizontale Fußboden eines Zimmers sein. In unserm Falle ist PT der Abstand des Punktes von der verlängert gedachten Horizontalebene am Fuße des Berges. Wenn wir die Höhe eines Thurmes zu 74 Metern angeben, vom Straßenpflaster aus gerechnet, oder wenn wir sagen, ein Tisch sei 1 Meter hoch, vom Fußboden aus gerechnet, so machen wir eine relative Höhenangabe. Die absolute und die astronomische Höhe des Thurmes würde eine ganz andere sein.

Stellen wir uns vor, der Thurm, dessen relative Höhe wir angegeben haben, befinde sich in einem Theile Perus, der sich 4500 Meter über dem Meere erhebt; dann würde die absolute Höhe des Thurmes sich zusammensetzen aus den 4500 Metern der Bodenerhebung und der vom Boden aus gerechneten relativen Höhe von 74 Metern. Die absolute Höhe würde demgemäß 4574 Meter betragen. Noch größer ist die astronomische Höhe dieses Thurmes. Um sie zu finden müßten wir zur absoluten Höhe noch die Entfernung der Meeresoberfläche vom Mittelpunkt der Erde, also etwa 859 Meilen hinzuzählen.

Von einer astronomischen Höhe haben wir nur gesprochen, um einen richtigen Höhenbegriff bei dem Schüler zu erzeugen; sie wird nicht berechnet.

Die Bestimmung der absoluten Höhe ist dagegen für viele Zwecke außerordentlich wichtig. Man mißt die absolute Höhe vermittelst des Barometers, eines Instrumentes, von dem wir in einem späteren Capitel des ersten Cursus ausführlicher handeln werden: Wie relative Höhenbestimmungen unter gewissen Umständen mit den beschränkten Mitteln, die uns bis jetzt zur Verfügung stehen, vorgenommen werden können, werden wir im folgenden Briefe zeigen.

C. Recapitulation.

Nachdem wir in den beiden ersten Abschnitten der **dreizehnten Lection** die Aufgaben und die Wiederholungsfragen erledigt hatten, besprachen wir im Abschnitt C, wie in einem Dreieck die Winkel von den Seiten und die Seiten von den Winkeln abhängen. Ausgehend von der Gleichheit der Basis-

---

[1]) In Wirklichkeit ist die Erde keine vollständige Kugel, weil sie an den Polen abgeplattet ist.

[2]) **Aufgabe.** Welche Gerade giebt die astronomische, welche Gerade die absolute Höhe der Wolke S an?

[1]) Siehe § 21.

winkel, fanden wir den Satz, daß in einem Dreieck gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen. Indem wir diesen Satz umkehrten, d. h. die Voraussetzung zur Behauptung und die Behauptung zur Voraussetzung machten, gelangten wir zu dem Lehrsatz, daß gleichen Winkeln auch gleiche Seiten entsprechen. Wir bewiesen ferner, daß sich auch bei ungleichen Dreiecksseiten und Dreieckswinkeln ein gewisses Abhängigkeitsverhältniß feststellen lasse, indem der größeren Seite auch immer der größere Winkel und umgekehrt dem größeren Winkel auch immer die größere Seite gegenüberliege. Mit Hilfe des letzten Satzes setzten wir auseinander, daß im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse die beiden Katheten an Größe übertrifft, und daß im stumpfwinkligen Dreiecke immer diejenige Seite die größte sei, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt. Nachdem wir noch im Anschluß daran den vierten Congruenzsatz für rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke besonders formulirt hatten, gingen wir im Abschnitt D zur Behandlung des Parallelogramms über. Wir erklärten, was man unter einem Parallelogramm verstehe, und wiesen nach, daß in ihm die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich sind. Aus diesem Satze zogen wir einige Folgerungen. Wir erörterten, daß bei einem Parallelogramm alle vier Seiten gleiche Größe haben, wenn zwei anstoßende Seiten gleich groß sind, und daß alle vier Winkel einen Rechten betragen, wenn einer der Winkel gleich einem Rechten ist. Nachdem wir hierauf die Parallelogramme in rechtwinklige und und schiefwinklige, in gleichseitige und ungleichseitige eingetheilt und das Rechteck, den Rhombus und das Quadrat definirt hatten, brachten wir in der dreizehnten Lection noch zwei weitere Lehrsätze über das Parallelogramm. Wir bewiesen, daß ein Viereck immer ein Parallelogramm sei, wenn in ihm die gegenüberliegenden Seiten oder Winkel gleich seien.

In der **vierzehnten Lection** setzten wir die Behandlung des Parallelogramms fort. Zunächst betrachteten wir Vierecke, in denen zwei Gegenseiten parallel sind und gleiche Größe haben; wir zeigten, daß solche Vierecke Parallelogramme sind, und gingen dann zu dem wichtigen Satze über, daß die Diagonalen im Parallelogramm sich halbiren. Nachdem wir noch einige Eigenschaften der Diagonalen im Rechteck und Rhombus behandelt und einige Aufgaben gestellt hatten, schlossen wir den Abschnitt A der vierzehnten Lection, um im Abschnitt B von den Höhenmessungen zu sprechen. Wir erörterten, was wir unter der astronomischen, absoluten und relativen Höhe verstehen und suchten durch Beispiele unsere Auseinandersetzungen zu verdeutlichen.

D. Wiederholungsfragen.

1) Wie verhalten sich die Winkel zu einander, welche in einem Dreieck gleichen Seiten gegenüberliegen?
2) Was versteht man unter der Umkehrung eines Lehrsatzes?
3) Nehmen wir an, in einem Dreieck sei eine Seite größer als die andere. Welcher Seite wird dann der größere Winkel gegenüberliegen?
4) Welche Seite ist im rechtwinkligen, welche im stumpfwinkligen Dreieck die größte?
5) Was versteht man im rechtwinkligen Dreieck unter der Hypotenuse, was unter den Katheten?
6) Wann sind zwei stumpfwinklige, wann zwei rechtwinklige Dreiecke nach dem vierten Congruenzsatze mit einander congruent?
7) Was versteht man unter einem Parallelogramm?
8) Wie verhalten sich in einem Parallelogramm die Gegenseiten und die gegenüberliegenden Winkel?
9) In einem Parallelogramm mögen zwei anstoßende Seiten einander gleich sein; wie verhalten sich dann die beiden anderen Seiten?
10) Wie groß sind die Winkel eines Parallelogramms, wenn einer derselben ein Rechter ist?
11) Was sind schiefwinklige, was sind rechtwinklige Parallelogramme?
12) Was versteht man unter einem Rechteck?
13) Was sind gleichseitige, was sind ungleichseitige Parallelogramme?
14) Was ist ein Rhombus, was ist ein Quadrat?
15) Es mögen in einem Viereck die Gegenseiten oder die gegenüberliegenden Winkel gleich sein. Welchen Schluß können wir daraus ziehen?
16) Was können wir über ein Viereck aussagen, wenn in demselben zwei Gegenseiten gleich und parallel sind?
17) Was versteht man unter den Diagonalen eines Parallelogramms?
18) Die Diagonalen eines Parallelogramms schneiden sich. Jede Diagonale wird dadurch in zwei Theile zerlegt. Wie verhalten sich die beiden Theile einer Diagonale zu einander?
19) Welchen Lehrsatz haben wir über die Diagonalen eines Rechtecks aufgestellt?
20) Was haben wir von den Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms behauptet?
21) Was haben wir unter astronomischer Höhe verstanden?
22) Was ist absolute, was ist relative Höhe?
23) Was versteht man bei Constructionsaufgaben unter der Analysis?
24) Zwei gerade Linien mögen von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen. Was können wir von solchen Geraden aussagen?
25) Wie haben wir uns die horizontale Richtung veranschaulicht?
26) Mit Hilfe welcher Instrumente kann man prüfen, ob eine Ebene horizontal ist?
27) Welche Richtung schlagen die Körper beim freien Fall ein?
28) Was bedeutet das Wort „parallel"?
29) Wozu dient ein Diopter?
30) Wie heißen die beiden Theile des dritten Congruenzsatzes?
31) Wie verhalten sich die beiden Dreiecke zu einander, in welche ein Parallelogramm durch eine Diagonale zerlegt wird?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 15 und 16.
Planimetrie.

8. Brief

Als Manuscript gedruckt.

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Nichts unterhält so gut
Die Sinne mit der Pflicht in Frieden,
Als fleißig sie durch Arbeit zu ermüden.
Nichts bringt sie leichter aus dem G'leis,
Als müßige Träumerei.
(Wieland.)

Lection 15.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 13.

Abschnitt C. 1) In Fig. 11 ist AC = AB, darum auch $\beta = \gamma$; in Fig. 12 ist DE = EF = FD, folglich auch $\zeta = \delta = \varepsilon$.

2) In Fig. 13 ist $\alpha = \beta$, mithin auch BC = AC; in Fig. 14 ist $\delta = \varepsilon$, also auch EF = DF.

3) In Fig. 15 ist PT > ST und ST > PS, somit ist auch von den Winkeln S > P und P > T.

4) In Fig. 16 ist, wie sich durch die Messung ergeben hat, von den Winkeln D > F; folglich auch von den Seiten FE > DE.

5) In Fig. 15 ist S ein stumpfer Winkel, deshalb ist PT die größte Seite in dem stumpfwinkligen Dreieck SPT; in Fig. 16 ist D ein stumpfer Winkel, mithin ist EF die größte Seite in dem stumpfwinkligen Dreiecke DEF.

Lection 14.

Abschnitt A. 1) In Fig. 5 ist AB = CD und AD = BC; in Fig. 6 ist HJ = LK und HL = JK.

2) In Fig. 5 ist von den Winkeln BAD = BCD, und ABC = ADC, in Fig. 6 ist ferner JHL = JKL und HJK = HLK.

3) In dem ersten Parallelogramm ist $\alpha = 50^{\circ}$, daher auch der gegenüberliegende Winkel $\gamma = 50^{\circ}$. Weil die Winkel in einem Dreieck zusammen 360° Grad betragen, ist $\beta + \delta + \alpha + \gamma = 360^{\circ}$. Auf $\alpha + \gamma$ kommen 100 Grad, somit bleiben für $\beta + \delta$ 260 Grad übrig. Da nun $\beta = \delta$ ist, müssen auf β 130 Grad und auf δ 130 Grad fallen. Wir haben also:

$\gamma = 50^{\circ}$, $\beta + \delta = 260^{\circ}$, $\beta = 130^{\circ}$, $\delta = 130^{\circ}$.

Aus ähnlichen Erwägungen folgt, das im zweiten Parallelogramm

$\gamma = 72^{\circ}$, $\beta + \delta = 216^{\circ}$, $\beta = 108^{\circ}$ und $\delta = 180^{\circ}$,

im dritten Parallelogramm

$\gamma = 90^{\circ}$, $\beta + \delta = 180^{\circ}$, $\beta = 90^{\circ}$ und $\delta = 90^{\circ}$,

im vierten Parallelogramm

$\gamma = 120^{\circ}$, $\beta + \delta = 120^{\circ}$, $\beta = 60^{\circ}$ und $\delta = 60^{\circ}$ ist.

4) Wenn in dem Parallelogramm DEFG (Fig. 7) DE und DF gleich sind, so muß DEFG gleichseitig sein, d. h. es ist: DE = EG = GF = FD.

Sind in dem Parallelogramm MNRP die anstoßenden Seiten MN und MP gleich, so ist MNRP gleichseitig, d. h. es ist: MN = NR = RP = PM.

5) Schiefwinklig ist ein Parallelogramm, wenn seine Winkel schief (spitz oder stumpf) sind. Rechtwinklig ist ein Parallelogramm, wenn seine Winkel einen Rechten betragen. Gleichseitig nennt man ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich sind, ungleichseitig heißt ein Parallelogramm, bei welchem die anstoßenden Seiten ungleich sind.

Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, dessen Winkel Rechte sind; ein Rhombus ist ein schiefwinkliges Parallelogramm mit gleichen Seiten; ein Quadrat ist ein gleichseitiges Rechteck.

6) Fig. 5 und 8 stellen Rechtecke dar; in Fig. 7 sehen wir einen Rhombus und in Fig. 8 ein Quadrat.

7) In Fig. 5 ist: AM = MC und BM = MD,
in Fig. 6 ist: HC = CK und JC = CL,
in Fig. 7 ist: DM = MG und EM = MF,
und in Fig. 8 ist: MC = CR und NC = CP.
8) In Fig. 5 ist: AC = BD und
in Fig. 8 ist: MR = NP.
9) In Fig. 7 sind die Winkel DME, EMG, GMF und FMD Rechte; ferner ist:

FDG = EDG, DEF = GEF,
EGD = FGD und GFE = DFE.

In Fig. 8 sind die Winkel MCN, NCR, RCP und PCM Rechte; ferner haben wir die Gleichungen:

PMR = NMR, MNP = RNP,
NRM = PRM und RPN = MPN.

Abschnitt B. MS ist die astronomische, RS die absolute Höhe der Wolke.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 14 gestellten Fragen.

1) Gleichen Seiten liegen in einem Dreieck gleiche Winkel gegenüber. 2) Einen Lehrsatz kehrt man um, wenn man die Behauptung in die Voraussetzung bringt und die Voraussetzung oder wenigstens einen Theil derselben zur Behauptung macht. 3) Der größern Seite liegt der größere Winkel und der kleinern Seite liegt der kleinere Winkel gegenüber. 4) Siehe Lehrs. V Seite 117. 5) Im rechtwinkligen Dreieck nennt man diejenige Seite die Hypotenuse, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, und diejenigen Seiten die Katheten, welche den rechten Winkel einschließen. 6) Siehe Lehrsatz VI und VII, Seite 118. 7) Unter einem Parallelogramm versteht man ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind. 8) In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten und die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. 9) Wenn in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich sind, müssen alle vier Seiten des Parallelogramms einander gleich sein. 10) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein Rechter ist, so betragen alle vier Winkel einen Rechten. 11) In einem schiefwinkligen Dreieck sind die Winkel schief (spitz und stumpf), in einem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Winkel Rechte. 12) Unter einem Rechteck versteht man ein rechtwinkliges Parallelogramm. 13) In einem gleichseitigen Parallelogramm sind die vier Seiten gleich, in einem ungleichseitigen Parallelogramm sind die anstoßenden Seiten ungleich. 14) Ein Rhombus ist ein schiefwinkliges Parallelogramm mit gleichen Seiten, ein Quadrat ist ein rechtwinkliges Parallelogramm mit gleichen Seiten. 15) Das Viereck ist ein Parallelogramm. 16) Siehe 15. 17) Unter den Diagonalen eines Parallelogramms versteht man die geraden Linien, welche die gegenüberliegenden Ecken des Parallelogramms mit einander verbinden. 18) Die beiden Theile einer Diagonale sind gleich groß. 19) Die Diagonalen eines Rechtecks sind einander gleich. 20) Die Diagonalen in einem gleichseitigen Parallelogramm (Rhombus, Quadrat) halbiren die Winkel des Parallelogramms und schneiden sich unter rechten Winkeln. 21) Unter der astronomischen Höhe eines Punktes haben wir seinen Abstand vom Mittelpunkte der Erde verstanden. 22) Die absolute Höhe eines Punktes ist der verticale Abstand desselben von der (allgemein verbreitet gedachten) Meeresoberfläche. Unter der relativen Höhe eines Punktes versteht man den verticalen Abstand des Punktes von einer bestimmten, aber beliebig gewählten, Horizontalebene. Mit der Horizontalebene muß sich auch die relative Höhe ändern. 23) Unter der Analysis versteht man die Ueberlegung, wie eine Constructionsaufgabe gelöst werden könne. 24) Wir können von den beiden geschnittenen Geraden aussagen, daß sie parallel sind. 25) Die horizontale Richtung haben wir uns durch die Oberfläche einer Flüssigkeit veranschaulicht. 26) Mit Hilfe der Setzwaage und der Libelle. 27) Sie schlagen die verticale Richtung ein. 28) Das Wort parallel bedeutet „nebeneinander her“ laufend. 29) Vermittelst des Diopters sucht man einen Punkt auf, welcher mit zwei anderen Punkten in einer geraden Linie liegt. 30) a. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und in den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. b) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie congruent. 31) Die beiden Dreiecke, in welche ein Parallelogramm durch eine Diagonale zerlegt wird, sind congruent.

C. Das Höhenmessen. Das Messen der horizontalen Linien auf dem Felde.

§ 118. Die relative Höhe. Im letzten Paragraphen des vorigen Briefes haben wir auseinandergesetzt, was die astronomische, absolute und relative Höhe eines Punktes bedeutet. Unter der astronomischen Höhe haben wir die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkt der Erde verstanden; von astronomischer Höhe haben wir nur gesprochen, um die richtige Auffassung des Höhenbegriffs zu erleichtern. Wie wir weiter auseinandersetzten, nennt man allgemein absolute Höhe

den verticalen Abstand von der Meeresoberfläche[1])

und relative Höhe

den verticalen Abstand von einer bestimmten, aber beliebig gewählten, Horizontalebene.

Die relative Höhe eines Punktes wird sich mit der Horizontalebene ändern, von der aus die verticale Entfernung gerechnet wird. Der Gipfel eines Berges kann zugleich eine relative Höhe von 30 und 32 Metern haben; z. B. kann er 30 Meter hoch sein, wenn man von der Horizontalebene ausgeht, die durch den Fußpunkt des Berges gelegt ist, und zugleich kann seine Höhe 32 Meter betragen, wenn man den Abstand von der Oberfläche des nächsten Gewässers mißt[2]). Giebt man die

---

[1]) Die über alle Theile der Erde ausgedehnt gedacht wird. [2]) Es wird dabei angenommen, daß der Fußpunkt des Berges 2 Meter über der Oberfläche des nächsten Gewässers liegt.

relative Höhe eines Punktes an, so muß man darum auch die Horizontalebene nennen, von der aus man die Höhe rechnet.

§ 119. Höhenmessung vermittelst des Diopters. Es sei uns die Aufgabe gestellt, anzugeben, wie weit der Gipfel T des kleinen Hügels in Fig. 1 über die Horizontalebene empor-

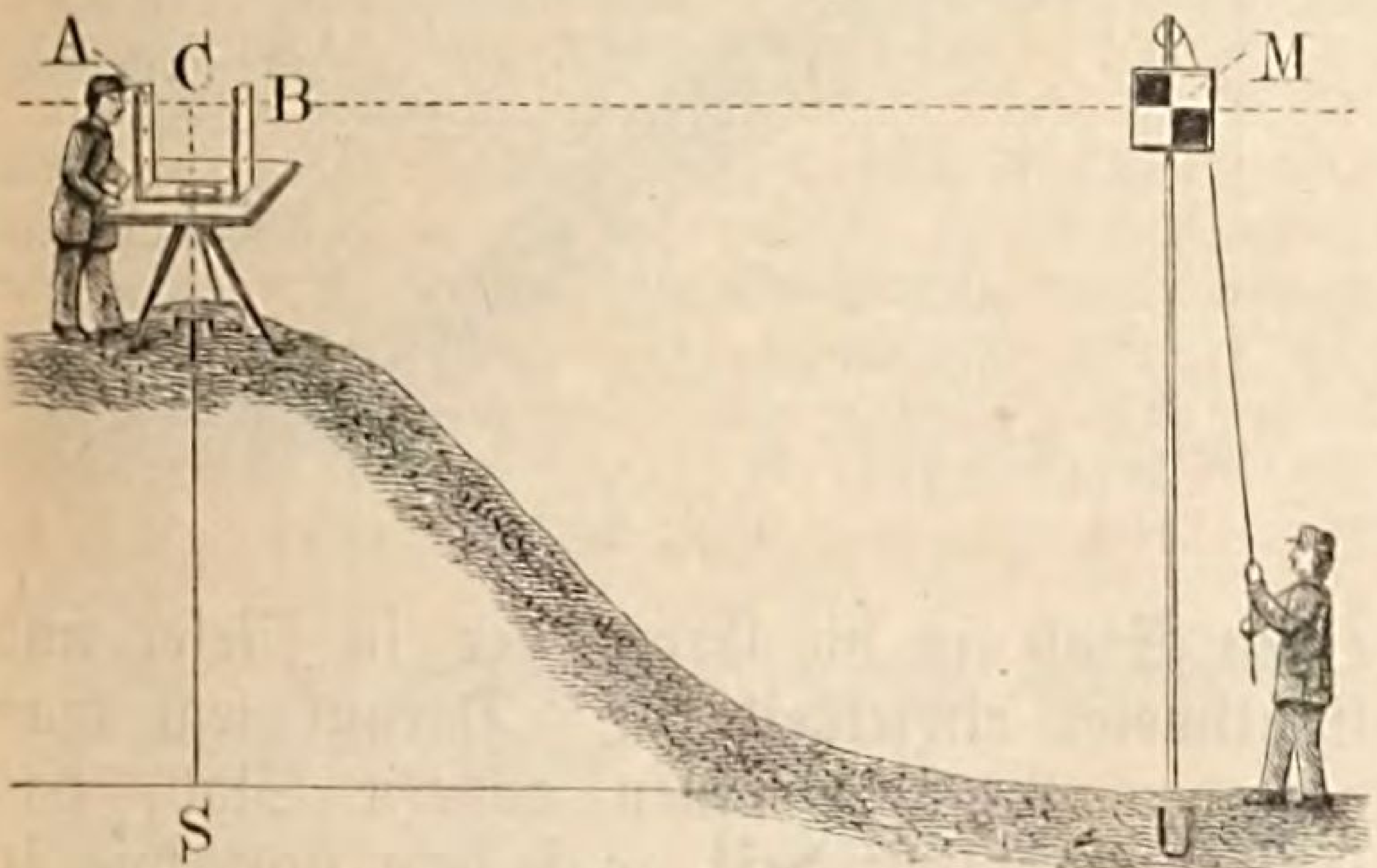


Fig. 1.

ragt, welche durch den Fußpunkt U des Hügels hindurchgeht. US möge eine horizontale Gerade sein, dann wird ST die gewünschte Höhe[1]) des Gipfels T vorstellen. Es ist nun nicht möglich, ST direct zu messen, denn man kann in der Erde eben so wenig die Lage des Punktes S wie die Länge der Geraden ST bestimmen. Man muß sich also eines andern Mittels bedienen, um die Höhe ST zu finden; und zwar verfährt man folgendermaßen.

Man stellt auf den Gipfel T einen Tisch auf und sorgt mit Hilfe der Libelle[2]) dafür, daß die Oberfläche des Tisches horizontal steht. Dann setzt man auf den Tisch ein Diopterlineal[3]), dessen Löcher A und B so gebohrt sind, daß sie der Fläche des Tisches parallel laufen, also auch horizontal[4]) sind. Im Fußpunkt U des kleinen Hügels werde nun eine Stange[5]) in verticaler Richtung in die Erde eingesteckt, an der eine quadratförmige Tafel in die Höhe gezogen werden kann; man sieht nun durch die Löcher A und B des Diopters nach der Stange hin und läßt durch einen Gehilfen die quadratförmige Tafel so weit in die Höhe ziehen, bis man den Mittelpunkt M der quadratischen Tafel visirt, bis also die Löcher A und B des Diopterlineals mit dem Punkte M in einer geraden Linie liegen. Dann wird die Tafel durch eine Schraube festgedrückt und die Länge der Strecke UM ausgemessen, sie möge gleich 420 Centimetern sein. Die Höhe TC[1]) der Geraden AB, vom Gipfel aus gerechnet, möge 120 Centimeter betragen, ziehen wir diese 120 Centimeter von den 420 Centimetern oder mit anderen Worten TC von UM ab, so erhalten wir 300 Centimeter. Wir stellen nun die

Behauptung auf, daß die gesuchte Höhe ST des Hügels 300 Centimeter oder 3 Meter beträgt und wollen dafür den

Beweis liefern. Die beiden Geraden SC und UM sind vertical, US und MC sind horizontal[2]). Weil nun die horizontale und verticale Richtung rechte Winkel bilden, sind die Winkel bei S, U, M und C Rechte. Das Viereck SUMC ist also ein Rechteck[3]). In einem Rechteck sind wie in jedem andern Parallelogramm die Gegenseiten gleich. Es ist deswegen:

$$UM = SC.$$

Wie der Schüler sieht, ist nun

$$ST = SC - TC.$$

Setzen wir für SC die gleiche Größe UM ein, so ergiebt sich:

$$ST = UM - TC.$$

---

[1]) D. h. die relative Höhe von der Horizontalebene des Fußpunktes aus gerechnet. [2]) Die Libelle haben wir im ersten Briefe in § 21 ausführlich beschrieben. [3]) Die Zusammensetzung und den Zweck des Diopters haben wir auch im ersten Briefe § 15 auseinandergesetzt. Das Diopterlineal wird meist anders construirt, als wir in § 15 angegeben haben. Das Princip, welches dem Diopter zu Grunde liegt, geht aber am besten aus der von uns gewählten Form hervor. [4]) Zwei horizontale Richtungen, die über einander liegen, sind parallel, ebenso ist eine Gerade horizontal, die einer Horizontalen parallel ist. [5]) Eine solche Stange nennt man eine **Visirstange**. Die quadratförmige Tafel, welche an der Visirstange auf und nieder gezogen werden kann, heißt die **Visirtafel**. Das Auf- und Niederziehen geschieht durch eine Schnur, welche am oberen Ende der Stange über eine Rolle geleitet ist. Die Visirtafel ist über's Kreuz, wie der Schüler sieht, in zwei weiße und zwei schwarze Quadrate eingetheilt. Der gemeinsame Eckpunkt M der Quadrate heißt der Mittelpunkt der Visirtafel. [1]) TC ist eine relative Höhe, sie ist, wie wir bereits gesagt haben, vom Gipfel des Berges aus gerechnet; die Höhe TC wird man schon vor der Messung kennen, denn sie setzt sich zusammen aus der Höhe des Tisches und der Länge des Linealstücks bis zum Loche. [2]) Der Schüler könnte gemäß Fig. 27 S. 25 meinen, daß die horizontalen Richtungen des Punktes S und des Punktes U Winkel mit einander bilden und nicht in eine gerade Linie zusammenfallen, weil ja die horizontalen Geraden an den verschiedenen Punkten der Erde verschiedene Richtungen haben, wie von uns auf Seite 25 auseinander gesetzt ist. Die verschiedene Richtung ist indessen nur merklich bei weit von einander entfernten Punkten. [3]) Der Schüler möge mit Rücksicht auf Lehrsatz XI Seite 122 beweisen, daß ein **Viereck** mit rechten Winkeln auch ein **Parallelogramm** mit rechten Winkeln, also ein Rechteck sei.

Durch die Messung haben wir gefunden, daß:

$UM = 420$ cm und $TC = 120$ cm ist.

Daher haben wir:

$$ST = 420 \text{ cm} - 120 \text{ cm},$$
$$\text{oder } ST = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m},$$

d. h. die Höhe ST des Gipfels T beträgt 300 Centimeter oder 3 Meter, was behauptet war.

Damit haben wir gezeigt, auf welche Weise man die Höhe eines kleinen Hügels bestimmen kann. Auch bei größeren Bodenerhebungen kann man die eben vorgeführte Meßmethode in Anwendung bringen. Freilich kann man dann die Messung nicht mit einem Male vornehmen, sondern man wird eine Anzahl Stationen machen, wie der technische Ausdruck heißt. Man wird die ganze Bodenerhebung gewissermaßen in mehrere Hügel eintheilen. Stellen wir uns vor, man beginne die Messung vom Gipfel aus, dann wird man einen Punkt, der in mäßiger Entfernung vom Gipfel liegt, als Fußpunkt und dann denselben Punkt als Gipfel eines neuen Hügels auffassen und so fort. Fängt man mit der Messung vom Fußpunkt U aus an, so wird man sich einen höheren Punkt suchen, den man als Gipfel ansieht; diesen Gipfel wird man darauf wieder zum Fußpunkt machen, sich einen neuen Gipfel wählen und so fort. Auch eine mäßige Bodenerhebung kann man auf diese Weise bestimmen. Wenn man Abzugsgräben einrichten oder Drainirröhren legen will, um ein Ackerfeld zu entwässern, muß **nivellirt** werden, d. h. man muß untersuchen, welche Punkte des Ackerfeldes höher liegen als andere und wie viel ihre Erhebung beträgt, damit man weiß, nach welcher Richtung und mit welcher Schnelligkeit das kalte Wasser abfließt. Ehe wir das Nivelliren verlassen, wollen wir noch eine Nivellir-Methode angeben, welche zwar mühsam ist aber den Vortheil der großen Einfachheit für sich hat.

§ 120. Das Nivelliren mit Richtscheit und Setzwaage. Es sei uns die Aufgabe gestellt, die Höhe des Abhanges AC (Fig. 2) zu untersuchen. Ist BC eine horizontale und AB eine verticale gerade Linie, so stellt AB die relative Höhe des höchsten Punktes, von der Horizontalebene des Fußpunktes C aus gerechnet, vor. Die Länge der Strecke AB muß also bestimmt werden. Da wir AB nicht direct messen können, weil der Punkt B in der Erde liegt, wollen wir folgenden Weg einschlagen. Man steckt im Punkt A_1, der nur eine kurze Strecke von A entfernt ist, vertical

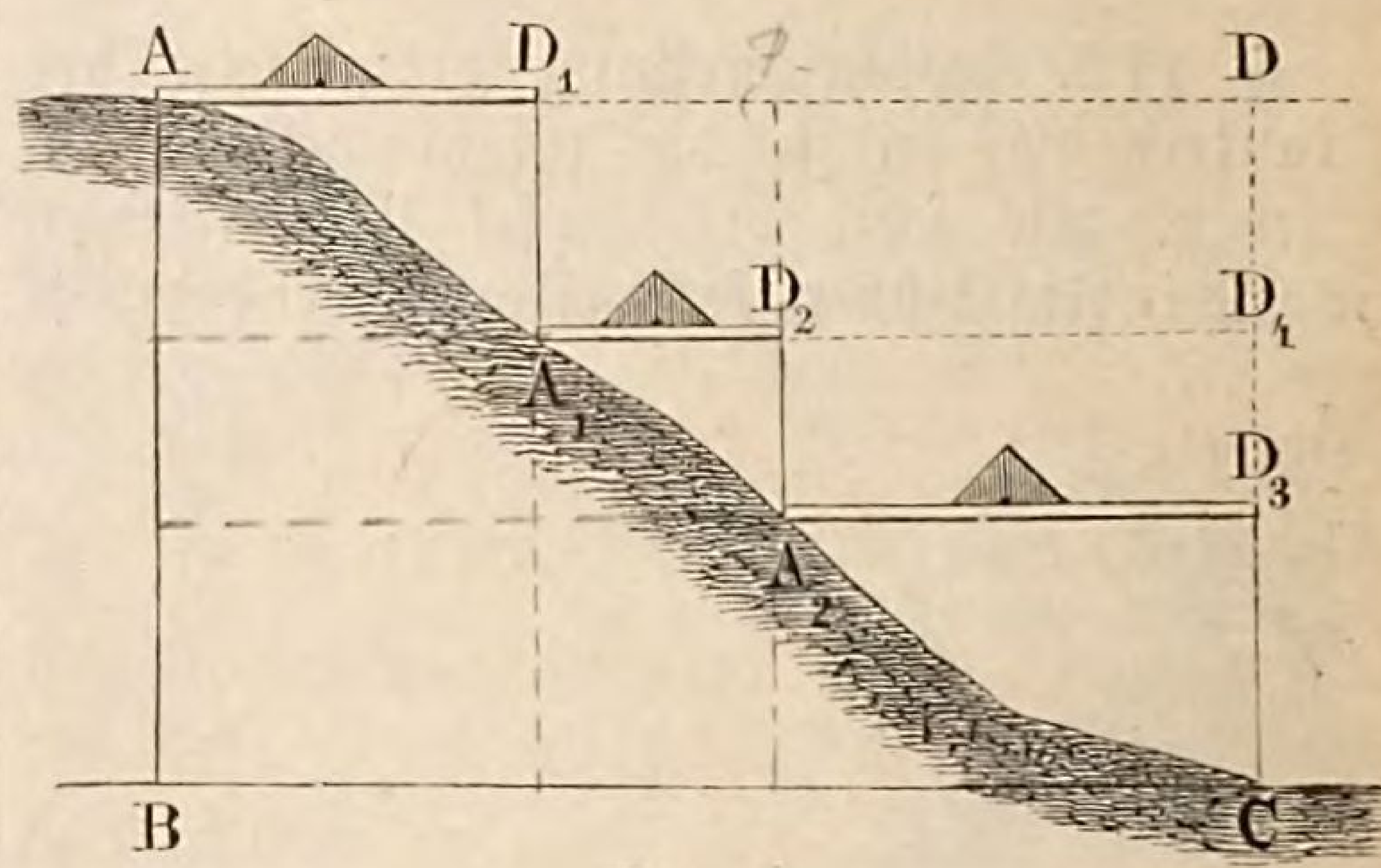


Fig. 2.

einen Stab in die Erde, der in Meter und Centimeter eingetheilt ist. Darauf legt man auf den Punkt A einen andern Stab, das sogenannte **Richtscheit,** auf dem sich, wie in Figur 2 angedeutet ist, eine **Setzwaage** befindet; dieses Richtscheit hält man zugleich an den verticalen Stab an und bewegt es so lange hin und her, bis die Setzwaage anzeigt, daß es die horizontale Lage AD_1 angenommen hat. Darauf liest[1]) man an dem verticalen Stabe die Entfernung A_1D_1 ab, sie möge 50 Centimeter betragen. Ebenso wie bei A_1 verfährt man auch bei A_2 und C (siehe Fig. 2), A_2D_2 möge 40 Centimeter, und CD_3 möge 60 Centimeter lang sein. Wir haben dann in mathematischen Zeichen:

$$A_1D_1 = 50 \text{ cm}, \quad A_2D_2 = 40 \text{ cm}, \quad CD_3 = 60 \text{ cm};$$

und wir stellen die

Behauptung auf, daß A_1D_1, A_2D_2 und CD_3 zusammen gerade ebenso groß sind wie die gesuchte Höhe AB, in Zeichen, daß wir haben:

$$AB = A_1D_1 + A_2D_2 + CD_3,$$
$$\text{oder } AB = 50 \text{ cm} + 40 \text{ cm} + 60 \text{ cm},$$
$$\text{oder } AB = 150 \text{ cm}.$$

Für diese Behauptung müssen wir den

Beweis bringen. Wir wollen zu diesem Zwecke die Verticale CD_3 und die Horizontale AD_1 verlängern, bis sie sich im Punkte D schneiden, dann erhalten wir das Rechteck[2]) ABCD. In einem Rechteck sind wie in jedem andern Parallelogramm die Gegenseiten gleich, darum ist:

$$1) \ AB = DC.$$

[1]) Man kann diese Entfernung direct ablesen, weil der verticale Stab in Centimeter eingetheilt ist.

[2]) Weil horizontale und verticale gerade Linien sich unter rechten Winkeln schneiden.

Verlängern wir ferner die horizontale Gerade A_1D_2 bis D_4, so ergeben sich die beiden Rechtecke[1]) $A_1D_1D_4D$ und $A_2D_2D_3D_4$, bei denen wir folgende Gleichungen aufstellen können:

$$2)\ D_4D = A_1D_1$$
$$3)\ D_3D_4 = A_2D_2.$$

Wie der Schüler sieht, ist die Strecke DC aus der Theilstrecke D_4D, D_3D_4 und CD_3 zusammengesetzt, in Zeichen, es ist:

$$4)\ DC = D_4D + D_3D_4 + CD_3.$$

Vertauschen wir in Gleichung 4 D_4D mit der gleichen Größe A_1D_1 [2]) und D_3D_4 mit der gleichen Größe A_2D_2 [3]), so erhalten wir:

$$5)\ DC = A_1D_1 + A_2D_2 + CD_3.$$

Für DC können wir gemäß Gleichung 1 AB einführen, daher

$$6)\ AB = A_1D_1 + A_2D_2 + CD_3,$$
oder $AB = 50\ \text{cm} + 40\ \text{cm} + 60\ \text{cm}$,
oder $AB = 150\ \text{cm}$,
was behauptet war.

Aufgabe. Nehmen wir an, wir hätten mit Setzwaage und Richtscheit die Höhe eines kleinen Abhanges zu bestimmen gesucht, wir hätten dabei 6 Stationen gemacht und demzufolge 6 verticale Linien a, b, c, d, e, f gemessen. Es möge sein

a = 25 cm,	c = 12 cm,	e = 17 cm,
b = 35 cm,	d = 48 cm,	f = 30 cm.

Wie hoch wird der Abhang sein?

Bemerkung. Nach den beiden Methoden, die wir in § 119 und § 120 besprochen haben, können wir das Gefälle des Bodens ermitteln und die Höhe kleiner Bodenerhebungen und selbst kleiner Berge ausmessen. Bei hohen Gebirgen, die in die Wolken hineinragen und beständig mit Eis und Schnee bedeckt sind, werden freilich Instrumente wie das Diopter, das Richtscheit und die Setzwaage wenig fruchten. Wenn man die Spitze eines hohen Berges noch sehen kann, nimmt man dann seine Zuflucht zur trigonometrischen Berechnung, die wir im zweiten Cursus behandeln werden. Ist die Spitze unsichtbar, so muß sie von einem kühnen Reisenden erstiegen werden, der den Stand des Barometers beobachtet und dadurch die Höhe nach einer noch in diesem Cursus zu besprechenden Formel abschätzen kann. Die Höhe eines Thurmes werden wir auch erst später ermitteln lernen, man kann zur Berechnung entweder den Schatten des Thurmes benützen oder durch Messung von Winkeln mit Hilfe trigonometrischer Rechnung zum Ziele gelangen.

[1]) Weil horizontale und verticale gerade Linien sich unter rechten Winkeln schneiden. [2]) Gemäß Gleichung 2. [3]) Gemäß Gleichung 3.

§ 121. Das Messen horizontaler gerader Linien. In Figur 2 stellt uns AC eine schiefe[1]) Linie dar. Wenn nun der Landwirth oder der Feldmesser den Plan eines ganzen Gutsbezirkes entwerfen will, so kann er in dem horizontalen Plane keine schiefen Linien eintragen; er muß vielmehr, wenn er genau verfahren will, statt der schiefen Linien immer die horizontalen einzeichnen, die den schiefen entsprechen. Statt der schiefen Linie AC muß also die entsprechende horizontale Linie BC vom Feldmesser oder Landwirth ausgemessen resp. berechnet werden. BC liegt in der Erde, kann also unmöglich der Länge nach bestimmt werden. Indessen wir können uns auf andere Weise helfen; wie wir schon in § 120 auseinandergesetzt haben, ist ABCD ein Rechteck. Die Gegenseiten im Rechteck, wie in jedem Parallelogramm sind einander gleich, darum ist:

$$BC = AD.$$

AD können wir aber berechnen, denn AD ist gerade so groß wie AD_1, A_1D_2 und A_2D_3 zusammen, in Zeichen, es ist:

$$AD = AD_1 + A_1D_2 + A_2D_3.$$

Die Strecken AD_1, A_1D_2 und A_2D_3 können wir messen, denn diese Strecken sind ja gleich der Länge der Richtscheitstrecken von den Auflegepunkten A, A_1, A_2 aus bis zu den verticalen Stäben. AD_1 möge 75, A_1D_2 50, A_2D_3 92 Centimeter betragen, dann ist:

$$AD = 75\ \text{cm} + 50\ \text{cm} + 92\ \text{cm},$$
$$\text{oder } AD = 217\ \text{cm}.$$

Setzen wir für AD die gleiche Seite BC ein, so erhalten wir:

$$BC = 217\ \text{cm}$$
$$= 2\ \text{m} + 17\ \text{cm}.$$

Aufgabe. Der Schüler möge den Beweis dafür liefern, daß

$$AD = AD_1 + A_1D_2 + A_2D_3 \text{ ist.}$$

[1]) Schief werden solche Linien genannt, die weder horizontal noch vertical sind.

Diesen Beweis wird er leicht führen können, wenn er einige Gerade soweit verlängert, daß Rechtecke entstehen.

D. Die Bestimmungsstücke des Dreiecks, Vierecks und des Parallelogramms.

§ 122. Die Bestimmungsstücke des Dreiecks. Nehmen wir an, wir hätten, wie Figur 3 zeigt, drei Stäbe zu einem Dreieck zusammen-

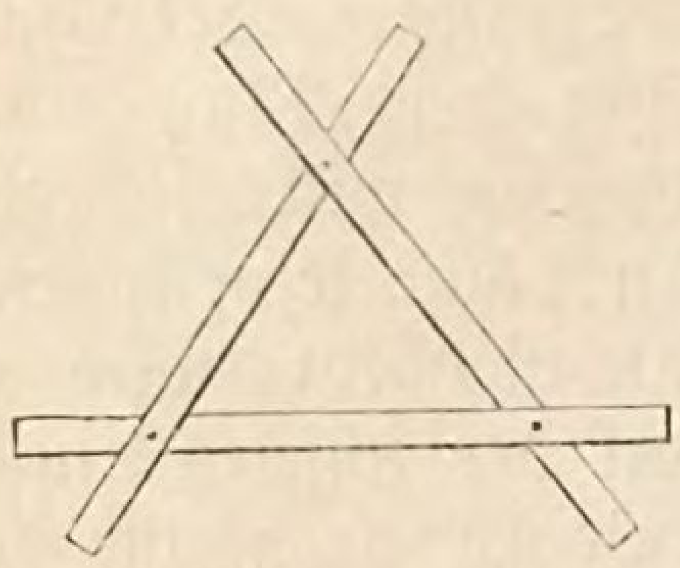


Fig. 3.

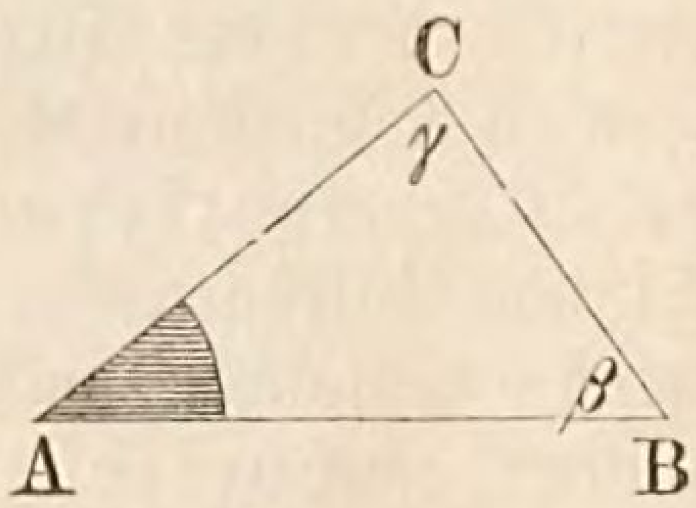


Fig. 4.

gefügt und an den Ecken durch Stifte an einander befestigt. Wie wir dann das Dreieck auch wenden und anfassen mögen, wir können es nicht verschieben, seine Winkel und seine Gestalt nicht verändern. Das Dreieck ist also durch die drei Stäbe oder allgemeiner ausgedrückt durch die drei Seiten vollständig bestimmt. In Figur 4 mögen die beiden Dreiecksseiten AB und AC zwei Stäbe von bestimmter Länge bedeuten, welche an den einen Keil (in Figur 4 schattirt) fest angelegt sind. Wollen wir nun den Winkel BAC zu einem Dreieck vervollständigen, so muß noch die Seite BC hinzukommen. Eine andere dritte Seite als BC lassen die beiden an den Keil befestigten Stäbe nicht zu, ebenso wenig können andere Winkel als β und γ entstehen. Das Dreieck ABC ist also durch die beiden Stäbe AB und AC, und durch den Keil oder allgemeiner durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel in allen seinen Theilen bestimmt. Man nennt nun diejenigen Dreieckstheile, welche die Gestalt des Dreiecks unveränderlich bedingen, **Bestimmungsstücke.** Die drei Seiten, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind solche Bestimmungsstücke eines Dreiecks. Sehen wir uns jetzt den ersten und zweiten Congruenzsatz an; dann werden wir leicht finden, daß die bisher genannten Bestimmungsstücke zugleich die Dreieckstheile sind, welche im ersten und zweiten Congruenzsatze als wechselseitig gleich vorausgesetzt werden. In der That! es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den **Bestimmungsstücken** und den **Congruenzbedingungen.** Wenn zwei Dreiecke in denjenigen Theilen übereinstimmen, welche die ganze Gestalt des Dreiecks bedingen, so werden sie auch gleiche Gestalt besitzen und dann zur Deckung gebracht werden können. Die Bestimmungsstücke des Dreiecks werden uns mit den Congruenzbedingungen und die Congruenzbedingungen mit den Bestimmungsstücken bekannt machen.

Wie wir gezeigt haben, müssen in zwei Dreiecken **drei** von einander **unabhängige Stücke** wechselseitig gleich sein, wenn die Dreiecke congruent sein sollen. **Drei** von einander **unabhängige Stücke** werden wir darum auch haben müssen, wenn wir die **Gestalt** und die einzelnen Theile **des Dreiecks** unabänderlich **bestimmen**[1]) wollen. Sollen wir ein Dreieck zeichnen oder anders ausgedrückt construiren, so müssen uns darum drei unabhängige Dreieckstücke gegeben sein. Bei allen Dreiecksconstructionen, die wir ausgeführt haben, setzten wir drei solche Stücke als gegeben voraus[2]). Wir haben daher den Satz:

Ein Dreieck wird bestimmt[3]) durch drei von einander unabhängige Stücke.

---

[1]) Wie wir in § 86 auseinandersetzt haben, sind die drei Dreieckswinkel nicht drei von einander unabhängige Größen. Sie können darum auch nicht als Bestimmungsstücke eines Dreiecks dienen. Wie wir schon auf Seite 112 angedeutet haben, ist es leicht, mehrere Dreiecke zu zeichnen, die zwar in den Winkeln übereinstimmen aber ganz verschieden große Seiten haben. Man braucht nur in ein größeres Dreieck kleinere so hineinzuzeichnen, daß die entsprechenden Seiten parallel sind. Es entstehen dann Dreiecke mit ungleichen Seiten, aber mit Winkeln, die gemäß § 86 einander gleich sind. Die drei Winkel bestimmen also die Gestalt des Dreiecks vollständig. [2]) In § 91 setzten wir drei Seiten, in § 94 eine Seite und zwei anliegende Winkel als gegeben voraus und so fort. [3]) Nur in einem Falle bestimmen drei von einander unabhängige Dreieckstücke **nicht** die ganze Gestalt des Dreiecks unabänderlich und eindeutig, nämlich in demselben in § 85 besprochenen Falle, in welchem die Uebereinstimmung in drei unabhängigen Stücken **nicht** nothwendig die Congruenz zweier Dreiecke im Gefolge hat. Wenn uns zwei Seiten gegeben sind und der Winkel, welcher der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegt, so können wir zwei Dreiecke von ungleicher Gestalt construiren, welche in gleicher Weise der Forderung entsprechen. Es sei uns die **Aufgabe** gestellt, ein Dreieck zu construiren, aus einer Seite, die so groß wie AC (Fig. 5), aus einer kleinern Seite so groß wie BC und dem Winkel α, welcher der kleinern Seite gegenüber-

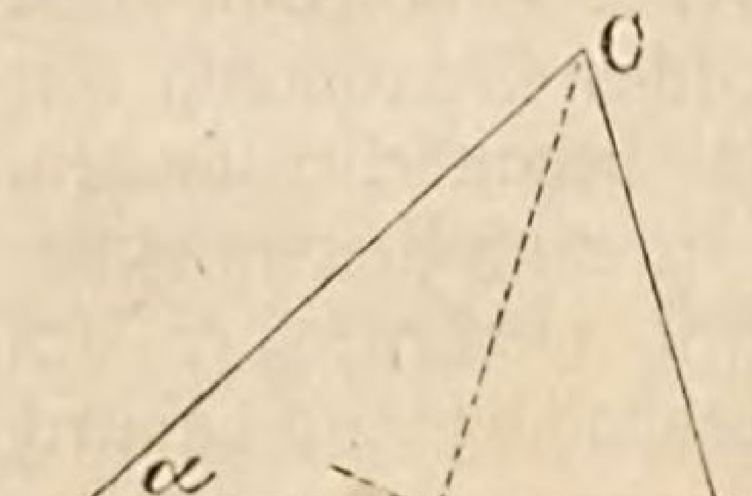


Fig. 5.

§ 123. Die Bestimmungsstücke eines Vierecks. Die Gestalt eines **Dreiecks** wird nach § 122 durch die **drei** Seiten desselben unabänderlich bedingt, ein Dreieck konnte nicht verschoben werden, wenn wir drei Seiten an einander fügten. Sehen wir zu, ob auch ein **Viereck** durch seine **vier** Seiten völlig bestimmt wird. Der Schüler kann den Versuch, welcher uns darüber belehrt, selbst anstellen. Er möge vier gleich oder ungleich große Stäbe an einander legen und das Viereck, welches er dadurch erhält zu verschieben suchen; er wird dann finden, daß er durch die Verschiebung unzählige Vierecke erhalten kann. In Figur 6 sehen wir das Viereck ABCD, wenn wir dasselbe verschieben, nimmt es nach einander die Gestalten an, die wir in Figur 7 und 8 sehen.

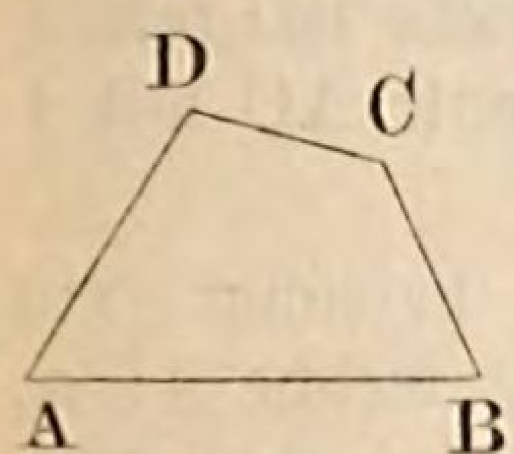


Fig. 6.

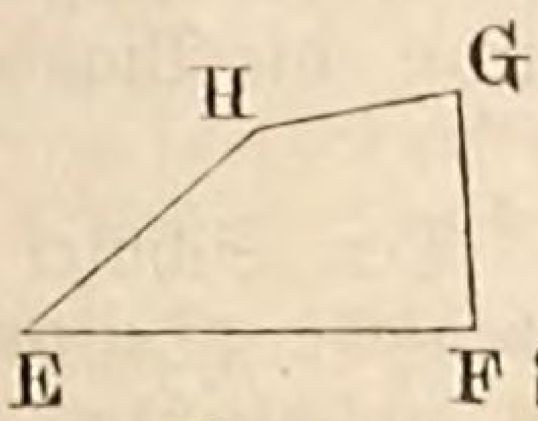


Fig. 7.

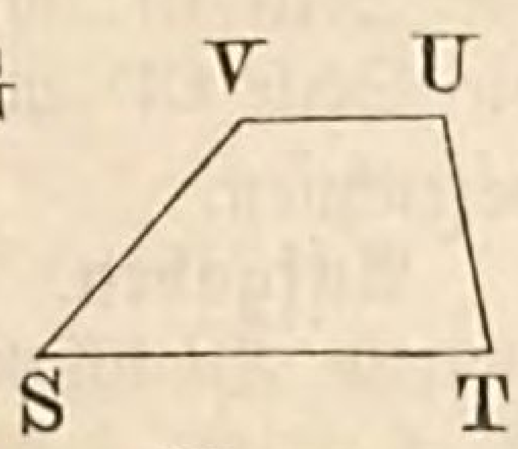


Fig. 8.

Wir wollen uns jetzt in dem Winkel A einen Keil eingeschoben und die Seiten AB und AD fest an denselben herangedrückt denken (Fig. 9); dann sind in dem **Viereck** ABCD **fünf Stücke** fest und unveränderlich; erstens die vier Seiten und dann der eine Winkel. Jetzt werden wir vergeblich versuchen, die Gestalt des Vierecks zu verändern.

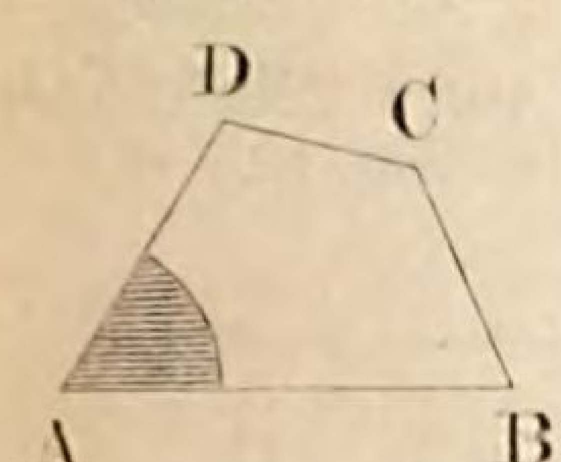


Fig. 9.

Statt des Winkels A hätten wir auch jeden anderen Winkel fixiren können, ja die einzelnen Theile des Vierecks würden sich auch nicht verrücken lassen, wenn wir, statt einen Keil in einen Winkel des Vierecks zu klemmen, zwei gegenüberliegende Eckpunkte durch eine Diagonale, in Gestalt eines festen Stabes, mit einander verbänden. Auch dann würden wir fünf Bestimmungsstücke haben, nämlich wieder die vier Seiten und noch eine Diagonale; also **ein Viereck ist nicht durch vier, sondern durch fünf gegebene Stücke bestimmt.** Diese fünf Vierecksstücke müssen vollkommen von einander unabhängig sein, wie das folgende Beispiel beweisen wird. Nehmen wir an, wir hätten von einem Viereck die beiden Seiten AB und AC, den Winkel A, die Diagonale BC und außerdem noch die Länge der zweiten Diagonale (siehe Fig. 10),

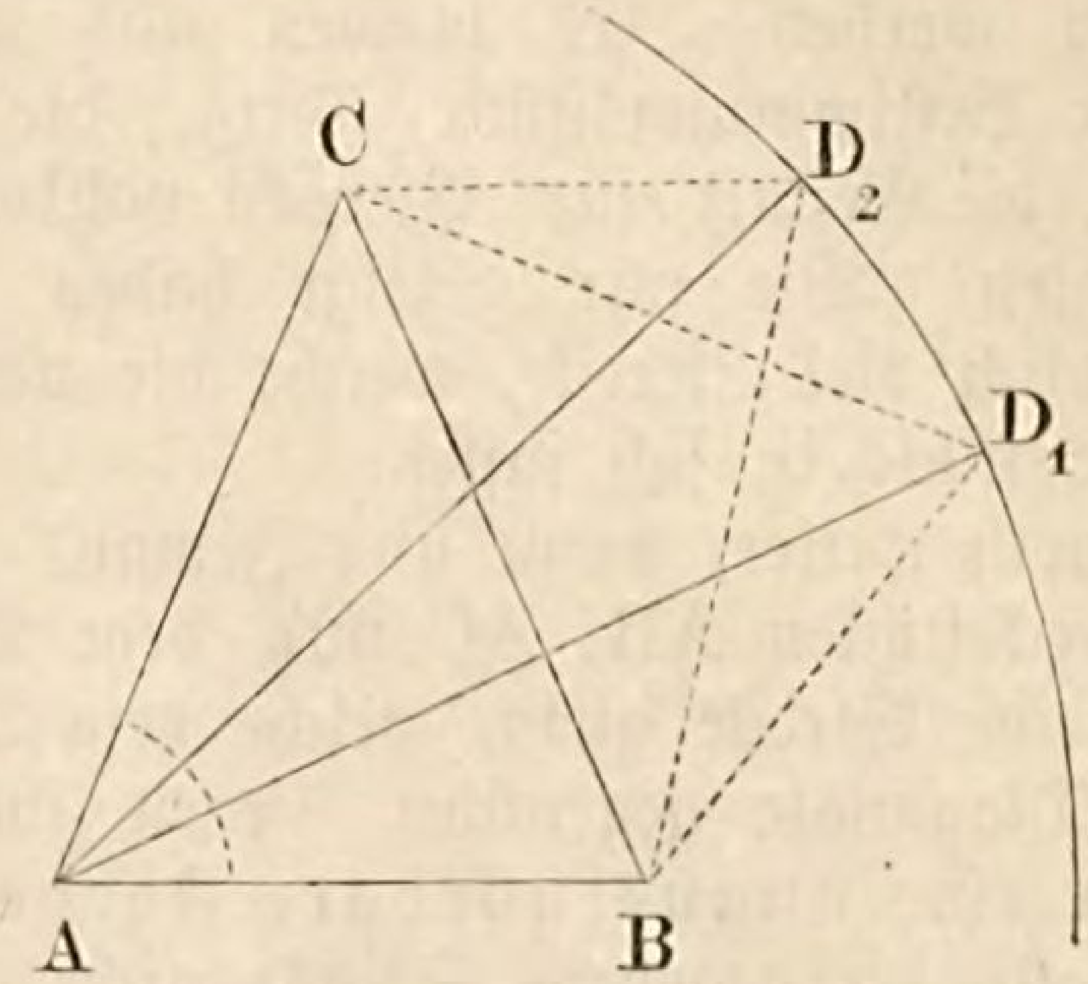


Fig. 10.

dann sind uns fünf Vierecksstücke gegeben; wir werden aber sehen, daß diese fünf Stücke uns bei der Construction nicht zu *einem* Viereck führen, sodern zu *unendlich vielen*, weil die fünf Stücke nicht von einander unabhängig sind und eigentlich nur vier Stücke repräsentiren.* Wenn wir nämlich die beiden Seiten AB und AC und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel kennen, so ist uns auch die Diagonale BC bekannt; sie braucht uns also nicht gegeben zu sein. Die zweite Diagonale kann uns auch nicht dazu dienen, einen bestimmten vierten Eckpunkt zu finden, dieser vierte Eckpunkt muß von A ebenso weit entfernt sein, wie die Diagonale lang ist, er muß also innerhalb des Kreises liegen, welcher um A mit der zweiten Diagonale als Radius beschrieben ist. Zwei dieser Kreispunkte mögen D_1 und D_2 heißen. Verbinden wir die Punkte D_1 und D_2 mit B und C durch gerade Linien, so erhalten wir die beiden Vierecke ABD_1C und ABD_2C. Jedes dieser Vierecke genügt der Forderung, denn beide enthalten die Seiten AB und AC, den Winkel A, die Diagonale BC und eine zweite Diagonale von der gegebenen Länge. Auch wenn wir irgend einen andern Punkt des Kreises mit B und C geradlinig verbinden, ergeben sich Vierecke, welche der Forderung entsprechen. Die Construction liefert uns also *unendlich viele* Vierecke von der gewünschten Beschaffenheit.

---

liegen soll. Dieser Forderung genügen zwei Dreiecke, nämlich ABC und AB′C, denn beide Dreiecke enthalten AC, beide ferner den Winkel α, beide drittens dem Winkel α gegenüber eine Seite so groß wie BC, denn B′C und BC sind gleich als Radien desselben um C beschriebenen Kreises. Zwei Seiten und der Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüberliegt, bestimmen also nicht *eindeutig* die Gestalt eines Dreiecks.

Das eben besprochene Beispiel ist für uns sehr lehrreich. Es sind uns zwar fünf Stücke zur Construction eines Vierecks gegeben, aber eins von diesen Stücken, die Diagonale BC, ist abhängig von drei anderen gegebenen Stücken, nämlich von den beiden Seiten AB und AC und dem Winkel A. BC ist bekannt, wenn wir AB, AC und den Winkel A kennen. BC kann darum als Bestimmungsstück nicht angesehen werden. Es bleiben uns mithin nur vier Bestimmungsstücke übrig, die nicht genügen, die Gestalt eines Vierecks vollkommen zu bedingen. Wie wir gezeigt haben, giebt es unendlich viel Vierecke, welche die vier Bestimmungsstücke in sich fassen.

Ja noch weiter, wenn uns Jemand neben den Vierecksstücken AB, AC und dem Winkel A noch eine Strecke giebt, welche dem Winkel A als Diagonale gegenüber liegen soll, so würde er eine unausführbare Forderung stellen, falls die gegebene Strecke nicht gerade so groß ist wie die schon durch AB, AC und A bestimmte Diagonale BC. **Abhängige** Stücke dürfen also bei einer Aufgabe **gar nicht gegeben** werden. Wir haben daher den Satz:

Wenn ein Viereck construirt werden soll, müssen fünf von einander unabhängige Stücke gegeben sein.

Fünf von einander unabhängige Bestimmungsstücke bedingen die Gestalt des Vierecks. Zwei Vierecke werden darum gleiche Gestalt haben, d. h. zur Deckung gebracht werden können, wenn sie in fünf gleichliegenden und unabhängigen Bestimmungsstücken übereinstimmen. Zur Deckung gebracht werden können, heißt congruent sein, wir haben daher den Satz:

Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in fünf von einander unabhängigen und gleichliegenden Stücken übereinstimmen.

§ 124. Bezeichnung der Vierecksstücke.

Wir wenden uns jetzt zu der Construction der Vierecke. Fünf Bestimmungsstücke müssen uns bei jeder Constructionsaufgabe gegeben sein; und zwar müssen wir von diesen fünf Bestimmungsstücken nicht blos die Länge kennen, sondern wir müssen auch wissen, wie sie im Viereck liegen sollen, denn es lassen sich die verschiedensten Vierecke construiren, wenn die Seiten und Winkel sich in beliebiger Ordnung folgen können. Um weitläufige Auseinandersetzungen bei den einzelnen Constructionsaufgaben zu vermeiden, wollen wir für die Ecken, Winkel, Seiten und Diagonalen des Vierecks eine feste Bezeichnung einführen, welche uns die Lage jeder Ecke, jedes Winkels u. s. w. angiebt.

Die vier Ecken wollen wir wie in Fig. 11 der Reihe nach A, B, C, D und die Winkel α, β, γ und δ nennen, und zwar soll A der Scheitelpunkt des Winkels α, B der Scheitelpunkt des Winkels β, C der Scheitelpunkt des Winkels γ, D der Scheitelpunkt des Winkels δ sein.

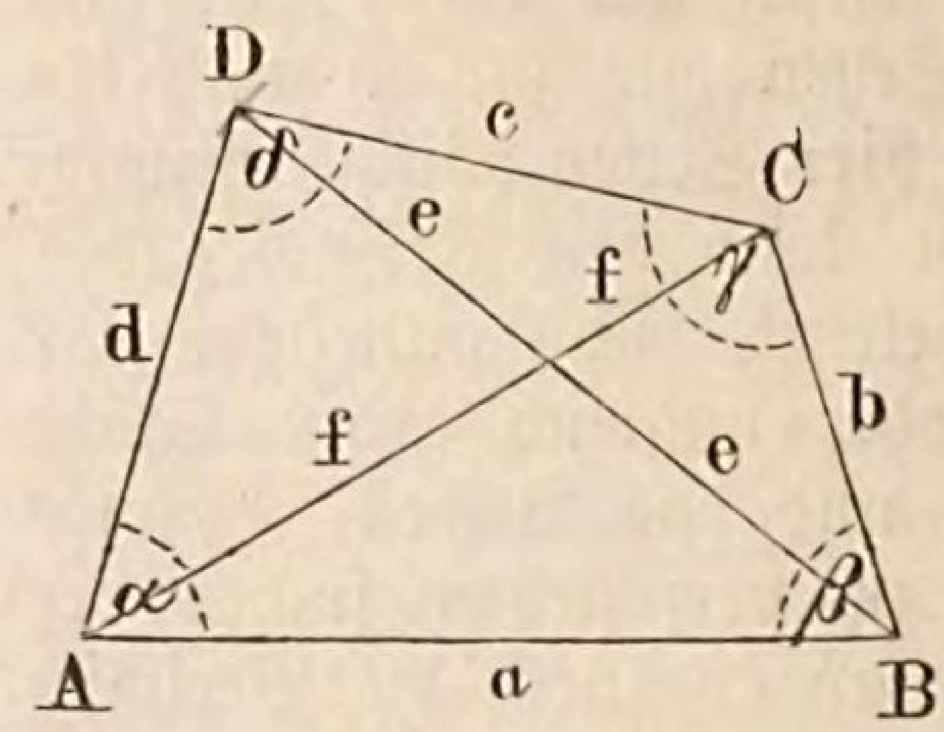


Fig. 11.

Wenn wir zur Bezeichnung der Seiten und Diagonalen kleine Buchstaben verwenden, wollen wir die Seite AB mit a, die Seite DA mit d, die Seite BC mit b, die Diagonale BD mit e, die Seite CD mit c, die Diagonale AC mit f bezeichnen.

Aufgaben. Der Schüler bezeichne mit kleinen Buchstaben die Seiten, welche 1) α, 2) β, 3) γ, 4) δ einschließen. Er gebe ferner mit kleinen Buchstaben die Diagonale an, welche 1) α und γ, 2) β und δ gegenüberliegt.

§ 125. Aufgabe. Es soll ein Viereck aus den vier Seiten und aus einem Winkel construirt werden.

Voraussetzung. Wir haben einen Winkel α [1]) und die vier Strecken a, b, c, d. (Fig. 12.)

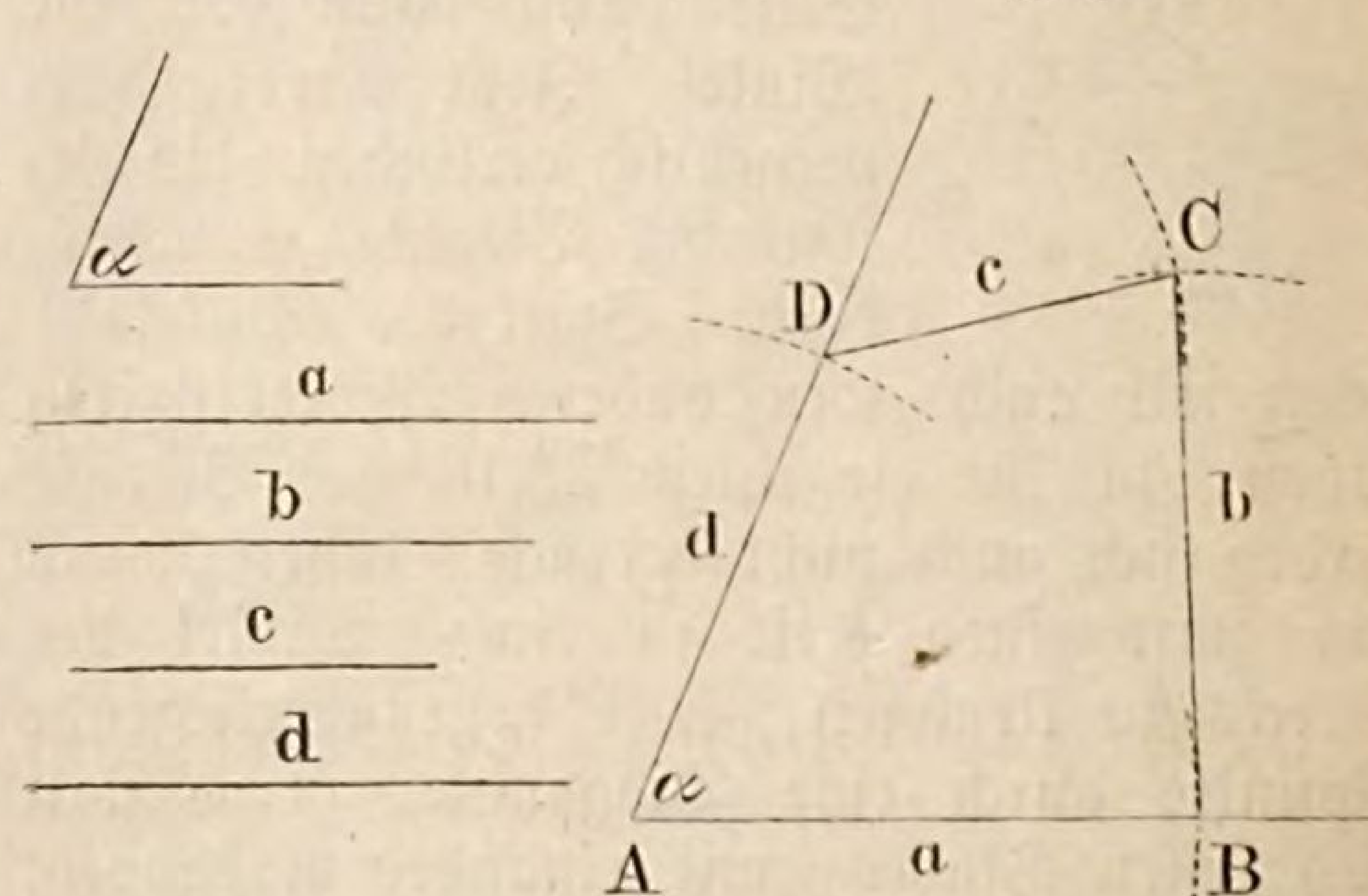


Fig. 12.

Forderung. Wir sollen ein Viereck ABCD zeichnen, in welchem AB = a, BC = b, CD = c, DA = d und der Winkel A = α ist.

Construction. Um das Viereck zu construiren, zeichnen wir uns den Winkel α noch einmal hin, beschreiben dann um den Scheitelpunkt A desselben

---

[1]) Der Winkel α muß nach der vorher besprochenen Bezeichnungsweise von den Strecken a und d eingeschlossen, die Strecke a muß zur Seite AB, die Strecke b zur Seite BC, die Strecke c zur Seite CD und die Strecke d zur Seite DA werden.

einen Kreis mit der gegebenen Strecke a, dann einen Kreis mit der gegebenen Strecke d. Der erste Kreis möge den einen Schenkel des Winkels α in B, der zweite Kreis den andern Schenkel in D schneiden. Darauf schlagen wir um B einen Kreis mit der gegebenen Strecke b und um D einen Kreis mit der gegebenen Strecke c. Die beiden Kreise mögen sich in dem Punkte C treffen. C verbinden wir durch gerade Linien mit B und D und stellen dann die

Behauptung auf, daß AB = a, BC = b, CD = c, DA = d und Winkel A = α ist.

Beweis. Sowohl die vier Seiten AB, BC, CD, DA wie der Winkel α haben der Construction gemäß die behauptete Größe. Denn AB ist Radius eines Kreises, der mit a, BC Radius eines Kreises, der mit b, CD Radius eines Kreises, der mit c und DA Radius eines Kreises, der mit d beschrieben ist. Winkel A ist gleich Winkel α, denn wir haben den Winkel A ebenso groß gezeichnet wie den Winkel α.

Aufgaben. Der Schüler möge die Construction ausführen, wenn gegeben ist:

1) a, b, c, d und β,
2) a, b, c, d und γ,
3) a, b, c, d und δ.

§ 126. Aufgabe. Es soll ein Viereck aus den vier Seiten und einer Diagonale construirt werden.

Voraussetzung. Uns sind die fünf Strecken a, b, c, d, f gegeben. (Fig. 13.)

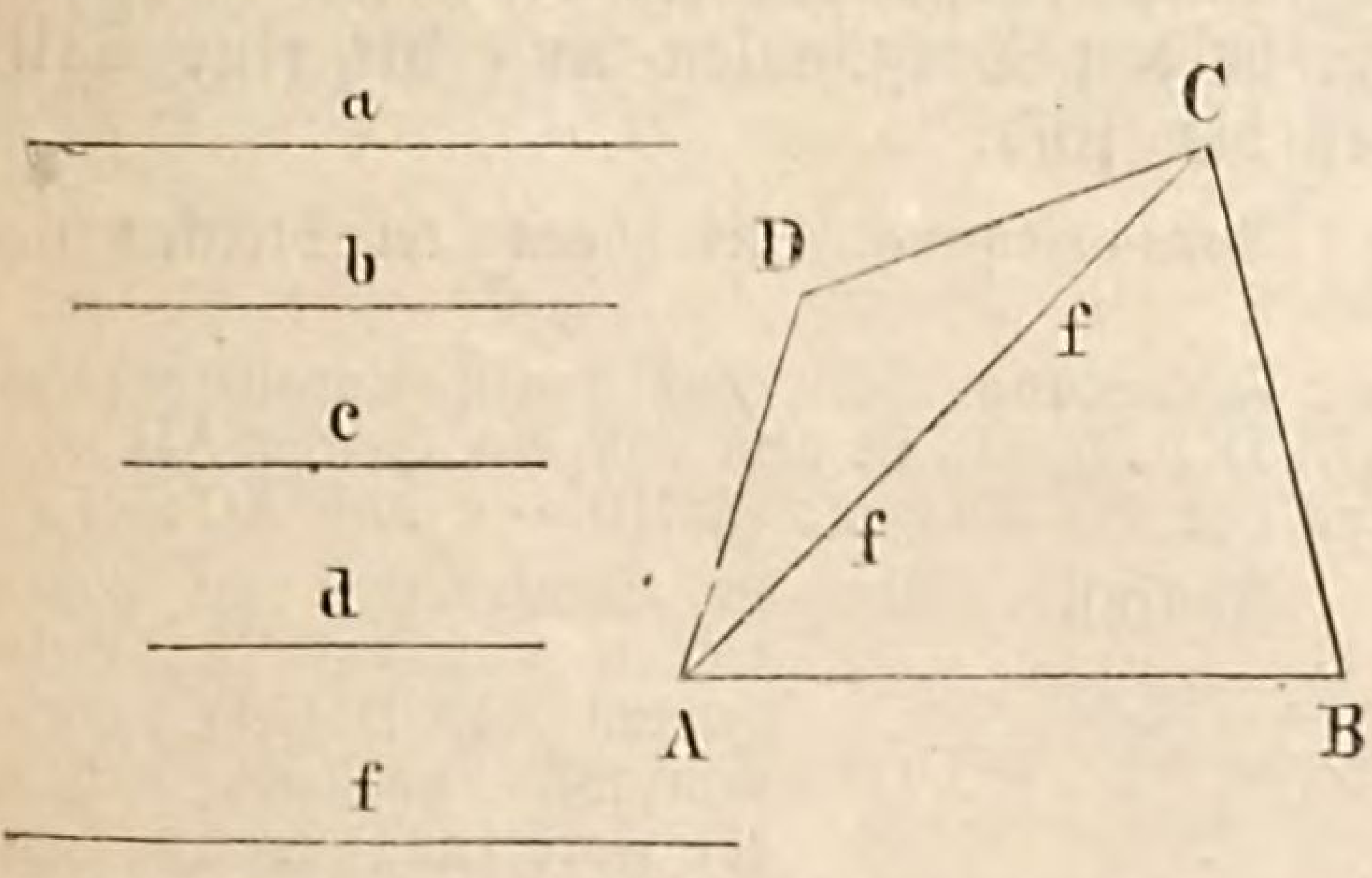


Fig. 13.

Forderung. Wir sollen ein Viereck construiren, in dem die Seite AB = a, BC = b, CD = c, DA = d und die Diagonale AC = f ist.

Analysis. Um die Construction zu finden, wollen wir annehmen, das Viereck ABCD entspreche der Forderung. Wenn wir dieses Viereck betrachten, bemerken wir, daß es durch die Diagonale AC in die beiden Dreiecke ABC und ACD zerlegt wird. In beiden Dreiecken kennen wir die drei Seiten; sie können also beide gemäß § 91 gezeichnet werden. Diese Ueberlegung führt leicht zur

Construction, welche wir ebenso wie die Behauptung und den Beweis dem Schüler überlassen.

Aufgaben. Wie wird die Construction des Vierecks ausfallen, wenn die Diagonale e gegeben ist und die vier Seiten a, b, c und d?

~11. II. 10.

§ 127. Aufgabe. Es soll ein Viereck construirt werden, von welchem die beiden Diagonalen und drei Seiten gegeben sind.

Voraussetzung. Wir haben die fünf Strecken a, b, c, e und f. (Fig. 14.)

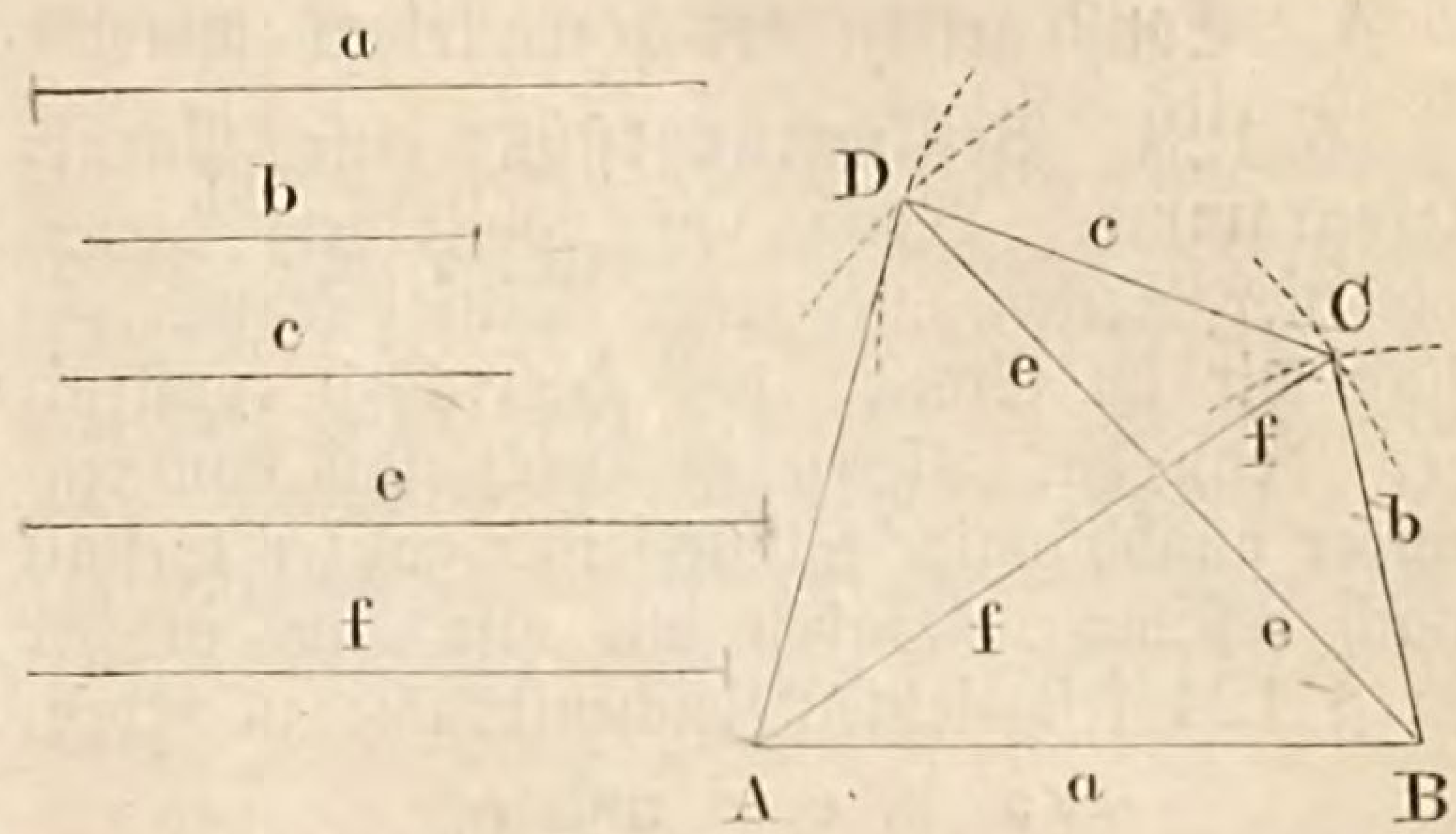


Fig. 14.

Forderung. Wir sollen ein Viereck ABCD zeichnen, in welchem von den Seiten AB = a, BC = b, CD = c und von den Diagonalen BD = e und AC = f ist.

Analysis. In Figur 14 sieht der Schüler das Viereck ABCD; wir wollen uns vorstellen, daß dieses Viereck der Forderung entspricht. Um nun den Weg zu finden, den wir bei der Construction einzuschlagen haben, wollen wir das Viereck zergliedern. Zunächst wird unser Blick auf das Dreieck ABC fallen, in demselben sind uns die drei Seiten bekannt, denn es ist AB = a, BC = b und AC = f. Ebenso kennen wir in dem Dreiecke BCD alle drei Seiten, denn es ist BC = b und CD = c und BD = e. Die Dreiecke ABC und BCD können wir also construiren. Wenn wir nun diese beiden Dreiecke haben, so sind uns damit auch die vier Ecken des Vierecks gegeben, denn das Dreieck ABC liefert uns die drei Ecken ABC und das zweite Dreieck die vierte Ecke D. Kennen wir die vier Ecken, so sind wir leicht im Stande, das Viereck zu zeichnen.

Construction. Wir legen uns die Strecke AB = a hin, schlagen um A einen Kreis mit der gegebenen Strecke f und um B einen Kreis mit der gegebenen Strecke b. Die beiden Kreise mögen sich in C treffen. Verbinden wir C mit A und B geradlinig, so haben wir das Dreieck ABC. Um das Dreieck BCD zu construiren, beschreiben wir jetzt um B einen Kreis mit der gegebenen Strecke e und um C einen Kreis mit der gegebenen Strecke c. Den Schnittpunkt D der beiden Kreise verbinden wir durch gerade Linien mit B und C. Ziehen wir noch die Gerade DA, so ergiebt sich das Viereck ABCD.

Behauptung. Das Viereck ABCD ist das verlangte, d. h. es ist AB = a, BC = b, CD = c, BD = e und AC = f.

Beweis. Die Beweisführung wollen wir den Schüler selbst überlassen. ~11. II. 10.

Aufgaben. Wie können wir das Viereck ABCD construiren,

1) wenn uns die Strecken a, b, d, e, f
2) wenn uns die Strecken a, c, d, e, f

gegeben sind?

Es reift das Gute und Große nur langsam;
Aber es reift gewiß zur herrlich erquickenden Ernte.

Lection 16.

A. Construction des Parallelogramms.

§ 128. **Bestimmungsstücke eines Parallelogramms.** Wenn wir von einem Viereck die vier Seiten und einen Winkel kennen, so sind wir im Stande, das Viereck zu construiren, denn das Viereck ist durch fünf von einander unabhängige Stücke seiner ganzen Gestalt nach bestimmt. Haben wir also, um in der in § 124 festgesetzten Zeichensprache zu reden,

$$a, \; b, \; c, \; d \text{ und } \alpha$$

so ist die Construction durchführbar und von uns auch schon in § 125 durchgeführt worden. Die Bestimmungsstücke verringern sich aber, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist. Im Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich, es ist

$$a = c \text{ und } b = d.$$

Wenn wir also

a, b und α kennen, so sind uns auch a, b, c, d und α bekannt, die Construction ist also durchführbar.

a, b und α bestimmen mithin schon ein Parallelogramm; **zu einem Parallelogramm gehören** also nur **drei** von einander **unabhängige Bestimmungsstücke;** wir werden sogleich ein Parallelogramm aus drei Stücken construiren und dabei die Bezeichnungsweise des § 124 beibehalten.

§ 129. **Aufgabe. Es soll ein Parallelogramm construirt werden, von welchem ein Winkel gegeben ist und die beiden Seiten, welche den Winkel einschließen.**

1. **Voraussetzung.** Wir haben in Fig. 1 einen Winkel α und zwei Strecken a und d.

2. **Forderung.** Es soll ein Parallelogramm ABCD construirt werden, in welchem $AB = a$, $AD = d$ und Winkel $A = \alpha$ ist.

3. **Construction.** Wir zeichnen uns den Winkel α noch einmal hin und nennen seinen Scheitelpunkt A. Von A aus schneiden wir nun $AB = a$ auf dem einen Schenkel und $AD = d$ auf dem andern Schenkel ab. Um B beschreiben wir darauf mit der Strecke d und um D mit der Strecke a einen Kreis. Die beiden Kreise mögen sich in dem Punkte C treffen. Ziehen wir nun die Geraden BC und DC, so entsteht das Viereck ABCD.

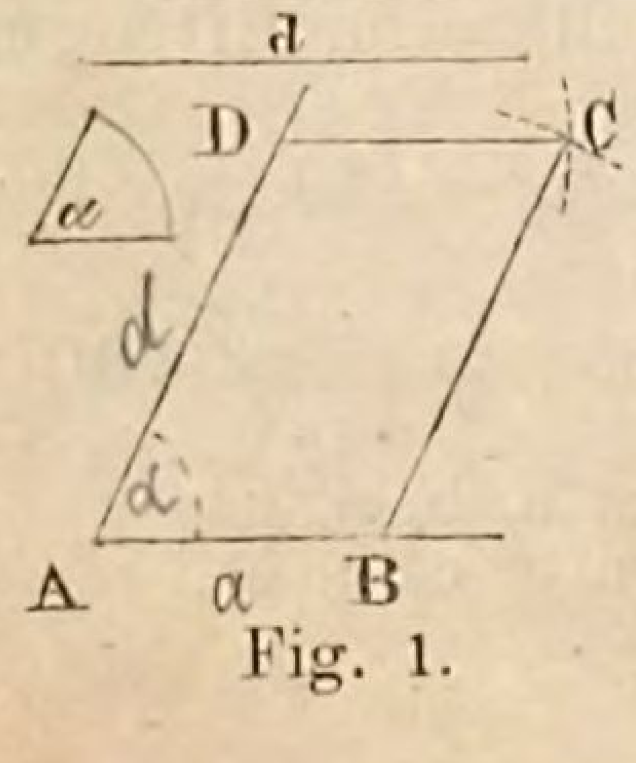


Fig. 1.

Behauptung. In dem Viereck ABCD ist $AB = a$, $AD = d$ und Winkel $A = \alpha$; außerdem ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Beweis. Nach der Construction ist:

$$AB = a, \quad AB = d$$

und Winkel $A = \alpha$. Die drei ersten Theile der Behauptung sind damit bewiesen; es bleibt uns nur übrig, zu zeigen, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Es ist die Seite $DC = a$ und $BC = d$, weil DC der Radius eines mit a beschriebenen Kreises und BC der Radius eines mit d beschriebenen Kreises ist. Wir haben also:

$$\begin{array}{rll} & DC = a & \text{und } BC = d \\ \text{ferner} & AB = a & \text{und } AD = d \\ \hline & AB = DC & \text{und } AD = BC \text{ nach Gr. 11.} \end{array}$$

Ein Viereck, in welchem die Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm. AB und DC, ebenso AD und BC sind Gegenseiten, daher ist ABCD ein Parallelogramm, was behauptet war. 13. II. 10

§ 130. **Aufgabe. Es soll ein Parallelogramm construirt werden, von welchem die beiden Diagonalen und die eine Seite gegeben sind.**

Voraussetzung. Wir haben drei Strecken a, e und f.

Forderung. Wir sollen ein Parallelogramm ABCD zeichnen, in dem von den Seiten $AB = a$ und von den Diagonalen $BD = e$ und $AC = f$ ist.

Analysis. Um die Construction zu finden, wollen wir das Parallelogramm ABCD (Fig. 2), von dem wir annehmen, daß es der Forderung genüge, aufmerksam betrachten und zergliedern. Wir kennen in diesem Parallelogramm die Seite AB und die beiden Diagonalen, denn AB ist so groß wie die gegebene Strecke a, die Diagonale BD ist gleich der gegebenen Strecke e und die Diagonale AC gleich der gegebenen Strecke f. AC und BD schneiden sich im Punkte M und zwar so, daß

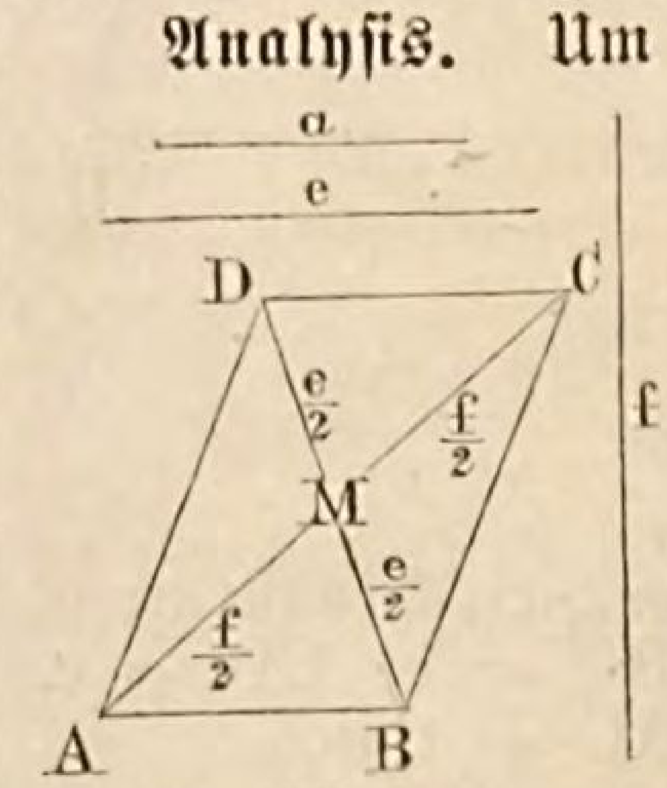


Fig. 2.

$$BM = MD \text{ und } AM = MC \text{ ist.}$$

BM ist also die Hälfte von BD und AM ist die Hälfte von AC, in Zeichen:

$$BM = \tfrac{1}{2}BD \text{ und } AM = \tfrac{1}{2}AC$$
$$\text{oder } BM = \tfrac{1}{2}e \text{ und } AM = \tfrac{1}{2}f.$$

In dem Dreieck ABM sind uns mithin alle drei Seiten bekannt; es ist:

$$AB = a, \quad BM = \tfrac{1}{2}e \text{ und } AM = \tfrac{1}{2}f.$$

Wir sind daher gemäß § 91 im Stande, das Dreieck ABM zu construiren. Wenn wir das Dreieck ABM haben, so ist es nicht schwer, das ganze Parallelogramm zu zeichnen, denn die Ecken C und D erhalten wir, indem wir AM und BM über M hinaus um sich selbst verlängern.

Construction. Wir halbiren die beiden gegebenen Strecken e und f und construiren uns ein Dreieck[1]) ABM, in welchem AB gleich der gegebenen Strecke a, BM gleich der Hälfte von e und AM gleich der Hälfte von f ist. Darauf verlängern wir BM über M hinaus um $MD = \frac{1}{2}e$ und AM über M hinaus um $MC = \frac{1}{2}f$. Verbinden wir nun die Punkte A und D, B und C, C und D durch gerade Linien, so erhalten wir das Viereck ABCD.

Behauptung. 1) In dem Viereck ABCD ist:

$AB = a$, $BD = e$ und $AC = f$.

2) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis. Nach der Construction ist:

$$AB = a,$$

ferner $BM = \frac{1}{2}e$
und $MD = \frac{1}{2}e$

$BM + MD = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e$ [2])
oder $BD = e$,

sowie $AM = \frac{1}{2}f$
und $MC = \frac{1}{2}f$

$AM + MC = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f$ [2])
oder $AC = f$.

Der erste Theil der Behauptung ist damit bewiesen, wir haben nur noch zu zeigen, daß ABCD ein Parallelogramm ist. Betrachten wir dazu die beiden Dreiecke ABM und CDM; in denselben ist:

$AM = MC$ [3])
$BM = MD$ [3])
$\angle AMB = \angle CMD$ [4]).

Die beiden Dreiecke ABM und CDM sind mithin nach dem ersten Congruenzsatz[5]) congruent, in Zeichen:

$$\triangle ABM \cong \triangle CDM.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber; wie wir gezeigt haben, ist

$\angle AMB = \angle CMD$, daher auch
I. $AB = CD$.

Ferner sind auch die Winkel gleich, welche in congruenten Dreiecken gleichen Seiten gegenüberliegen, wir haben:

$AM = MC$, mithin auch
$\angle ABM = \angle CDM$.

Wie der Schüler leicht bemerken wird, sind die Winkel ABM und CDM innere Wechselwinkel bei den Geraden AB und CD geschnitten von BD. Nun sind zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Wechselwinkel gleich sind, nach Lehrsatz VII Seite 63 parallel. Wir haben folglich:

II. $AB \parallel CD$.

Die Gleichungen I und II zeigen uns, daß die beiden Gegenseiten AB und CD im Viereck gleich und parallel sind. Das Viereck ABCD ist also nach Lehrsatz I Seite 123 ein Parallelogramm.

[1]) Ein Dreieck, von welchem die drei Seiten gegeben sind, können wir gemäß § 107 construiren. [2]) Nach Grundsatz III. [3]) Weil sowohl AM wie MC gleich $\frac{1}{2}f$ und sowohl BM wie MD gleich $\frac{1}{2}e$ ist. [4]) Weil die Winkel AMB und CMD Scheitelwinkel sind. [5]) Denn sie stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein.

§ 131. Aufgabe. Es soll ein Parallelogramm construirt werden, von dem ein Winkel, eine der Seiten, die dem Winkel anliegt, und die Diagonale, welche dem Winkel gegenüberliegt gegeben sind.

Voraussetzung. Wir haben in Fig. 3 einen Winkel α und zwei Strecken a und e.

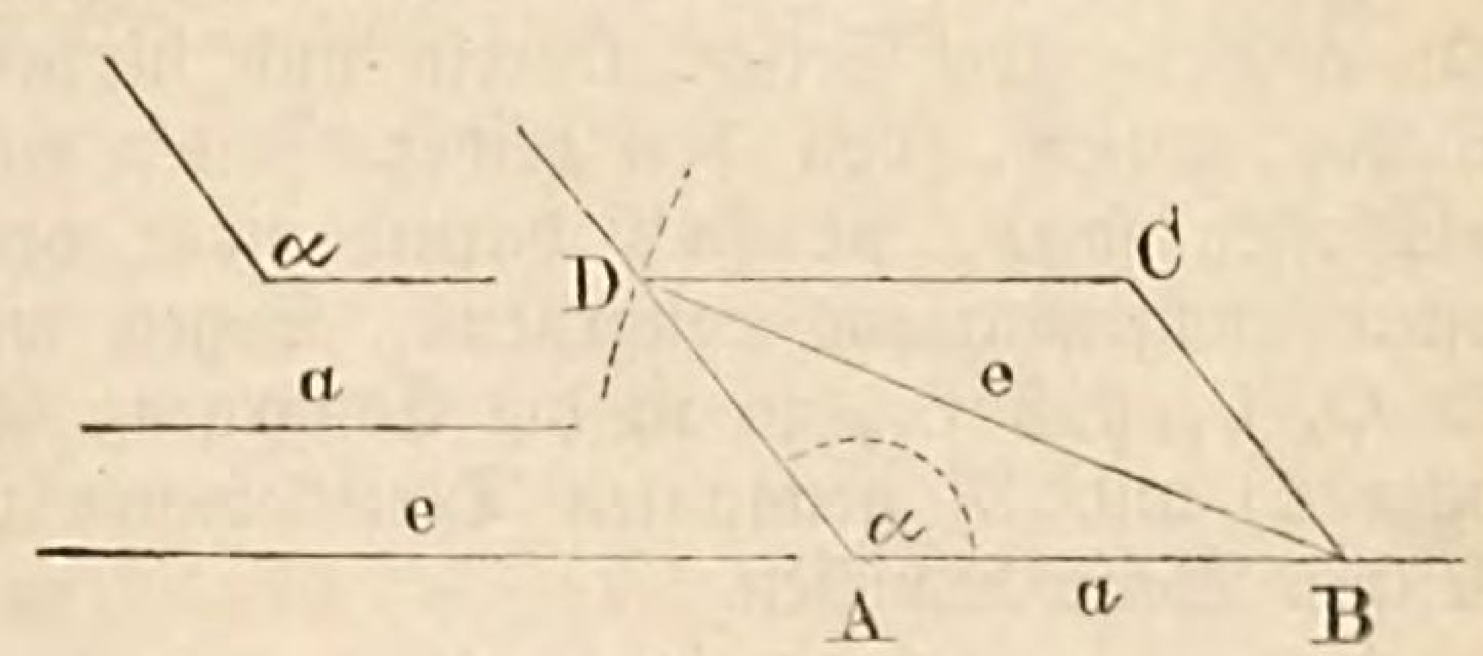


Fig. 3.

Forderung. Es soll ein Parallelogramm construirt werden, in dem $AB = a$, $BD = e$ und $\angle A = \angle \alpha$ ist.

Die Analysis, Construction, Behauptung und den Beweis möge der Schüler selbst an Fig. 3 ausführen.

B. Die geometrischen Oerter.

§ 132. Der Kreis. Wir wollen den Begriff des geometrischen Ortes sogleich an einem bestimmten Beispiel entwickeln. Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind mit andern Worten: **der Kreis ist der Ort**, oder, wie man sich meist ausgedrückt: der **geometrische Ort** für alle Punkte, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben. Also einen geometrischen Ort haben wir kennen gelernt. Wir wollen uns sogleich zu einem zweiten wenden.

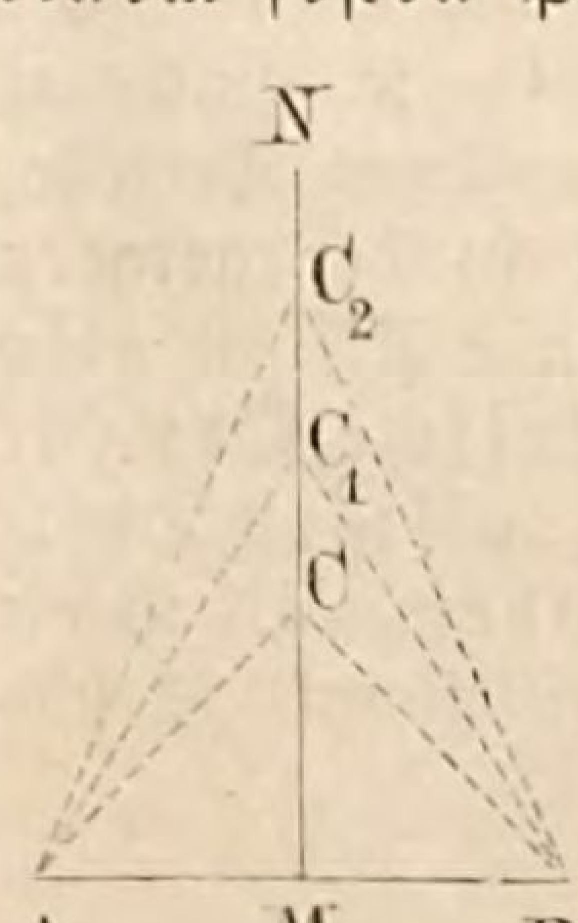


Fig. 4.

Die gerade Linie AB (Fig. 4) ist im Punkte M halbirt, und auf AB im Punkte M ist die Senkrechte MN errichtet worden. C, C_1, C_2 sind Punkte dieser Senkrechten. Wenn wir C, C_1 und C_2 mit A und B geradlinig verbinden, erhalten wir nach einander die Dreiecke

ACM und BCM,
AC_1M und BC_1M,
AC_2M und BC_2M. 15.II.10.

Es ist nun nicht schwer zu beweisen, daß

1) $\triangle ACM \cong \triangle BCM$,
2) $\triangle AC_1M \cong \triangle BC_1M$,
3) $\triangle AC_2M \cong \triangle BC_2M$ ist.

Bei dem ersten Dreieckspaar haben wir:

AM = BM [1]),
MC = MC, nach Gr. I.
und $\angle$ AMC = $\angle$ BMC [2]).

Die beiden Dreiecke AMC und BMC stimmen also in zwei Seiten überein und in dem Winkel, welcher von den beiden Seiten eingeschlossen wird; sie sind darum nach dem ersten Congruenzsatze congruent. Setzen wir für C, C_1 und C_2, so ist die Congruenz der unter 2) und 3) genannten Dreieckspaare in gleicher Weise bewiesen.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber, die beiden Winkel bei M [3]) sind als Rechte einander gleich, daher ist auch:

1) AC = BC [4])
2) $AC_1 = BC_1$ [4])
3) $AC_2 = BC_2$ [4]).

d. h. die Dreiecke

ACB, AC_1B und AC_2B

sind gleichschenklig. Würden wir noch irgend welche andere Punkte, etwa C_3, C_4, C_5 ꝛc. auf MN annehmen und mit A und B geradlinig verbinden, so werden sich noch gleichschenklige Dreiecke

AC_3B, AC_4B, AC_5B

ergeben. Die Gerade AB ist die Basis. Die Punkte C, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ꝛc. sind die Spitzen aller dieser gleichschenkligen Dreiecke; die Spitzen liegen sämmtlich in der geraden Linie MN. Die gerade Linie MN ist also der **Ort** oder der **geometrische Ort** für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, die AB zur Basis haben. MN ist die Senkrechte, welche in dem Mittelpunkt M von AB errichtet ist.

[1]) Denn M ist ja der Mittelpunkt von AB. [2]) Beide Winkel sind Rechte, weil MN auf AB senkrecht steht. [3]) D. h. die beiden Winkel AMC und BMC, AMC_1 und BMC_1, AMC_2 und BMC_2. [4]) Denn AC und BC_1 resp. AC_1 und BC_1, AC_2 und BC_2 liegen den rechten Winkeln bei M gegenüber.

Allgemein können wir sagen:

Der geometrische Ort [1]) für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Basis haben, ist die Senkrechte, die in der Mitte der Basis errichtet ist.

Diesen Satz können wir noch in etwas anderer Fassung aussprechen. Wie wir bereits bemerkt haben, ist:

AC = BC,
$AC_1 = BC_1$,
$AC_2 = BC_2$,
$AC_3 = BC_3$ u. s. w.

d. h. die Punkte C, C_1, C_2, C_3 ꝛc. sind von den beiden festen Punkten A und B gleich weit entfernt.

Bedenken wir noch einmal, daß die Punkte C, C_1 u. s. w. in der Geraden MN liegen, die auf AB im Mittelpunkt senkrecht steht, so haben wir den Satz:

Der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die gerade Linie, die im Mittelpunkt der Verbindungslinie der beiden festen Punkte senkrecht steht.

§ 133. Die Definition des geometrischen Ortes, seine Verwendung bei Constructionsaufgaben. Nachdem wir zwei geometrische Oerter kennen gelernt haben, wird es uns nicht schwer werden, allgemein anzugeben, was man unter einem geometrischen Ort verstehe. Oft gruppiren sich die Punkte, welche eine gleiche Eigenschaft besitzen, zu einer bestimmten geraden oder krummen Linie, die man den **geometrischen Ort** oder den **Ort** dieser Punkte nennt. Wir führten das Beispiel eines Kreises an. Die Punkte, welche die Eigenschaft haben, von einem festen Punkte gleich weit entfernt zu sein, gruppiren sich zu einem Kreise, der Kreis ist darum ihr geometrischer Ort oder kürzer ihr Ort. Die Kenntniß der geometrischen Oerter ist besonders für die Lösung der Constructionsaufgaben außerordentlich wichtig. Oft ist die Aufgabe gelöst oder wenigstens ein wichtiger Schritt zur Lösung gethan, wenn wir die Lage eines uns nicht gegebenen Punktes feststellen können. Dieser Punkt wird sich meist

[1]) Wir hätten die Gerade MN auch über M hinaus nach unten verlängern können, auch der untere Theil ist der geometrische Ort für die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke.

als **Durchschnitt zweier geometrischer Oerter** ansehen lassen. Einige Beispiele sollen sogleich beleuchten, was wir damit meinen. In § 91 haben wir uns die Aufgabe gestellt, ein Dreieck aus den drei Seiten zu construiren. Gegeben sind uns in diesem Falle (siehe Fig. 5)

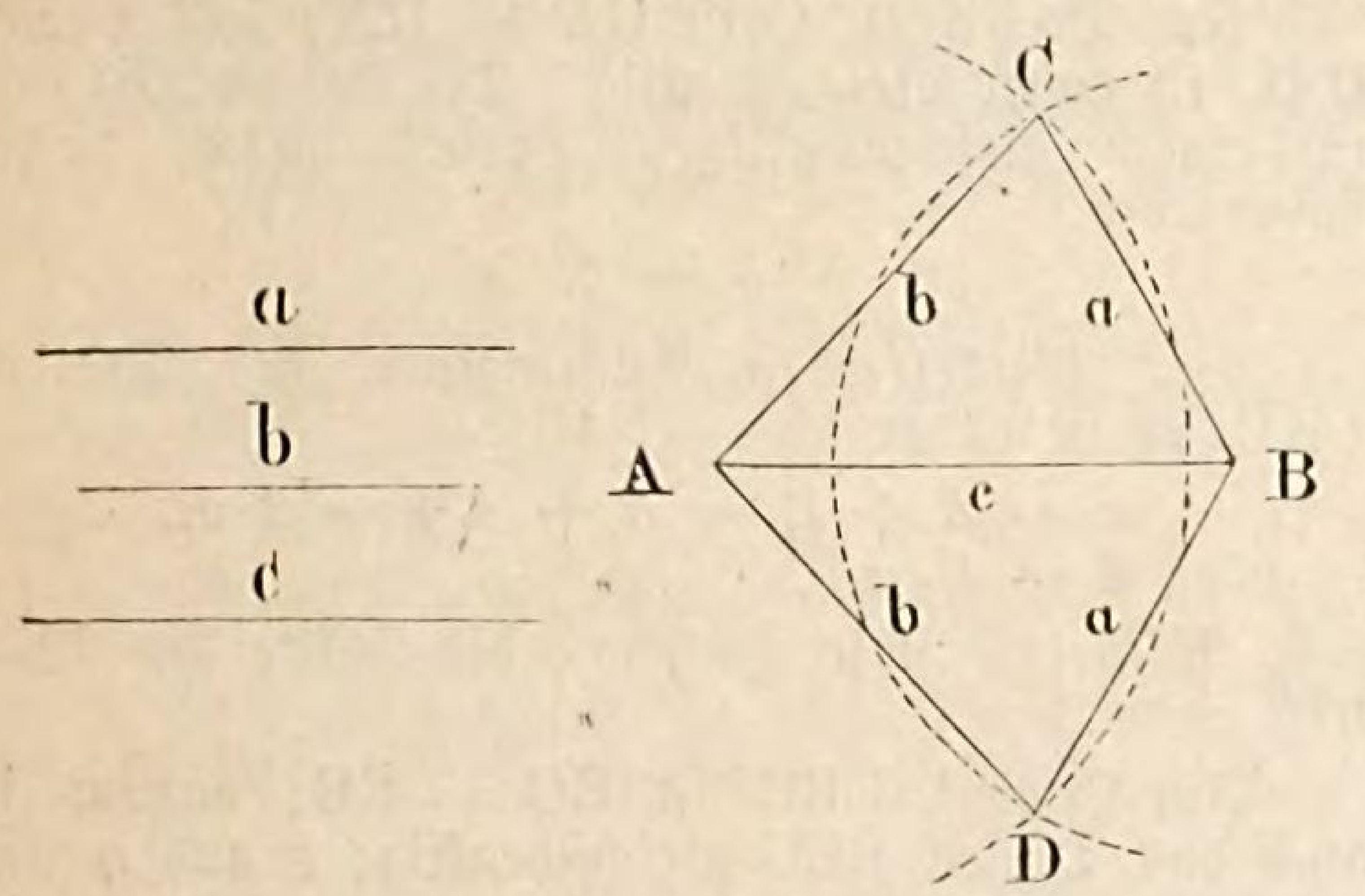


Fig. 5.

die drei Strecken a, b, c, welche Dreiecksseiten werden sollen. Um die Construction auszuführen, ziehen wir uns eine gerade Linie AB = c; das ganze Dreieck ist nun bestimmt, wenn wir noch einen dritten Punkt haben, der von B um die gegebene Strecke a und zugleich von A um die gegebene Strecke b entfernt ist. Nun wissen wir:

1) der geometrische Ort aller Punkte, welche von B um a entfernt sind, ist der um B mit a beschriebene Kreis,
2) der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernung von A die Strecke b beträgt, ist der mit b um A geschlagene Kreis.

Der gesuchte Punkt ist von B um a und zugleich von A um b entfernt. Er wird also auf beiden soeben besprochenen Oertern zugleich liegen, mit anderen Worten, er wird **Durchschnittspunkt der beiden Oerter,** in unserm Falle also der Durchschnittspunkt der beiden Kreise sein, welche um A und B geschlagen sind. Es giebt zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise, der eine ist C, der andere D. Beide genügen der Forderung. Sowohl das Dreieck ABC wie das Dreieck ABD enthält die drei gegebenen Strecken.

§ 134. Der gesuchte Punkt als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter.

Noch einige andere Beispiele sollen uns darüber belehren, daß wir die Constructionsaufgaben lösen können, wenn wir den gesuchten Punkt als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter auffassen. Stellen wir uns vor, wir würden aufgefordert:

ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, von dem uns die Länge der Basis und die Länge der anderen Seite gegeben ist, so wird die

Voraussetzung sein: Uns sind zwei Strecken p und s[1]) bekannt (Fig. 6).

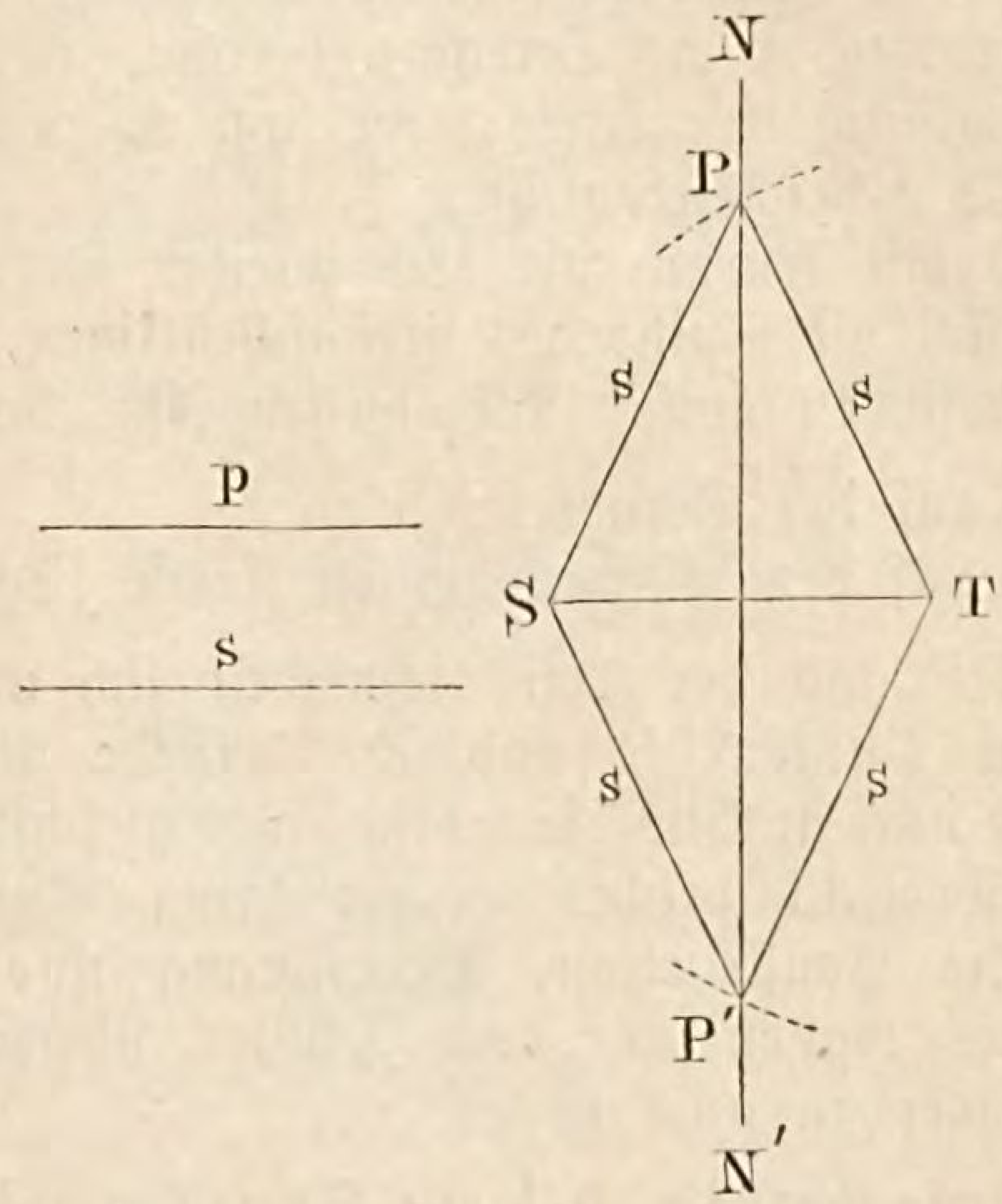


Fig. 6.

Forderung. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in dem p die Länge der Basis und s die Länge der anderen Seiten ist.

Analysis. In diesem Theile müssen wir uns überlegen, wie die Construction auszuführen ist. Zeichnen wir uns die Basis ST = p, so haben wir zwei Ecken S und T des gleichschenkligen Dreiecks. Der dritte Eckpunkt, die Spitze, ist noch zu finden. Wir können zwei Wege einschlagen, um die Spitze als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter darzustellen. Den einen Weg möge der Schüler selbst finden[2]), den zweiten schwierigeren und umständlicheren Weg wollen wir angeben. Wir wissen, daß:

der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke die Senkrechte ist, die wir im Mittelpunkte der Basis errichtet haben.

---

[1]) Im gleichschenkligen Dreieck haben die Seiten gleiche Größe, welche nicht Basis sind, ihre Länge wird daher durch die eine Strecke s genügend bezeichnet. [2]) Der Schüler möge bedenken, daß alle drei Seiten gegeben sind. Er wird dann nach dem vorigen Paragraphen die beiden Orte angeben können, die wir meinen. Ob er das Richtige getroffen hat, wird er aus der Beantwortung der Fragen im nächsten Briefe ersehen.

Den einen Ort kennen wir also: er wird durch die Gerade NN′ repräsentirt, die den Mittelpunkt von AB durchschneidet. Wir haben noch den zweiten Ort zu suchen. Die Seiten, welche nicht Basis sind, haben dieselbe Größe wie die gegebene Strecke s. Die Spitze wird daher von A um die Länge der Strecke s entfernt sein.

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernung A die Strecke s beträgt, ist, wie wir wissen, der Kreis, der um A mit der Strecke s beschrieben ist.

Damit kennen wir den zweiten Ort, auf dem sich die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks befinden muß. Wir wissen jetzt, daß sie

1) auf der Geraden NN′
2) auf dem obenerwähnten Kreise liegt.

NN′ und der Kreis schneiden sich in den beiden Punkten P und P′. Beide Punkte geben uns mithin die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, welches der Forderung entspricht. Die Construction, Behauptung und den Beweis wollen wir dem Schüler überlassen. Wir wenden uns zu der

Aufgabe: Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, wenn zwei Winkel gegeben sind und die Summe aller drei Seiten.

Voraussetzung. Uns sind zwei Winkel α und β bekannt und eine Strecke s.

Forderung. Wir sollen Dreieck ABC construiren, in welchem CA + AB + BC = s, Winkel A = α und Winkel B = β ist.

Analysis. Um den Weg zu finden, den wir bei der Construction einzuschlagen haben, wollen wir annehmen, das Dreieck ABC in Figur 7 entspreche der Forderung. Da uns die Summe der

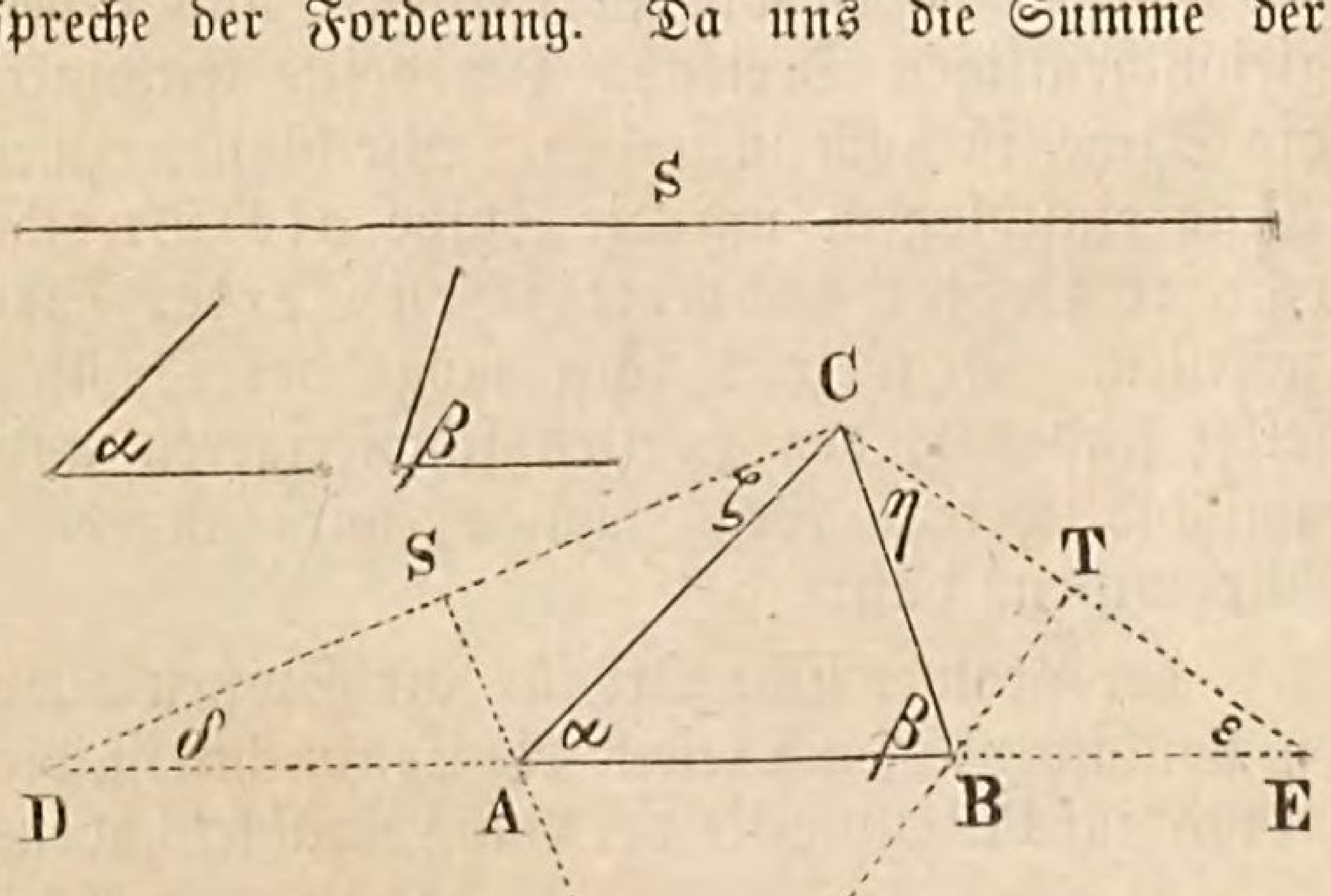


Fig. 7.

Seiten als das eine Bestimmungsstück gegeben ist, werden wir uns diese Summe sichtbar machen. Dies läßt sich leicht ausführen, wir brauchen nur AB über A hinaus um AD = CA und über B hinaus um BE = BC zu verlängern, so erhalten wir die Strecke

$$DE = CA + AB + BC = s.\ [1]$$

Verbinden wir nun die Punkte D und E mit C durch gerade Linien, so entstehen die Dreiecke DAC, EBC und das große Dreieck DEC. Wir wollen diese Dreiecke einzeln betrachten.

Im Dreieck DAC ist CA = DA, das Dreieck DAC ist daher gleichschenklig. Die Basiswinkel sind in einem gleichschenkligen Dreieck gleich, daher haben wir:

$$\delta = \zeta.$$

Der Winkel α ist Außenwinkel des Dreiecks DAC, es ist daher

$$\alpha = \delta + \zeta = \delta + \delta\ [2] = 2\,\delta,$$

oder $\delta = {}^1/_2\alpha$ [3],

d. h. Winkel δ ist so groß wie die Hälfte des Winkels α.

Im Dreieck EBC ist BC = EB; darum ist auch das Dreieck BEC gleichschenklig; ε und η sind die Basiswinkel, folglich

$$\varepsilon = \eta.$$

Der Winkel β ist als Außenwinkel gleich der Summe der beiden Winkel ε und η, in Zeichen:

$$\beta = \varepsilon + \eta = \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon,$$

also $\varepsilon = {}^1/_2\beta$,

d. h. der Winkel ε ist gleich der Hälfte des uns bekannten Winkels β.

Wir kommen jetzt zum Dreieck DEC. In demselben kennen wir die Seite DE und die beiden Winkel δ und ε, denn es ist DE so groß wie die gegebene Strecke s, der Winkel δ ist, wie bewiesen, gleich der Hälfte des gegebenen Winkels α und der Winkel ε gleich der Hälfte des gegebenen Winkels β. Das Dreieck DEC können wir also gemäß § 94 construiren.

Doch wenn wir auch DEC haben, wie kommen wir zum Dreieck ABC, dessen Construction von uns verlangt wird? Einen Schritt zu der geforderten Construction haben wir freilich gethan, indem wir mit dem Dreieck DEC auch den Eckpunkt C des Dreiecks ABC gefunden haben; die Eckpunkte B und A sind aber noch zu suchen; wir werden sie wieder als Durchschnittspunkt zweier Orte auffassen.

Der eine Ort der beiden Punkte ist ersichtlich die Gerade DE, denn sowohl A wie B muß auf der Geraden DE liegen.

Suchen wir zunächst den zweiten Ort für den Punkt A. DAC ist ein gleichschenkliges Dreieck.

---

[1] Wir haben angenommen, daß ABC das verlangte Dreieck ist, die Summe der Seiten desselben muß daher gleich der Strecke s sein, in Zeichen:

s = CA + AB + BC. Nun ist:

CA = DA und BC = BE, daher

CA + AB + BC = DA + AB + BE

oder CA + AB + BC = DE (Fig. 7), also auch

s = CA + AB + BC = DE

oder anders gestellt:

DE = AC + AB + BC = s.

[2] Für ζ ist der gleiche Winkel δ eingesetzt.

[3] α ist doppelt so groß wie δ heißt mit anderen Worten: δ ist halb so groß wie α.

A ist die Spitze und CD ist die Basis desselben; A wird also gemäß § 132 auf der Geraden SS′ liegen, die auf der Basis CD im Mittelpunkte M senkrecht steht.

Der zweite Ort für den Punkt A ist also die Gerade SS′; diese Gerade können wir construiren, haben wir doch das Dreieck DEC und mit ihm die Seite CD; von dieser Seite können wir gemäß § 97 den Mittelpunkt S finden und in S auf CD die Senkrechte SS′ gemäß § 98 errichten. Der zweite Ort SS′ für den Punkt A ist uns also auch bekannt.

Der gesuchte Punkt A ist gleichbedeutend mit dem Durchschnitt seiner beiden Orte, d. h. gleichbedeutend mit dem Durchschnittspunkt der beiden Geradea DE und SS′.

Begeben wir uns jetzt auf die Suche nach dem Punkt B′. Sein einer Ort ist, wie wir wissen, die Gerade DE, sein zweiter Ort wird die Gerade TT′ sein, welche auf CE im Mittelpunkte T senkrecht steht.

B ist mithin der Durchschnitt der beiden Geraden DE und TT′. Jetzt kennen wir alle drei Eckpunkte A, B, C, das verlangte Dreieck läßt sich construiren.

Construction. Wir halbiren zunächst die gegebenen Winkel α und β nach § 96 und erhalten dadurch zwei Winkel von der Größe $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}\beta$; dann ziehen wir uns eine Gerade DE, welche ebenso groß ist wie die gegebene Strecke s und tragen gemäß § 92 an DE im Punkte D den Winkel $\delta = \frac{1}{2}\alpha$ und im Punkte E den Winkel $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$ an, die freien Schenkel der beiden Winkel mögen sich im Punkte C schneiden. Auf diese Weise ist das Dreieck DEC entstanden; in demselben wollen wir die beiden Seiten CD und CE halbiren[1]); der Mittelpunkt von CD möge S und der Mittelpunkt von CE möge T heißen. Auf CD errichten wir in S die Senkrechte SS′ und auf CE in T die Senkrechte TT′. SS′ und DE mögen sich im Punkte A, TT′ und DE im Punkte B schneiden. Ziehen wir die Geraden AC und BC, so erhalten wir das Dreieck ABC.

Behauptung. In dem Dreieck ABC[2]) ist s = CA + AB + BC, es ist ferner $\angle$ CAB = $\angle\,\alpha$ und $\angle$ CBA = $\angle\,\beta$.

Beweis. Nach der Construction haben wir:

$$DE = s.$$

Wie aus Figur 7 hervorgeht, ist:

$$DE = DA + AB + BE$$

$$\text{oder I. } s = DA + AB + BE.$$

Nun sind die beiden Dreiecke DAC und EBC gleichschenklig[1]), daher:

$$DA = CA \text{ und } BE = BC.$$

Setzen wir in Gleichung I für DA die gleiche Größe CA und für BE die gleiche Größe BC ein, so ergiebt sich:

II. s = CA + AB + BC, was behauptet war.

Wir haben jetzt den zweiten Theil der Behauptung zu beweisen. Der Winkel CAB ist Außenwinkel des Dreiecks DAC, darum ist:

$$\angle\,CAB = \delta + \zeta.$$

In dem gleichschenkligen Dreieck DAC sind die Basiswinkel gleich, in Zeichen:

$$\delta = \zeta.$$

Setzen wir in der vorletzten Gleichung für ζ den gleichen Winkel δ ein, so erhalten wir:

$$\angle\,CAB = \delta + \delta.$$

Nun ist nach der Construction:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{darum auch } \angle\,CAB = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{oder } \angle\,CAB = \alpha, \text{ was behauptet war.}$$

Ferner ist der Winkel CBA Außenwinkel des Dreiecks EBC, folglich ist:

$$\angle\,CBA = \varepsilon + \eta.$$

Das Dreieck EBC ist gleichschenklig, daher sind in demselben die Basiswinkel ε und η gleich, in Zeichen, es ist:

$$\varepsilon = \eta.$$

Vertauschen wir in der vorletzten Gleichung η mit ε, so erhalten wir:

$$\angle\,CBA = \varepsilon + \varepsilon.$$

Nach der Construction ist:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\beta, \text{ mithin}$$

$$\angle\,CBA = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta.$$

$$\text{oder } \angle\,CBA = \beta, \text{ was behauptet war.}$$

Fragen. Der Schüler möge sich die zweite Lection des sechsten Briefes noch einmal vornehmen und im Anschluß an die Lehre von den geometrischen Oertern folgende Fragen beantworten.

1) In § 94 suchten wir den Punkt C. Welches sind die beiden geometrischen Oerter, als deren Durchschnittspunkt wir C betrachten können?

2) Wie heißen in § 96 die beiden geometrischen Oerter, deren Durchschnittspunkt P_1 ist?

3) Welches sind in § 98 die geometrischen Oerter, welche die Lage der Punkte C und C_1 bestimmen?

4) Welche geometrischen Oerter bestimmen in § 99 die Lage der Punkte M und N?

5) Welches sind die geometrischen Oerter, deren Durchschnittspunkt D ist? 17. VI. 10.

---

[1]) Gemäß § 97. [2]) In der Analysis nahmen wir an, daß das Dreieck ABC der Forderung entspreche, daß also:

$$\angle\,CAB = \alpha \text{ und } \angle\,CBA = \beta \text{ sei.}$$

Wir haben darum den Buchstaben α auch in die Oeffnung des Winkels CAB und den Buchstaben β in die Oeffnung des Winkels CBA hineingezeichnet. Jetzt haben wir aber erst zu beweisen, daß die Winkel CAB und α, ebenso die Winkel CBA und β gleich seien. Der Schüler wird darum gut thun, sich für die Behauptung und den Beweis die Buchstaben α und β aus der Figur entfernt zu denken.

[1]) a) SS′ ist der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis CD ist. A liegt in SS′, daher ist das Dreieck DAC gleichschenklig. b) TT′ ist der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis EC ist. B ist ein Punkt der Geraden TT′, mithin ist auch das Dreieck EBC gleichschenklig.

C. Recapitulation.

Nachdem wir beim Beginn der **fünfzehnten Lection** die Aufgabe erledigt und die Fragen beantwortet hatten, wiederholten wir, wie wir die astronomische Höhe aufgefaßt haben und was man unter der absoluten und relativen Höhe verstehe. Bei der Besprechung der relativen Höhe hielten wir uns länger auf; wir setzten auseinander, daß sie sehr verschieden ausfallen könne und sich ganz nach der Horizontalebene richte, von der man bei ihrer Messung ausgehe. Hiernach begannen wir zu zeigen, wie man vermittelst des Diopters die relative Höhe eines Hügels ausmessen, ja, wenn man mehrere Stationen mache, auch die Höhe einer größeren Bodenerhebung bestimmen könne. Wir gingen dann zu einer zweiten, zwar mühsamen, aber leicht verständlichen Methode über, Höhenunterschiede auf dem Felde zu ermitteln; wir besprachen nämlich, wie mit Richtscheit und Setzwaage kleine Höhenmessungen oder die sogenannten Nivellirungsarbeiten ausgeführt werden könnten. Nachdem wir noch die Messung horizontaler Linien mit Richtscheit und Setzwaage erörtert hatten, wandten wir uns im Abschnitt D zur Feststellung der Bestimmungsstücke eines Dreiecks und Vierecks. Um zu sehen, wie viel Bestimmungsstücke zu einem Dreieck gehören, fügten wir drei Stäbe so zusammen, daß sie die Seiten eines Dreiecks bildeten. Wir mochten nun das Dreieck wenden und anfassen, wie wir wollten, es ließ sich auf keine Weise verschieben. Daraus schlossen wir, daß ein Dreieck durch die drei Seiten vollkommen bestimmt sei. Weitere Betrachtungen führten uns zu dem Satze, daß drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke immer die Gestalt eines Dreiecks bedingen; eine Ausnahme hatten wir noch zu constatiren: wenn zwei Seiten gegeben sind und der Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüberliegt, so lassen sich zwei Dreiecke construiren, die Gestalt eines Dreiecks ist also nicht eindeutig bestimmt. Wir gingen darauf zu den Bestimmungsstücken eines Vierecks über; um die Zahl der Bestimmungsstücke festzustellen, legten wir vier Stäbe aneinander und fanden, daß das Viereck, welches auf diese Weise entstand, sich verschieben und durch Drücken oder Ziehen an den Ecken in die verschiedensten Formen bringen lasse. Daraus konnten wir schließen, daß vier Stücke die Gestalt eines Vierecks noch nicht bestimmen. Bald sahen wir auch, daß fünf von einander unabhängige Bestimmungsstücke zur Construction eines Vierecks gehören. Von diesen fünf Bestimmungsstücken müssen wir nicht blos die Größe kennen, sondern wir müssen auch wissen, wie sie zu einander liegen, sonst wäre das Viereck nicht eindentig bestimmt, sondern es würde viele Vierecke geben, welche die fünf Bestimmungsstücke freilich in anderer Lage zu einander enthalten. Darum setzten wir, bevor wir zu den Vierecksconstructionen übergingen, eine bestimmte Bezeichnungsweise für die Vierecksstücke fest, die uns sogleich die Lage der Vierecksseiten und -Winlel und -Diagonalen erkennen ließ. Nachdem wir noch drei Vierecksaufgaben behandelt hatten, kamen wir in der **sechzehnten Lection** zu den Bestimmungsstücken des Parallelogramms. Während wir fünf Bestimmungsstücke brauchten, um ein Viereck zu construiren, von dessen gegenüberliegenden Seiten wir die Parallelität nicht voraussetzten, verringert sich die Anzahl der Bestimmungsstücke auf drei, wenn wir ein Parallelogramm zeichnen wollen. Wir bewiesen auch sogleich die Richtigkeit dieses Satzes, indem wir mehrere Parallelogramme construirten, von denen uns drei Stücke bekannt waren. Darauf wandten wir uns zur Lehre von den geometrischen Oertern; und zwar gingen wir sogleich auf specielle Beispiele ein, indem wir den Kreis und die Senkrechte, welche wir im Mittelpunkte einer Strecke errichten können, als geometrischen Ort auffaßten. Um die Wichtigkeit der Lehre von den geometrischen Oertern darzuthun, zeigten wir an mehreren Aufgaben, daß sich die gesuchten Punkte meistens als Durchschnittpunkte zweier geometrischen Oerter darstellen lassen.

D. Wiederholungsfragen.

1) Mit Hilfe welcher Instrumente haben wir kleine Bodenerhebungen gemessen?
2) Welcher Instrumente bedienten wir uns, um die Länge horizontaler Geraden zu bestimmen?
3) Wie kann man die Höhe eines Thurmes, wie die Höhe eines Berggipfels messen, der unsichtbar ist?
4) Was versteht man unter den Bestimmungsstücken eines Dreiecks?
5) Durch wie viel Stücke wird die Gestalt eines Dreiecks bestimmt?
6) Weshalb können die drei Winkel nicht als Bestimmungsstücke eines Dreiecks dienen?
7) Wie viel Dreiecke können wir construiren, wenn uns zwei Seiten gegeben sind und der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt?
8) Ist die Gestalt eines Vierecks durch seine vier Seiten vollständig bestimmt?
9) Wie viel Bestimmungsstücke müssen wir haben wenn wir ein Viereck construiren wollen?
10) Wann sind zwei Vierecke congruent?
11) Wie viel Bestimmungsstücke gehören zu einem Parallelogramm?
12) Welche Lage haben die Punkte, deren geometrischer Ort der Kreis ist?
13) Welche Gerade ist der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Basis haben?
14) Was versteht man unter einem geometrischen Ort?
15) Welche Bezeichnungsweise kann man für den Ausdruck „geometrischer Ort“ noch gebrauchen?
16) Wie kann die Lehre von den geometrischen Oertern uns bei der Lösung der Constructionsaufgaben unterstützen?
17) Ist die relative Höhe eines Ortes immer eine ganz bestimmte?
18) Weshalb ist ein Viereck ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel Rechte sind?
19) Welchen Lehrsatz haben wir über die Diagonalen eines Parallelogramms aufgestellt?
20) Wie groß ist die Summe der vier Winkel in einem Viereck?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus. Lection 17. Planimetrie.	Als Manuscript gedruckt.

9. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Denke nur, es wird gelingen,
Zweifle nicht zu viel;
Höre nimmer auf zu ringen,
Und der Kampf wird Spiel.
(Schiller.)

Lection 17.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 15.

Abschnitt C. § 120. Die Höhe des kleinen Abhanges beträgt so viel Centimeter, wie die sechs verticalen Linien a, b, c, d, e und f zusammen genommen. Es ist:

$$a + b + c + d + e + f = 25\,cm + 35\,cm + 12\,cm + 48\,cm + 17\,cm + 30\,cm = 167\,cm = 1\,m + 67\,cm.$$

§ 121. Wir haben die

Behauptung aufgestellt, daß in Fig. 2

$$AD = AD_1 + A_1D_2 + A_2D_3 \text{ sei,}$$

und müssen dafür den

Beweis liefern. Verlängern wir die Verticale A_2D_2, bis sie die Horizontale AD im Punkte P schneidet, so erhalten wir die Rechtecke $A_1D_2PD_1$ und A_2D_3DP; in einem Rechteck sind die Gegenseiten gleich, darum haben wir:

$$A_1D_2 = D_1P \text{ und } A_2D_3 = PD.$$

Wie aus der Figur unmittelbar hervorgeht, ist:

$$AD = AD_1 + D_1P + PD.$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung D_1P mit der gleichen Größe A_1D_2 und PD mit der gleichen Größe A_2D_3, so ergiebt sich:

$$AC = AD_1 + A_1D_2 + A_2D_3, \text{ was behauptet war.}$$

Abschnitt D. § 124. α wird eingeschlossen von a und d, β von a und b, γ von b und c, δ von c und d. Den Winkeln α und γ liegt die Diagonale e, den Winkeln β und δ die Diagonale f gegenüber.

§ 125. Es soll ein Viereck construirt werden, wenn gegeben ist:

1) a, b, c, d und β,
2) a, b, c, d und γ,
3) a, b, c, d und δ.

Diese drei Constructionsaufgaben schließen sich so eng an die vorher behandelte Aufgabe an, daß wir nur kurz den Gang der Construction anzudeuten brauchen.

Im ersten Falle werden wir uns den Winkel β noch einmal hinzeichnen, den Scheitelpunkt B nennen und von den Schenkeln die Seiten BA = a und BC = b abschneiden. Darauf werden wir um A einen Kreis mit d und um C einen Kreis mit c beschreiben. Die beiden Kreise mögen sich in D schneiden. ABCD ist dann das verlangte Viereck.

Im zweiten Falle werden wir den Winkel γ mit dem Scheitelpunkt C noch einmal hinzeichnen und von den Schenkeln CB = b und CD = c abschneiden. Darauf werden wir um B einen Kreis mit a und um D einen Kreis mit d schlagen und zwar mögen sich die beiden Kreise in A schneiden. Das Viereck ABCD entspricht dann der Forderung. Auch die dritte Aufgabe werden wir ähnlich lösen. Zunächst werden wir den Winkel δ mit dem Scheitelpunkt D hinzeichnen und von D aus auf den Schenkeln DA = d und DC = c abschneiden. Darauf werden wir um A einen Kreis mit dem

Radius a und um C einen Kreis mit dem Radius b beschreiben. Wir erhalten dann als Schnittpunkt der beiden Kreise die vierte Ecke B des verlangten Vierecks ABCD.

§ 126. Die Construction ist schon in der Analysis angegeben, die Behauptung und der Beweis sind außerordentlich einfach. Auch wenn statt f die Diagonale e gegeben ist, deutet die Analysis den Weg der Construction an.

§ 127. **Beweis.** Nach der Construction haben wir: AB = a, was behauptet war.

Ferner ist BC der Radius eines Kreises, der mit b, CD der Radius eines Kreises, der mit c, BD der Radius eines Kreises, der mit e und AC der Radius eines Kreises, der mit f beschrieben ist; es ist daher auch: BC = b, CD = c, BD = e und AC = f, was behauptet war.

In § 127 sind uns noch zwei Aufgaben gestellt. Wir sollen ein Viereck construiren, wenn uns

1) a, b, d, e, f; 2) a, c, d, e, f

gegeben ist.

Die erste Aufgabe werden wir lösen, indem wir zuerst aus den bekannten Stücken a, d und e das Dreieck ABD, dann aus den bekannten Stücken a, b, f das Dreieck ABC construiren und die Gerade CD ziehen.

Die zweite Aufgabe findet ihre Lösung, wenn wir erst aus den gegebenen Stücken a, d, e das Dreieck ABD, dann aus den gegebenen Stücken d, c, f das Dreieck ACD construiren und schließlich B mit C geradlinig verbinden.

Lection 16.

Abschnitt A. § 131. **Analysis.** Von dem Dreieck ABD kennen wir die drei Stücke a, α und e; aus diesen Stücken können wir das Dreieck leicht construiren, indem wir uns eine Seite AB = a zeichnen, an AB im Punkte A den Winkel α antragen und um B einen Kreis mit dem Radius e beschreiben. Haben wir erst das Dreieck ABD, so kennen wir drei Ecken des Parallelogramms. Die vierte Ecke können wir auf eine zweifache Weise bestimmen. Entweder wir werden gemäß § 61 zu AB durch D und zu AD durch B Parallelen legen, die sich in C schneiden, oder wir werden um B und D Kreise beschreiben (um B mit dem Radius AD, um D mit dem Radius AB), die sich in C schneiden.

Construction I. Wir zeichnen uns das Dreieck ABD, wie wir in der Analysis schon angegeben haben und legen durch B zu AD sowie durch D zu AB Parallelen, die sich in C schneiden.

Construction II. Wir construiren zunächst auch wieder das Dreieck ABD, wie in der Analysis gezeigt worden ist, beschreiben dann um B einen Kreis mit dem Radius AD und um D einen Kreis mit dem Radius AB. Den Schnittpunkt der beiden Kreise C verbinden wir mit B und D durch gerade Linien.

Behauptung. 1) In dem Viereck ABCD ist:

1) AB = a, $\angle A = \angle \alpha$ und BD = e.

2) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis I[1]. Es ist AB = a, weil wir AB so groß gezeichnet haben wie die gegebene Strecke a; ferner ist $\angle A = \angle \alpha$, weil wir an AB im Punkte A den Winkel α angetragen haben, es ist drittens BD = e, weil BD der Radius eines Kreises ist, der von uns mit e beschrieben wurde.

Nach der Construction ist weiter:

AB ‖ CD und AD ‖ BC,

daher ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm: damit ist auch der zweite Theil der Behauptung bewiesen.

Beweis II. Den ersten Theil der Behauptung beweisen wir ebenso wie vorher; aber der Beweis für den zweiten Theil gestaltet sich wie folgt:

BC ist der Radius eines Kreises, den wir mit AD, und CD ist der Radius eines Kreises, den wir mit AB beschrieben haben, daher ist:

BC = AD und CD = AB,

d. h. in dem Viereck ABCD sind die Gegenseiten gleich. Ein Viereck, dessen Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm, mithin ist

das Viereck ABCD der Behauptung gemäß ein Parallelogramm.

Abschnitt B. § 134. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck construirt werden, von dem die Länge γ der Basis und die Länge s der Seiten gegeben ist. Zeichnen wir uns eine Gerade ST = s, so haben wir zwei Eckpunkte des gleichschenkligen Dreiecks.

Wie wir schon in § 134 auseinandergesetzt haben, können wir zwei Wege einschlagen, um den dritten Eckpunkt als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter darzustellen. Zu dem einfachsten, von uns in § 134 nicht angegebenen Wege führt uns die Erwägung, daß die gesuchte Spitze von den beiden Endpunkten S und T der Basis um die Strecke s entfernt sein müsse. Die Spitze wird darum in dem Kreise liegen, der um S mit s beschrieben ist, sie wird auch ein Punkt des Kreises sein, der um T mit s geschlagen ist; die beiden geometrischen Oerter für die Spitze werden daher die beiden mit s um S und T beschriebenen Kreise sein.

Fragen am Ende des § 134.

1) Die beiden geometrischen Oerter für den Punkt C sind die Schenkel AT und BS der Winkel α und β.

2) Die geometrischen Oerter für den Punkt P_1 sind die beiden um A und B mit gleichen Radien beschriebenen Kreise.

3) Die beiden um A und B mit gleichen Radien geschlagenen Kreise sind die geometrischen Oerter für die Punkte C und C_1.

4) Der eine geometrische Ort für die Punkte M und N ist die Gerade c, der andere Ort ist der Kreis, welcher um P beschrieben ist.

5) Die beiden Halbirungslinien der Winkel α und β sind die geometrischen Orte für den Punkt D.

B. Antworten auf die in Abschnitt D der Lection 16 gestellten Fragen.

1) Die Höhe kleiner Bodenerhebungen haben wir im § 119 mit Hilfe der Libelle, des Diopters, der Visirstange und Visirtafel, in § 120 mit Hilfe der Setzwaage, des Richtscheits und einer verticalen, nach Metern und Centimetern eingetheilten Stange gemessen. 2) Die Länge horizontaler Geraden haben wir mit der Setzwaage, dem Richtscheit und mit der verticalen Stange festgestellt. 3) Die Höhe

[1]) Der Beweis I gilt für Construction I, der Beweis II für Construction II.

eines Thurmes kann man aus seinem Schatten und durch trigonometrische Rechnung finden; die Höhe eines unsichtbaren Berggipfels kann nur vermittelst des Barometers bestimmt werden. 4) Unter den Bestimmungsstücken eines Dreiecks versteht man diejenigen Dreiecksstücke, welche die Gestalt des Dreiecks vollkommen bestimmen. 5) Zu einem Dreieck gehören drei von einander ganz unabhängige Bestimmungsstücke. 6) Die drei Winkel bestimmen ein Dreieck deswegen nicht vollständig, weil sie nicht von einander unabhängig sind. 7) Zwei Dreiecke. 8) Durch die vier Seiten ist die Gestalt eines Vierecks nicht bestimmt. 9) Wir müssen fünf von einander unabhängige Bestimmungsstücke haben, wenn wir ein Viereck construiren sollen. 10) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in fünf von einander unabhängigen Stücken übereinstimmen. 11) Zur Construction eines Parallelogramms gehören drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke. 12) Die Punkte, deren geometrischer Ort ein Kreis ist, sind von einem festen Punkte alle gleich weit entfernt. 13) Der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Basis haben, ist die gerade Linie, welche auf der Mitte der Basis senkrecht steht. 14) Unter einem geometrischen Ort versteht man die gerade oder krumme Linie, zu der sich Punkte, welche eine gleiche Eigenschaft haben, gruppiren. 15) Statt „geometrischer Ort" kann man auch einfach „Ort" sagen. 16) Oft ist eine Constructionsaufgabe gelöst oder wenigstens ein Schritt zur Lösung gethan, wenn man die Lage eines nicht gegebenen Punktes feststellen kann. Diesen Punkt wird man meist dadurch finden können, daß man ihn als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter auffaßt. 17) Die relative Höhe eines Ortes ist keine ganz bestimmte, sie richtet sich vielmehr ganz nach der Horizontalebene, von der aus sie gerechnet wird. 18) In einem Viereck, dessen vier Winkel Rechte sind, haben die gegenüberliegenden Winkel gleiche Größe. Das Viereck ist deshalb nach Lehrsatz XI Seite 122 ein Parallelogramm. 19) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich. 20) Die Summe der vier Winkel eines Vierecks beträgt vier Rechte.

A. Die Höhen und die Mittellinien des Dreiecks.

§ 135. Die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie. Was die Entfernung eines Punktes von einem andern bedeutet, haben wir schon in § 13a des ersten Briefes auseinandergesetzt. Wir wollen uns jetzt fragen, was man unter der **Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie** versteht. Nehmen wir an, wir hätten den Punkt S und die Strecke AB (Fig. 1), und wir sollten die Entfernung des Punktes S von der Geraden AB feststellen, dann werden wir von S auf AB die Senkrechte SS′ fällen und, auch ohne ein mathematisches Lehrbuch zu befragen, SS′ die Entfernung des Punktes S von der Geraden AB nennen. In der That! **man versteht unter der Entfernung eines Punktes von einer Geraden den senkrechten Abstand des Punktes von der geraden Linie.**

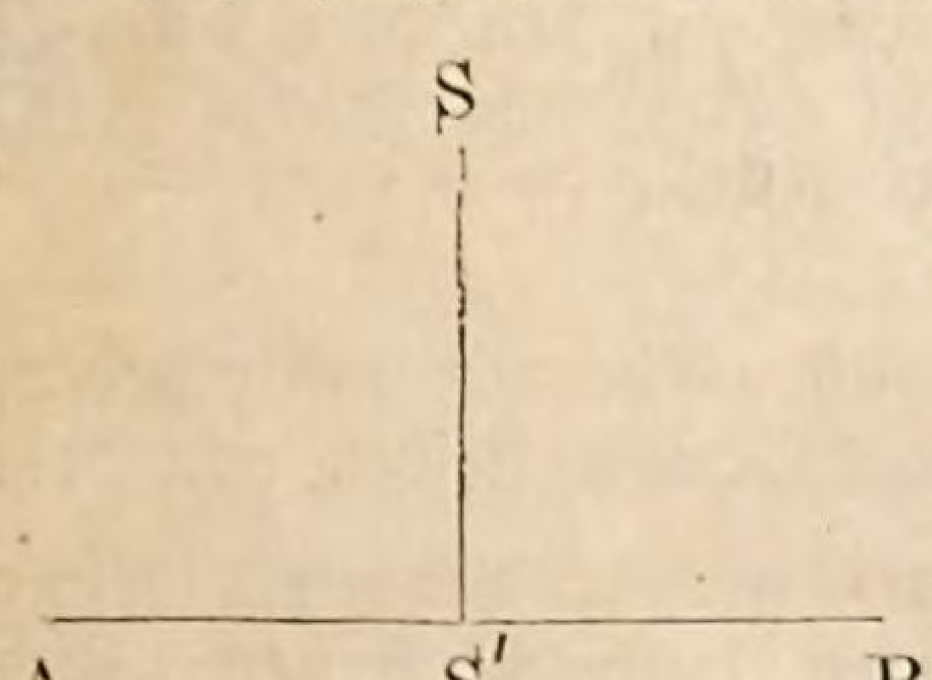


Fig. 1.

Wenn der Punkt S und die Strecke AB die Lage zu einander haben, welche Fig. 2 zeigt, so trifft die von S auf AB gefällte Senkrechte SS′ nicht die Strecke AB selbst, sondern deren Verlängerung. Auch in diesem Falle heißt SS′ die Entfernung des Punktes S von der Geraden AB.

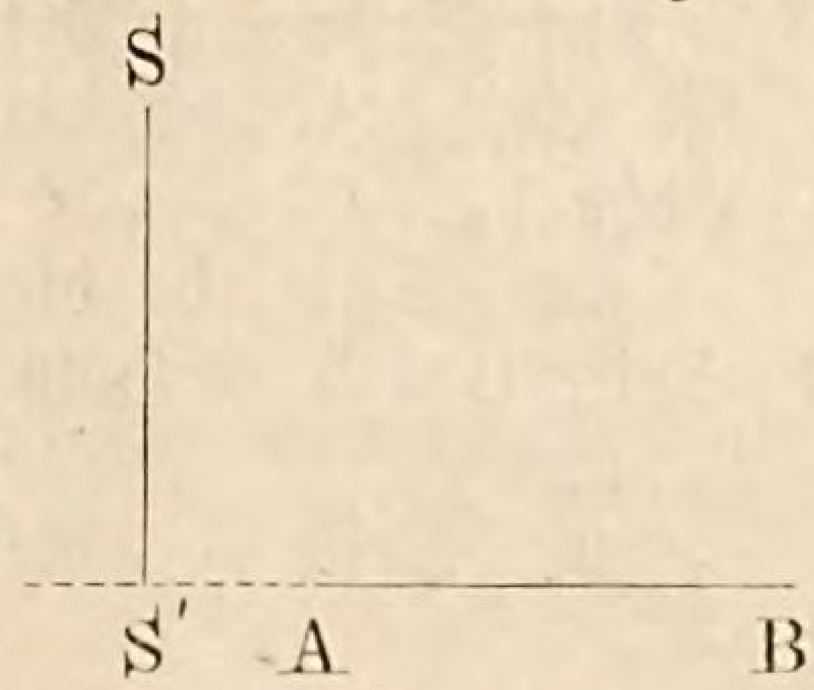


Fig. 2.

§ 136. Die Grundlinien und Höhen des Dreiecks. In Fig. 3 ruht das Dreieck ABC auf der Seite AB;

AB wird deswegen die **Grundlinie** genannt,

die Ecke C, welche der Grundlinie gegenüberliegt, heißt die **Spitze** und

die Entfernung CD der Spitze C von der Grundlinie AB nennt man die **Höhe**.

Wenn man das Dreieck ABC verschiebt, kann man leicht bewirken, daß es auf AC oder BC ruht. Jede dieser Seiten kann man daher auch als Grundlinie[1]) auffassen.

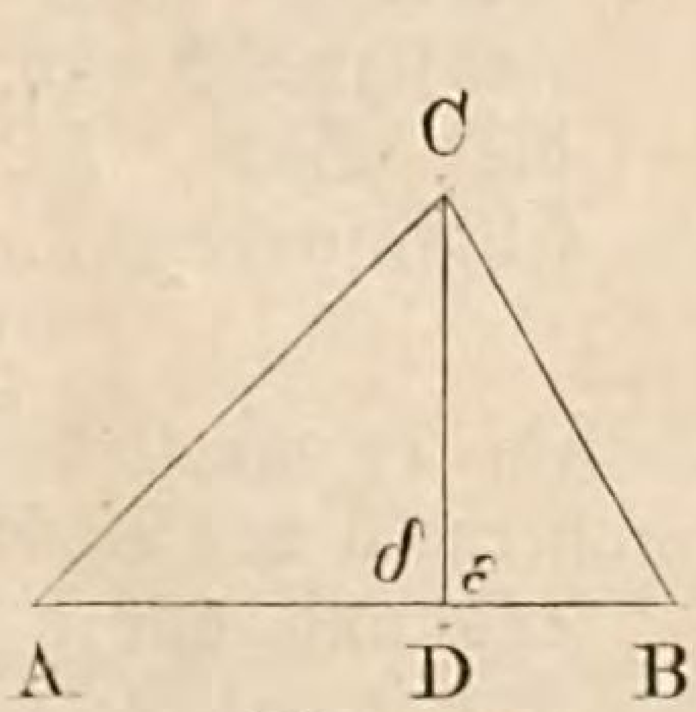


Fig. 3.

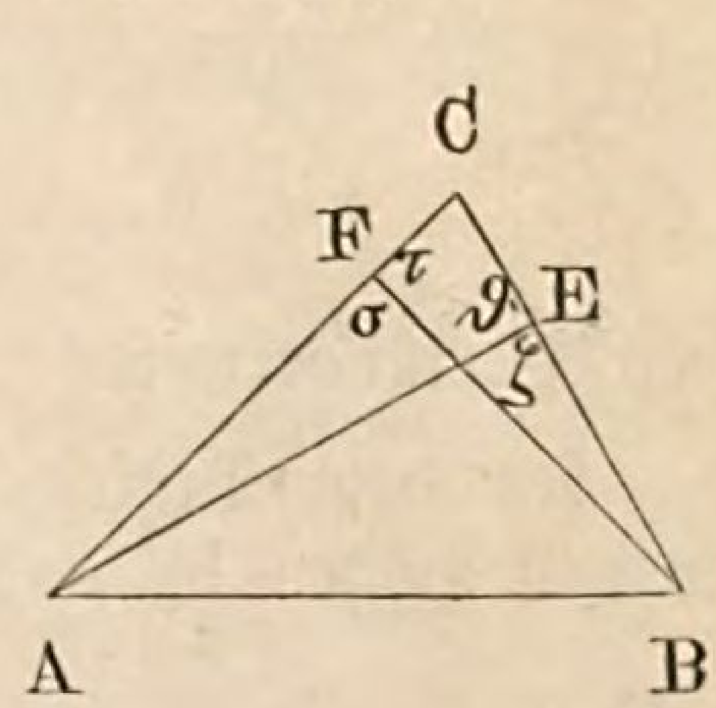


Fig. 4.

Zur Grundlinie AC gehört dann die Spitze B und die Höhe BF (Fig. 4), zur Grundlinie BC die Spitze A und die Höhe AE.

Demgemäß entspricht jeder Dreiecksseite

[1]) Im gleichschenkligen Dreiecke pflegt man, wie wir schon in § 87 besprochen haben, nur diejenige Seite Grundlinie oder Basis zu nennen, von welcher die Gleichheit mit einer andern Seite nicht behauptet wird.

eine Spitze und eine Höhe; in einem Dreieck haben wir **drei Spitzen** und **drei Höhen** zu unterscheiden.

In Fig. 5 sehen wir ein Dreieck, dessen Ecken mit A, B, C, dessen Seiten mit a, b, c und dessen Höhen mit h_a, h_b, h_c, bezeichnet sind.

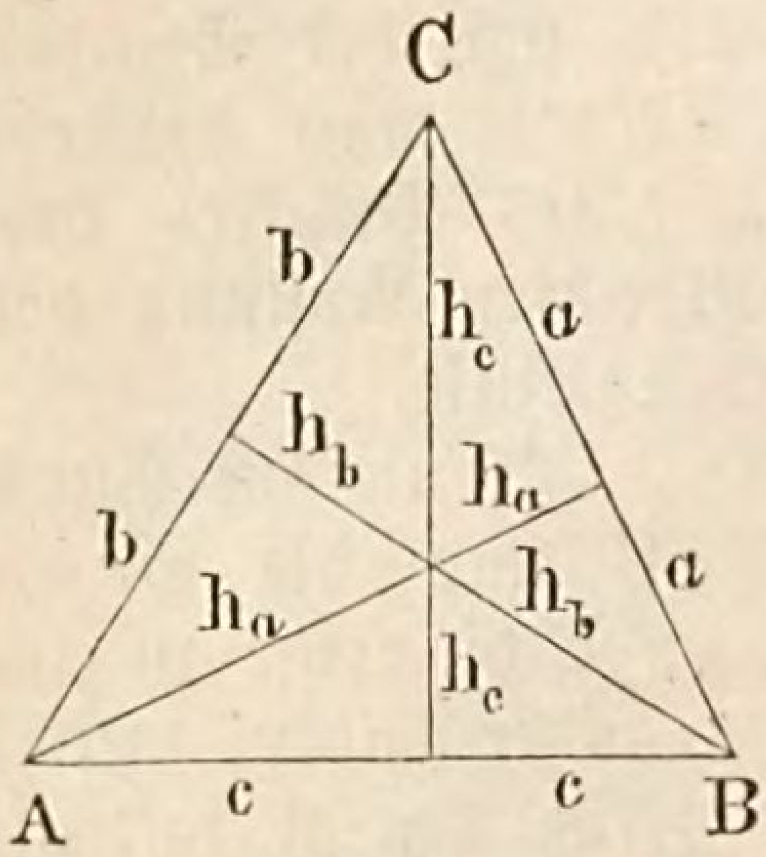


Fig. 5.

Zur Seite a gehört die Spitze A und die Höhe h_a,
zur Seite b die Spitze B und die Höhe h_b und
zur Seite c die Spitze C und die Höhe h_c.

Mit der Bezeichnungsweise, deren wir uns in dem letzten Dreieck bedient haben, ist der große Vortheil verknüpft, daß wir die zusammengehörigen Stücke auch sofort als zusammengehörig erkennen. Wenn wir von A, a und h_a lesen, so wissen wir, daß A als Spitze der Seite a gegenüberliegt, und daß h_a die Höhe ist, welche zur Seite a gehört. Wir werden deswegen von dieser Bezeichnungsweise sehr häufig Gebrauch machen.

Eine, ja auch zwei der Höhen können außerhalb des Dreiecks fallen.

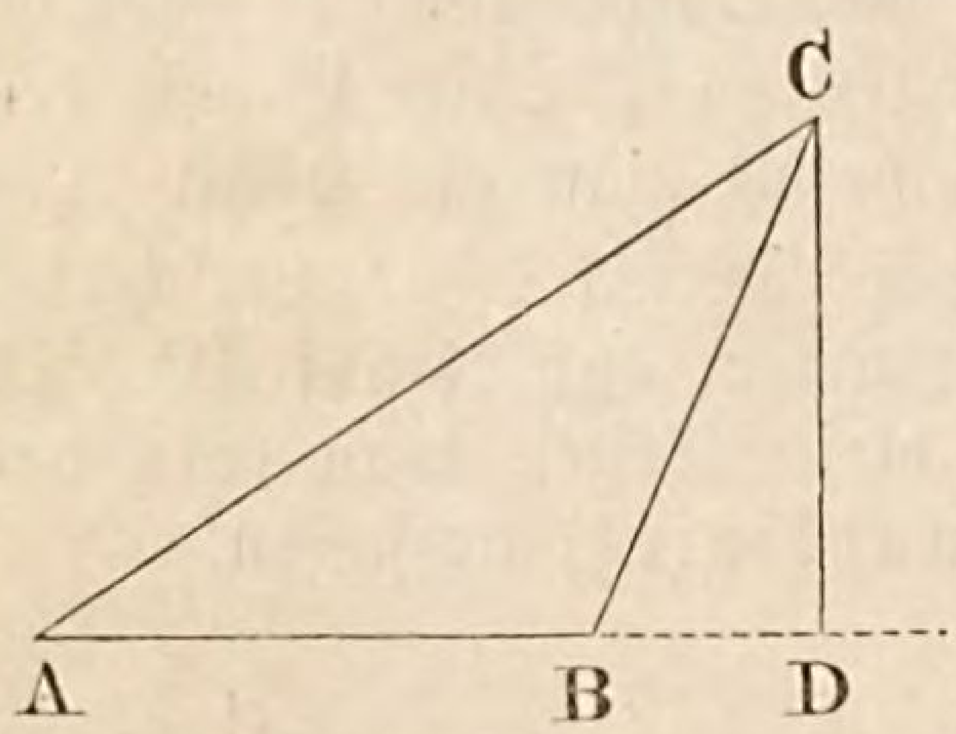


Fig. 6.

In Fig. 6 ist CD die Höhe, welche zur Seite AB gehört; CD liegt nicht im Dreiecke ABC und schneidet nicht die Seite AB selbst, sondern deren Verlängerung.

In dem Dreieck ABC (Fig. 7) fallen die beiden Höhen h_b und h_c außerhalb des Dreiecks und nur h_a liegt innerhalb der Dreiecksfläche.

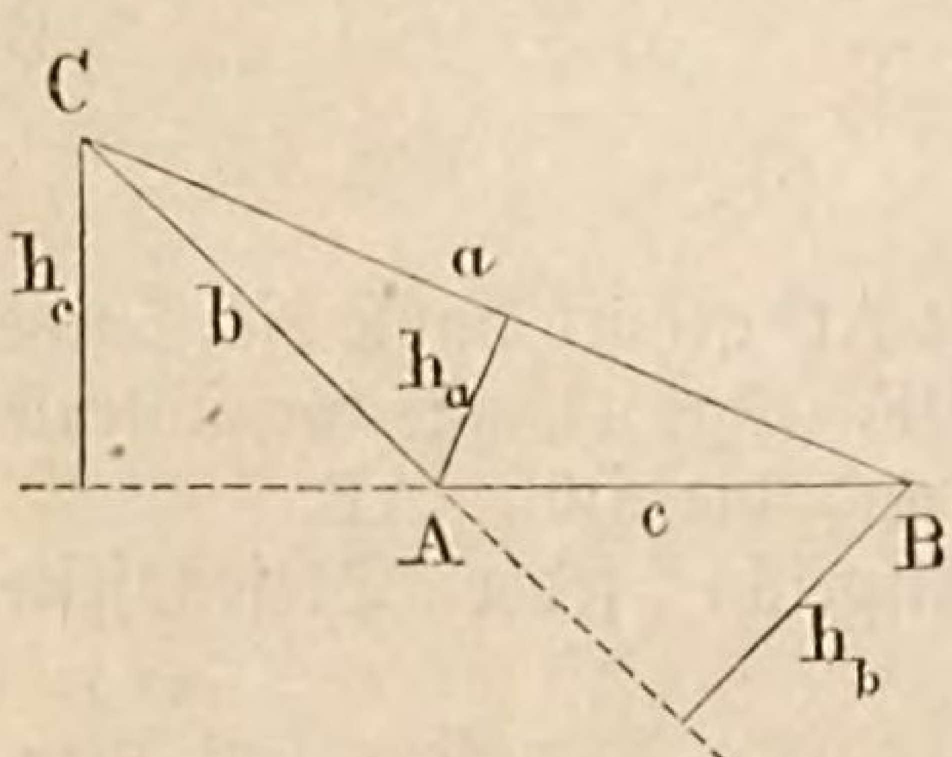


Fig. 7.

Wir haben unter der Höhe die Entfernung einer Ecke des Dreiecks von der gegenüberliegenden Seite verstanden. Wie wir im vorigen Paragraphen erörtert haben, ist die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie gleichbedeutend mit der Länge der Senkrechten, welche von dem Punkte auf die gerade Linie gefällt ist; darum werden die Höhen auf den ihnen zugehörigen Seiten senkrecht stehen, d. h. rechte Winkel bilden. In Fig. 3 steht darum

$$CD \perp AB \text{ oder } \delta = R \text{ und } \varepsilon = R$$

und in Fig. 4

$$BF \perp AC \text{ und } AE \perp BC$$
$$\text{oder } \zeta = R \quad \text{und} \quad \sigma = R$$
$$\text{und } \vartheta = R \quad \text{und} \quad \tau = R.$$

Fragen. Der Schüler möge im Anschluß an die Erörterungen des vorigen Paragraphen folgende Fragen beantworten:

1) Wie viel Dreiecksseiten kann man als Grundlinien auffassen?

2) Wie viel Spitzen, wie viel Höhen hat ein Dreieck?

3) Wie viel Dreieckshöhen können außerhalb des Dreiecks liegen?

4) Wie haben wir die Spitze und die Seite benannt, welche zur Höhe h_c gehört?

Aufgaben. 1) Der Schüler nenne in Fig. 8 und 9 die Höhen und die Seiten, auf denen die Höhen senkrecht stehen.

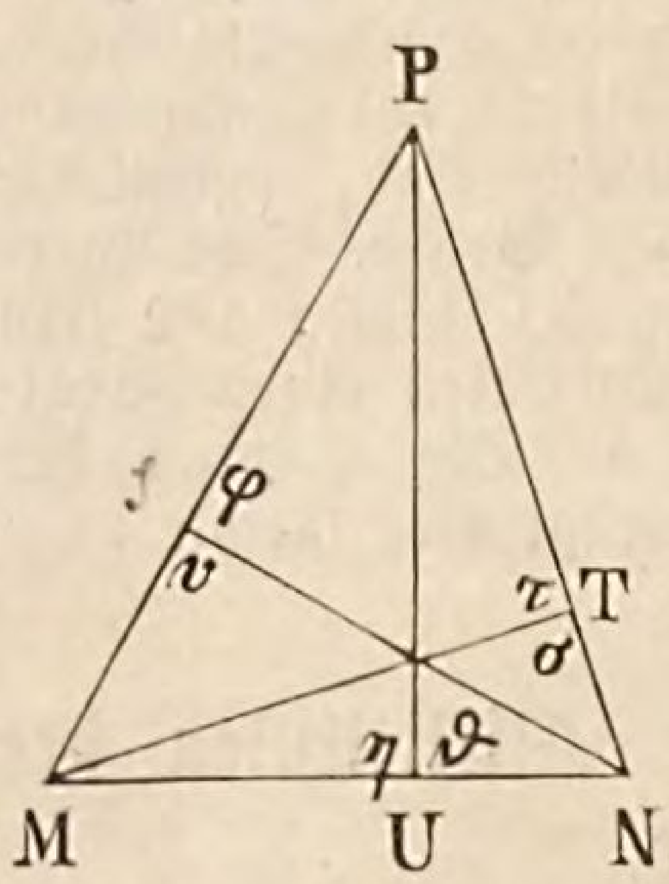


Fig. 8.

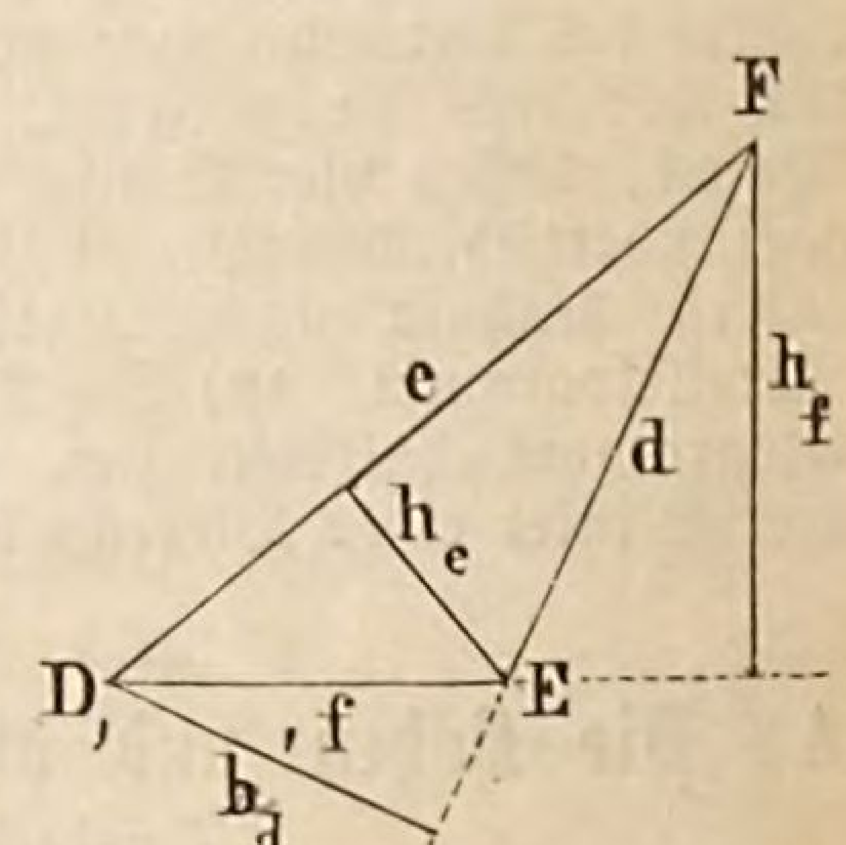


Fig. 9.

2) Er möge in Fig. 8 die rechten Winkel angeben, welche von den Höhen und Seiten gebildet werden.

3) Er möge ferner in Fig. 3 die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit den drei Eckbuchstaben bezeichnen, in welche das Dreieck ABC durch die Höhe CD zerlegt ist.

§ 137. Hilfssatz.

Ehe wir weitergehen, wollen wir erst einen Beweis liefern von dem

Hilfssatz. Zwei gerade Linien, welche auf derselben dritten senkrecht stehen, sind parallel.

Voraussetzung. Wir haben in Fig. 10 die Geraden AB, CD und EF, und zwar ist:

$$CD \perp AB \text{ und } EF \perp AB.$$

Behauptung. $CD \parallel EF$.

Beweis. Weil die beiden Geraden CD und EF nach der Voraussetzung auf AB senkrecht stehen, betragen die beiden Winkel γ und δ einen Rechten, in Zeichen, es ist:

$$\gamma = R \text{ und } \delta = R.$$

Schreiben wir die beiden Gleichungen untereinander, so haben wir:

$$\gamma = R$$
$$\text{und } \delta = R$$
$$\gamma + \delta = R + R \text{ nach Gr. III.}$$
$$\text{oder } \gamma + \delta = 2\,R.$$

Der Schüler wird schon bemerkt haben, daß γ und δ entgegengesetzte Winkel sind bei den Geraden CD und EF geschnitten von AB. Wie wir nun aus dem auf Seite 122 bewiesenen Hilfssatz wissen, sind zwei gerade Linien parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe zweier entgegengesetzten Winkel zwei Rechte beträgt, mithin ist:

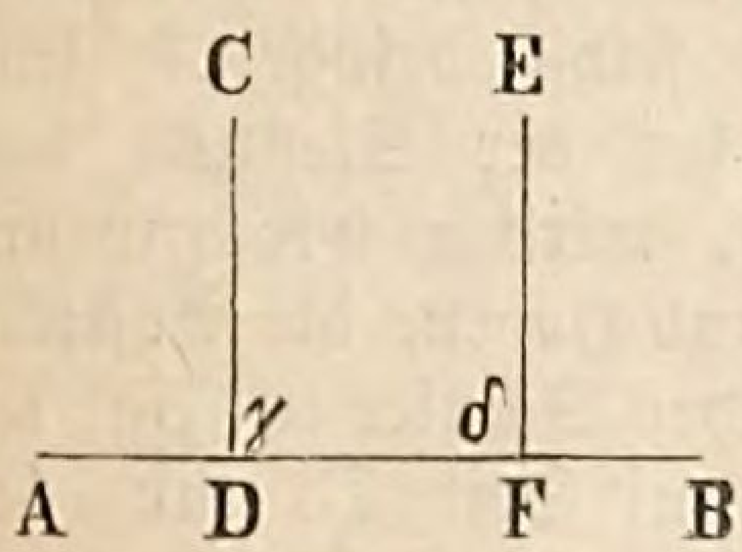


Fig. 10.

$CD \parallel EF$, was behauptet war.

§ 138. Ein geometrischer Ort. Der letzte Hilfssatz setzt uns in den Stand, unsere Kenntniß von den geometrischen Oertern zu erweitern. Der Schüler möge sich aus dem Gewirr von Linien, welches er in Figur 11 sieht,

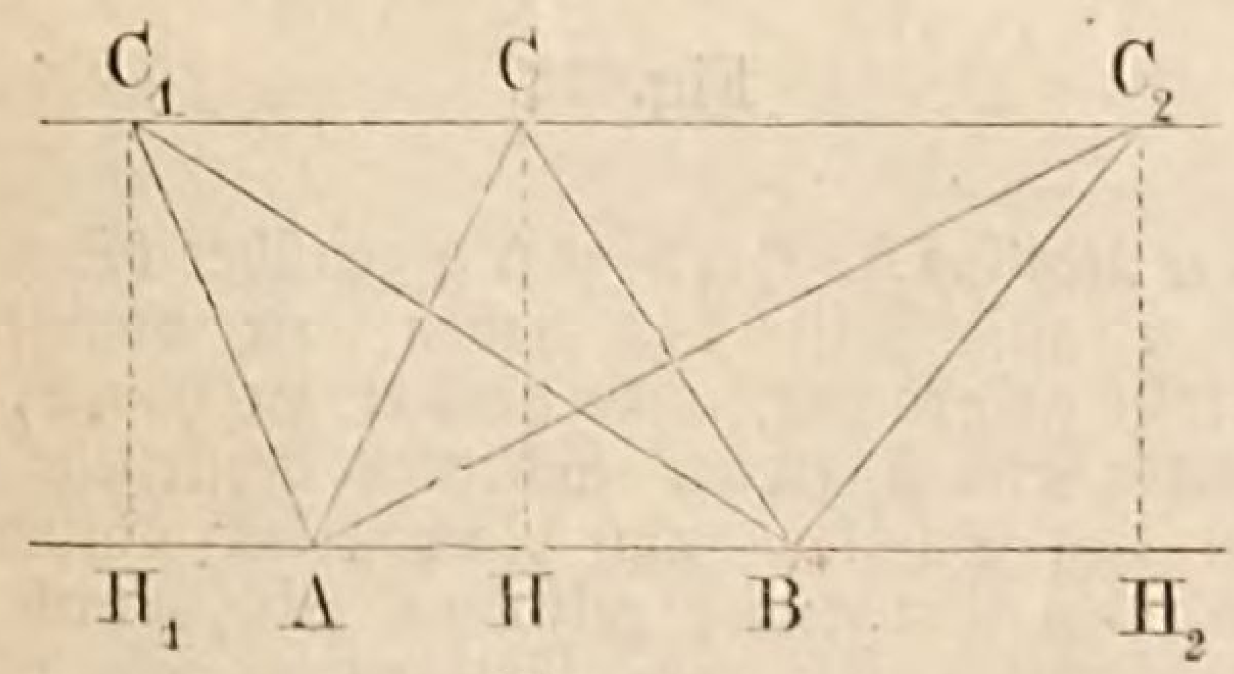


Fig. 11.

das Dreieck ABC heraussuchen. Er wird dann sehen, daß dieses Dreieck die **Grundlinie**[1]) AB und die Spitze C hat; er wird ferner bemerken, daß durch die **Spitze** C eine **Parallele** zur Grundlinie gelegt ist. Auf dieser Parallelen haben wir an ganz beliebigen Stellen die beiden Punkte C_1 und C_2 angenommen und mit A und B geradlinig verbunden. Auf diese Weise sind außer dem Dreieck ABC noch die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden. Die Dreiecke ABC, ABC_1 und ABC_2 stehen in gewissen Beziehungen zu einander:

1) haben sie die Grundlinie AB mit einander gemein,
2) liegen ihre Spitzen C, C_1 und C_2 in einer Geraden, welche parallel zur Grundlinie AB läuft.

Wir behaupten nun, daß die Dreiecke ABC, ABC_1 und ABC_2 gleiche Höhe haben, in Zeichen, daß

$$CH = C_1H_1 = C_2H_2\,^{1)} \text{ ist,}$$

und wollen dafür den

Beweis bringen. In dem Viereck HH_1CC_1 ist

$$HH_1 \parallel CC_1\,^{2)}$$
$$\text{und } CH \parallel C_1H_1\,^{3)};$$

das Viereck HH_1CC_1 ist deswegen ein Parallelogramm. In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich, daher

$$1)\ CH = C_1H_1.$$

Ferner ist in dem Viereck $H_1H_2C_1C_2$

$$H_1H_2 \parallel C_1C_2\,^{4)}$$
$$\text{und } C_1H_1 \parallel C_2H_2\,^{5)};$$

das Viereck $H_1H_2C_1C_2$ ist mithin auch ein

---

[1]) Wie wir bereits auseinandergesetzt haben, kann man in einem Dreieck jede Seite als Grundlinie und jede Ecke als Spitze ansehen. Eine Seite hat vor der andern, eine Ecke vor der andern keine besonderen Vorzüge. Es ist aber ein alter Gebrauch, wenn nicht durch eine Bemerkung das Gegentheil gefordert wird, diejenige Seite als Grundlinie des Dreiecks zu betrachten, auf welcher das Dreieck gewissermaßen ruht, die also der untern und obern Papierkante parallel läuft. Dementsprechend betrachtet man als Dreieckshöhe, wenn nichts anderes bemerkt wird, die Höhe, welche auf der Grundlinie oder deren Verlängerung senkrecht steht. [1]) CH ist die Höhe des Dreiecks ABC, C_1H_1 die Höhe des Dreiecks ABC_1 und C_2H_2 die Höhe des Dreiecks ABC_2. [2]) CC_1 läuft zu AB parallel, also auch zu HH_1 (siehe Fig. 11). [3]) Die Geraden CH und C_1H_1 stehen als Höhen der Grundlinie AB auf AB bezüglich der Verlängerung davon senkrecht. Sie sind darum nach dem vorigen Hilfssatz parallel. [4]) C_1C_2 läuft parallel zu AB, also auch parallel zu H_1H_2, denn H_1H_2 ist nur durch Verlängerung von AB entstanden (siehe Fig. 11). [5]) C_1H_1 und C_2H_2 stehen als Höhen auf der Verlängerung von AB senkrecht; sie sind daher nach dem Hilfssatz parallel.

Parallelogramm. C_1H_1 und C_2H_2 sind Gegenseiten in demselben, also ist:

$$2)\ C_1H_1 = C_2H_2.$$

Verbinden wir die beiden Gleichungen 1 und 2 mit einander, so erhalten wir:

$CH = C_1H_1 = C_2H_2$, was behauptet war.

Ueberlegen wir uns jetzt, was wir bewiesen haben! Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 haben dem Beweise gemäß gleiche Höhe wie das Dreieck ABC. Die Spitzen C_1 und C_2 sind Punkte, welche wir auf der durch C gelegten Parallelen ganz beliebig gewählt haben. Verbinden wir andere Punkte C_3, C_4, C_5 der Parallelen mit A und B, so werden demgemäß die Dreiecke ABC_3, ABC_4 und ABC_5 auch die gleiche Höhe haben wie das Dreieck ABC.

Die durch C gelegte Parallele ist also der **Ort** oder der **geometrische Ort** für die Spitzen aller Dreiecke, welche die Grundlinie AB haben und deren Höhe gleich CH ist, oder allgemeiner ausgedrückt:

Der **geometrische Ort** für die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und eine bestimmte Höhe haben, ist die Parallele, welche durch einen um die Höhe von der Grundlinie entfernten Punkt gelegt ist.

Wir wollen annehmen, es seien uns zwei Strecken c und h (Fig. 12) gegeben. c solle

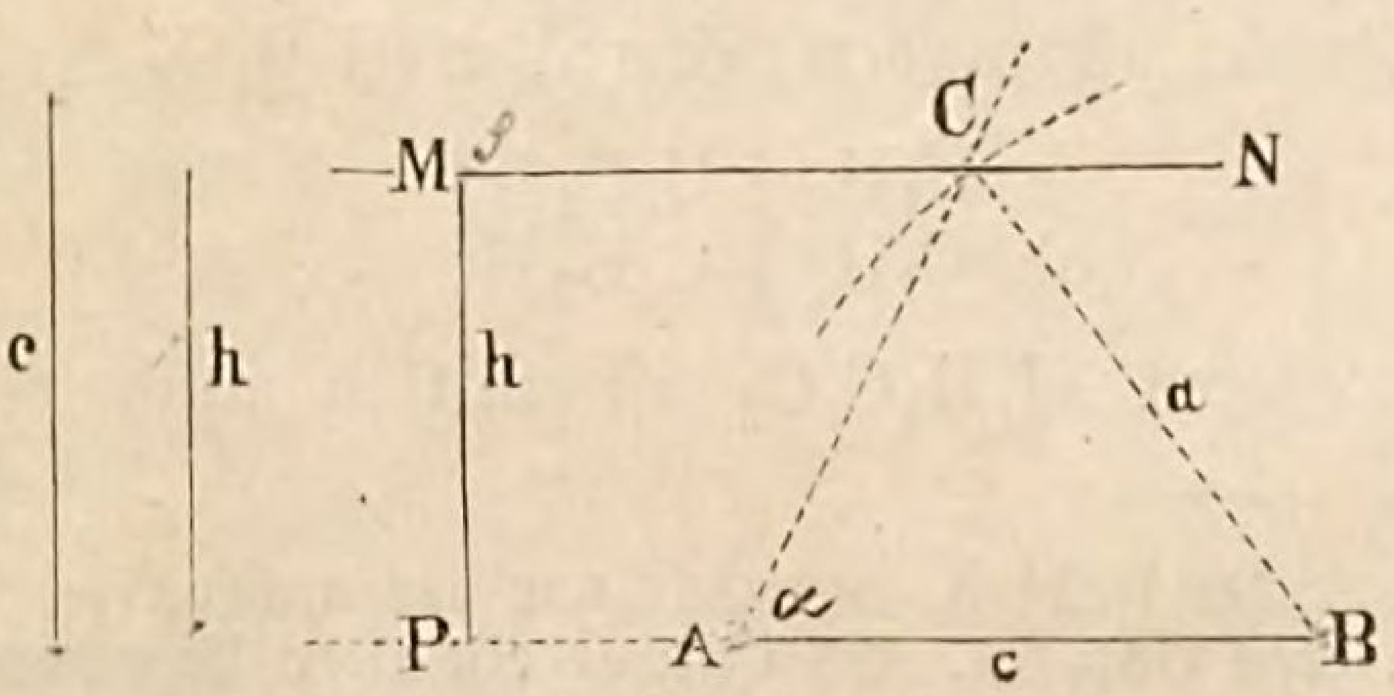


Fig. 12.

die Grundlinie, h die Höhe eines Dreiecks werden; dann werden wir uns eine Gerade AB hinzeichnen und damit zwei Ecken A und B des Dreiecks erlangt haben. Die dritte Ecke, die Spitze C werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter betrachten. Die Höhe des verlangten Dreiecks soll gleich h sein; wir werden darum in einem beliebig gewählten Punkte P von AB oder der Verlängerung von AB eine Senkrechte PS = h gemäß § 98 errichten und durch S zu AB eine Parallele MN legen. Die Parallele MN ist dann nach den Auseinandersetzungen der eine geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, deren Grundlinie AB und deren Höhe gleich h ist. Den zweiten Ort für die Spitze können wir nicht angeben, weil uns zur Construction des Dreiecks nicht drei, sondern nur zwei Bestimmungsstücke c und h gegeben sind. Wenn wir etwa noch den Winkel α[1]) kennen, werden wir α an AB im Punkte A antragen; oder wenn uns die Seite a bekannt ist, werden wir um B mit a[2]) einen Kreis schlagen. Im ersten Falle ist dann der freie Schenkel[3]) des Winkels α, im zweiten Falle der um B beschriebene Kreis der zweite geometrische Ort zur Bestimmung des Punktes C. ~21.II.10.

§ 139. Constructionsaufgabe. Wir wollen jetzt zu den Constructionsaufgaben übergehen, bei welchen eine der Höhen zu den gegebenen Stücken gehört. Die Lösung werden wir theils dem Schüler überlassen, theils werden wir sie selbst bringen. Um große Weitläufigkeiten bei der Stellung der Aufgaben zu vermeiden, werden wir für die Ecken, Seiten, Winkel und Höhen, die Bezeichnungsweise wählen, die der Schüler in Fig. 13 sieht und die von uns auf Seite 73 und 148 besprochen worden ist.

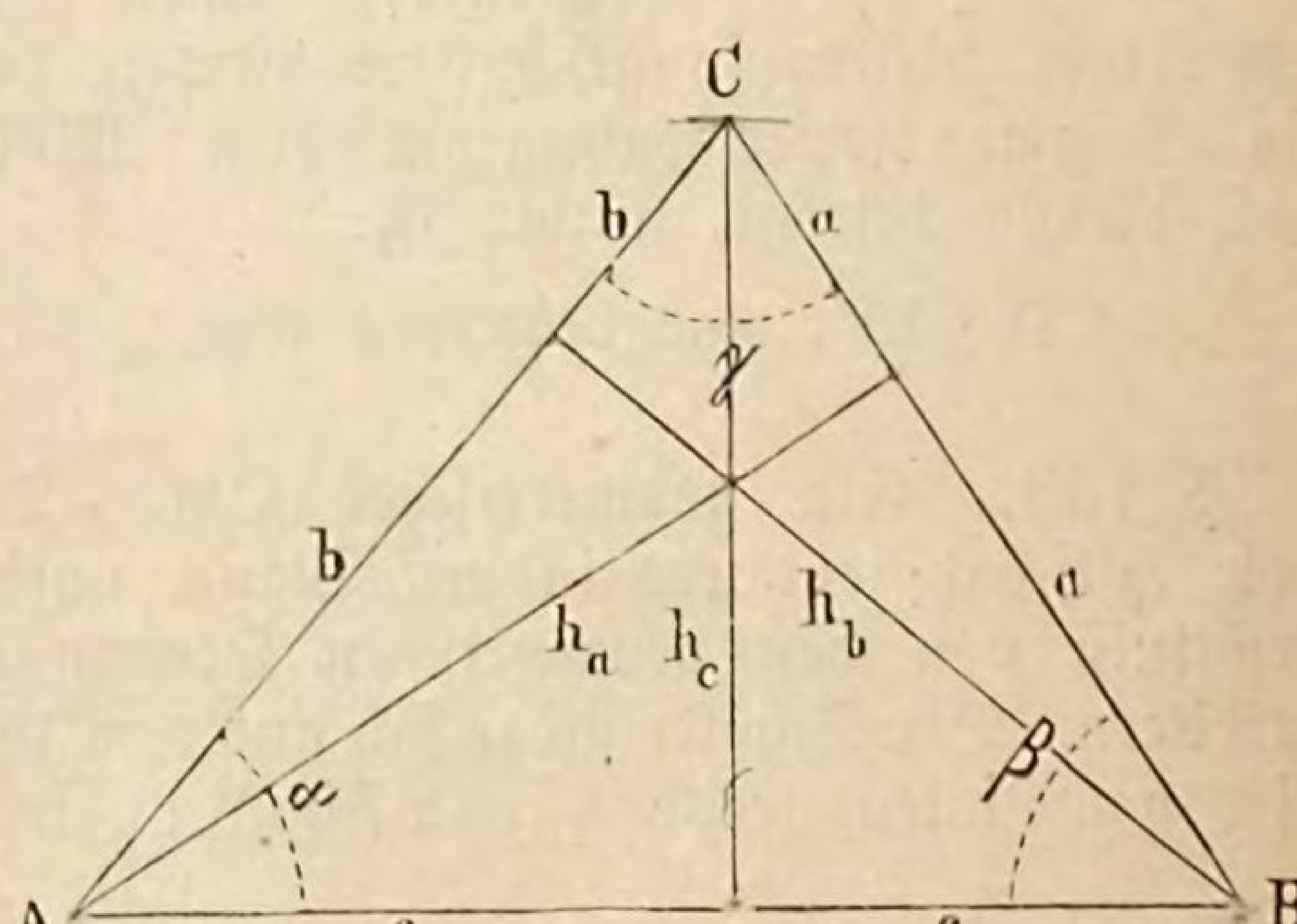


Fig. 13.

---

[1]) α liegt bei A. [2]) a liegt A gegenüber (Seite 73).
[3]) Schon auf Seite 143 haben wir von **freien Schenkeln** gesprochen, ohne erklärt zu haben, was wir unter einem freien Schenkel verstehen. Wir wollten den Schüler zum Nachdenken anspornen; und es wird ihm gewiß gelungen sein, durch eigenes Nachdenken sich eine Erklärung des Wortes freier Schenkel zu bilden. Um ihm aber Gelegenheit zur Controle seines Gedankenganges zu bieten, wollen wir jetzt angeben, was man in der Mathematik mit freien Schenkeln meint. Es sei uns die Aufgabe gestellt, an eine gerade Linie AB im Punkte A den Winkel α anzutragen; dann ist der eine Schenkel des Winkels α, nämlich AB, uns schon vor der Construction vollkommen bekannt; der andere Schenkel, den wir erst durch die Construction

Es sind

A, B und C die Ecken,
α, β und γ die Winkel[1]),
a, b und c die Seiten[2]),
h_a, h_b und h_c die Höhen[3]).

Aufgaben. Es soll ein Dreieck construirt werden, wenn gegeben ist:

1) c, α und h_c,
2) c, β und h_c,
3) c, a und h_c,
4) c, b und h_c.

Diese Aufgaben möge der Schüler selbst lösen. ~ 12. II. 10.

Es sei uns ferner die **Aufgabe** gestellt, ein Dreieck zu construiren, von welchem

$b + c$, α und h_c gegeben sind.

Von dieser Aufgabe wollen wir die Analysis bringen, die Construction 2c. möge der Schüler selbst ausführen.

Analysis. In Fig. 14 möge das Dreieck ABC der Forderung entsprechen. Von demselben kennen wir die Summe der Seiten b und c, den

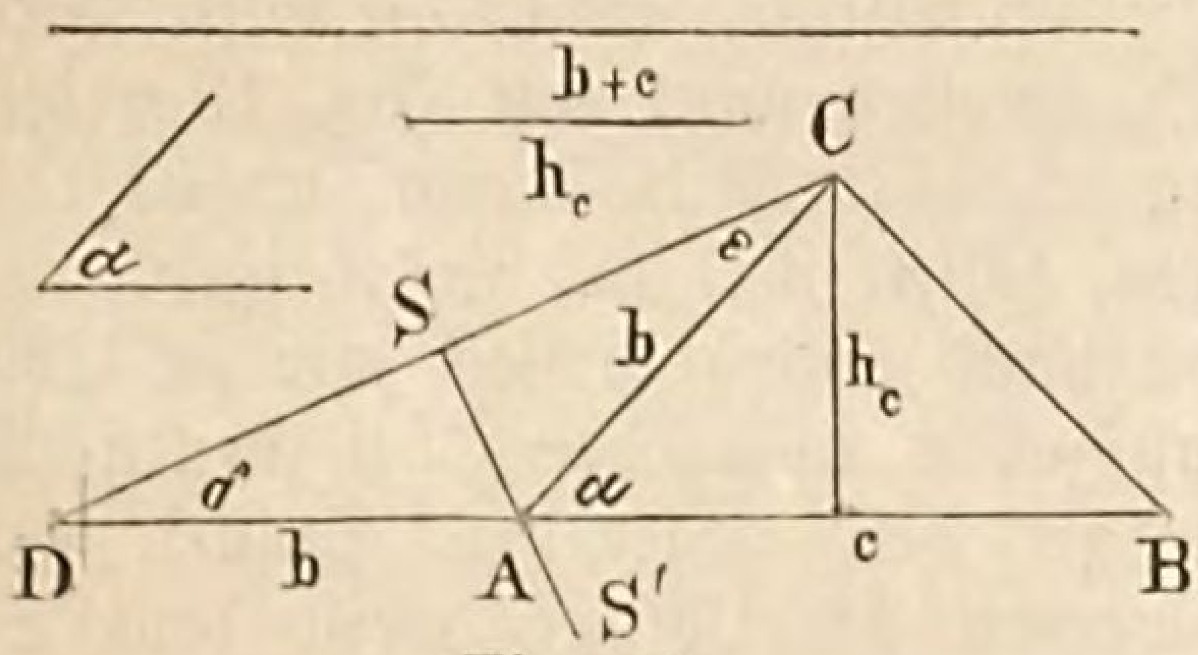


Fig. 14.

Winkel α und die Höhe h_c. α und h_c sehen wir unmittelbar; um auch die gegebene Summe $b + c$ bei der Construction zu benützen, müssen wir sie uns erst sichtbar machen. Wir werden zu diesem Zwecke die Seite c über A hinaus um $AD = b$ verlängern, dann ist DB so groß wie b und c zusammen, in Zeichen, es ist:

$$DB = b + c.$$

Verbinden wir noch den Punkt D mit C, so erhalten wir das Dreieck DCB. Ueberlegen wir uns, welche Stücke wir in diesem Dreieck kennen!

Unmittelbar ist uns die Grundlinie $DB = b + c$ und die Höhe h_c bekannt, wir können aber auch leicht den Winkel δ finden. Als Außenwinkel des Dreiecks DAC ist:

$$\alpha = \delta + \varepsilon.$$

finden, hat noch keine bestimmte Bezeichnung, man nennt ihn frei. Tragen wir an AB auch noch im Punkte B den Winkel β an, so erhalten wir **zwei freie** Schenkel, die sich im Punkte C schneiden.

[1]) α, β und γ sind die Winkel, deren Scheitelpunkt der Reihe nach die Ecken A, B und C sind. [2]) a liegt der Ecke A, b der Ecke B und c der Ecke C gegenüber. [3]) h_a steht auf a, h_b auf b und h_c auf c senkrecht.

DAC ist ein gleichschenkliges Dreieck; in einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich, daher ist: $\delta = \varepsilon$.

Vertauschen wir in der vorletzten Gleichung ε mit δ, so ergiebt sich:

$$\alpha = \delta + \delta = 2\,\delta,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Halbiren wir demgemäß α nach § 96, so erhalten wir einen Winkel, der ebenso groß ist wie δ.

Jetzt kennen wir vom Dreieck DBC die Grundlinie DB, die Höhe h_c und den Winkel δ; die Construction des Dreiecks ist damit auf eine Aufgabe[1]) zurückgeführt, deren Lösung wir dem Schüler selbst überlassen haben.

Haben wir erst das Dreieck DBC, so ist für die Construction des gesuchten Dreiecks ABC schon viel gewonnen, denn wir haben die beiden Ecken B und C gefunden, zu suchen ist noch die Ecke A. Die Ecke A wird sich als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen lassen.

Den einen Ort kennen wir schon; er wird durch die gerade Linie DB repräsentirt.

Um den zweiten Ort zu ermitteln, müssen wir bedenken, daß A die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis DC ist. Wie wir auf Seite 140 auseinandergesetzt haben, liegen die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Basis haben, in der geraden Linie, welche auf der Basis im Mittelpunkte senkrecht steht. Demgemäß ist SS′[2]) der zweite Ort für den Punkt A.

Ist auch die Lage des Punktes A festgestellt, so haben wir alle drei Ecken des Dreiecks ABC.

Eine zweite Ueberlegung führt uns auf einen ganz **andern** Weg. Wir wollen das Dreieck ABC (Fig. 15), welches der Forderung genügen möge, zergliedern.

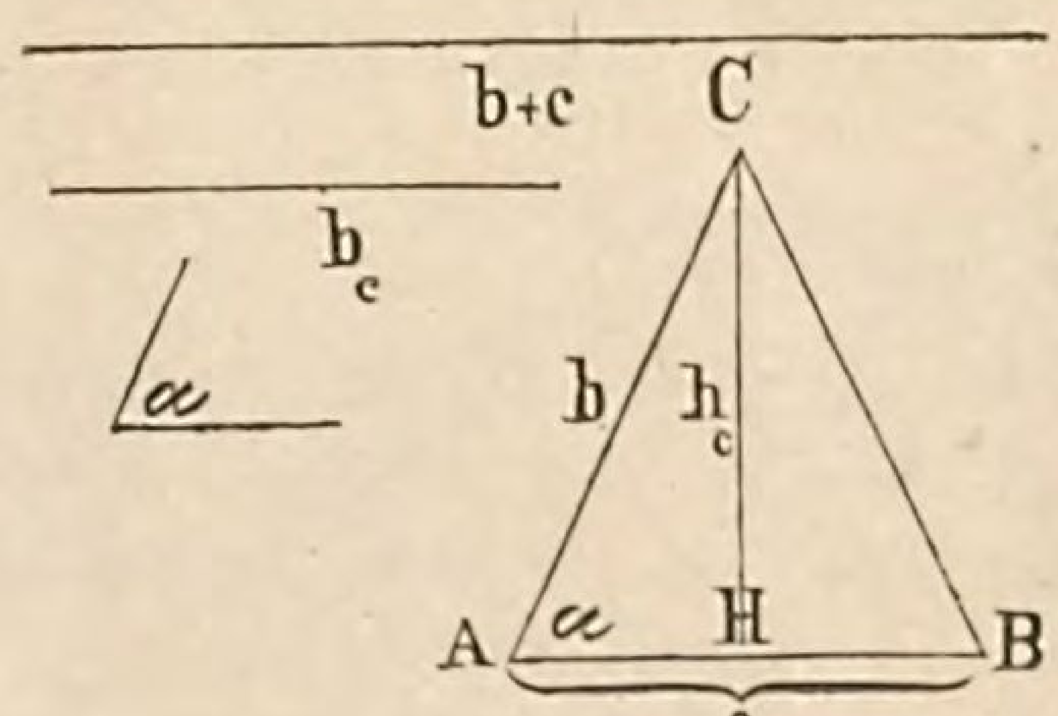


Fig. 15.

Wie der Schüler sieht, wird es durch die Höhe h_c in die beiden rechtwinkligen Dreiecke AHC und BHC getheilt. Betrachten wir das erste Dreieck AHC genauer In demselben kennen wir

1) Die Seite HC (sie ist gleich der gegebenen Strecke h_c),
2) den Winkel CHA (er beträgt einen Rechten),
3) den Winkel HAC (er ist so groß wie der gegebene Winkel α).

[1]) Nämlich auf die Aufgabe: Es soll ein Dreieck construirt werden, wenn c, α und h_c gegeben ist. [2]) SS′ steht auf DC im Mittelpunkte S senkrecht. Wir können auch eine andere Gerade als zweiten Ort für den Punkt A angeben. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich, demgemäß ist ε ebenso groß wie δ; tragen wir nun im Dreieck DBC an DC im Punkte C den bekannten Winkel δ an, so ist der freie Schenkel des angetragenen Winkels der zweite Ort für den Punkt A.

Es ist uns also eine Seite HC bekannt, ein Winkel CHA, welcher dieser Seite anliegt, und ein Winkel HAC, welcher ihr gegenüberliegt. Ein Dreieck von welchem uns diese Stücke gegeben sind, können wir gemäß § 95 construiren.

Mit dem Dreieck AHC kennen wir auch die beiden Ecken A und C des gesuchten Dreiecks AHC. Ja noch mehr, wir haben mit dem Dreieck AHC auch die Seite b gefunden, denn es ist AC = b. Ziehen wir b von der gegebenen Strecke b + c ab, so bleibt c übrig, und wenn wir noch die Länge der Seite c kennen, so wird dem Schüler die Construction des ganzen Dreiecks ABC leicht fallen.

§ 140. Die Mittellinien. Die Höhen des Dreiecks haben wir mit besonderer Ausführlichkeit behandelt, weil sie für mancherlei Zwecke des practischen Lebens von großer Wichtigkeit sind. Wie ein späteres Capitel zeigen wird, bieten die Dreieckshöhen ein Mittel, auf eine einfache Weise den Flächeninhalt geradliniger Figuren festzustellen. Den Höhen stehen aber an practischer Bedeutung andere Linien im Dreiecke nicht nach, zu denen wir uns jetzt wenden wollen. Wenn man in einem Dreiecke die Ecken mit den **Mittelpunkten** der gegenüberliegenden Seiten geradlinig verbindet, entstehen Linien, welche man **Mittellinien** nennt.

In Figur 16 sehen wir ein Dreieck ABC; bei demselben ist M der Mittelpunkt der Seite AB. CM ist daher eine Mittellinie.

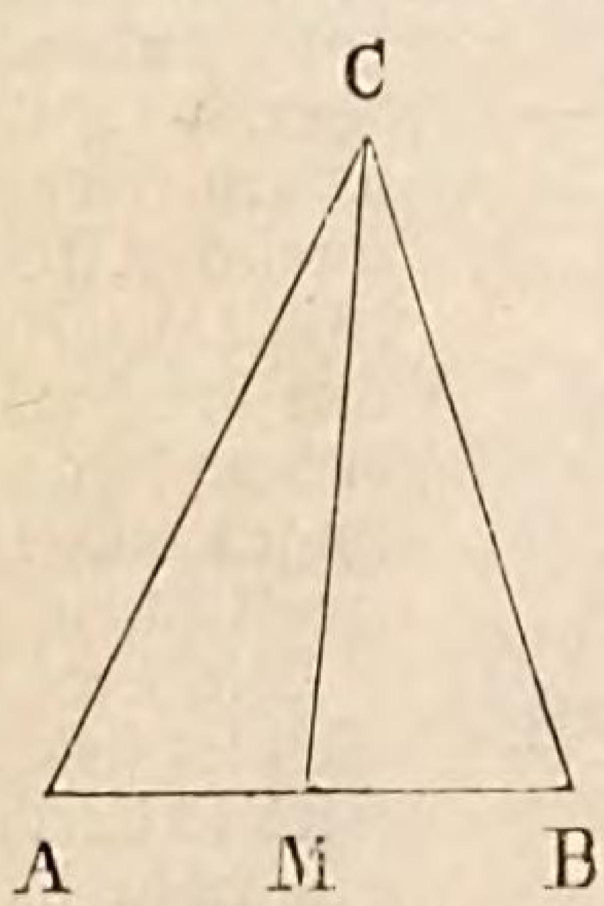


Fig. 16.

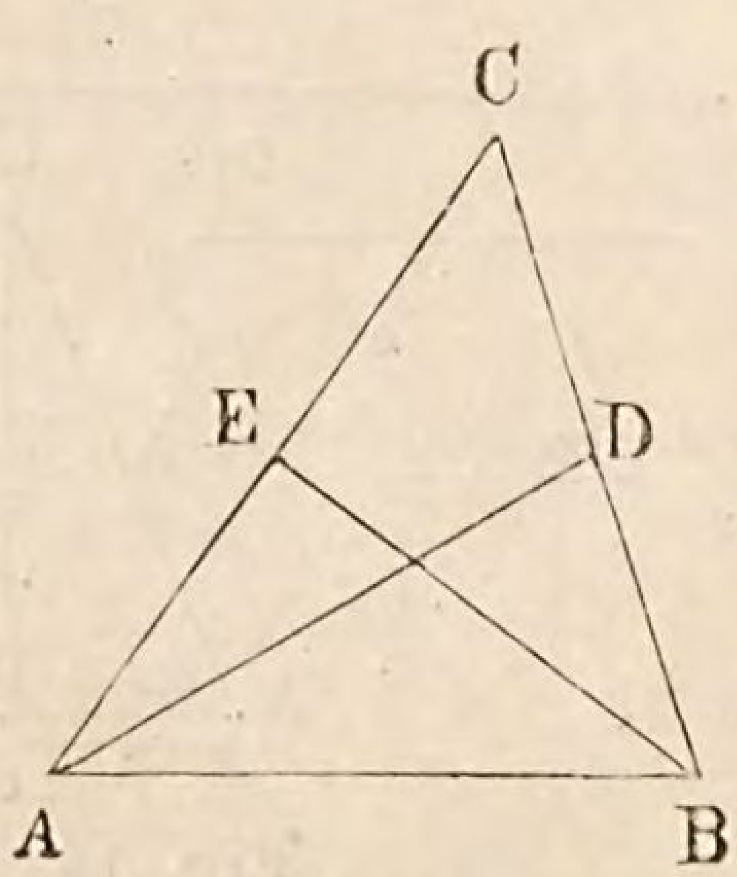


Fig. 17.

In Figur 17 ist E der Mittelpunkt der Seite AC und D der Mittelpunkt der Seite BC; darum sind die Geraden AD und BE Mittellinien.

Ein Dreieck hat drei Ecken und drei Seiten; es wird mithin auch drei Mittellinien haben. Der Schnittpunkt der drei Mittellinien ist zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks, d. h. man kann sich das Gewicht einer dreieckförmigen Platte, etwa einer Messing- oder Glasplatte im Schnittpunkte der Mittellinien concentrirt denken. Wenn man die Platte in diesem Punkte unterstützt, so wird sie sich im Gleichgewicht befinden und nicht hin und her schwanken oder fallen.

Im Dreieck DEF (Fig. 18) schneiden sich die Mittellinien im Punkte S. S ist daher der Schwerpunkt des Dreiecks DEF.

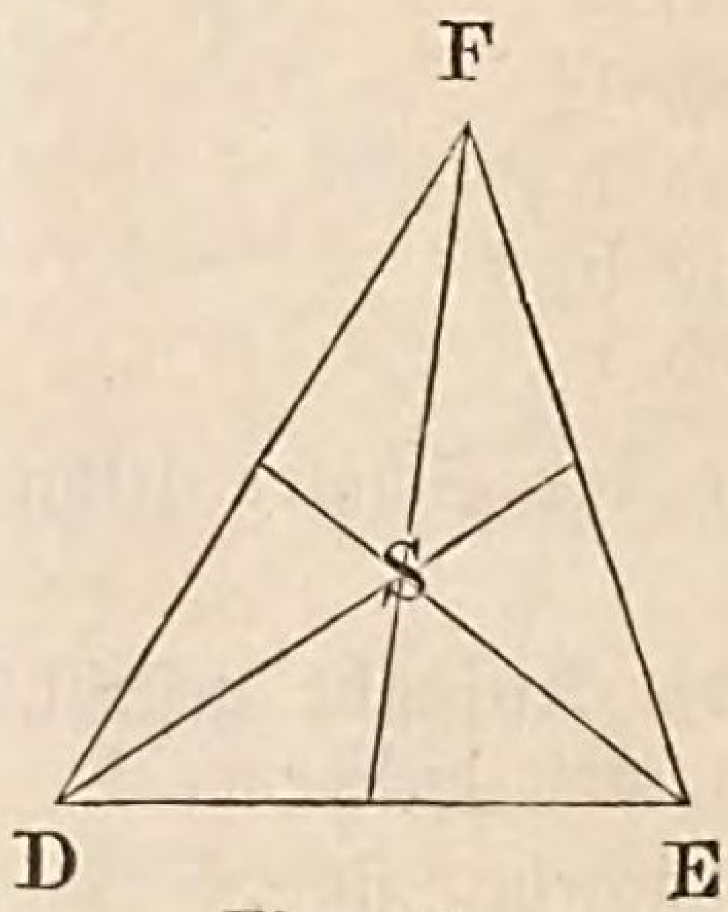


Fig. 18.

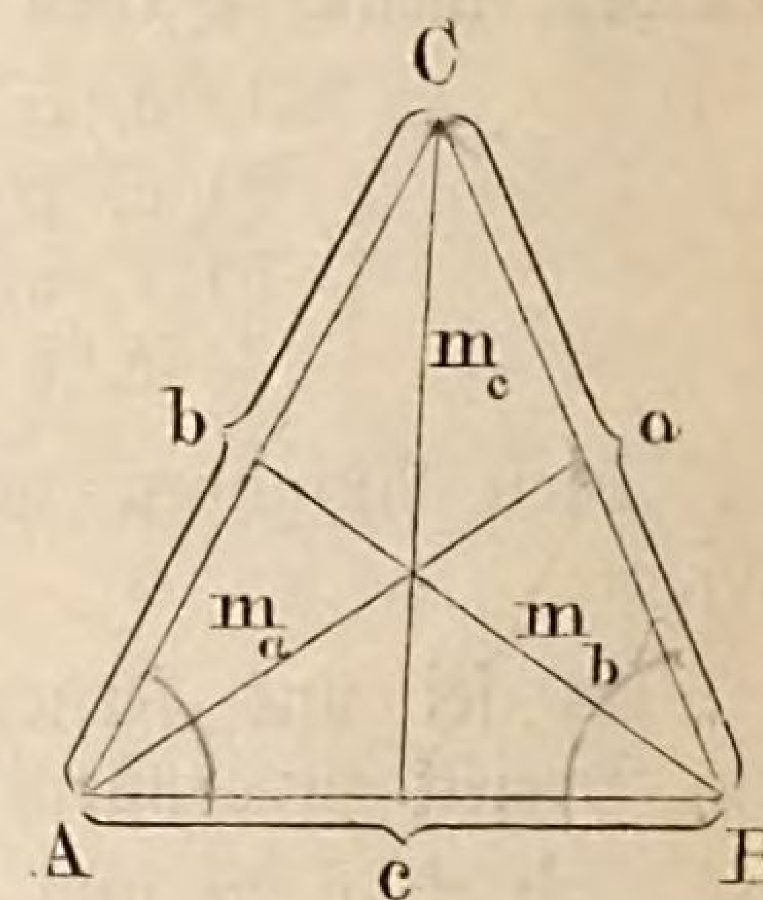


Fig. 19.

Wie bei den Höhen wollen wir bei den Mittellinien eine bestimmte Bezeichnungsweise einhalten, um uns bei den Aufgaben weitläufige Auseinandersetzungen über die Lage der Mittellinien zu ersparen.

Die Mittellinie, welche die Mitte der Seite a trifft, wollen wir, wie Fig. 19 zeigt, m_a nennen und die Mittellinien, welche b und c halbiren, sollen m_b und m_c heißen.

Hiernach wollen wollen wir zu Constructionsaufgaben übergehen, bei denen Mittellinien zu den gegebenen Stücken gehören. Wir werden die Lösung meist dem Schüler selbst überlassen und nur in einigen Fällen durch die Analysis andeuten.

I. Es soll ein Dreieck construirt werden, von welchem c, m_c und h_c gegeben ist (Fig. 20).

Analysis. Wenn wir uns eine Strecke AB = c hinzeichnen, haben wir schon zwei Eckpunkte A und B des gesuchten Dreiecks. Den dritten Eckpunkt C werden wir als Durchschnittspunkt zweier Oerter auffassen, die wir leicht finden können.

Wir suchen zunächst nach § 97 den Mittelpunkt M von AB. Von M ist die Spitze C des Dreiecks so weit entfernt, wie m_c angiebt. C ist also ein Punkt des Kreises, der um M mit m_c beschrieben ist. Dieser Kreis ist der *eine* geometrische Ort für die gesuchte Spitze C

Das Dreieck ABC soll ferner die Höhe h_c haben; deshalb errichten wir auf AB in irgend einem Punkte P, der auch in der Verlängerung von AB liegen kann, eine Senkrechte PT = h_c und ziehen durch T zu AB eine Parallele. Diese Parallele ist der *zweite* Ort für die gesuchte Spitze C.

Bemerkung. Der Kreis und die Parallele, welche die beiden geometrischen Oerter für den Punkt C repräsentiren, können sich wie in Figur 20 in *zwei* Punkten C und C′ schneiden, es entstehen dann zwei Dreiecke ABC und ABC′, welche der

---

[1]) Die drei Mittellinien schneiden sich ebenso wie die drei Höhen in einem Punkte; wir können diesen Satz erst später beweisen.

Forderung entsprechen. Es ist auch ferner möglich, daß die Parallele und der Kreis nur einen Punkt gemeinsam haben, dann wird es ein Dreieck geben, das der Forderung genügt. Es kann drittens vorkommen, daß der Kreis gar keinen Punkt mit der Parallelen gemeinsam hat (Fig. 21),

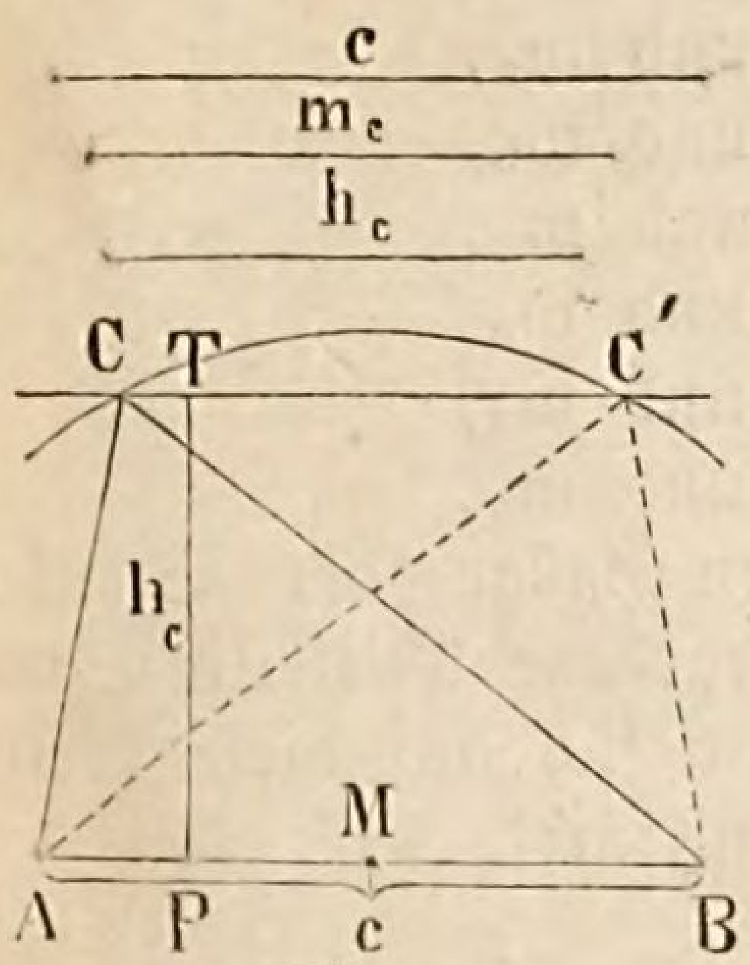


Fig. 20.

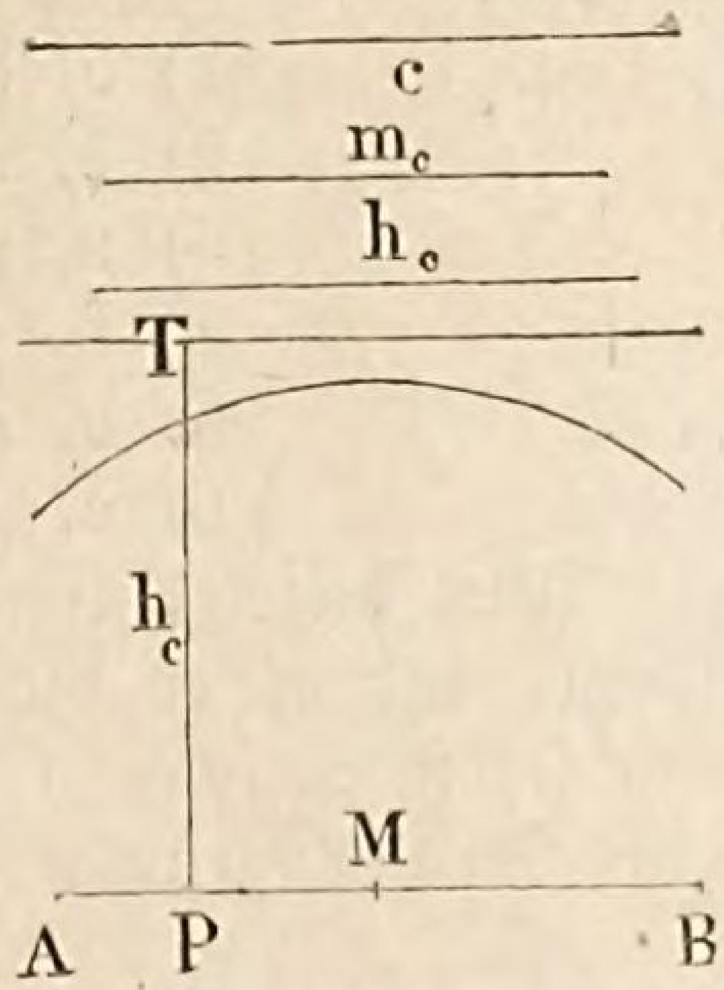


Fig 21.

dann ist die Construction des verlangten Dreiecks überhaupt unmöglich. Die Erwägung solcher möglichen Fälle ist sehr wichtig bei der Lösung von Constructionsaufgaben; wir haben sie bisher geflissentlich vermieden, um dem Schüler nicht zu viele Schwierigkeiten auf einmal zu bieten. Im letzten Theile des ersten Cursus werden wir sehr ausführlich darauf eingehen.

Aufgaben. Der Schüler möge ein Dreieck construiren, wenn

1) c, m_c und a,
2) c, m_c und b,
3) c, m_c und α,
4) c, m_c und β,
5) a, m_a und β,
6) b, m_b und α,
7) a, m_a und h_a,
8) b, m_b und h_b

gegeben ist.

Die Construction der verlangten Dreiecke möge der Schüler selbst ausführen.

§ 141. Hilfssatz. Bevor wir andere Aufgaben über Mittellinien bringen, wollen wir einen Hilfssatz beweisen.

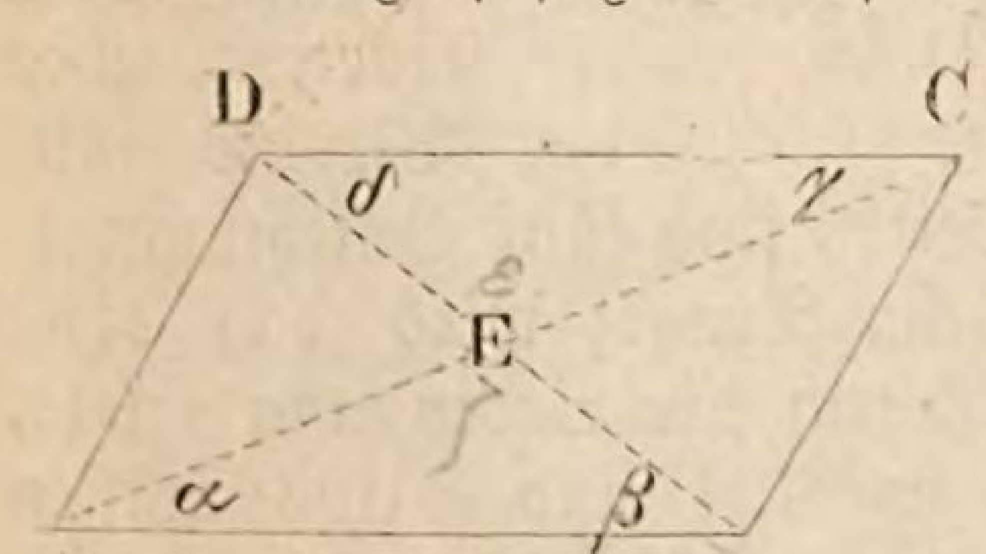


Fig. 22.

In Figur 22 haben wir ein Viereck ABCD, in welchem sich die beiden Diagonalen AC und BD im Punkte E gegenseitig halbiren, also so schneiden, daß AE = EC und BE = ED ist. Wir behaupten, daß dieses Viereck ein Parallelogramm sei, und stellen allgemein den Satz auf:

Ein Viereck, dessen Gegenseiten sich gegenseitig halbiren, ist ein Parallelogramm.

Voraussetzung. In dem Viereck ABCD (Fig. 22) ist AE = EC und BE = ED.

Behauptung. Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, d. h. es ist AB || CD und AD || BC.

Beweis. In den beiden Dreiecken AEB und CED ist:

AE = EC nach der Voraussetzung,
BE = ED nach der Voraussetzung,
und $\angle$ AEB = $\angle$ CED als Scheitelwinkel.

Die beiden Dreiecke AEB und CED stimmen mithin in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein; sie sind darum nach dem ersten Congruenzsatze mit einander congruent, in Zeichen, es ist:

$$\triangle \text{AEB} \cong \triangle \text{CED}.$$

Gleichen Winkeln liegen in congruenten Dreiecken auch gleiche Seiten gegenüber; es ist:

$\angle$ AEB = $\angle$ CED, mithin auch:
1) AB = CD.

Gleichen Seiten liegen in congruenten Dreiecken auch gleiche Winkel gegenüber; wir haben

AE = EC, darum ist auch:
$\beta = \delta$.

β und δ sind innere Wechselwinkel bei den Parallelen AB und CD, geschnitten von BD. Nach Lehrsatz VII Seite 63 sind zwei gerade Linien parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die inneren Wechselwinkel gleich sind, folglich ist auch:

2) AB || CD.

AB und CD sind zwei Gegenseiten des Vierecks ABCD; sie sind nach Gl. 1 und 2 gleich und parallel, daher ist das Viereck ABCD nach § 114 ein Parallelogramm, was behauptet war.

§ 142. Aufgabe. Es soll ein Dreieck construirt werden, wenn uns a, b und m_c gegeben ist.

Voraussetzung. Es sind uns drei Strecken a, b und m_c gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC construiren; in demselben soll AC = b, BC = a sein; ferner soll die Mittellinie, welche von der Spitze C nach dem Mittelpunkt M der Seite AB gezogen ist, die Länge der Strecke m_c haben.

Analysis. Wir wollen annehmen, das Dreieck ABC in Fig. 23 S. 154 entspreche der Forderung.

Es ist dann AC = b, BC = a und CM = m_c. Wenn wir nun CM über M hinaus bis D verlängern, so daß CM = MD ist, und D mit A und B geradlinig verbinden, so entsteht das Viereck ACBD. In demselben haben wir die Diagonalen AB und CD, und zwar halbiren sich diese beiden Diagonalen, denn es ist:

AM = MB [1]) und CM = MD.

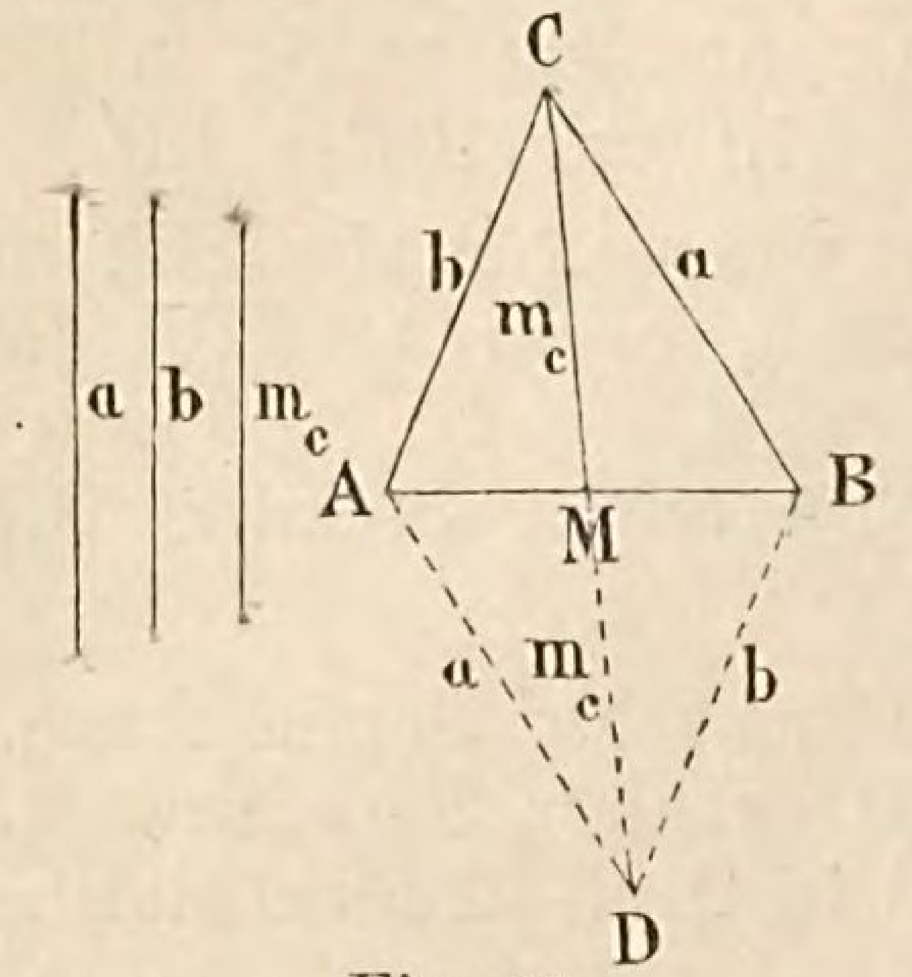


Fig. 23.

Nach dem vorigen Hilfssatz ist daher das Viereck ACBD ein Parallelogramm.

Ueberlegen wir uns jetzt, ob wir das Parallelogramm ACBD construiren können! Drei Bestimmungsstücke sind zur Construction nach § 128 nöthig, und in der That! wir haben diese drei Bestimmungsstücke. Erstens kennen wir AC = b, zweitens BC = a und drittens die Diagonale CD, denn CD ist ja doppelt so groß wie die gegebene Strecke m_c. Das Parallelogramm ACBD können wir daher nach dem in § 129 angegebenen Verfahren zeichnen.

Haben wir erst dieses Parallelogramm, so finden wir leicht das gesuchte Dreieck, indem wir die Ecken A und B geradlinig verbinden.

Construction. Wir zeichnen uns eine Strecke AC = b hin, schlagen um A einen Kreis mit der gegeben Strecke a und um C mit einem Radius, welcher doppelt so groß ist wie die gegebene Strecke m_c. Wir verbinden dann den Schnittpunkt D der beiden Kreise mit A und C durch gerade Linien, ziehen durch D eine Parallele zu AC und durch C eine Parallele zu AD. Die beiden Parallelen mögen sich im Punkte B treffen. Wir zeichnen dann noch die Gerade AB, welche CD in M schneiden möge.

Behauptung. In dem Dreieck ABC ist: AC = b, BC = a und CM = m_c; und zwar trifft CM die Seite AB so, daß AM = MB ist.

Beweis. Nach der Construction ist:

AC = b, was behauptet war.

Ferner ist das Viereck ACBD ein Parallelogramm, weil wir die Gegenseiten parallel gezeichnet haben. In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich, daher:

AD = BC.

AD ist nach der Construction so groß wie a, mithin haben wir auch:

BC = a, was behauptet war.

Die Diagonale CD ist der Construction gemäß doppelt so groß wie m_c, in Zeichen:

CD = 2 m_c.

Da sich im Parallelogramme die Diagonalen halbiren, ist CM die Hälfte von CD, also ist:

CM = m_c, was behauptet war.

Auch die Diagonale AB wird im Schnittpunkt M halbirt, daher haben wir auch:

AM = MB, was behauptet war.

Aufgaben. Der Schüler möge ein Dreieck zeichnen, wenn gegeben ist:

1) c, b und m_a,
2) c, a und m_b,
3) a, γ und m_c,
4) b, γ und m_c,
5) c, α und m_a,
6) c, β und m_b.

Alle diese Aufgaben möge der Schüler lösen, indem er die gegebene Mittellinie um sich selbst verlängert und sich auf diese Weise ein Parallelogramm construirt.

B Das Trapez.

§ 143. Das Trapez. Das gerade Trapez. Ehe wir zu einem neuen Abschnitte übergehen, wollen wir noch eine besondere Art von Vierecken behandeln, die von uns noch nicht besprochen sind.

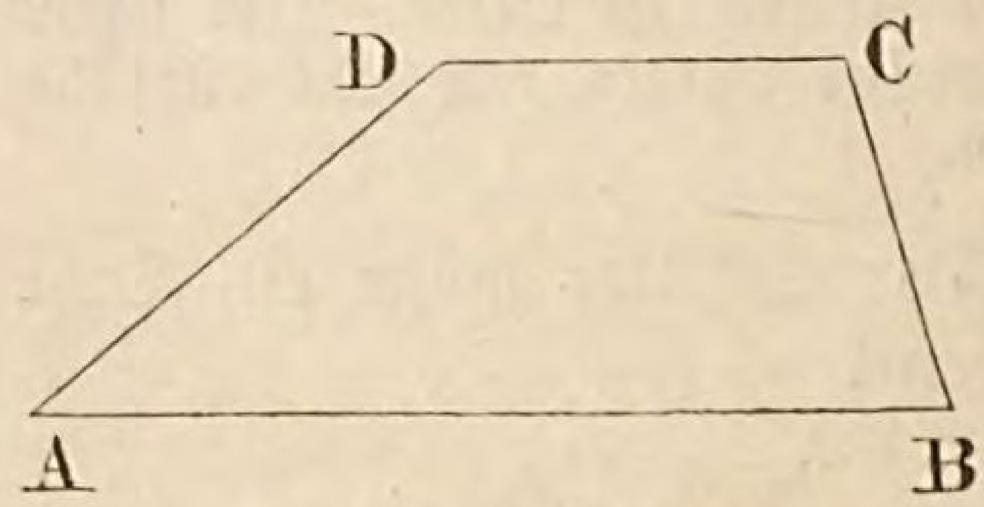


Fig. 24.

In Fig. 24 sind die beiden Seiten AB und CD parallel, die beiden anderen Seiten AD und BC haben dagegen verschiedene Richtung. Solche Vierecke, bei welchen nur zwei Seiten parallel laufen, nennt man **Trapeze**. Das Viereck ABCD in Figur 24 ist ein Trapez.

Wenn die beiden nicht parallelen Seiten gleich groß sind, nennt man das Viereck ein **gerades Trapez.** In Fig. 25 ist DG = EF und DE ∥ FG, das Viereck DEFG ist daher ein gerades Trapez.

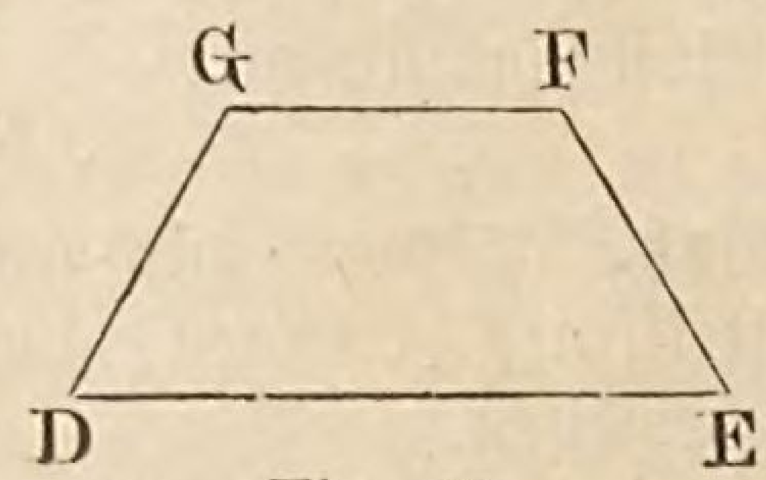


Fig. 25.

Zur Construction eines Vierecks mit nicht parallelen Seiten sind fünf Bestimmungsstücke nöthig. Beim Trapez wird das eine Bestimmungsstück durch die Bedingung ersetzt, daß zwei Seiten parallel sind. Uns müssen darum **vier Bestimmungsstücke** gegeben sein, wenn wir ein **Trapez** construiren wollen. Um alle weitläufigen Auseinandersetzungen über die Lage der Seiten und Winkel bei einem Trapez zu vermeiden, wollen wir eine bestimmte Bezeichnungsweise einführen.

[1]) Denn die Mittellinie trifft AB im **Mittelpunkt** M.

Wie Fig. 26 zeigt, sollen A, B, C, D die Ecken, α, β, γ, δ die Winkel und a, b, c, d die Seiten des Trapezes sein. Parallel sind also immer die Seiten a und c, nicht parallel die Seiten b und d. Mit e und f wollen wir die Diagonalen des Trapezes bezeichnen.

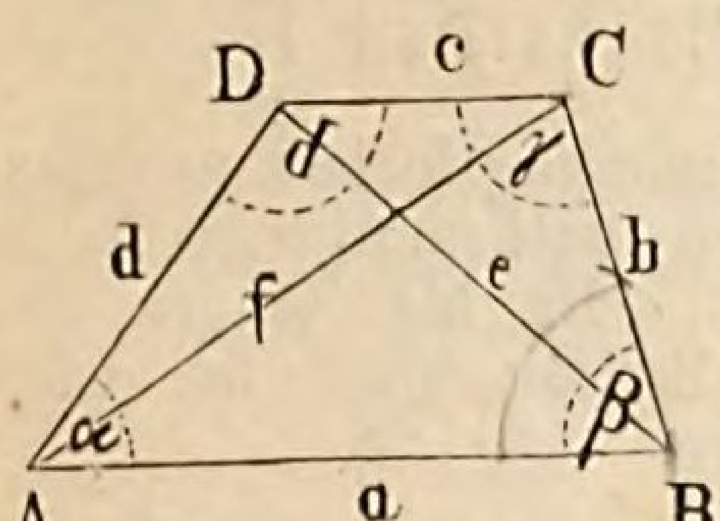


Fig. 26.

§ 144. Construction der Trapeze.

Wir gehen jetzt zur Construction der Trapeze über.

Aufgabe I. Es soll ein Trapez construirt werden, wenn a, d, α und β gegeben ist (Fig. 27).

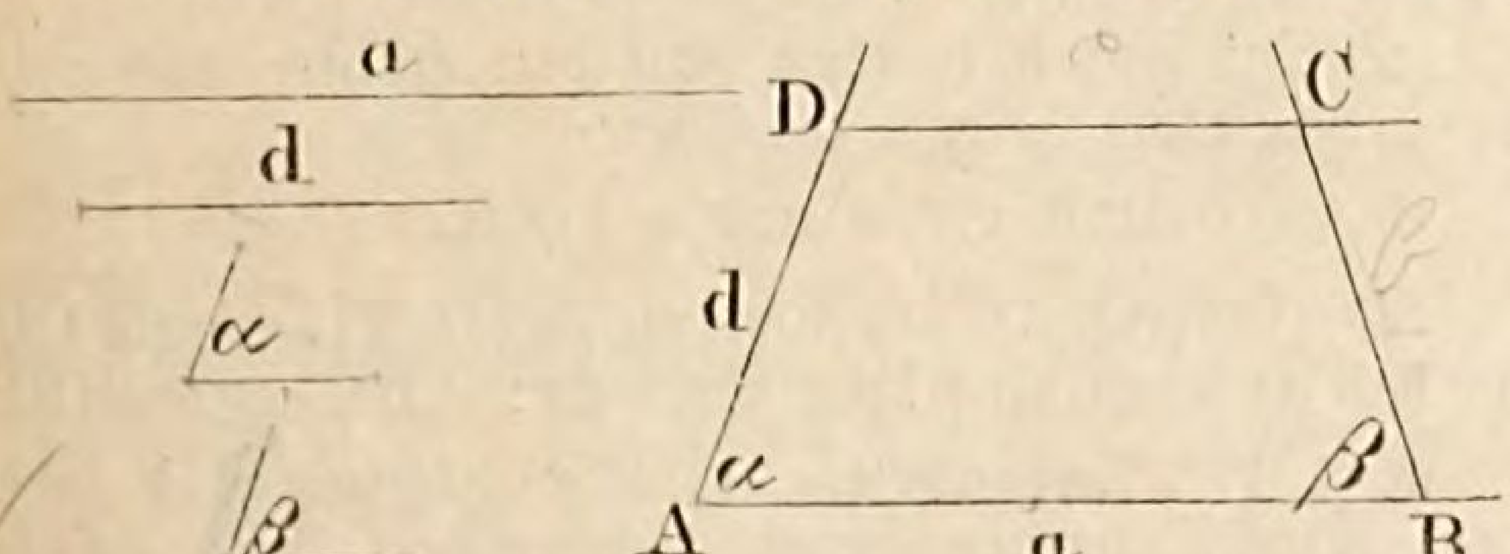


Fig. 27.

Construction. Wir werden uns den Winkel α noch einmal hinzeichnen; der Scheitelpunkt desselben möge A heißen. Dann werden wir von dem einen Schenkel ein Stück AB = a, und von dem andern Schenkel ein Stück AD = d abschneiden. Durch D werden wir darauf eine Parallele zu AB legen und an AB im Punkte B den Winkel β antragen. Der freie Schenkel des Winkels β und die Parallele mögen sich in dem Punkte C schneiden. Dann ist ABCD das verlangte Trapez.

Aufgabe II. Ein Trapez ist zu construiren, von welchem die Stücke a, b, c und β gegeben sind.

Diese Aufgabe möge der Schüler selbst lösen.

Aufgabe III. Ein Trapez soll construirt werden, von dem wir die vier Seiten a, b, c und d kennen.

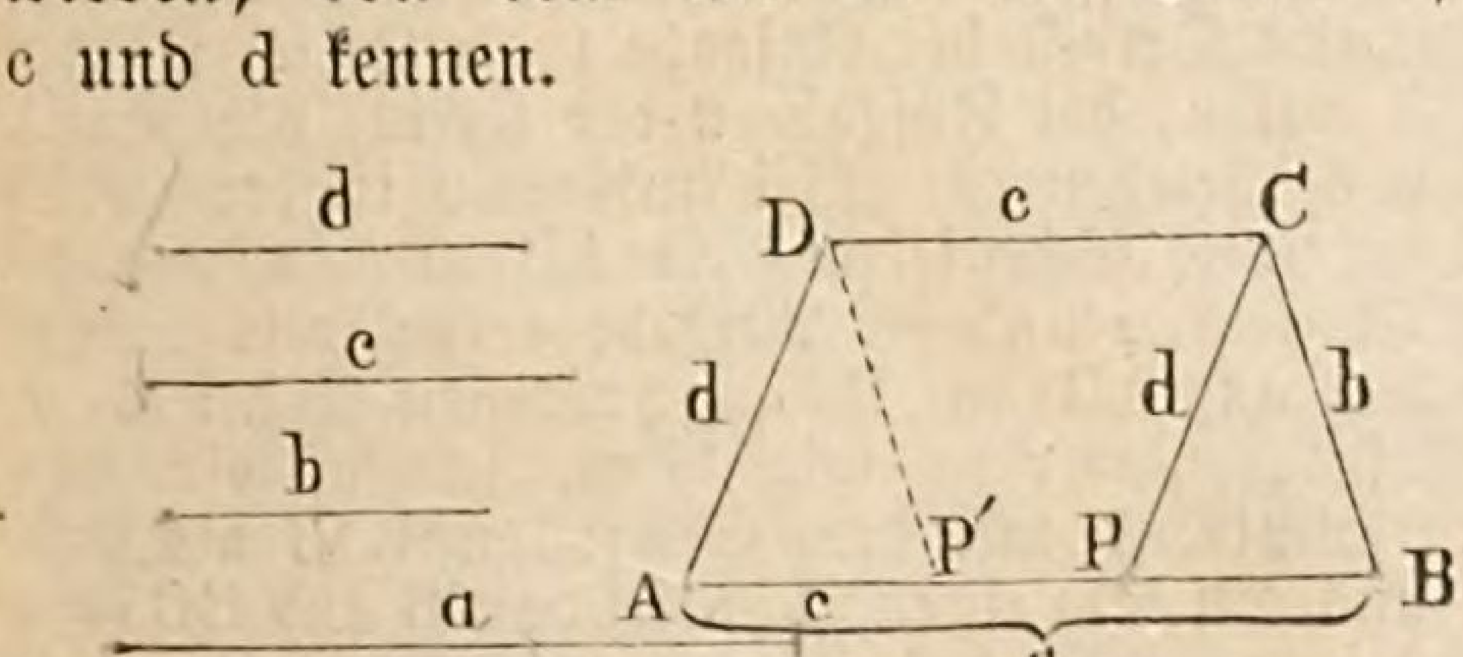


Fig. 28.

Analysis. ABCD in Fig. 28 sei das verlangte Trapez. Wir wollen in demselben durch den Punkt C zu AD die Parallele CP legen, dann wird das Trapez in das Parallelogramm CPAD und in das Dreieck PBC zerlegt. Sehen wir uns das Dreieck PBC genauer an! In demselben ist uns unmittelbar gegeben die Seite b, ferner ist die Seite PC gleich der gegebenen Trapezseite d, und die dritte Dreiecksseite PB erhalten wir, wenn wir c von a abziehen. Wir kennen mithin in dem Dreieck PBC alle drei Seiten und sind daher im Stande, es zu construiren.

Haben wir erst das Dreieck PBC, so wird uns die Construction des Trapezes leicht, denn wir brauchen nur PB über P hinaus um PA = c zu verlängern, durch C zu AB die Parallele CD = c zu legen und die Gerade AD zu ziehen.

Bemerkung. Um zur Construction des Trapezes zu gelangen, zeichneten wir uns zunächst das Dreieck PBC, in welchem die eine Seite gleich dem Unterschied der beiden parallelen Trapezseiten, mathematisch gesprochen, gleich a — c ist. Dieses Dreieck[1]) möge sich der Schüler zuerst zu construiren suchen, wenn er die folgenden Constructionsaufgaben löst:

Es ist ein Trapez zu zeichnen, wenn gegeben ist:

1) a — c[2]), b, d und f,
2) a — c, b, d und e,

Aufgabe IV. Ein Trapez ist zu construiren, von dem uns a + c, d, e und f gegeben ist.

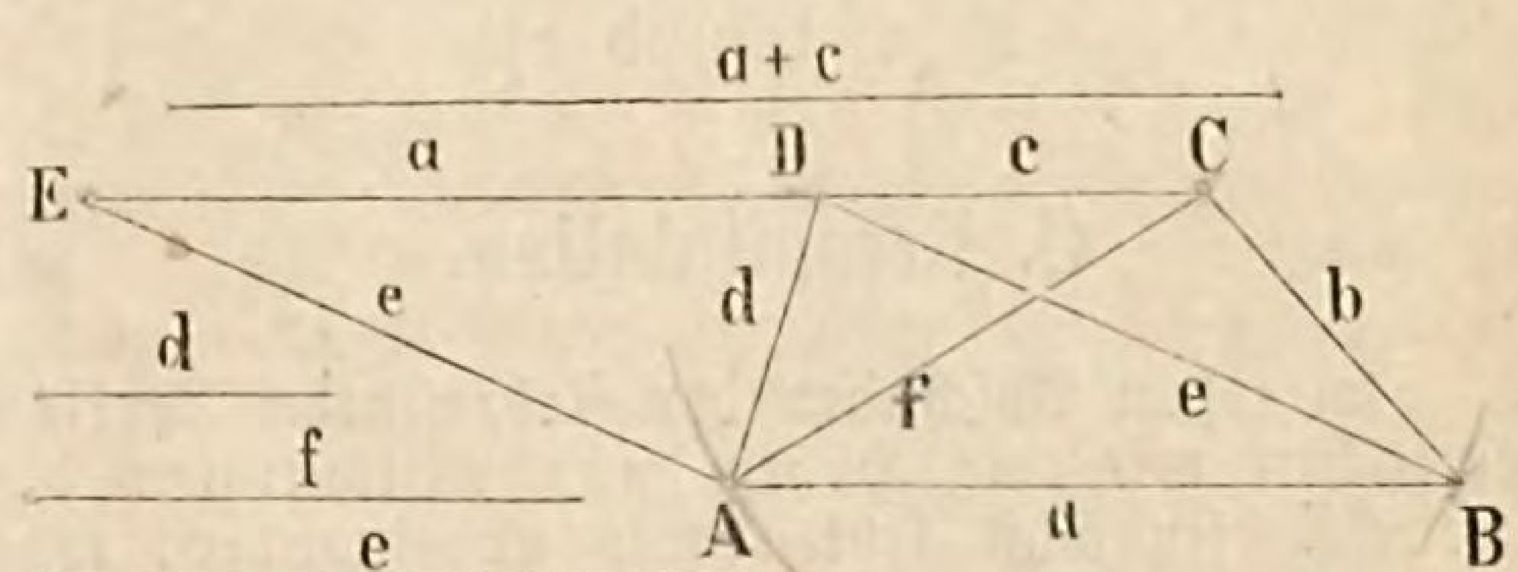


Fig. 29.

Analysis. Wir werden uns zunächst a + c sichtbar machen, indem wir CD über D hinaus um DE = a verlängern. Wenn wir dann die gerade Linie AE ziehen, erhalten wir das Viereck ABDE. In demselben ist AB ∥ DE und AB = DE; mithin ist ABDE nach § 114 ein Parallelogramm. In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich, daher haben wir:

AE = BD,
oder AE = e.

Betrachten wir jetzt das Dreieck ACE! In demselben kennen wir alle drei Seiten, denn es ist:

CE = a + c, AC = f und AE = e.

Das Dreieck ACE läßt sich also auf einfache Weise construiren. Haben wir erst ACE, so können wir den Punkt D leicht finden, indem wir um A mit d einen Kreis beschreiben. Wenn wir auf diese Weise den Punkt D kennen gelernt haben, so sind

---

[1]) Statt des Dreiecks PBC kann der Schüler auch das Dreieck P'AD verwenden, welches dadurch entsteht, daß man durch D zu BC die Parallele DP' legt. In demselben ist die Grundlinie AP' auch so groß wie a — c. [2]) Wir nehmen dabei an, daß a > c ist; ist c > a, so würde der Unterschied der beiden Seiten c — a sein.

uns von dem gesuchten Trapez drei Eckpunkte A, D und C bekannt. Zum vierten Eckpunkt B gelangen wir, indem wir durch A zu EC die Parallele $AB = a$ ziehen.

Aufgabe V. Der Schüler möge das Trapez construiren, wenn gegeben ist:

1) $a + c$, b, e und f,
2) $a + c$, d, f und der Winkel, welcher von c und f eingeschlossen wird.

§ 145. Construction gerader Trapeze. Zur Construction eines Trapezes, bei welchem die nicht parallelen Seiten (b und d) ungleich sind, mußten uns vier Bestimmungsstücke gegeben sein. Bei einem geraden Trapez wird das eine Bestimmungsstück durch die Bedingung aufgewogen, daß die nicht parallelen Seiten einander gleich sind. Wir werden daher ein gerades Trapez construiren können, wenn uns drei von einander unabhängige Strecken gegeben sind. Der Schüler möge folgende Aufgaben lösen. Es soll ein gerades Trapez construirt werden, wenn gegeben ist:

1) a, b und c,
2) a, b und e,

C. Recapitulation.

Im ersten Abschnitte der **siebzehnten Lection** besprachen wir die Höhen und Mittellinien des Dreiecks. Zunächst setzten wir auseinander, was man unter der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie versteht, und gingen dann zu den Dreieckshöhen über. Es ergab sich, daß zu jeder Seite des Dreiecks eine Spitze und eine Höhe gehört, daß wir also in einem Dreieck drei Höhen und drei Spitzen zu unterscheiden haben. Nachdem wir im Anschluß daran einen neuen geometrischen Ort behandelt hatten, wandten wir uns zu Constructionsaufgaben, bei welchen eine der Höhen mit zu den gegebenen Stücken zählt. Wir kamen dann zu den Mittellinien des Dreiecks, welche deshalb von großer practischer Bedeutung sind, weil ihr Durchschnittspunkt zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ist. Da wir in einem Dreieck drei Seiten haben, giebt es auch drei Mittellinien.

Mehrere Dreiecksconstructionen sollten dann dazu dienen, den Schüler mit den Mittellinien vertrauter zu machen. Im letzten Abschnitt der siebzehnten Lection behandelten wir endlich die Trapeze, eine besondere Art von Vierecken, bei welchen zwei Seiten parallel laufen und die beiden anderen Seiten verschiedene Richtung haben. Wenn die nicht parallelen Seiten gleich sind, nannten wir das Trapez ein gerades Trapez. Zur Construction der nicht geraden Trapeze gehören, wie wir zeigten, vier Bestimmungsstücke, während sich gerade Trapeze ebenso wie die Parallelogramme schon aus drei Stücken construiren lassen. Zum Schluß gaben wir mehrere Constructionsaufgaben aus der Lehre von den Trapezen.

D. Beantwortung der Fragen und Auflösung der Aufgaben der Lection 17.

Weil wir mit dem nächsten Briefe zu einem neuen Abschnitt bei unseren mathematischen Untersuchungen kommen, wollen wir die Fragen und Aufgaben der siebzehnten Lection schon in diesem Briefe behandeln.

Abschnitt A. § 136. **Fragen.** 1) Als Grundlinien können wir alle drei Seiten des Dreiecks auffassen. 2) Ein Dreieck hat drei Spitzen und drei Höhen. 3) Zwei Dreieckshöhen können außerhalb des Dreiecks liegen. 4) Zur Höhe h_c gehört die Spitze C und die Seite c.

Aufgaben. 1) In Fig. 8 haben wir die Höhen: MT, NS und PU, und zwar ist $MT \perp NP$, $NS \perp MP$ und $PU \perp MN$.

In Fig. 9 haben wir die Höhen: h_d, h_e und h_f, es ist $h_d \perp d$, $h_e \perp e$ und $h_f \perp f$.

2) In Fig. 8 werden von den Höhen und Seiten die rechten Winkel gebildet:

σ und τ, υ und φ, η und ϑ.

3) In Fig. 3 entstehen durch die Diagonale CD die beiden rechtwinkligen Dreiecke: ADC und BDC.

§ 139. **Aufgaben.** 1) Wir zeichnen $AB = c$ und haben damit zwei Eckpunkte. Der dritte Eckpunkt ist der Durchschnitt zweier geometrischen Oerter. Der erste Ort ist der freie Schenkel des Winkels α, der an AB im Punkte A angetragen wird. Der zweite Ort ist die Parallele zu AB, welche wir durch einen Punkt gezogen haben, der um h_c von AB entfernt ist. 2) Aehnlich wie 1. 3) Zwei Ecken des Dreiecks erlangen wir, indem wir $AB = c$ zeichnen. Der dritte Eckpunkt ist der Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter. Der erste geometrische Ort ist der um B mit a geschlagene Kreis; der zweite Ort ist die Parallele, welche durch einen um h_c von AB entfernten Punkt zu AB gelegt ist. Schneidet der Kreis die Parallele in zwei Punkten, so sind zwei Dreiecke möglich. 4) Aehnlich wie 3.

§ 140. **Aufgaben.** Bei den ersten vier Aufgaben zeichnen wir uns eine Gerade $AB = c$ und erhalten auf diese Weise zwei Eckpunkte des Dreiecks. Der dritte Eckpunkt ist wieder Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter und zwar ist bei allen vier Aufgaben der erste Ort der um den Mittelpunkt M von AB mit m_c beschriebene Kreis, der zweite Ort ist bei Aufgabe 1 der Kreis, welcher um B mit a, bei Aufgabe 2 der Kreis, der um A mit b beschrieben ist. Bei Aufgabe 3 ist der zweite Ort der freie Schenkel des an AB in A angetragenen Winkels α und bei Aufgabe 4 der freie Schenkel des an AB in B angetragenen Winkels β. 5) Aufgabe 5 werden wir lösen, indem wir uns einen Winkel β mit dem Scheitelpunkt B hinzeichnen und auf dem einen Schenkel von B aus $BC = a$ abschneiden. Wir haben dann zwei Ecken B und C des Dreiecks. Die dritte Ecke A ist Durchschnittspunkt zweier Oerter. Der eine Ort ist der zweite Schenkel des Winkels β, der zweite Ort der Kreis, welcher um den Mittelpunkt von BC mit m_a geschlagen ist.

Schneiden sich Aufg. 1 u. 2, die Oerter in zwei Punkten, wie es meist geschehen wird, so giebt es zwei Dreiecke, welche der Forderung entsprechen.

6) Aufgabe 6 wird ähnlich wie Aufgabe 5 gelöst.

7) Um ein Dreieck aus den Stücken a, m_a, und h_a zu construiren, legen wir uns eine Seite AC = a hin; damit haben wir zwei Dreiecksecken gefunden, nämlich A und C. Die dritte Ecke ist der Durchschnittspunkt zweier Oerter. Der eine Ort ist der Kreis der um den Mittelpunkt von AC mit m_a beschrieben ist, der andere Ort die Parallele zu AC, welche durch einen Punkt gelegt ist, welcher sich im Abstande h_a von AC befindet. Schneiden sich die beiden Oerter in zwei Punkten, so haben wir zwei Dreiecke.

§ 142. Um die sechs Aufgaben zu lösen, welche wir in § 142 gestellt haben, muß sich der Schüler erst ein Dreieck[1]) hinzeichnen, von dem er annimmt, daß es der Forderung genügt. Er muß darauf die gegebene Mittellinie um sich selbst bis D verlängern; wenn er dann D in Aufg. 1 mit B und C, in Aufg. 2 mit A und C, in Aufg. 3 mit A und B, in Aufg. 4 mit A und B, in Aufg. 5 mit B und C, in Aufg. 6 mit A und C, erhält er ein Parallelogramm, welches er construiren kann, weil er von demselben drei unabhängige Stücke kennt. Er wird diese Parallelogramme am besten so zeichnen, daß er sich erst eines der Dreiecke construirt, in welche das Parallelogramm durch die verlängerte Mittellinie zerlegt wird, und dann die nöthigen Parallelen zieht. Für die Construction dieser Dreiecke wird er immer drei gegebene Stücke finden, wenn er berücksichtigt, daß im Parallelogramm die Gegenseiten gleich sind, und außerdem bei den letzten 4 Aufgaben bedenkt, daß man gemäß Aufg. 3 Seite 126 alle Winkel des Parallelogramms finden kann, wenn man den einen kennt.

§ 144. Um ein Trapez[2]) zu construiren, von dem wir die Stücke a, b, c und β kennen, ziehen wir uns erst eine Gerade AB = a, tragen an AB im Punkte B einen Winkel β mit dem Scheitelpunkt B an, schneiden auf dem freien Schenkel BC = b ab, legen durch C zu AB eine Parallele CD = c und ziehen die Gerade AD. Das Viereck ABCD ist dann das verlangte. Zum Anschluß an Aufgabe III sind zwei andere Aufgaben gestellt. Bei beiden Aufgaben werden wir uns zunächst das Dreieck PBC (siehe Fig. 28) construiren, von dem uns die drei Seiten a — c, b und d gegeben sind.

Dann werden wir bei Aufg. 1 den Punkt A ermitteln, indem wir mit f um C einen Kreis beschreiben, der die Verlängerung von BP in A schneidet. Durch A werden wir darauf eine Parallele AD = d zu PC legen. Verbinden wir D mit C, so haben wir das gesuchte Trapez ABCD.

Haben wir bei Aufg. 2 das Dreieck PBC, so werden wir durch C zu PB eine Parallele ziehen und um B mit e einen Kreis schlagen. Der Kreis und die Parallele mögen sich in C schneiden. Dann haben wir die Eckpunkte B, C und D des Trapezes; den vierten Eckpunkt A finden wir, indem wir durch D zu CP die Parallele DA = d legen.

Es soll ferner im Anschluß an Aufgabe IV ein Trapez construirt werden, wenn gegeben ist:

1) a + c, b, e und f,
2) a + c, d, f und der Winkel, welcher von c und f eingeschlossen wird.

Wir wollen für die erste Aufgabe kurz die Analysis geben. Wir nehmen an, ABCD[1]) sei das verlangte Trapez, dann werden wir uns zuerst a + c sichtbar machen, indem wir DC über C hinaus um CE = a verlängern. Ziehen wir darauf die Gerade EB, so entsteht das Dreieck DBE. In demselben kennen wir alle drei Seiten, denn es ist DE = a + c, BD = e und BE = f[2]); das Dreieck DBE können wir deswegen construiren. Mit diesem Dreieck haben wir zwei Ecken B und D des gesuchten Trapezes. Für den dritten Eckpunkt C, welchen wir als Durchschnitt zweier Orte ansehen, ist der eine Ort die Gerade DE, der zweite Ort der Kreis[3]), welcher um B mit b geschlagen wird. Den vierten Eckpunkt A endlich werden wir erhalten, indem wir durch B zu CD die Parallele BA = CE legen.

Auch für die zweite Aufgabe werden wir die Analysis bringen. Ist ABCD das verlangte Trapez, so werden wir zunächst CD über D hinaus an DE = a verlängern und dann die Gerade AE ziehen. Das Dreieck AEC, welches wir dadurch erhalten, können wir construiren, weil wir von demselben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennen. Es ist nämlich CE = a + c, AC = f, und der Winkel, welcher von c und f eingeschlossen wird, gegeben. Haben wir das Dreieck ACE, so kennen wir zwei Eckpunkte A und C des gesuchten Trapezes. Den dritten Eckpunkt D werden wir als Durchschnittspunkt zweier Oerter auffassen. Der eine Ort ist die Gerade CE, der zweite ist der Kreis, welcher um A mit d geschlagen ist. Den vierten Eckpunkt B werden wir finden, indem wir zu CE die Parallele AB = DE ziehen.

§ 145. Der Schüler möge sich ein gerades Trapez ABCD gemäß der in § 143 festgesetzten Bezeichnungsweise hinzeichnen. Er wird dann die Lösung der Aufgabe verstehen, wenn wir folgende Andeutungen machen:

Aufgabe I. Es ist d = b, folglich kennen wir von dem Trapez alle vier Seiten und die Aufgabe reducirt sich auf Aufgabe III in § 144.

Aufgabe II. Von dem Dreieck ABD sind uns die drei Seiten bekannt. denn es ist:

AB = a, BD = e, AD = d = b.

Das Dreieck ABD können wir mithin construiren. Durch dieses Dreieck haben wir drei Ecken A, B und C des gesuchten Trapezes. Die vierte Ecke ist der Durchschnittspunkt zweier Oerter, nämlich der durch D zu AB gezogenen Parallelen und des Kreises[4]), der um B mit b beschrieben wird.

---

[1]) Die einzelnen Dreiecksstücke werden gerade ebenso benannt, wie bei der vorher behandelten Aufgabe. Der Schüler möge sich, wie überhaupt in diesem ganzen Abschnitt, immer die Figur zeichnen, sonst wird er unsere Auseinandersetzungen nicht verstehen. [2]) Der Schüler möge sich immer ein Trapez nach der in § 143 auseinandergesetzten Bezeichnungsweise hinzeichnen.

[1]) Der Schüler möge sich das Trapez ABCD mit den Diagonalen gemäß § 143 hinzeichnen. [2]) ABCE ist ein Parallelogramm, weil die beiden Seiten AB (a) und CE (a) einander gleich und parallel sind. Es ist darum: AC = BE, und weil AC = f, muß auch BE = f sein. [3]) Schneidet der Kreis mit b die Parallele in zwei Punkten, so entsprechen zwei Trapeze der Forderung. [4]) Wenn der Kreis die Parallele in zwei Punkten schneidet, entsteht ein gerades Trapez und ein Parallelogrammm.

Die wichtigsten Grundsätze, Definitionen und Lehrsätze der ersten neun Briefe.

Jede einzelne Section haben wir bisher als ein Ganzes betrachtet; die Definitionen und Lehrsätze haben wir in jeder Section von I ab nummerirt, nur die neun Grundsätze sind durchgehend nummerirt worden. Da wir jetzt am Ende eines Abschnittes stehen, wird es dem Schüler erwünscht sein, wenn wir die Lehrsätze und Definitionen ordnend zusammenfassen und die Grundsätze dem Schüler noch einmal vorführen. Diejenigen Sätze und Definitionen, welche mehr für den Aufbau innerhalb der einzelnen Section, als für die späteren Capitel Bedeutung haben, können wir in dieser Uebersicht fortlassen. Auch die Reihenfolge der Lehrsätze und Definitionen werden wir verändern; früher haben wir sie so aufeinander folgen lassen, wie sie sich am besten auseinander ableiten ließen, jetzt werden wir sie nach der Uebereinstimmung ihres Inhalts ordnen.

Wir werden oft in einen Satz mehrere Lehrsätze vereinigen, die wir vorher getrennt behandelt haben, damit sie in ihren Einzelheiten besser hervortraten. Immer werden wir in Klammern die Nummer der Seite hinzusetzen, auf welcher die Grundsätze, Lehrsätze und Definitionen besprochen sind. Unter die Definitionen haben wir auch solche Erklärungen eingereiht, welche in den Briefen nicht mit „Definition" überschrieben wurden; wir lassen jetzt nach einander unter A die Grundsätze, unter B die Definitionen und unter C die Lehesätze folgen.

A. Grundsätze.

I. Jede Größe ist sich selbst gleich. (13.)
II. Zwei Größen sind gleich, wenn sie beide einer dritten gleich sind. (13.)
III. Gleiches zu Gleichem **addirt** giebt Gleiches. (13).
IV. Gleiches von Gleichem **subtrahirt** giebt Gleiches. (14.)
V. Gleiches mit Gleichem **multiplicirt** giebt Gleiches. (15.)
VI. Gleiches durch Gleiches **dividirt** giebt Gleiches. (16.)
VII. Größen, welche einander gleich sind, kann man für einander einsetzen. (60.)
VIII. Gleiches zu Ungleichem **addirt** giebt Ungleiches in demselben Sinne. (75.)
IX. Gleiches von Ungleichem **subtrahirt** giebt Ungleiches in demselben Sinne. (76.)

B. Definitionen.

I. Die **gerade Linie** ist der **kürzeste** Weg zwischen zwei Punkten. (17.)

II. Ein **gestreckter Winkel** ist ein solcher Winkel, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden. (21.)

III. Ein **convexer** Winkel ist ein solcher Winkel, welcher größer ist als ein Gestreckter. (27.)

IV. Ein **concaver** Winkel ist ein solcher Winkel, welcher kleiner ist als ein Gestreckter. (27.)
Die concaven Winkel zerfallen in **rechte, stumpfe** und **spitze** Winkel.

V. Ein **rechter** Winkel ist die Hälfte eines gestreckten Winkels. (21.)

VI. Ein **stumpfer** Winkel ist ein solcher Winkel, welcher größer ist als ein Rechter, aber kleiner als ein Gestreckter. (26.)

VII. Ein **spitzer** Winkel ist ein solcher Winkel, welcher kleiner ist als ein Rechter. (26.)

VIII. **Nebenwinkel** sind solche Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine gerade Linie bilden. (51.)

IX. **Scheitelwinkel** sind solche Winkel, bei welchen die Schenkel des einen Verlängerungen der Schenkel des andern sind. (56.)

X. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, entstehen acht Winkel. Von denselben faßt man unter dem Namen **Gegenwinkel** oder **correspondirende Winkel** je zwei zusammrn, welche
1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) an derselben Seite der schneidenden,
3) an derselben Seite der beiden geschnittenen Geraden liegen. (58.)

Wechselwinkel nennt man je zwei, welche
1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) an verschiedenen Seiten der schneidenden,
3) an verschiedenen Seiten der beiden geschnittenen Geraden liegen (58);
und zwar heißen **innere Wechselwinkel** diejenigen, welche **innerhalb**, **äußere Wechselwinkel** diejenigen, welche **außerhalb** der geschnittenen Geraden liegen. (59)
Als **entgegengesetzte Winkel** bezeichnet man von den acht Winkeln je zwei, welche
1) verschiedene Scheitelpunkte haben,
2) auf derselben Seite der schneidenden Geraden,
3) auf verschiedenen Seiten der beiden geschnittenen Geraden liegen. (71.)

XI. Zwei gerade Linien heißen **parallel**, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß die Gegen- und Wechselwinkel einander gleich sind. (63.)

XII. **Gleichseitig** heißt ein **Dreieck**, wenn die drei Seiten desselben einander gleich sind. **Gleichschenklig** wird ein Dreieck genannt, wenn in demselben zwei Seiten gleich sind. **Ungleichseitig** heißt ein Dreieck, wenn in demselben keine Seite der andern gleich ist. (78.)

Im **gleichschenkligen** Dreieck nennt man diejenige Seite die **Basis**, von welcher eine Gleichheit mit den beiden anderen Seiten nicht behauptet wird. Die Winkel, welche der Basis anliegen, nennt man **Basiswinkel**, und die Ecke, welche der Basis gegenüberliegt, heißt die **Spitze**. (100.)

XIII. Ein Dreieck, in welchem ein **rechter** Winkel vorkommt, wird **rechtwinklig**,
ein Dreieck, dessen einer Winkel **stumpf** ist, wird **stumpfwinklig**,
ein Dreieck, dessen drei Winkel **spitz** sind, wird **spitzwinklig** genannt. (86.)

In einem rechtwinkigen Dreiecke nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, die **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten die **Katheten**. (117.)

XIV. Die Nebenwinkel der Dreieckswinkel werden **Außenwinkel** des Dreiecks genannt. (69.)

XV. Die Senkrechten, welche in einem Dreieck von den Ecken auf die gegenüberliegenden gefällt sind, nennt man **Höhen**. (147.)

XVI. Die geraden Linien, welche die Dreiecksecken mit der Mitte der gegenüberliegenden Seiten verbinden, heißen **Mittellinien**. (152.)

XVII. **Congruent** nennt man zwei Figuren, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in allen ihren Punkten zusammenfallen. (89.)

XVIII. Unter den **Diagonalen** eines Vierecks versteht man die geraden Linien, welche die Ecken des Vierecks mit einander verbinden. (89.)

XIX. Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt ein **Parallelogramm**. (119.)

XX. Ein Parallelogramm mit rechten Winkeln wird ein **Rechteck** genannt. (120.)

XXI. Ein gleichseitiges Rechteck nennt man ein **Quadrat**. (121.)

XXII. Ein gleichseitiges Rechteck mit schiefen Winkeln heißt ein **Rhombus**.

XXIII. Der **Kreis** ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind. (28.)

Den festen Punkt nennt man den **Mittelpunkt** oder das **Centrum**. Die geraden Linien, welche den Mittelpunkt mit den Kreispunkten verbinden, heißen **Radien** oder **Halbmesser**. Die Theile des Kreises nennt man **Kreisbogen**. Die geraden Linien, welche von einem Punkte des Kreises nach einem andern Punkte gezogen sind, heißen **Sehnen**, und zwar werden diejenigen Sehnen, welche durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgehen, **Durchmesser** genannt. Gerade Linien, welche den Kreis durchschneiden, werden mit dem Worte **Secante** bezeichnet. (28, 29, 30.)

Winkel, deren Scheitelpunkt zugleich Centrum eines Kreises ist, werden **Centriwinkel**, Winkel, deren Scheitelpunkt in der Kreislinie liegt, werden **Peripheriewinkel** genannt. (30.)

C. Lehrsätze.

I. Zwei **gerade Linien fallen** ganz **zusammen,** wenn sie zwei Punkte mit einander gemein haben. (19.)

II. Die **Summe** zweier **Nebenwinkel** ist gleich zwei Rechten. (51.)
III. Die **Summe aller Winkel,** welche **um einen Punkt** herum liegen, beträgt vier Rechte. (55.)
IV. Zwei **Scheitelwinkel** sind einander gleich. (57.)

V. Wenn zwei **parallele Gerade** an einer dritten Geraden geschnitten werden, sind je zwei Gegen- und Wechselwinkel einander gleich, und die Summe zweier entgegengesetzten Winkel beträgt zwei Rechte. (68 und 72.)
VI. Zwei **gerade Linien** sind **parallel,** wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß

zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind
oder daß die Summe zweier entgegengesetzten Winkel zwei Rechte beträgt. (63 und 122.)

VII. Bei einem Dreieck ist die **Summe zweier Seiten** größer, die **Differenz** zweier kleiner als die dritte Seite, (77.)
VIII. Der **Außenwinkel** eines Dreiecks ist ebenso groß wie die Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind. (79.)
IX. In einem Dreieck ist die **Summe der** drei **Winkel** gleich zwei Rechten. (83.)
X. In einem **Viereck** ist die **Summe der** vier **Winkel** gleich vier Rechten. (89.)

XI. Zwei Dreiecke sind **congruent,**

1) wenn sie in **zwei Seiten** und dem **eigeschlossenen Winkel,**
2) wenn sie in **drei Seiten,**
3) wenn sie in **einer Seite** und **zwei gleichliegenden Winkeln,**
4) wenn sie in **zwei Seiten** und dem der **größeren Seite gegenüberliegenden Winkel** übereinstimmen. (100.)

XII. In einem **gleichschenkligen** Dreiecke sind die **Basiswinkel** einander gleich. (101.)
XIII. Die gerade Linie, welche die **Spitze** eines gleichschenkligen Dreiecks mit der **Mitte der Basis** verbindet, halbirt den Winkel an der Spitze und steht auf der Basis senkrecht. (102.)

XIV. In einem Dreieck liegen **gleichen Seiten** auch **gleiche Winkel** und **gleichen Winkeln** auch **gleiche Seiten** gegenüber. (114 und 115).
XV. In einem Dreieck liegt der **größern Seite** auch der **größere Winkel** und dem **größern Winkel** auch die **größere Seite** gegenüber. (116.)

XVI. In einem **Parallelogramm** sind die **Gegenseiten** und die **gegenüberliegenden Winkel** einander gleich. (119 und 120.)
XVII. Ein **Viereck,** bei welchem die Gegenseiten oder die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, ist ein **Parallelogramm.** (121 und 122.)
XVIII. Ein **Viereck,** bei welchem zwei Gegenseiten gleich und parallel sind ist ein **Parallelogramm.** (123.)
XIX. In einem **Parallelogramm** halbiren sich die **Diagonalen** gegenseitig. (123.)
XX. In einem **Rechteck** sind die **Diagonalen** einander gleich. (124.)
XXI. Im **gleichseitigen Parallelogramm** (Rhombus und Quadrat) schließen die **Diagonalen** mit einander rechte Winkel ein und halbiren die vier Winkel des Parallelogramms. (125.)

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 18 und 19.
Arithmetik.

10. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als Manuscript gedruckt.

Wende alle Mühe an, wie der weise Seneca sagt, daß Du Dich durch irgend eine Gabe bemerkenswerth machest.

(Platen, Lebensregeln 19.)

Die Arithmetik.

In den ersten neun Briefen haben wir die Planimetrie bis zur Lehre vom Trapez behandelt; wir haben auch die Gründe aus einander gesetzt, welche uns bestimmten, mit diesem Theile der Mathematik zu beginnen. Bei der Planimetrie konnte das Auge sehen, womit wir uns befaßten; die Figuren bildeten immer eine anschauliche Grundlage für die Schlüsse, die wir zogen. Der Schüler konnte darum ohne große Schwierigkeit die mathematischen Operationen ausführen und in denselben eine gewisse Gewandtheit erlangen, welche ihm das Verständniß der **Arithmetik**, zu der wir uns jetzt wenden, erleichtern wird.

Mit der **Arithmetik** betreten wir ein neues Gebiet der mathematischen Wissenschaft. Der Schüler wird darum etwas über dieses Gebiet erfahren wollen, ehe er sich hineinbegiebt; er wird wünschen, daß wir ihm wenigstens in allgemeinen Andeutungen berichten, was er darin vorfindet. Leider ergiebt sich aus der Natur der Sache, daß wir diesen Wunsch nur in beschränkter Weise erfüllen können. Das Wort Arithmetik stammt aus dem Griechischen; es ist eine Abkürzung für τέχνη ἀριθμητική (Techne arithmetike), zu deutsch Zahlenwissenschaft oder Zahlenkunst. Diese Worterklärung wird indessen dem Schüler wenig nützen. Wenn er von Zahlenwissenschaft oder Zahlenkunst hört, so wird er sich durchaus keine richtige Vorstellung von der Arithmetik machen können, denn die Arithmetik beschäftigt sich nicht blos mit Ziffern und mit aus Ziffern zusammengesetzten Zahlen, sie macht vielmehr auch die Buchstaben zu Zahlen, sie behandelt Gleichungen, welche uns complicirte Rechnungen leicht und übersichtlich erscheinen lassen, sie lehrt uns außer dem Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, das Potenziren, Radiziren und Logarithmiren kennen. Doch wozu soll es dienen, wenn wir an dieser Stelle von Potenzen, von Exponenten, von Wurzeln, von Logarithmen und Logarithmanden sprechen wollten; diese Wörter sind für den Schüler noch leerer Schall, er wird sie erst begreifen lernen, wenn er sich bis zu derjenigen Stufe der mathematischen Erkenntniß durchgearbeitet hat, welche ihm das Verständniß fast von selbst vermittelt.

Führen wir den Schüler vielmehr sogleich in die Arithmetik hinein!

Lection 18.

A. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren.

§ 1. **Das Gleichheitszeichen. Die Gleichung.** Wie wir schon im ersten Briefe erklärten, wollen wir die Arithmetik so behandeln, daß sie auch für sich ohne die vorhergehenden Briefe verstanden werden kann. Wir werden deswegen Einiges wiederholen, was wir schon in den ersten Briefen auseinandergesetzt haben. Diese Wiederholung wird auch denen angenehm sein, welche unseren Erörterungen in den ersten neun Briefen mit Aufmerksamkeit gefolgt sind, denn repetitio est mater studiorum [1])!

Wenden wir uns zunächst zum Gleichheitszeichen. Es sind:

3 Meter **ebenso groß wie** 300 Centimeter;
2 Mark **ebenso viel wie** 200 Pfennige,

oder mit anderen Worten: es sind:

3 Meter **gleich** 300 Centimetern,
2 Mark **gleich** 200 Pfennigen.

Für die Wörter: **gleich, ebenso groß wie, ebenso viel wie** hat man ein besonderes Zeichen eingeführt. Man setzt dafür zwei kurze, parallel und wagerecht laufende Striche (=). Gebrauchen wir dieses Zeichen, so haben wir:

3 Meter = 300 Centimetern,
2 Mark = 200 Pfennigen,

oder wenn wir uns der gebräuchlichen Abkürzungen bedienen:

3 m [2]) = 300 cm, 2 Mk. = 200 Pf.

5 m = 500 cm heißt demnach in Worten: 5 Meter sind gleich 500 Centimetern, oder 5 Meter sind ebenso groß wie 500 Centimeter.

4 Mk. = 400 Pf. wird gesprochen: 4 Mark sind gleich 400 Pfennigen, oder 4 Mark sind ebenso viel wie 400 Pfennige.

Aufgaben. Wie spricht man: 4 Mandeln = 60 Stück, 8 m = 800 cm, 3 Mk. = 300 Pf.?

Zwei Größen, welche durch ein Gleichheitszeichen mit einander verbunden sind, nennt man eine **Gleichung.** 5 m = 500 cm, 4 Mk. = 400 Pf. sind daher Gleichungen. Bei einer Gleichung wird die **rechte** und die **linke Seite** unterschieden. In 5 m = 500 cm ist 5 m die linke und 500 cm die rechte Seite. Die **rechte** und die **linke** Seite einer Gleichung darf man mit einander **vertauschen.** Statt 5 m = 500 cm darf man setzen 500 cm = 5 m, denn es ist dem Sinne nach einerlei, ob man sagt: 5 Meter sind gleich 500 Centimetern, oder 500 Centimeter sind gleich 5 Metern.

§ 2. **Das Addiren.** Wie wir bereits auf Seite 12 erwähnt haben, kommt das Wort **addiren** von dem lateinischen Zeitworte addere, zu deutsch: **hinzugeben, hinzufügen** her. In der That! man addirt, wenn man eine Zahl zu einer andern, einen Winkel zu einem andern, eine Anzahl Meter zu einer andern Anzahl Meter hinzufügt. Statt des Wortes addiren, braucht man auch den Ausdruck **zusammenzählen.** 3 zu 7 addiren heißt gerade so viel wie: 3 und 7 zusammenzählen.

Schon auf Seite 47 bemerkten wir, daß man nur gleichartige, aber nicht auch ungleichartige Größen zu einander addiren könne. Man kann 2 Schock mit 5 Schock, 7 Fuß mit 9 Fuß, 4 Monate mit 6 Monaten, aber nicht 6 Regimenter Soldaten mit 5 Leuchtkäfern oder 6 Teller mit 20 Secunden zusammenzählen.

Wenn man die drei Zahlen 3, 8 und 9 zu einander addirt (mit einander zusammenzählt), so pflegt man zu sagen: Es ist

3 **und** 8 **und** 9 gleich 20,

oder wenn man statt „und“ das lateinische **„plus“** verwendet: Es ist

3 **plus** [1]) 8 **plus** 9 gleich 20.

Für „und“ sowie für „plus“ hat man als mathematisches Zeichen ein aufrecht stehendes Kreuz (+) eingeführt; und zwar wird dieses Kreuz (+) ein **Pluszeichen** genannt.

Setzen wir für „und“ resp. „plus“ ein + und für gleich ein =, so wird aus

---

[1]) Frei übersetzt: Uebung macht den Meister!
[2]) m ist die Abkürzung für Meter, cm für Centimeter, Mk. für Mark, Pf. für Pfennig.

[1]) plus kommt aus dem Lateinischen und heißt zu deutsch mehr.

3 und 8 und 9 gleich 20,
oder 3 plus 8 plus 9 gleich 20,
der mathematische Ausdruck:

$$3 + 8 + 9 = 20,$$

und wenn wir die Zahlen näher an einander rücken,

$$3+8+9=20.$$

$4 + 5 + 6 = 15$ heißt also in Worten:
4 und 5 und 6 ist gleich 15,
oder 4 plus 5 plus 6 ist gleich 15.

$13 + 25 + 20 = 58$ spricht man:
13 und 25 und 20 ist gleich 58,
oder 13 plus 25 plus 20 ist gleich 58.

Aufgaben. Wie wird gesprochen:
$7 + 9 = 16$, $3 + 6 + 10 = 19$,
$4 + 9 + 3 = 16$, $2 + 4 + 5 + 1 = 12$,
$25 + 25 = 50$?

§ 3. Die Summanden. Die Summe.

Es sei uns die Aufgabe gestellt, die Zahlen 3, 15 und 2 zu addiren; wenn wir die Addition ausführen, erhalten wir als Resultat 20, denn es ist:

$$3 + 15 + 2 = 20.$$

Gegeben sind uns bei dieser Additionsaufgabe die drei Zahlen 3, 15 und 2, sie sollen zusammengezählt werden.

Gesucht dagegen wird das Resultat, die Zahl 20.

Die **gegebenen Größen** nennt man bei einem Additionsexempel die **Summanden**[1]), jede einzelne von ihnen einen Summanden, die **gesuchte Größe** heißt die **Summe**[2]).

In der Gleichung: $3 + 15 + 2 = 20$ ist daher 3 ein Summand, 15 ein Summand und 2 ein Summand; 20 ist die Summe.

In der Gleichung: $9 + 21 + 10 = 40$ ist 9 ein Summand, 21 ein Summand, 10 ein Summand und 40 ist die Summe.

In der Gleichung: $4\,m + 6m + 8\,m = 18\,m$ ist 4 m ein Summand, 6 m ein Summand und 8 m ein Summand, 18 m ist die Summe.

Aufgaben I. Der Schüler möge bei den folgenden fünf Gleichungen die Summanden und die Summe angeben:

1) $3 + 7 + 5 = 15$, 2) $6 + 5 + 5 = 16$,
3) $4 + 7 + 3 = 14$, 4) $2m + 5m + 6m = 13m$,
5) 20 Mk. + 10 Mk. = 30 Mk.

---

[1]) Summand ist eine Abkürzung für numerus summandus, die zu summirende Zahl. [2]) Summa kommt her von summa, das Höchste, die Summe.

Bemerkung I. Im praktischen Leben sind die Summanden, welche zu einander addirt werden, gewöhnlich ein- und mehrziffrige Zahlen. In diesem Falle werden die Summanden nicht neben einander gesetzt und durch ein Pluszeichen verbunden, sondern unter einander geschrieben und dann zusammengezählt. Sehen wir uns das folgende Additionsexempel an!

412	Summand
723	Summand
74	Summand
1209	Summe.

In demselben sind die Zahlen 412, 723 und 74 die Summanden, 1209 ist die Summe. Wir können darum die Gleichung aufstellen:

$$412 + 723 + 74 = 1209.$$

Weshalb die zu addirenden Zahlen unter einander gesetzt werden und zwar in der Ordnung, welche der Schüler mechanisch erlernt hat, können wir erst lehren, wenn wir in die Lehre von den Potenzen und von den Klammern eingedrungen sind.

Aufgaben II. Der Schüler möge bei den beiden folgenden Additionsexempeln die Summanden und die Summe angeben und die Gleichungen zwischen den Summanden und der Summe aufstellen.

1)	2)
93	1075
150	317
325	6042
568	7434.

Bemerkung II. Wie wir in den ersten neun Briefen schon wiederholt erörtert haben, ist die Reihenfolge, in welcher wir die Summanden zu einander addiren, für das Resultat vollkommen gleichgiltig. In:

$$3 + 7 + 9 + 11 = 30$$

sind die Zahlen 3, 7, 9 und 11 die Summanden, 30 ist die Summe. Wenn wir die Summanden in anderer Ordnung addiren, erhalten wir als Summe auch wieder 30, es ist:

$$3 + 9 + 11 + 7 = 30,$$
$$7 + 11 + 9 + 3 = 30,$$
$$7 + 9 + 3 + 11 = 30,$$
$$9 + 11 + 3 + 7 = 30,$$

und so fort.

§ 4. Das Subtrahiren.

Das Wort **subtrahiren** ist herzuleiten von dem lateinischen Zeitwort subtrahere, das zu deutsch **abziehen**

bedeutet. Man subtrahirt, wenn man eine Größe von einer andern abzieht, oder anders ausgedrückt, wenn man eine Größe um eine andere **vermindert**.

Man kann nur gleichartige Größen zu einander addiren, ebenso kann man nur gleichartige Größen von einander subtrahiren; man kann 60 Thaler von 100 Thalern und 14 Tage von 70 Tagen, aber nicht 5 Luftballons von 12 Dragonern abziehen.

Nehmen wir an, wir zögen die Zahl 20 von der Zahl 34 ab; wir sagen dann gewöhnlich: 34 **weniger** 20 ist gleich 14, oder wenn wir für das Wort „weniger" das gleichbedeutende Wort minus setzen:

34 minus 20 ist gleich 14.

Für „weniger" resp. „minus" haben wir ein mathematisches Zeichen, einen kurzen wagerechten Strich (—), gebraucht. Man nennt diesen Strich ein **Minuszeichen.**

Wenn wir dieses Minuszeichen einführen und uns außerdem des Gleichheitszeichens bedienen, wird aus

34 weniger 20 gleich 14,
oder 34 minus 20 gleich 14,

der mathematische Ausdruck:

34 — 20 = 14,

oder wenn die Zahlen und Zeichen näher an einander gerückt werden:

34 — 20 = 14.

40 — 15 = 25 heißt demnach in Worten: 40 weniger 15 ist gleich 25 oder 40 minus 15 ist gleich 25.

17 m — 10 m = 7 m wird gesprochen: 17 Meter weniger 10 Meter sind gleich 7 Metern oder 17 Meter minus 10 Meter sind gleich 7 Metern.

Aufgaben. Was heißt in Worte gekleidet:
1) 80 — 19 = 61, 2) 70 — 16 = 54,
3) 9 Mk. — 6 Mk. = 3 Mk.,
4) 77 Pf. — 27 Pf. = 50 Pf.
5) 33 cm — 18 cm = 15 cm?

§ 5. Der Minuend, der Subtrahend und die Differenz. Wir wollen annehmen, es sei uns aufgetragen, die Zahl 50 von der Zahl 75 zu subtrahiren.

Wenn wir die Subtraction ausführen, erhalten wir als Resultat 25, denn es ist:

75 — 50 = 25.

Sehen wir jetzt zu, welche Bedeutung jede der drei Zahlen 75, 50 und 25 hat.

75 ist die **Zahl,** welche (um 50) **vermindert** werden soll; sie wird **Minuend**[1]) genannt.

50 ist die **Zahl,** welche **abgezogen** werden soll; sie heißt der **Subtrahend**[2]).

25 giebt den Unterschied zwischen den beiden Zahlen 75 und 50 an; 25 nennt man darum den Unterschied oder die **Differenz**[3]).

In der Gleichung: 90 — 30 = 60 ist 90 der Minuend, 30 der Subtrahend, 60 die Differenz.

In der Gleichung: 44 m — 11 m = 33 m ist 44 m der Minuend, 11 m der Subtrahend und 33 die Differenz.

Aufgaben I. Der Schüler nenne die Minuenden, Subtrahenden und Differenzen bei den folgenden Gleichungen:

1) 15 — 8 = 7, 2) 27 — 18 = 9,
3) 3419 — 2016 = 1403,
4) 702 — 102 = 600, 5) 18 m — 8 m = 10 m,
6) 37 cm — 27 cm = 10 cm.

Bemerkung. Wenn man eine Zahl von einer andern abzieht, pflegt man den Subtrahenden unter den Minuenden und die gesuchte Differenz unter den Subtrahenden zu stellen. Zwischen dem Subtrahenden und der Differenz wird gewöhnlich ein Strich gemacht. In dem Subtractionsexempel:

375 Minuend
216 Subtrahend
159 Differenz.

ist 375 der Minuend, 216 der Subtrahend und 159 die Differenz; man kann deswegen zwischen dem Minuenden, Subtrahenden und der Differenz die Gleichung aufstellen:

375 — 216 = 159.

Aufgaben II. Der Schüler möge bei den folgenden vier Subtractionsexempeln die Minuenden, Subtrahenden und Differenzen angeben; er möge ferner bei jedem dieser Beispiele die Gleichung zwischen dem Minuenden, dem Subtrahenden und der Differenz aufstellen.

---

[1]) Minuend ist eine Abkürzung von numerus minuendus und heißt zu deutsch eine Zahl, welche vermindert werden soll. [2]) Subtrahend ist eine Abkürzung für numerus subtrahendus und heißt zu deutsch eine Zahl, welche abgezogen werden soll. [3]) Differenz kommt her von differentia, der Unterschied; das Wort Differenz ist gebräuchlicher als das Wort Unterschied.

1) 965	2) 3817
124	625
841	3192
2) 5000	4) 623456
355	512345
4645	111111.

§ 6. Die Summe und die Differenz. In der Gleichung: $7 + 5 = 12$ erblicken wir auf der rechten Seite die Zahl 12 und auf der linken Seite die beiden Zahlen 7 und 5, welche durch ein Pluszeichen mit einander verbunden sind. Die **rechte** Seite (12) giebt uns das **Resultat** der Addition; auf der **linken** Seite ($7 + 5$) ist die Addition noch **nicht ausgeführt.** Das Pluszeichen, welches wir zwischen 7 und 5 sehen, richtet vielmehr erst an uns die **Aufforderung,** die 7 und die 5 zusammenzuzählen; es sagt uns, die 5 **soll** zu der 7 hinzugefügt werden. Die linke Seite ($7 + 5$) kann man daher einen **Imperativsatz**[1] (Befehlssatz) nennen. Wir haben nun den Auseinandersetzungen in § 3 gemäß in der Gleichung:

$$7 + 5 = 12$$

das **Resultat** der Addition, also die Zahl 12 als die **Summe** anzusehen; man bezeichnet mit dem Worte Summe aber auch die **ganze linke** Seite ($7 + 5$), welche der Zahl 12 gleich ist. Ueberhaupt versteht man unter **Summe** nicht blos das **Resultat** der Addition, sondern auch den **Imperativsatz,** welcher uns zum Addiren auffordert.

In der Gleichung:

$$3 + 8 + 7 = 18$$

wird demgemäß nicht blos 18 sondern auch $3 + 8 + 7$ als Summe bezeichnet.

In der Gleichung:

$$7\,\text{m} + 2\,\text{m} = 9\,\text{m}$$

ist nicht blos 9 m sondern auch 7 m + 2 m eine Summe.

Aehnlich wie mit der Summe steht es auch mit der **Differenz.** In der Gleichung: $13 - 7 = 6$ ist die **rechte** Seite (6) das **Resultat** der Subtraction. Auf der **linken** Seite ($13 - 7$) ist dagegen die Subtraction noch **nicht vollzogen.** Das Minuszeichen **fordert** uns vielmehr erst **auf,** 13 um 7 zu vermindern; die **linke** Seite ist daher ein **Imperativsatz** (Befehlssatz). Aehnlich wie bei der Summe nennt man nun nicht blos das fertige **Resultat** der Rechnung (6), sondern schon den **Imperativsatz** ($13 - 7$) **Differenz.**

In der Gleichung: $20 - 17 = 3$ heißt sowohl 3 wie $20 - 17$ die Differenz.

In der Gleichung: $30 - 18 = 12$ wird sowohl 12 wie $30 - 18$ die Differenz genannt.

Aufgaben. Der Schüler möge die Summe angeben

1) von 3 und 7,
2) von 12, 13 und 15,
3) von 23, 17, 28 und 33.

Er möge ferner die Differenz angeben

1) von 20 und 10, 2) von 45 und 15,
3) von 50 und 20, 4) von 25 und 17[1]),

und zwar möge er nicht das Resultat der Addition und Subtraction nennen, sondern die Imperativsätze, von denen wir vorher gesprochen haben.

§ 7. Die arithmetische Summe. Wenn wir mehrere Zahlen durch ein Pluszeichen mit einander verbinden, entsteht eine Summe, setzen wir zwischen zwei Zahlen, von denen die erste größer ist als die zweite, ein Minuszeichen, so erhalten wir eine Differenz.

$8 + 9 + 7 + 6 + 3$ ist eine Summe,
$100 - 20$ ist eine Differenz.

Betrachten wir jetzt den mathematischen Ausdruck:

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4,$$

in Worten: 7 und 8 weniger 3 und 12 weniger 9 und 4,

oder wie man häufiger sagt:

7 plus 8 minus 3 plus 12 minus 9 plus 4.

In diesem Ausdruck sind sowohl Plus- wie Minuszeichen vertreten; wir wollen einen Ausdruck von dieser Form eine **arithmetische Summe** nennen.

$$79 - 3 + 5 - 7,$$
ferner $30 + 10 - 1 + 5$,
sowie $10 - 8 + 15 - 2$

sind daher arithmetische Summen.

---

[1]) Imperativsatz heißt Befehlssatz von dem lateinischen imperare, das zu deutsch befehlen heißt.

[1]) 20, 45, 50 und 25 sind die Minuenden, 10, 15, 20 und 17 die Subtrahenden. Der Minuend ist selbstverständlich immer größer als der Subtrahend.

Kehren wir zu dem Ausdruck

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4$$

zurück. In demselben stehen zwischen den einzelnen Zahlen 7, 8, 3, 12, 9 und 4 Plus- und Minuszeichen, diese Zahlen heißen die **Glieder** der arithmetischen Summe

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4.$$

Ueberhaupt werden die Bestandtheile einer arithmetischen Summe, welche durch Plus- oder Minuszeichen getrennt sind, **Glieder** genannt.

In: $19 - 3 + 5 - 7$
sind die Zahlen 19, 3, 5 und 7 die Glieder.

In: $30 + 10 - 1 + 5$
sind die Zahlen 30, 10, 1 und 5 die Glieder.

In: $10 - 8 + 15 - 2$
sind die Zahlen 10, 8, 15 und 2 die Glieder.

Berechnen wir jetzt:

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4.$$

Das **Pluszeichen** (+) deutet an, daß das folgende Glied zu dem ganzen Vorhergehenden addirt werden soll.

Das **Minuszeichen** (—) fordert uns auf, das folgende Glied von dem ganzen Vorhergehenden zu subtrahiren.

Demgemäß haben wir zuerst 7 und 8 zu addiren; 7 plus 8 giebt 15. Von 15 ist 3 zu subtrahiren, 15 minus 3 ist gleich 12. Zu 12 ist 12 zu addiren; 12 plus 12 giebt 24. Von 24 haben wir 9 abzuziehen; 24 minus 9 giebt 15; zu 15 ist 4 zu addiren; 15 plus 4 ist gleich 19. Wir haben also die Zahl 19 als Resultat erhalten, und können daher die Gleichung aufstellen:

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4 = 19.$$

Auf ähnliche Weise wird der Schüler leicht finden, daß:

$19 - 3 + 5 - 7 = 14,$
ferner: $30 + 10 - 1 + 5 = 44$
und $10 - 8 + 15 - 4 = 13$ ist.

Aufgaben.

a) $4 + 6 - 7 + 9 - 3 + 2 - 1,$
b) $9 - 2 - 3 + 5 + 8 - 6,$
c) $19 - 18 + 13 - 7 + 5 - 1.$

Der Schüler sieht unter a, b und c drei arithmetische Summen. Er möge bei jeder derselben

1) die Glieder angeben,
2) die durch die Plus- und Minuszeichen angedeutete Rechnung ausführen.

Bemerkung. Ebenso wie in der Gleichung

$$5 + 8 = 13$$

nicht blos die linke Seite (5 + 8), sondern auch die rechte Seite (13) Summe genannt wird, heißt in der Gleichung

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4 = 19$$

nicht blos die linke Seite

$$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4$$

sondern auch die rechte Seite (19) eine arithmetische Summe.

Demgemäß ist auch in der Gleichung:

$$5 + 8 - 6 + 10 = 17$$

nicht blos $5 + 8 - 6 + 10$, sondern auch 17 eine arithmetische Summe.

Wir werden später noch ausführlich auf die arithmetische Summe zurückkommen und gehen jetzt zum Multipliciren über.

§ 8. Das Multipliciren. Das Wort **multipliciren** ist entstanden aus dem lateinischen Wort multiplicare, das zu deutsch **vervielfältigen** heißt. Präciser noch als durch das Wort vervielfältigen wird der Sinn der Rechenoperation, die wir mit multipliciren bezeichnen, durch den Ausdruck **mal nehmen** getroffen.

Wenn wir die Zahl 321 mit 3 multipliciren, so nehmen wir 321 3-mal, d. h. wir addiren 321 3-mal zu sich selbst. 321 mal 3 ist also gleich 321 plus 321 plus 321.

Für das Wörtchen **„mal"** ist ein **liegendes Kreuz** (×) oder ein **Punkt** (.) im Gebrauch; und zwar bedient man sich lieber des Punktes, als des liegenden Kreuzes, weil (×) zu leicht mit dem Pluszeichen (+) und mit dem in der Mathematik viel gebrauchten Buchstaben x verwechselt werden kann. Wenn wir für „mal" eins der Zeichen (×) und (.), sowie für gleich und plus die bekannten Zeichen (=) und (+) einsetzen, so wird aus

321 mal 3 gleich 321 plus 321 plus 321

$321 \times 3 = 321 + 321 + 321,$
oder $321 \,.\, 3 = 321 + 321 + 321.$

Demgemäß ist:

$1234 \times 2 = 1234 + 1234,$
oder $1234 \,.\, 2 = 1234 + 1234,$

ferner:

$$17 \times 5 = 17 + 17 + 17 + 17 + 17,$$
$$\text{oder } 17 \,.\, 5 = 17 + 17 + 17 + 17 + 17.$$

Betrachten wir die letzte Gleichung genauer! In derselben sehen wir auf der linken Seite 17 . 5; und zwar ist

17 die Zahl, welche fünfmal **zu sich selbst addirt**, also vervielfältigt werden soll 17 heißt daher der **Multiplicand**[1]).

5 dagegen zeigt an, **wie oft** wir 17 zu sich selbst addiren, also vervielfältigen sollen; 5 wird der **Multiplicator**[2]) genannt.

In der Gleichung:

$$216 \,.\, 3 = 216 + 216 + 216$$

ist 216 der Multiplicand und 3 der Multiplicator.

In der Gleichung:

$$55 \,.\, 4 = 55 + 55 + 55 + 55$$

ist 55 der Multiplicand und 4 der Multiplicator.

Der Multiplicand muß also so oft zu sich selbst addirt werden, wie der Multiplicator angiebt. Führen wir diese Addition aus, so gelangen wir zum Resultat der Multiplication, zum **Product**[3]).

Wir hatten die Gleichung:

$$216 \,.\, 3 = 216 + 216 + 216.$$

Zählen wir 216 und 216 und 216 zusammen, so ergiebt sich 648; daher ist:

$$216 \,.\, 3 = 648.$$

648 ist das Product.

In der Gleichung:

$$55 \,.\, 4 = 55 + 55 + 55 + 55 = 220$$

ist 220 das Product.

Wir bemerken noch, daß in: 216 . 3 = 648 nicht blos die rechte Seite (648), sondern auch die linke Seite (216 . 3) Product genannt wird. In 55 . 4 = 220 heißt mithin nicht blos 220, sondern auch 55 . 4 ein Product.

Bemerkung. Nach unseren Auseinandersetzungen, ist die Multiplication eine Addition mit gleichen Summanden, denn um zum Product, dem Resultat der Multiplication, zu gelangen, setzten wir den Multiplicanden so oft als Summanden, wie der Multiplicator angiebt. Nehmen wir nun an, es sei uns als Multiplicand die Zahl 2134 und als Multiplicator die Zahl 715 gegeben. Wir müßten dann, um das Product zu erhalten, 2134 715=mal zu sich selbst addiren, denn es ist:

$$2134 \,.\, 715 = 2134 + 2134 + \ldots.$$

u. s. f. bis wir 715=mal 2134 als Summanden hingestellt haben.

Ursprünglich wird man gewiß so multiplicirt haben. Die Umständlichkeit der Rechnung nöthigte aber bald dazu, eine Methode zu ersinnen, welche die Rechnung abkürzte. Wie sich der Schüler leicht denken kann, verfiel man dabei nicht sogleich auf den einfachsten Weg. Heute lernt jedes Kind in der Elementarschule, wie man zweckmäßig zwei große Zahlen mit einander multipliciren kann.

Bleiben wir bei unserm Beispiel: Um 2134 mit 715 zu multipliciren, stellt man folgende bekannte Rechnung an:

```
2134 X 715
   10670
   2134
 14938
 1525810
```

2134 ist dabei der Multicand, 715 ist der Multiplicator und 1 525 810 ist das Product.

Das Verfahren selbst brauchen nicht zu erläutern. Hat es der Schüler doch schon gewiß mehr als 1000 Mal geübt. Anders verhält es sich dagegen, wenn der Schüler uns auffordert, das Verfahren zu erklären. Wir müssen dann bekennen, daß uns noch vorläufig die Mittel fehlen, eine leicht verständliche und dabei doch vollkommen wissenschaftliche Erklärung zu geben, und müssen ihn auf ein späteres Capitel vertrösten.

Aufgaben. 1) Der Schüler möge a) 7 . 6, b) 28 . 2, c) 33 . 5 berechnen, indem er 7 in a, 28 in b und 33 in c als Multiplicanden und 6 in a, 2 in b und 5 in c als Multiplicator ansieht und den Multiplicanden so oft zu sich selbst addirt, wie der Multiplicator angiebt.

2) Er möge in den Gleichungen:

$$6 \,.\, 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24,$$
$$13 \,.\, 3 = 13 + 13 + 13 = 39,$$
$$133 \,.\, 2 = 133 + 133 = 266,$$

die Multiplicanden, Multiplicatoren und die Producte nennen.

---

[1]) Multiplicand ist eine Abkürzung von numemerus multiplicandus, die Zahl, welche vervielfältigt werden soll. [2]) Multiplicator ist ein lateinisches Wort und heißt der Vervielfältiger. [3]) Product kommt her von productum, das Hervorgebrachte.

§ 9. Die Factoren. Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen ist:

$$5 \,.\, 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

5 ist dabei der Multiplicand, 4 der Multiplicator und 20 das Product.

Betrachten wir nun 4 als Multiplicanden und 5 als Multiplicator, so erhalten wir:

$$4 \,.\, 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20,$$

also es ergiebt sich dasselbe Product, gleichviel ob wir die 5 oder die 4 als Multiplicanden ansehen.

Nehmen wir ein weiteres Beispiele:

```
a) 413 X 12        b) 12 X 413
   826                 36
   413                12
   4956               48
                      4956.
```

Bei a ist 413 der Multiplicand und 12 der Multiplicator, bei b ist 12 der Multiplicand und 413 der Multiplicator, in beiden Fällen gelangen wir zu dem Product 4956.

In der That! Wenn wir zwei Zahlen mit einander multipliciren, ist es gleichgiltig, welche derselben wir als den Multiplicator und welche wir als den Multiplicanden betrachten; das Resultat, zu dem wir kommen, bleibt immer dasselbe. Die beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, haben daher für die Rechnung die gleiche Bedeutung; man hat ihnen darum auch einen gemeinsamen Namen gegeben, indem man sie beide Factoren nennt.

In: $3 \,.\, 9 = 27$

ist 3 ein Factor, 9 ein Factor und 27 das Product. In:

$$465 \,.\, 17 = 7905$$

ist 465 ein Factor, 17 ein Factor und 7905 das Product.

Aufgaben I. Der Schüler gebe bei den Gleichungen: $3 \,.\, 4 = 12$, $7 \,.\, 9 = 63$, $200 \,.\, 7 = 1400$, $889 \,.\, 766 = 680\,974$ die Factoren und das Product an.

Bemerkung I. Man spricht von einer **benannten Zahl,** wenn zur Zahl noch der gezählte Gegenstand hinzugefügt wird. 6 Pferde, 3 Pfennige, 15 Mark, 25 Meter sind z. B. benannte Zahlen, während 6, 3, 15, 25 unbenannte Zahlen sind.

Benannte Zahlen können wir, wenn sie gleichartig sind, zu einander addiren und von einander subtrahiren; 4 Meter und 6 Meter können wir zusammenzählen, 10 Pferde können wir von 16 Pferden abziehen. Es fragt sich nun, ob wir zwei benannte Zahlen auch mit einander multipliciren können. Multiplicand kann eine benannte Zahl jedenfalls werden, denn man kann eine benannte Zahl ebenso gut vervielfältigen, wie eine unbenannte Zahl, man kann 6 Meter ebenso gut 5 mal nehmen, wie die Zahl 6; aber Multiplicator kann eine benannte Zahl nicht sein. Ein Multiplicator giebt uns an, wie oft wir den Multiplicand zu vervielfältigen haben; nun kann man eine benannte oder unbenannte Zahl zwar 8-mal, aber doch nicht 8-Pferde-mal oder 8-Centimeter-mal vervielfältigen. Es folgt daraus, daß der Multiplicator immer eine unbenannte Zahl sein muß.

Bemerkung II. In der Gleichung

$$3 \,.\, 7 = 21$$

sind die beiden Zahlen 3 und 7 die Factoren, und 21 ist das Product. Wir haben immer nur von zwei Factoren bei einem Multiplicationsexempel gesprochen; es ist aber nicht schwer, sich einen mathematischen Ausdruck zu bilden, der mehr als 2 Factoren in sich faßt.

In: $3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 8$, gesprochen: 3 mal 5 mal 7 mal 8 haben wir die 4 Factoren 3, 5, 7 und 8.

In: $4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 20 \,.\, 2$, gesprochen: 4 mal 5 mal 9 mal 20 mal 2 sind die fünf Factoren 4, 5, 9, 20, 2.

Wenn wir den Ausdruck

$$4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 20 \,.\, 2$$

berechnen, werden wir folgendermaßen verfahren. Erst werden wir $4 \,.\, 5$ berechnen; 4 mal 5 giebt 20; 20 werden wir mit 9 multipliciren; 20 mal 9 ist 180. 180 werden wir dann 20 mal nehmen; $180 \,.\, 20$ giebt 3600 und 3600 werden wir mit 2 multipliciren. $3600 \,.\, 2$ ist gleich 7200. Wir haben deshalb.

$$4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 20 \,.\, 2 = 7200.$$

In dieser Gleichung sind die Zahlen 4, 5, 9, 20, 2 die Factoren und 7200 ist das Product. Wenn wir in dem Ausdruck:

$$4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 20 \,.\, 2$$

die Factoren anders ordnen, also etwa statt

$$4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 20 \,.\, 2,$$

den Ausdruck:

$$9 \,.\, 4 \,.\, 20 \,.\, 2 \,.\, 5$$

oder $9 \,.\, 20 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 2$

setzen, so erhalten wir ganz dasselbe Product 7200;

also die **Reihenfolge,** in der wir die Factoren mit einander multipliciren, ist **gleichgiltig.**

Aufgaben II. Der Schüler möge das Product (das Resultat) berechnen, wenn uns gegeben ist:
1) 8 . 3 . 4 . 5 . 7 . 6, 2) 19 . 3 . 4 . 15,
3) 2 . 5 . 6 . 30 . 27, 4) 35 . 17 . 2 . 10,
5) 8 . 6 . 14 . 9 . 24, 6) 18 . 16 . 20 . 3.

§ 10. Das Potenziren. Wenn wir gleiche Summanden zu einander addiren, wird aus dem Addiren ein Multipliciren; wie wir wissen, ist:

$$17 + 17 + 17 + 17 = 17 . 4.$$

Wenn wir gleiche Factoren mit einander multipliciren, entsteht ebenfalls eine neue Rechnungsart, das **Potenziren,** von dem wir jetzt wenigstens die allerersten Anfänge im Anschluß an das Multipliciren behandeln wollen.

In dem Product: 3 . 3 . 3 . 3 haben wir 4 Factoren; jeder derselben ist 3; man schreibt nun gewöhnlich, um Zeit zu ersparen und eine größere Uebersicht zu gewinnen, diese 4 Dreien nicht hin, sondern setzt oben rechts an die 3 eine kleine 4; es ist demnach:

$$3 . 3 . 3 . 3 = 3^4.$$

In dem Product 3 . 3 kommt die 3 als Factor nur 2-mal vor, es ist deswegen:

$$3 . 3 = 3^2.$$

In: 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 ist die Zahl 3 6 mal als Factor vertreten, es ist darum

$$3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^6.$$

Demgemäß ist: $5 . 5 = 5^2$, denn in 5 . 5 kommt 2-mal der Factor 5 vor.

Es ist ferner:

$$5 . 5 . 5 = 5^3, \quad 5 . 5 . 5 . 5 = 5^4,$$
$$5 . 5 . 5 . 5 . 5 . 5 . 5 . 5 . 5 = 5^9,$$
$$6 . 6 = 6^2, \quad 6 . 6 . 6 = 6^3,$$
$$6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 = 6^{10},$$
$$17 . 17 = 17^2, \quad 17 . 17 . 17 = 17^3,$$
$$17 . 17 . 17 . 17 . 17 = 17^5.$$

Aufgaben I. Wie kann man schreiben für:
a) 4 . 4, b) 8 . 8 . 8, c) 10 . 10 . 10,
d) 12 . 12 . 12 . 12, e) 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9,
f) 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2?

3^4 wird gesprochen: 3 hoch 4 oder 3 zur vierten Potenz. 5^2 spricht man: 5 hoch 2, oder 5 zur zweiten Potenz. 6^3 heißt in Worten: 6 hoch 3, oder 6 zur dritten Potenz. 17^5 spricht man: 17 hoch 5, oder 17 zur fünften Potenz.

Wir rathen dem Schüler, sich an die Bezeichnungsweise 3 hoch 4, 5 hoch 2, 6 hoch 3 ꝛc. zu gewöhnen; diese Bezeichnungsweise hat den Vortheil, sehr kurz, und man kann sagen, anschaulich zu sein, denn z. B. in 3^4 steht die 4 in der That hoch an der 3.

Aufgaben II. 1) Wie wird gesprochen: a) 2^5, b) 3^7, c) 7^3, d) 15^2, e) 19^{18}, f) 13^4, g) 18^7, h) 19^5?

2) Der Schüler möge in Ziffern schreiben: a) 15 zur zweiten Potenz, b) 18 hoch 12, c) 7 hoch 9, d) 4 hoch 3, e) 10 zur fünften Potenz.

§ 11. Die Basis, der Exponent. In 2^5 nennt man 2 die **Basis**[1]), oder auch seltener den **Grundfactor,** und die 5 oben an der 2 den **Exponenten**[2]).

Es ist:

$$2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2.$$

Die **Basis** 2 ist also der Factor, welcher mit sich selbst multiplicirt werden soll; und der

Exponent 5 giebt an, wie oft die Basis 2 als Factor zu setzen ist.

In 3^7 ist 3 die Basis und 7 der Exponent, wir haben:

$$3^7 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3.$$

In 7^3 ist 7 die Basis und 3 der Exponent, es ist:

$$7^3 = 7 . 7 . 7.$$

Aufgaben. Der Schüler möge in 15^2, 19^{18}, die Basis und den Exponenten angeben; er möge ferner 4^3, 8^5, 2^6, 12^3, 16^2, 9^5 in Form eines Multiplicationsausdruckes schreiben, indem er die Basis so oft als Factor setzt wie der Exponent angiebt[3]).

§ 12. Die Potenz. Es ist

$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3.$$

Wenn wir 3 . 3 . 3 . 3 berechnen, erhalten

---

[1]) Basis kommt her von dem griechischen Worte *βάσις*, die Grundlage. [2]) Exponent ist eine Abkürzung für numerus exponens, die erklärende, die erläuternde Ziffer. [3]) Der Schüler möge z. B. $4^3 = 4 . 4 . 4$ setzen.

wir als Resultat 81, denn 3 mal 3 giebt 9, 9 mal 3 giebt 27, und 27 mal 3 giebt 81. Wir können darum die Gleichung aufstellen:

$$3^4 = 81.$$

81 nennt man in dieser Gleichung die Potenz[1]), 3 ist, wie wir schon wissen, die Basis und 4 der Exponent.

Es ist $7^3 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 = 343$,

oder kürzer: $7^3 = 343$.

In dieser Gleichung ist 343 die Potenz, 7 die Basis und 3 der Exponent.

In: $5^2 = 25$ ist 25 die Potenz, 5 die Basis und 2 der Exponent.

Die Basis möge 4, der Exponent 5 sein; die Potenz ist dann leicht zu finden; denn es ist:

$$4^5 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 1024,$$

1024 ist also die Potenz.

Die Basis sei 10, der Exponent 3, dann ist die Potenz 1000, denn wir haben:

$$10^3 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 1000.$$

Aufgaben I. 1) Der Schüler berechne, wie groß 2^2, 2^4, 2^5, 2^6,
3^2, 3^5, 3^6, 3^9,
4^2, 4^4, 4^5, 4^4,
10^2, 11^2, 12^2, 13^2,
10^4, 11^4, 12^4, 13^4,
75^2, 80^4, 95^2, 100^5 ist?

2) In Rom haben die sieben Könige 3^5 Jahre geherrscht. Wie viel Jahre regierten sie?

3) Von der Erbauung der Stadt Rom bis zur Beendigung des ersten punischeen Krieges sind 8^3 Jahre vergangen. Wie viel Jahre sind dies?

4) Der Schüler möge bei den Gleichungen

$7^2 = 49$, $5^4 = 625$,
$8^3 = 512$, $9^5 = 59049$
$6^5 = 7776$, $10^5 = 100000$

die Basis, den Exponenten und die Potenz angeben.

Bemerkung. Wir haben „Potenz" das Resultat genannt, welches wir erhalten, wenn wir die Basis so oft mit sich selbst multipliciren, wie der Exponent angiebt. In

$$8^2 = 64$$

ist also 64 die Potenz; man nennt Potenz aber auch die linke Seite 8^2; und wenn man sich genau ausdrücken will, sagt man, 8^2 ist die 2te Potenz von 8.

Demnach ist 8^3 die dritte Potenz, 8^5 die fünfte Potenz von 8.

7^2 ist die zweite Potenz von 7, und 19^8 ist die achte Potenz von 19.

Aufgaben II. Der Schüler möge die 4te Potenz von 20, die 6te Potenz von 45, die 10te Potenz von 10 hinschreiben.

4. VI. 10.

Willst Du für Edles Dich begeistern:
Mußt Dich des Vorbilds Anderer bemeistern,
Es giebt das leuchtende Beispiel Dir an
Zum höchsten Ziele die sicherste Bahn.

Lection 19.

A. Das Dividiren und die Brüche.

§ 13. Das Divisionszeichen. Das Wort **dividiren** ist herzuleiten von dem lateinischen Verbum dividere, das zu deutsch **theilen** heißt. In der That! wenn man dividirt, so theilt man eine Größe. Dividiren wir die 20 durch 5, so theilen wir die 20 in 5 gleiche Theile, deren jeder gleich 4 ist. Wir sagen dann gewöhnlich: es ist

20 **dividirt durch** 5 gleich 4.

Für **„dividirt durch"** sind als mathematisches Zeichen zwei übereinander stehende Punkte (:) in Gebrauch.

Wenn wir diese Punkte für „dividirt durch" verwenden und für „gleich" das bekannte Zeichen einsetzen, wird aus:

20 **dividirt durch** 5 gleich 4

der mathematische Ausdruck:

$$20 \quad : \quad 5 \quad = \quad 4,$$

oder wenn wir die Zeichen und Zahlen näher aneinander rücken,

$$20 : 5 = 4.$$

[1]) Potenz kommt her von dem lateinischen potens, mächtig.

60 : 12 = 5 heißt demnach in Worten:
60 dividirt durch 12 ist gleich 5.

26 : 13 = 2 wird gesprochen:
26 dividirt durch 13 ist gleich 2.

Aufgaben. Wie spricht man
28 : 4 = 7, 36 : 6 = 6,
42 : 7 = 6, 80 : 8 = 10,
90 : 15 = 6, 121 : 11 = 11?

§ 14. Der Dividend, der Divisor und der Quotient. Wenn wir 20 durch 5 dividiren, so theilen wir, wie wir schon erwähnt haben, 20 in 5 gleiche Theile, deren jeder gleich 4 ist.

In: 20 : 5 = 4

ist also 20 die Zahl, welche getheilt werden soll, man nennt sie darum den **Dividenden**[1]).

5 ist die Zahl, welche angiebt, in wie viel Theile der Dividend zu zerlegen ist; 5 wird der **Divisor**[2]) genannt.

4 ist die Zahl, welche uns sagt, wie groß jeder einzelne der 5 Theile ist; 4 heißt der **Quotient**[3]).

In 70 : 7 = 10 ist also 70 der Dividend, 7 der Divisor und 10 der Quotient.

In 24 : 4 = 6 ist 24 der Dividend, 4 der Divisor und 6 der Quotient.

Aufgaben. Der Schüler möge bei den Gleichungen: 30 : 5 = 6, 120 : 12 = 10, 300 : 30 = 10, 77 : 11 = 7, 88 : 8 = 11, 49 : 7 = 7 die Dividenden, die Divisoren und die Quotienten angeben.

Bemerkung I. Wenn der Dividend und der Divisor größere Zahlen sind, muß man ein complicirtes Verfahren anwenden, um den Quotienten zu ermitteln. Die Erklärung dieses Verfahrens, welches jeder der Schüler schon in der Volksschule erlernt hat, müssen wir auf später verschieben, wir wollen aber doch drei sogenannte Divisionsexempel bringen, um darin die Dividenden, Divisoren und Quotienten aufzusuchen.

a) 4440 : 24 = 185
24
—
204
192
—
120
120
—
—

[1]) Dividend ist eine Abkürzung von numerus dividendus, die zu theilende Zahl. [2]) Divisor ist ein lateinisches Wort und heißt „der Theiler". [3]) Quotient kommt her von quotiens, wie oft.

b) 17 | 22338 | 1314
17
—
53
51
—
23
17
—
68
68
—
—

c) 1581444 | 324
1296 | 4881
—
2854
2592
—
2624
2592
—
324
324
—
—

Diese drei Divisionsexempel führen uns die dreifache Schreibweise vor, welche in Gebrauch ist. In a ist

4440 der Dividend, d. h. die Zahl, welche getheilt werden soll,

24 der Divisor, d. h. die Zahl, welche die Anzahl der Theile angiebt, in welche der Dividend zu zerlegen ist, und

185 der Quotient, d. h. die Zahl, welche uns mit der Größe der gleichen Theile bekannt macht.

In b ist 22338 der Dividend, 17 der Divisor und 1314 der Quotient.

In c ist 1581444 der Dividend, 324 der Divisor und 4881 der Quotient.

Wir haben absichtlich bei der Erörterung der Division solche Beispiele gewählt, bei welchen der Divisor in dem Dividenden aufgeht, wie man sich auszudrücken pflegt. Die Divisionsexempel mit einem Rest können wir wissenschaftlich erst behandeln, wenn wir in die Lehre von den Brüchen eingedrungen sind.

Bemerkung II. Statt zu sagen:

30 **dividirt durch** 5 giebt 6,

gebraucht man auch die Worte:

5 **dividirt in** 30 giebt 6.

Man stellt dabei den Divisor (5) vor und den Dividenden (30) nach.

Gegen eine solche Ausdrucksweise ist im Allgemeinen nichts einzuwenden. Wenn aber manche Volksschullehrer für „dividirt in" dasselbe Zeichen (:) verwenden, welches für „dividirt durch" in Gebrauch ist, so richten sie eine Verwirrung an, welche, wie die Erfah-

rung zeigt, oft schädlich werden kann. Es wäre darum besser, wenn der Ausdruck: „dividirt in" vollständig vermieden würde.

§ 15. **Das Product des Divisors und Quotienten und der Dividend.** Wie von uns in § 14 auseinandergesetzt wurde, sagt uns der Divisor, in wie viel gleiche Theile wir den Dividenden zu zerlegen haben; und der Quotient giebt an, wie groß jeder einzelne dieser Theile ist. Der Quotient ist also so oft im Dividenden enthalten, wie der Divisor anzeigt.

In: $30 : 6 = 5$

ist der Quotient 5 6-mal in 30 enthalten, d. h., es ist

$$5 \cdot 6 = 30.$$

In: $70 : 7 = 10$

ist der Quotient 10 7-mal in 70 enthalten, d. h. es ist:

$$10 \cdot 7 = 70.$$

Ueberhaupt ist immer der Quotient multiplicirt mit dem Divisor gleich dem Dividenden, oder anders ausgedrückt: **das Product des Quotienten und des Divisors ist gleich dem Dividenden.**

In der Bemerkung I des vorigen Paragraphen haben wir unter a, b und c 3 Divisionsexempel gebracht.

In a ist 185 der Quotient, 24 der Divisor und 4440 der Dividend, wir haben daher:

$$185 \cdot 24 = 4440.$$

In b ist 1314 der Quotient, 17 der Divisor und 22338 der Dividend, folglich ist:

$$1314 \cdot 17 = 22338.$$

In c ist 4881 der Quotient, 324 der Divisor und 1581444 der Dividend, mithin:

$$4881 \cdot 324 = 1581444.$$

Der Schüler kann sich durch gewöhnliche Multiplication leicht überzeugen, daß die letzten drei Gleichungen richtig sind.

Aufgaben. Durch Division erhalten wir die Gleichungen:

$$619476 : 76 = 8151,\quad 1185352 : 122 = 9716,$$
$$56 : 7 = 8,\quad 54 : 9 = 6,\quad 91 : 13 = 7,$$
$$108 : 12 = 9.$$

Der Schüler möge bei allen diesen Gleichungen das Product des Quotienten und Divisors gleich dem Dividenden setzen.

§ 16. **Andeutungen über die Brüche.** Wir haben bisher für die Worte: „dividirt durch" als mathematisches Zeichen zwei Punkte (:) gesetzt, es giebt aber noch ein anderes Zeichen, welches wir bereits im ersten Briefe erwähnt haben. Es ist dies der sogenannte **Bruchstrich** (—); $\frac{25}{5}$ bedeutet ebenso gut 25 dividirt durch 5, wie 25 : 5.

Der Dividend 25 wird über den Bruchstrich, der Divisor 5 unter den Bruchstrich gestellt.

$\frac{36}{6}$ bedeutet: 36 dividirt durch 6, 36 ist der Dividend und 6 der Divisor.

$\frac{40}{4}$ bedeutet: 40 dividirt durch 4, 40 ist der Dividend und 4 der Divisor.

Einen Ausdruck von der Form: $\frac{25}{5}$, $\frac{36}{6}$, $\frac{40}{4}$ nennt man einen **Bruch**.

Ein Bruch ist also ein nicht ausgerechnetes Divisionsexempel.

Der **Dividend,** der über dem Bruchstrich steht, heißt auch der **Zähler,** der **Divisor,** der unter dem Strich steht, der **Nenner** des Bruches

In: $\frac{25}{5}$ ist 25 der Zähler und 5 der Nenner.

In: $\frac{36}{6}$ ist 36 der Zähler und 6 der Nenner.

In: $\frac{40}{4}$ ist 40 der Zähler und 4 der Nenner.

Wir kommen auf die Brüche noch sehr ausführlich zurück.

Aufgaben. 1) Was bedeutet: $\frac{35}{5}$, $\frac{28}{7}$, $\frac{48}{6}$, $\frac{90}{15}$, $\frac{63}{9}$?

2) Durch welche Zahlen wird bei den vorstehenden Brüchen der Zähler, durch welche Zahlen der Nenner repräsentirt?

B. Die Grundsätze.

§ 17. Die Grundsätze sind für die Planimetrie ebenso wichtig, wie für die Arithmetik. Deswegen haben wir sie in den früheren Briefen

schon so ausführlich behandelt, daß wir die Schüler, welche uns vom ersten Briefe ab gefolgt sind, durch Wiederholung aller Erörterungen ermüden würden; wir bringen darum nur den Wortlaut der Grundsätze mit wenigen Bemerkungen und verweisen auf Brief 1 Seite 12 bis 17. Die einzelnen Grundsätze numeriren wir, damit wir später leichter auf sie hinweisen können. Die Grundsätze heißen:

I. **Jede Größe ist sich selbst gleich,** daher $5 = 5$, $10 = 10$.

II. **Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind.**

Es ist:

$$4 + 7 = 11$$
$$5 + 6 = 11,$$

folglich auch:

$$4 + 7 = 5 + 6.$$

Für das Wort „folglich", und für ähnliche Wörter, wie „also", „mithin", „daher" wird gewöhnlich ein Strich gezogen, der die dritte Gleichung von der zweiten trennt.

Wenn wir diesen Strich machen, erhalten wir:

$$\begin{array}{c} 4 + 7 = 11 \\ 5 + 6 = 11 \\ \hline 4 + 7 = 5 + 6. \end{array}$$

III. **Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.**

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 2\text{ m} = 200\text{ cm} \\ 3\text{ m} = 300\text{ cm} \\ \hline 2\text{ m} + 3\text{ m} = 200\text{ cm} + 300\text{ cm} \\ \text{oder } 5\text{ m} = 500\text{ cm}. \end{array}$$

IV. **Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.**

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 5\text{ Mk.} = 500\text{ Pf.} \\ 3\text{ Mk.} = 300\text{ Pf.} \\ \hline 5\text{ Mk.} - 3\text{ Mk.} = 500\text{ Pf.} - 300\text{ Pf.} \\ \text{oder } 2\text{ Mk.} = 200\text{ Pf.} \end{array}$$

V. **Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.**

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 5\text{ m} = 500\text{ cm} \\ 3 \quad = 3 \\ \hline 5\text{ m} \,.\, 3 = 500\text{ cm} \,.\, 3 \\ \text{oder } 15\text{ m} = 1500\text{ cm}. \end{array}$$

VI. **Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.**

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 6\text{ m} = 600\text{ cm} \\ 2 \quad = 2 \\ \hline 6\text{ m} : 2 = 600\text{ cm} : 2 \\ \text{oder } 3\text{ m} = 300\text{ cm}. \end{array}$$

C. Der Zusammenhang der vier Species.

§ 18. Das Addiren und das Subtrahiren. Unter den **vier Species** versteht man das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren. Wir wollen untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen den vier Species besteht.

Betrachten wir zunächst das Addiren und das Subtrahiren! Diese beiden Rechenoperationen verhalten sich zu einander wie das Hinzufügen und das Abziehen, wie das Geben und Nehmen; sie bilden einen vollkommenen Gegensatz. + und —, d. h. das Zeichen der Addition und Subtraction, sind daher **entgegengesetzte Zeichen.** Wenn man erst etwas giebt und dann dasselbe wieder nimmt oder erst etwas nimmt und dann dasselbe wieder giebt, so ist der Erfolg gerade so, als wenn man nichts gegeben und nichts genommen hätte. Ebenso wie mit dem Geben und Nehmen steht es mit dem Addiren und dem Subtrahiren. Die Operationen des Addirens und Subtrahirens heben sich gegenseitig auf. Es ist z. B.

$$28 + 5 - 5 = 28$$
und $$28 - 5 + 5 = 28.$$

Aufgaben. Wie groß ist:

1) $36 - 15 + 15$. 2) $29 + 3 - 3$. 3) $76 + 55 - 55$. 4) $85 - 17 + 17 + 12 - 12$?

§ 19. Die Subtractionsprobe und die Folgerungen daraus. Es ist:

$$15 - 8 = 7.$$

15 ist der Minuend, 8 der Subtrahend und 7 die Differenz.

Nach Grundsatz I ist ferner:

$$8 = 8.$$

Stellen wir die beiden Gleichungen untereinander und behandeln sie nach Grundsatz III, so erhalten wir:

$$\begin{array}{r} 15 - 8 = 7 \\ 8 = 8 \\ \hline 15 - 8 + 8 = 7 + 8 \\ \text{oder } 15 = 7 + 8, \end{array}$$

d. h. der Minuend 15 ist also ebenso groß wie die Differenz 7 und der Subtrahend 8 zusammen.

In: $$19 - 13 = 6$$

ist 19 der Minuend, 13 der Subtrahend und 6 die Differenz. Auch hier ist:

$$19 = 6 + 13.$$

Verallgemeinern wir unsere Beobachtung, so erhalten wir den Satz:

der Minuend ist ebenso groß wie die Differenz und der Subtrahend zusammen, oder mit andern Worten:

Der Minuend ist gleich der Summe der Differenz und des Subtrahenden.

Dieser Satz ist die Grundlage für die sogenannte **Subtractionsprobe**. Wenn man zwei Zahlen von einander subtrahirt hat, er**probt** man, ob die Rechnung richtig ausgeführt ist, indem man zusieht, ob die Differenz und der Subtrahend zusammen addirt den Minuenden ergeben.

Schreiben wir uns ein Subtractionsexempel hin!

4819	Minuend
3718	Subtrahend
1101	Differenz.

Wir wollen die Differenz und den Subtrahenden addiren:

Differenz	1101
Subtrahend	3718
Minuend	4819

Wie der Schüler sieht, ergiebt sich der Minuend, wenn wir den Subtrahenden und die Differenz zusammenzählen. Man kann daraus schließen, daß die Subtraction richtig ausgeführt ist.

Aufgaben. 1) In deu Gleichungen: $13 - 2 = 11$, $22 - 10 = 12$, $37 - 18 = 19$, $45 - 15 = 30$, $55 - 14 = 41$, $10 - 5 = 5$, möge der Schüler die Differenz und den Subtrahenden durch ein Pluszeichen verbinden und die so entstandene Summe gleich dem Minuenden setzen.

2) Er möge 723 von 1000, 5555 von 6000, 37814 von 90352 subtrahiren und er**proben,** ob die Summe der Differenz und des Subtrahenden gleich dem Minuenden ist.

Wir wollen an die vorigen Auseinandersetzungen noch einige Erwägungen anschließen. Haben wie Gleichung:

$$\text{I.}\quad 18 - 12 = 6, \text{ so ist auch:}$$
$$\text{II.}\quad 12 + 6 = 18.$$

Die erste Gleichung stellt uns eine Subtraction, die zweite eine Addition dar. — Wir wollen die erste Gleichung eine Additions-, die zweite eine Subtractionsgleichung nennen.

18 ist in der ersten Gleichung der Minuend,
in der zweiten „ die Summe.
12 ist in der ersten Gleichung der Subtrahend,
in der zweiten „ ein Summand.
6 ist in der ersten Gleichung die Differenz,
in der zweiten „ ein Summand.

Also bei der Verwandlung der Subtractionsgleichung in eine Additionsgleichung wird aus dem Minuenden die Summe und aus dem Subtrahenden und der Differenz werden Summanden; mit anderen Worten, es entspricht:

dem Minuenden die Summe,	dem Subtrahenden ein Summand,	der Differenz ein Summand.

Bei allen Subtractionsexempeln ist der Minuend und der Subtrahend gegeben, gefragt wird nach der Differenz (in der ersten Gleichung nach der 6). Bei allen Additionsexempeln sind die beiden Summanden gegeben, gefragt wird nach der Summe (in der zweiten Gleichung nach der 18).

Wenn wir hinter die gegebenen Größen einen Punkt und hinter die gesuchte Größe Fragezeichen setzen, so können wir uns den Zusammenhang der Additions- und Subtractionsgleichung durch folgendes Schema klar machen:

Minuend.	Subtrahend.	Differenz?
Summe?	Summand.	Summand.

§ 20. **Das Multipliciren und das Dividiren.** In diesem Paragraphen wollen wir untersuchen, wie die beiden Rechenoperationen, die man als multipliciren und dividiren bezeichnet, mit einander zusammenhängen

Multipliciren heißt vervielfältigen und dividiren heißt theilen. Vervielfältigen ist das Gegentheil von theilen; multipliciren und dividiren sind darum zwei entgegengesetzte Rechenoperationen. Stellen wir uns vor, wir nähmen eine Größe 6 mal; es wird sich dann ein Resultat ergeben, welches die multiplicirte Größe 6 mal in sich enthält; theilen wir dieses Resultat in 6 gleiche Theile, so werden wir darum die multiplicirte Größe wieder enthalten. Erst haben wir die Größe mit 6 multiplicirt, dann durch 6 dividirt, und das Resultat war die ursprüngliche Größe; die Operationen des Multiplicirens und Dividirens haben sich gegenseitig vernichtet.

Wenden wir uns zu bestimmten Beispielen. **15** multiplicirt mit 6 giebt 90, 90 dividirt durch 6 giebt wieder **15**,

in Zeichen $15 . 6 : 6 = 15$,

oder wenn wir uns statt der zwei Punkte (:) des andern Divisionszeichens bedienen, haben wir:

$$\frac{15 . 6}{6} = 15.$$

50 multiplicirt mit 8 giebt 400, 400 dividirt durch 8 giebt wieder **50**,

in Zeichen: $50 . 8 : 8 = 50$,

oder $\frac{50 . 8}{8} = 50$.

Ebenso ist:

$$\frac{13 . 5}{5} = 13, \quad \frac{17 . 9}{9} = 17,$$

$$\frac{21 . 12}{12} = 21, \quad \frac{91 . 13}{13} = 91.$$

Aufgaben. Wie groß ist:

$$\frac{55 . 4}{4}, \quad \frac{75 . 8}{8}, \quad \frac{53 . 9}{9},$$

$$\frac{81 . 13}{13}, \quad \frac{93 . 18}{18}, \quad \frac{107 . 12}{12}?$$

§ 21. **Die Divisionsprobe.** Wir haben bereits in § 15 den Satz bewiesen, daß

das Product des Quotienten und Divisors gleich dem Dividenden sei.

Dieser Satz ist die Grundlage der sogenannten **Divisionsprobe.** Hat man eine Zahl durch eine andere dividirt, so er**probt** man die Richtigkeit der Rechnung, indem man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt. Ergiebt sich bei der Multiplication der Dividend, so kann man daraus schließen, daß die Division richtig ausgeführt ist. Betrachten wir folgendes Divisionsexempel!

```
15 | 4875 | 325.
     45
     --
      37
      30
      --
       75
       75
       --
       —
```

In demselben ist 325 der Quotient, 15 der Divisor und 4875 der Dividend. Wir wollen den Quotienten mit dem Divisor multipliciren:

```
 325 . 15
 --------
 1625
  325
 ----
 4875
```

Wie wir sehen, ergiebt sich als Product der Dividend 4875; wir erkennen daraus, daß wir vorher die Division richtig ausgeführt haben.

Aus dem Satze, daß

der Quotient multiplicirt mit dem Divisor gleich dem Dividenden sei,

können wir noch weitere Folgerungen ziehen.

Haben wir die Gleichung:

$$72 : 6 = 12,$$

so muß nach diesem Satze auch

$$6 . 12 = 72 \text{ sein.}$$

Die erste Gleichung wollen wir eine Divisions-, die zweite Gleichung eine Multiplicationsgleichung nennen.

72	ist in der ersten Gleichung	der Dividend,		
	in der zweiten „	das Product.		
6	ist in der ersten Gleichung	der Divisor,		
	in der zweiten „	ein Factor.		
12	ist in der ersten Gleichung	der Quotient,		
	in der zweiten „	ein Factor.		

Also bei der Umwandlung der Divisionsgleichung in die Multiplicationsgleichung wird aus dem Dividenden das Product, aus dem Divisor ein Factor und aus dem Quotienten ein Factor,

mit andern Worten, es entspricht:

dem Dividenden das Product	dem Divisor ein Factor	dem Quotienten ein Factor.

Bei der Division wird der Quotient, bei der Multiplication das Product gesucht. Setzen wir hinter die gesuchten Größen ein Fragezeichen, so können wir uns die Umwandlung der Divisionsgleichung in die Multiplicationsgleichung auf folgende Weise klar machen:

Dividend.	Divisor.	Quotient?
Product?	Factor.	Factor.

Aufgaben. Der Schüler möge sich ins Gedächtniß zurückrufen, was man unter einem

Divisor zu verstehen hat, und dann die Frage beantworten, ob der Divisor auch eine benannte Zahl sein darf.

Er möge sich ferner überlegen, weshalb zum Dividenden eine benannte Zahl gewählt werden kann, und wie der Quotient ausfällt, wenn der Dividend eine benannte Zahl ist.

C. Recapitulation.

Mit dem zehnten Briefe haben wir ein neues Gebiet der Mathematik, die Arithmetik, betreten. Wir hielten es für ungeeignet, lange Erörterungen über den Inhalt dieser neuen Disciplin vorauszuschicken, weil wir von Begriffen hätten reden müssen, die für den Schüler ohne Sinn waren; wir zogen es vielmehr vor, ohne lange Vorrede den Schüler in die Arithmetik hineinzuführen.

In der **achtzehnten** und auch in der **neunzehnten Lection** mußten wir mancherlei wiederholen, was wir schon im ersten Briefe ausführlich besprochen hatten, weil wir die arithmetischen Briefe so einrichten wollen, daß sie auch von denjenigen verstanden werden können, welche sich nicht mit den ersten neun Briefen beschäftigt haben. So wiederholten wir, was man unter einem Gleichheitszeichen und unter einer Gleichung versteht. Wir behandelten auch noch einmal das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren, und zwar gingen wir bei der Besprechung dieser vier Rechenoperationen viel ausführlicher zu Werke als im ersten Briefe, weil das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren das Fundament der gesammten Arithmetik ist.

Wir wollen dem Schüler nicht alle Einzelheiten vorführen, die wir in der achtzehnten und neunzehnten Lection besprochen haben, sondern uns mehr auf den Stoff beschränken, der im zehnten Briefe neu hinzukam und in den ersten neun Briefen noch nicht behandelt worden ist. An die Lehre von der Multiplication schlossen wir als neu die Lehre vom Potenziren; wir erörterten, was ein Grundfactor oder eine Basis, ein Exponent und eine Potenz zu bedeuten habe. Die Behandlung des Dividirens veranlaßte uns, kurz auf die Brüche einzugehen und zu zeigen, daß ein Bruch seiner mathemaischen Bedeutung nach nichts sei, als ein nicht ausgeführtes Divisionsexempel. Auf das Dividiren ließen wir kurz eine Wiederholung der Grundsätze folgen; wir fügten aber hinzu, daß die Schüler, welche vom zehnten Briefe ab unsere Unterrichtsbriefe benutzen, gut thun werden, die wichtige Lehre von den Grundsätzen nach dem ersten Briefe aufmerksam zu studiren. Wir gingen darauf dazu über, den Zusammenhang der sogenannten vier Species zu besprechen; und zwar wandten wir uns zunächst der Addition und Subtraction und dann der Multiplication und Division zu.

Wir zeigten, wie eine Subtractionsgleichung in in eine Additionsgleichung und eine Divisionsgleichung in eine Multiplicationsgleichung umgewandelt werden könne, und daß sich darauf die sogenannte Subtractions- und Divisionsprobe aufbaue; zugleich besprachen wir, daß bei dieser Umwandlung der Minuend zur Summe, der Subtrahend zum Summanden, die Differenz zum Summanden, der Dividend zum Product, der Divisor zum Factor und der Quotient zum Factor werde; damit schlossen wir die neunzehnte Lection.

D. Wiederholungsfragen.

1) Wie viel Seiten haben wir bei einer Gleichung zu unterscheiden, und welchen Satz haben wir über die Seiten einer Gleichung aufgestellt?
2) Was versteht man unter einem Summanden und unter einer Summe?
3) Was ist ein Minuend, ein Subtrahend und eine Differenz?
4) Wird in den Gleichungen $3 + 7 = 10$, $33 - 11 = 22$ blos die rechte oder auch die linke Seite Summe resp. Differenz genannt?
5) Wie haben wir einen mathematischen Ausdruck von der Form $33 - 10 + 11 - 2$ bezeichnet?
6) Was versteht man unter den Gliedern einer arithmetischen Summe?
7) Welches Zeichen für das Wort: „mal" ist in der Mathematik am gebräuchlichsten?
8) Was ist ein Multiplicand, und was ist ein Multiplicator?
9) Mit welchem Worte wird sowohl der Multiplicand wie der Multiplicator bezeichnet?
10) Heißt in der Gleichung $3 . 7 = 21$ nur die rechte Seite 21 oder auch die linke Seite $3 . 7$ ein Product?
11) Kann man benannte Zahlen zu einander addiren und von einander subtrahiren?
12) Kann man zwei benannte Zahlen mit einander multipliciren?
13) Was versteht man beim Potenziren unter einer Basis, was unter einem Exponenten?
14) Nennt man in der Gleichung: $3^3 = 27$ nur 27 oder auch 3^3 Potenz?
15) Welche beiden Zeichen haben wir für: „dividirt durch" kennen gelernt?
16) Was ist ein Dividend, was ein Divisor, was ein Quotient?
17) Wie wird bei einem Bruche der Dividend, wie der Divisor genannt?
18) Wie heißen die sechs Grundsätze, welche wir im zehnten Briefe angeführt haben?
19) Auf welchen Satz stützt sich die sogenannte Subtractionsprobe?
20) Was wird aus dem Minuenden, aus dem Subtrahenden und der Differenz, wenn wir die Subtractionsgleichung in eine Additionsgleichung verwandeln?
21) Auf welchen Satz stützt sich die Divisionsprobe?
22) Was wird aus dem Dividenden, aus dem Divisor und aus dem Quotienten, wenn die Divisionsgleichung in eine Multiplicationsgleichung umgewandelt wird?
23) Wie wird = gesprochen?
24) Wie spricht man +, wie spricht man − ?
25) Welche beiden Zeichen haben wir für das Wort „mal" kennen gelernt?

Verlag der Bibliographisch-artistischen Anstalt (M. Hildebrandt) zu Leipzig. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 20 und 21.
Arithmetik.

Als
Manuscript
gedruckt.

11. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Schön ist das Blühen, doch schöner die Blume,
Die abfällt und den Samen reich verstreut.
(Leop. Schäfer.)

Lection 20.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 18.

Abschnitt A. § 1. Die Gleichungen werden der Reihe nach gesprochen:

4 Mandeln sind gleich 60 Stück,
oder 4 Mandeln sind ebenso viel wie 60 Stück.
8 Meter sind gleich 800 Centimetern,
oder 8 Meter sind ebenso groß wie 800 Centimeter.
3 Mark sind gleich 300 Pfennigen,
oder 3 Mark sind ebenso viel wie 300 Pfennige.

§ 2. Die Gleichungen spricht man der Reihe nach:

7 und 9 ist gleich 16,
oder 7 plus 9 ist gleich 16.
3 und 6 und 10 ist gleich 19,
oder 3 plus 6 plus 10 ist gleich 19.
4 und 9 und 3 ist gleich 16,
oder 4 plus 9 plus 3 ist gleich 16.
2 und 4 und 5 und 1 ist gleich 12,
oder 2 plus 4 plus 5 plus 1 ist gleich 12.
25 und 25 ist gleich 50,
oder 25 plus 25 ist gleich 50.

§ 3 Aufgaben I. In Gl.[1]) 1 sind die Zahlen 3, 7 und 5 die Summanden, 15 ist die Summe. In Gl. 2 sind die Zahlen 6, 5 und 5 die Summanden, 16 ist die Summe. In Gl. 3 sind die Zahlen 4, 7 und 3 die Summanden, 14 ist die Summe. In Gl. 4 sind die benannten Zahlen 2 m, 5 m, und 6 m die Summanden, 13 m ist die Summe. In Gl. 5 sind die benannten Zahlen 20 Mk. und 10 Mk. die Summanden, 30 Mk. ist die Summe.

Aufgaben II. Bei dem ersten Additionsexempel sind die Zahlen 93, 150 und 325 die Summanden, 568 ist die Summe; bei dem zweiten Additionsexempel sind die Zahlen 1075, 317 und 6042 die Summanden, 7434 ist die Summe.

§ 4. Die Gleichungen werden der Reihe nach gesprochen:

1) 80 weniger 19 ist gleich 61,
oder 80 minus 19 ist gleich 61.
2) 70 weniger 16 ist gleich 54,
oder 70 minus 16 ist gleich 54.
3) 9 Mark weniger 6 Mark sind gleich 3 Mark,
oder 9 Mark minus 6 Mark sind gleich 3 Mark.
4) 77 Pfennige weniger 27 Pfennige sind gleich 50 Pfennigen.
oder 77 Pfennige minus 27 Pfennige sind gleich 50 Pfennigen.
5) 33 Centimeter weniger 18 Centimeter sind gleich 15 Centimetern,
oder 33 Centimeter minus 18 Centimeter sind gleich 15 Centimetern.

§ 5. **Aufgaben** I. In Gl. 1 ist 15 der Minuend, 8 der Subtrahend und 7 die Differenz. In Gl. 2 ist 27 der Minuend, 18 der Subtrahend und 9 die Differenz. In Gl. 3 ist 3419 der Minuend, 2016 der Subtrahend und 1403 die Differenz. In Gl. 4 ist 702 der Minuend, 102 der Subtrahend und 600 die Differenz. In Gl. 5 ist 18 m der Minuend, 8 m der Subtrahend und 10 m die Differenz. In Gl. 6 sind 37 cm der Minuend, 27 cm der Subtrahend und 10 cm die Differenz.

[1]) Gl. ist eine Abkürzung für „Gleichung".

Aufgaben II. Bei dem ersten Subtractionsexempel ist 965 der Minuend, 124 der Subtrahend und 841 die Differenz, bei dem zweiten ist 3817 der Minuend, 625 der Subtrahend und 3192 die Differenz, beim dritten ist 5000 der Minuend, 355 der Subtrahend und 4645 die Differenz, beim vierten ist 623 456 der Minuend, 512 345 der Subtrahend und 111 111 die Differenz.

§ 6. $3 + 7$, $12 + 13 + 15$, $23 + 17 + 28 + 33$; ferner: $20 - 10$, $45 - 15$, $50 - 20$, $25 - 17$.

§ 7. Es ist:

a) $4 + 6 - 7 + 9 - 3 + 2 - 1 = 10$,
die Zahlen 4, 6, 7, 9, 3, 2 und 1 sind die Glieder.

Ferner ist:

b) $9 - 2 - 3 + 5 + 8 - 6 = 11$,
die Zahlen 9, 2, 3, 5, 8 und 6 sind die Glieder.

Endlich ist:

c) $19 - 18 + 13 - 7 + 5 - 1 = 11$,
die Zahlen 19, 18, 13, 7, 5 und 1 sind die Glieder.

§ 8. 1) Es ist:

a) $7 . 6 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$,
b) $28 . 2 = 28 + 28 = 56$,
c) $33 . 5 = 33 + 33 + 33 + 33 + 33 = 165$.

2) In der ersten Gl. ist 6 der Multiplicand, 4 der Multiplicator und 24 das Product, in der zweiten Gl. ist 13 der Multiplicand, 3 der Multiplicator und 39 ist das Product, in der dritten Gl. ist 133 der Multiplicand, 2 der Multiplicator und 266 das Product.

§ 9. **Aufgaben** I. In der Gl.: $3 . 4 = 12$ ist 3 ein Factor, 4 ein Factor, und 12 ist das Product; in der Gl.: $7 . 9 = 63$ ist 7 ein Factor, 9 ein Factor und 63 das Product; in der Gl.: $200 . 7 = 1400$, ist 200 ein Factor, 7 ein Factor, und 1400 ist das Product; in der Gl.: $889 . 766 = 680974$ ist 889 ein Factor, 766 ein Factor und 680 974 ein Product.

Aufgaben II. Wir erhalten als Product (Resultat): 1) $8 . 3 . 4 . 5 . 7 . 6 = 20160$,
2) $19 . 3 . 4 . 15 = 3420$,
3) $2 . 5 . 6 . 30 . 27 = 48600$.
4) $35 . 17 . 2 . 10 = 11900$,
5) $8 . 6 . 14 . 9 . 24 = 145152$,
6) $18 . 16 . 20 . 3 = 17280$.

§ 10. **Aufgaben** I. a) 4^2, b) 8^3, c) 10^3, d) 12^4, e) 9^6, f) 2^{11}.

Aufgaben II. 1. a) 2 hoch 5, oder 2 zur fünften Potenz, b) 3 hoch 7, oder 3 zur siebenten Potenz, c) 7 hoch 3, oder 7 zur dritten Potenz, d) 15 hoch 2, oder 15 zur zweiten Potenz, e) 19 hoch 18, oder 19 zur achtzehnten Potenz, f) 13 hoch 4 oder 13 zur vierten Potenz, g) 18 hoch 7, oder 18 zur siebenten Potenz, h) 19 hoch 5, oder 19 zur fünften Potenz.

2. a) 15^2, b) 18^{12}, c) 7^9, d) 4^3, e) 10^5.

§ 11. In 15^2 ist 15 die Basis und 2 der Exponent, in 19^{18} ist 19 die Basis und 18 der Exponent; ferner ist:

$4^3 = 4 . 4 . 4$, $8^5 = 8 . 8 . 8 . 8 . 8$,
$2^6 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2$, $12^3 = 12 . 12 . 12$,
$16^2 = 16 . 16$, $9^5 = 9 . 9 . 9 . 9 . 9$.

§ 12. Es ist:
$2^2 = 2 . 2 = 4$, $2^4 = 2 . 2 . 2 . 2 = 16$,
$2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$,
$2^6 = 2 . 2 . 2 \; 2 . 2 . 2 = 64$, $3^2 = 3 . 3 = 9$,
$3^5 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243$,
$3^6 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 729$,
$3^9 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 19683$,
$4^2 = 4 . 4 = 16$, $4^4 = 4 . 4 . 4 . 4 = 256$,
$4^5 = 4 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1024$, $10^2 = 10 . 10 = 100$,
$11^2 = 11 . 11 = 121$, $12^2 = 12 . 12 = 144$,
$13^2 = 13 . 13 = 169$, $10^4 = 10 . 10 . 10 . 10 = 10000$,
$11^4 = 11 . 11 . 11 . 11 = 14641$,
$12^4 = 12 . 12 . 12 . 12 = 20736$,
$13^4 = 13 . 13 . 13 . 13 = 28561$,
$75^2 = 75 . 75 = 5625$, $80^4 = 40960000$,
$95^2 = 95 . 95 = 9025$,
$100^5 = 100 . 100 . 100 . 100 . 100 = 10\,000\,000\,000$.

2) Die sieben Könige haben in Rom 243 Jahre regiert.

3) Von der Erbauung der Stadt Rom bis zur Beendigung des ersten punischen Krieges sind 512 Jahre vergangen.

4) In: $7^2 = 49$ ist 7 die Basis, 2 der Exponent und 49 die Potenz. In: $8^3 = 512$ ist 8 die Basis, 3 der Exponent und 512 die Potenz. In: $6^5 = 7776$ ist 6 die Basis, 5 der Exponent und 7776 die Potenz. In: $5^4 = 625$ ist 5 die Basis, 4 der Exponent und 625 die Potenz. In: $9^5 = 59049$ ist 9 die Basis, 5 der Exponent und 59049 die Potenz. In: $10^5 = 100000$ ist 10 die Basis, 5 der Exponent und 100000 die Potenz.

Aufgaben II. 20^4, 45^6, 10^{10}.

Section 19.

Abschnitt A. § 13. Man spricht die Gleichungen der Reihe nach: 28 dividirt durch 4 ist gleich 7, 42 dividirt durch 7 ist gleich 6, 90 dividirt durch 15 ist gleich 6, 36 dividirt durch 6 ist gleich 6, 80 dividirt durch 8 ist gleich 10, 121 dividirt durch 11 ist gleich 11.

§ 14. In der ersten Gl. ist 30 der Dividend, 5 der Divisor und 6 der Quotient. In der zweiten Gl. ist 120 der Dividend, 12 der Divisor und 10 der Quotient. In der dritten Gl. ist 300 der Dividend, 30 der Divisor und 10 der Quotient. In der vierten Gl. ist 77 der Dividend, 11 der Divisor und ~~11~~ 7 der Quotient. In der fünften Gl. ist 88 der Dividend, 8 der Divisor und 11 der Quotient.

§ 15. Es ist: $8151 . 76 = 619476$,
$9716 . 122 = 1185352$, $8 . 7 = 56$, $9 . 6 = 54$,
$13 . 7 = 91$. $12 . 9 = 108$.

§ 16. 1) Die fünf Brüche bedeuten der Reihe nach: 35 dividirt durch 5, 28 dividirt durch 7, 48 dividirt durch 6, 90 dividirt durch 15, 63 dividirt durch 9.

2) Im ersten Bruch ist 35 der Zähler und 5 der Nenner, im zweiten Bruch ist 28 der Zähler und 7 der Nenner, im dritten Bruch ist 48 der Zähler und 6 der Nenner, im vierten Bruch ist 90 der Zähler und 15 der Nenner, im fünften Bruch ist 63 der Zähler und 9 der Nenner.

§ 18. 1) $36 - 15 + 15 = 36$,
2) $29 + 3 - 3 = 29$, 3) $76 + 55 - 55 = 76$,
4) $85 - 17 + 17 + 12 - 12 = 85$.

§ 19. 1) Es ist der Reihe nach:

$11 + 2 = 13,\quad 12 + 10 = 22,\quad 19 + 18 = 37,$
$30 + 15 = 45,\quad 41 + 14 = 55,\quad 5 + 5 = 10.$

2. a)

1000	Minuend,
723	Subtrahend,
277	Differenz.
277	Differenz,
723	Subtrahend,
1000	Minuend.

b)

6000	Minuend,
5555	Subtrahend,
445	Differenz.
445	Differenz,
5555	Subtrahend,
6000	Minuend.

c)

90352	Minuend,
37814	Subtrahend,
51538	Differenz.

52538	Differenz,
37814	Subtrahend,
90352	Minuend.

§ 20. Es ist:

$$\frac{55 \,.\, 4}{4} = 55,\quad \frac{75 \,.\, 8}{8} = 75,\quad \frac{53 \,.\, 9}{9} = 53,$$

$$\frac{81 \,.\, 13}{13} = 81,\quad \frac{93 \,.\, 18}{18} = 93,\quad \frac{107 \,.\, 12}{12} = 107.$$

§ 21. Der Divisor ist die Zahl, welche uns angiebt, in wie viel Theile der Dividend zu zerlegen ist; der Divisor darf deshalb keine benannte Zahl sein, denn man kann einen Dividenden wohl in 8 Theile, aber doch nicht in 8-Kühe-Theile zerlegen.

Der Dividend ist die Größe, welche getheilt werden soll; getheilt werden kann sowohl eine unbenannte wie eine benannte Zahl. 15 getheilt durch 5 giebt 3, 15 Pferde getheilt durch 5 giebt 3 Pferde. Der Dividend kann also von einer unbenannten und von einer benannten Zahl dargestellt werden.

Wie wir schon sagten, giebt 15 Pferde getheilt durch 5, 3 Pferde; 15 Pferde ist der Dividend, 3 Pferde der Quotient; also wenn der Dividend eine benannte Zahl ist, muß auch der Quotient eine benannte Zahl sein.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 19 gestellten Fragen.

1) Wir haben bei einer Gleichung die linke und die rechte Seite zu unterscheiden; beide Seiten dürfen mit einander vertauscht werden. 2) Summanden werden die Zahlen genannt, welche zusammengezählt werden sollen. Das Resultat des Zusammenzählens heißt die Summe. 3) Bei der Subtraction nennt man die Zahl, welche vermindert werden soll, den Minuenden, die Zahl, welche abgezogen werden soll, den Subtrahenden und das Resultat, welches den Unterschied zwischen dem Minuenden und dem Subtrahenden angiebt, die Differenz. 4) In der Gleichung: $3 + 7 = 10$ wird sowohl die rechte Seite 10 als auch die linke Seite $3 + 7$ Summe genannt. In der Gleichung: $33 - 11 = 22$ heißt sowohl die rechte Seite 22 als auch die linke Seite $33 - 11$ die Differenz. 5) Einen mathematischen Ausdruck von der Form: $33 - 10 + 11 - 2$ haben wir als arithmetische Summe bezeichnet. 6) Die Bestandtheile einer arithmetischen Summe, welche durch ein Plus- oder Minuszeichen von einander getrennt sind, heißen Glieder. 7) Ein Punkt (.). 8) Mit dem Worte: Factor. 9) Der Multiplicand ist die Zahl, welche vervielfältigt oder, genauer ausgedrückt, zu sich selbst addirt werden soll. Der Multiplicator ist die Zahl, welche anzeigt, wie oft wir den Multiplicanden zu sich selbst zu addiren, oder genauer ausgedrückt als Summanden zu setzen haben. 10) In der Gleichung: $3 \,.\, 7 = 21$ heißt sowohl die rechte Seite 21 wie die linke Seite $3 \,.\, 7$ ein Product. 11) Benannte Zahlen können zu einander addirt und von einander subtrahirt werden. 12) Zwei benannte Zahlen kann man nicht mit einander multipliciren; der Multiplicator muß vielmehr immer eine unbenannte Zahl sein. 13) Beim Potenziren ist die Basis der Factor, welcher mit sich selbst multiplicirt werden soll; und der Exponent giebt an, wie oft die Basis als Factor zu setzen ist. 14) In der Gleichung: $3^3 = 27$ wird nicht nur 27, sondern auch 3^3 eine Potenz genannt. 15) Die beiden übereinanderstehenden Punkte und den Bruchstrich (: und —). 16) Der Dividend ist die Zahl, welche getheilt werden soll; der Divisor ist die Zahl, welche die Anzahl der Theile angiebt, in die der Dividend zu zerlegen ist, und der Quotient ist die Zahl, welche uns sagt, wie groß jeder einzelne dieser Theile ist. 17) Bei einem Bruche heißt der Dividend Zähler und der Divisor Nenner. 18) Siehe § 17. 19) Auf den Satz: Die Summe der Differenz und des Subtrahenden ist gleich dem Minuenden. 20) Aus dem Minuenden wird die Summe, aus dem Subtrahenden und der Differenz werden Summanden. 21) Auf den Satz: Das Product des Divisors und des Quotienten ist gleich dem Dividenden. 22) Aus dem Dividenden wird das Product, aus dem Divisor und dem Quotienten werden Factoren. 23) = wird gesprochen: gleich, ebenso groß, ebenso viel. 24) + spricht man: und oder plus; — spricht man: weniger oder minus. 25) (X) und (.).

C. Die Buchstabenrechnung.

§ 22. Die Buchstaben als Zahlen.

Wenn wir bisher bei unseren Auseinandersetzungen Zahlen verwendeten, haben wir immer von bestimmten Zahlen gesprochen, etwa von der 3, von der 13, von der 27, von der 1000; es ist aber nicht schwer zu zeigen, daß der Inhalt der Arithmetik uns zwingt, zu allgemeinen Zahlenbezeichnungen fortzuschreiten. Nehmen wir an, wir wollten in mathematischen Zeichen den Satz aussprechen:

Die Zahl 15 mit 3 multipliciren ist dasselbe wie[1]) eine Summe bilden, in welcher 15 als Summand 3-mal vorkommt,

so sind wir nicht in Verlegenheit. Die Gleichung:

$$15 \,.\, 3 = 15 + 15 + 15$$

giebt in der Zeichensprache den Inhalt des Satzes vollkommen an.

Anders steht es aber, wenn wir den Satz verallgemeinern und sagen:

Eine **beliebige Zahl** mit 3 multipliciren

[1]) Das mathematische Zeichen für die Worte: **dasselbe wie** ist das Gleichheitszeichen (=).

ist dasselbe wie eine Summe bilden, in welcher diese Zahl 3-mal als Summand vorkommt.

Für **„eine beliebige Zahl"** haben wir noch kein Zeichen kennen gelernt; es ist also nothwendig, daß wir uns ein Zeichen schaffen. Wir könnten dafür einen Vogel oder ein Insect hinzeichnen, denn für die Sache selbst ist es vollkommen gleichgiltig, wie das Zeichen aussieht; es wird aber am zweckmäßigsten sein, wenn wir der hergebrachten mathematischen Sitte folgen und als Zeichen für **„beliebige Zahl"** einen **der ersten lateinischen Buchstaben** verwenden, also etwa ein a.

Das a soll also eine Zahl und zwar eine ganz beliebige Zahl sein; a kann sowohl 3 wie 4, wie 8, wie 10, wie 500 bedeuten.

a . 3 bedeutet demnach: Eine beliebige Zahl mal 3, oder eine beliebige Zahl multiplicirt mit 3, und

$$a + a + a$$

bedeutet eine Summe, in welcher die beliebige Zahl a dreimal als Summand vorkommt.

Wir können daher den obigen Satz durch die Gleichung:

$$a \cdot 3 = a + a + a$$

ausdrücken.

Statt a hätten wir auch die Buchstaben b oder c oder d oder e 2c. wählen können; alle diese Buchstaben bedeuten in der Arithmetik eine beliebige oder wenigstens nicht fest bestimmte Zahl. Ja häufig wird es nöthig sein, zwei oder drei von diesen Buchstaben zu gebrauchen. Denken wir uns, wir sollten in mathematischen Zeichen den Satz aussprechen:

Zwei Zahlen zusammen sind gleich einer dritten Zahl,

so werden wir am besten a als die eine, b als die zweite und c als die dritte Zahl ansehen; der Satz ließe sich dann durch die Gleichung:

$$a + b = c \text{ ausdrücken.}$$

Nehmen wir a = 3, b = 4 an, so ist

$$a + b = 3 + 4 = 7;$$

c ist daher auch gleich 7.

Ist a = 12, b = 25, so erhalten wir:

$$a + b = 12 + 25 = 37;$$

c ist mithin in diesem Falle 37.

c ist also keine fest bestimmte Zahl, (in dem einen Falle war c = 7, in dem andern c = 37); aber c ist auch nicht beliebig, sondern hängt von den Werthen ab, welche wir den beliebigen Zahlen a und b geben. Wir haben darum mit Absicht oben erklärt, daß durch Buchstaben nicht blos beliebige Zahlen bezeichnet werden, sondern auch solche Zahlen, welche nicht einen ganz bestimmten festen Zahlenwerth haben.

§ 23. Die Multiplication bei Buchstaben.

Wie wir soeben erörtert haben, bedeuten die Buchstaben a, b, c, d 2c. Zahlen; wenn wir diese Zahlen mit 5 multipliciren, so ergeben sich die Producte:

$$a \cdot 5, \quad b \cdot 5, \quad c \cdot 5, \quad d \cdot 5 \text{ 2c.},$$

oder anders geschrieben:

$$5 \cdot a, \quad 5 \cdot b, \quad 5 \cdot c, \quad 5 \cdot d;$$

und zwar wird die letzte Schreibweise gewöhnlich gewählt, d. h.: Wenn wir ein Product aus zwei Factoren haben, von welchen der eine Factor eine bestimmte Zahl, der zweite Factor ein Buchstabe ist, so schreibt man die bestimmte Zahl zuerst. Wir wollen zugleich noch hinzufügen, daß in diesem Falle zwischen den Factoren der Punkt (.) d. i. das Zeichen der Multiplication in der Regel fortgelassen wird. Statt:

$$5 \cdot a, \quad 5 \cdot b, \quad 5 \cdot c, \quad 5 \cdot d,$$

setzt man also einfach:

$$5a, \; 5b, \; 5c, \; 5d.$$

Umgekehrt bedeutet: 7a[1]) so viel wie 7 . a, 10b so viel wie 10 . b und 27c so viel wie 27 . c.

Setzen wir a = 6[2]) b = 9, c = 3, d = 12, und e = 1, so ist:

$$\begin{aligned} 7a &= 7 \cdot a = 7 \cdot 6 = 42, \\ 10b &= 10 \cdot b = 10 \cdot 9 = 90, \\ 5c &= 5 \cdot c = 5 \cdot 3 = 15, \\ 5d &= 5 \cdot d = 5 \cdot 12 = 60, \\ 27e &= 27 \cdot e = 27 \cdot 1 = 27. \end{aligned}$$

---

[1]) 7a, 10b, 27c wird einfach gesprochen: sieben a, zehn b, siebenundzwanzig c. 7 . a, 10 . b, 27 . c spricht man: sieben mal a, zehn mal b, siebenundzwanzig mal c. [2]) Wir könnten uns auch folgendermaßen ausdrücken: Setzen wir für a die Zahl 6, für b die Zahl 9 2c. a, b, c, d, e sind beliebige Zahlen, wir können daher diese Einsetzungen vornehmen.

Aufgaben I. Der Schüler möge

$$\begin{array}{lllll} 3a, & 9a, & 12a, & 30a, & 15a, \\ 5b, & 17b, & 8b, & 13b, & 25b, \\ 4c, & 6c, & 10c, & 14c, & 18c, \\ \text{und } 3d, & 5d, & 7d, & 9d, & 11d \end{array}$$

berechnen, wenn wir erst:

$a = 3,\quad b = 2,\quad c = 4,\quad d = 5,$
darauf: $a = 2,\quad b = 1,\quad c = 7,\quad d = 8,$
und zuletzt $a = 4,\quad b = 4,\quad c = 6,\quad d = 12$
annehmen.

Da die Buchstaben Zahlen bedeuten, kann man auch zwei und mehr Buchstaben mit einander multipliciren.

$a \,.\, b$ bedeutet und wird gesprochen: a multiplicirt mit b oder a mal b,

$c \,.\, d$ spricht man: c multiplicirt mit d oder c mal d,

$a \,.\, b \,.\, c$ heißt in Worten: a mal b mal c,

$d \,.\, e \,.\, f$ heißt in Worten: d mal e mal f.

Auch in diesem Falle wird das „Malzeichen“, der Punkt (.), gewöhnlich fortgelassen, und statt $a \,.\, b$ schreibt man ab, statt $c \,.\, d$ einfach cd und statt $d \,.\, e \,.\, f$ einfach def.

Umgekehrt bedeutet auch acf dasselbe wie $a \,.\, c \,.\, f$ und bce dasselbe wie $b \,.\, c \,.\, e$.

Setzen wir $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 1$, $e = 9$, $f = 7$, so ist:

$$\begin{aligned} ab &= a \,.\, b = 3 \,.\, 2 = 6, \\ ef &= e \,.\, f = 9 \,.\, 7 = 63, \\ de &= d \,.\, e = 1 \,.\, 9 = 9, \\ abc &= a \,.\, b \,.\, c = 3 \,.\, 2 \,.\, 4 = 24, \\ ade &= a \,.\, d \,.\, e = 3 \,.\, 1 \,.\, 9 = 27, \\ cef &= c \,.\, e \,.\, f = 4 \,.\, 9 \,.\, 7 = 252. \end{aligned}$$

Aufgaben II. Der Schüler möge

$$\begin{array}{llll} ab, & ad, & af, & bd, \\ be, & bf, & ce, & ef, \\ abf, & acf, & bef, & def, \\ cef, & cde, & adf, & bdf \end{array}$$

berechnen, indem er erst: $a = 1$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 7$, $e = 11$, $f = 12$, und dann: $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 10$, $f = 14$ setzt.

Bemerkung I. Wie wir in § 9 des zehnten Briefes gezeigt haben, ist die Reihenfolge, in der wir die Factoren mit einander multipliciren, vollkommen gleichgiltig. Es ist:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 6 = 7 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 6 = 3 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 6.$$

Da die Buchstaben auch Zahlen sind, findet dieser Satz auch auf Buchstaben Anwendung. Es ist:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = a \,.\, c \,.\, b \,.\, d = c \,.\, b \,.\, d \,.\, a,$$

oder wenn wir die Malzeichen nicht schreiben:

$$abcd = acbd = cbda.$$

Ebenso ist:

$$d \,.\, e \,.\, f \,.\, h = efhd = ehfd = fhed.$$

Bemerkung II. Wie wir in § 10 ausführlich besprochen haben, wird aus dem Multipliciren ein Potenziren, wenn die Factoren gleich sind, welche wir mit einander multipliciren. So ist z. B.:

$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 3^5,$$

und 3^5 wird gesprochen: 3 zur fünften Potenz oder 3 hoch 5.

Setzen wir statt der 3 das Zeichen für eine beliebige Zahl, d. h. einen der kleinen lateinischen Buchstaben, etwa a, so haben wir

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^5.$$

Demnach ist: $a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^8$, $b \,.\, b = b^2$, $b \,.\, b \,.\, b = b^3$, $c \,.\, c \,.\, c \,.\, c = c^4$, $e \,.\, e \,.\, e \,.\, e \,.\, e \,.\, e = e^6$, $f \,.\, f \,.\, f \,.\, f \,.\, f \,. = f^5$,

a^5 [1]) spricht man: a zur fünften Potenz, oder a hoch 5, b^2 spricht man: b zur zweiten Potenz, oder b hoch 2, c^4 wird gesprochen: c zur vierten Potenz, oder c hoch 4.

In a^5 ist a die Basis und 5 der Exponent, in b^2 ist b die Basis und 4 der Exponent.

Aufgaben III. 1) Der Schüler möge angeben, wie c^3, c^5, e^5, e^7, f^2, f^9 gesprochen wird, er möge 2) bei den Potenzen a^3, b^4, c^7, e^2 die Basis und den Exponenten nennen; er möge 3) die Potenzen a^6, b^7 c^8 gleich einem Multiplicationsausdruck setzen und ihren Zahlenwerth feststellen, indem er erst $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, dann $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ annimmt.

§ 24. Die Division bei Buchstaben.

Ebenso wie das Multipliciren können wir auch das Addiren, Subtrahiren und Dividiren auf Buchstaben ausdehnen; auf das Addiren und Subtrahiren kommen wir bei Gelegenheit der erneuten Behandlung der arithmetischen Summe zurück. dagegen wollen wir jetzt schon das Dividiren eingehender besprechen.

$6 : 3$ oder $\frac{6}{3}$ bedeutet: 6 dividirt durch 3.

---

[1]) a^5 wird auch die fünfte Potenz von a, b^2 die zweite Potenz von b, c^4 die vierte Potenz von c genannt.

a : 5 oder $\frac{a}{5}$ bedeutet demnach: a dividirt durch 5.

c : d oder $\frac{c}{d}$ bedeutet: c dividirt durch d.

In 6 : 3 ist 6 der Dividend und 3 der Divisor, und

in a : 5 ist daher a der Dividend und 5 der Divisor.

In c : d ist c der Dividend und d der Divisor.

$\frac{6}{3}$ wird ein Bruch genannt; der Dividend 6 heißt in demselben der Zähler und der Divisor 3 heißt der Nenner.

Ebenso ist $\frac{a}{5}$ ein Bruch, und zwar ist a der Zähler und 5 der Nenner.

Auch $\frac{c}{d}$ ist ein Bruch; c ist der Zähler und d ist der Nenner.

Setzen wir a = 10, c = 20, d = 4, so wird a : 5 = 10 : 5 = 2; ebenso $\frac{a}{5} = \frac{10}{5} = 2$; ferner c : d = 20 : 4 = 5 und ebenso $\frac{c}{d} = \frac{20}{4} = 5$.

Nehmen wir a = 15, c = 45 und d = 5 an, so wird

a : 5 = 15 : 5 = 3, und ebenso $\frac{a}{5} = \frac{15}{5} = 3$, ferner: c : d = 45 : 5 = 9, und ebenso $\frac{c}{d} = \frac{45}{5} = 9$.

Aufgaben I. 1) Der Schüler möge in den mathematischen Ausdrücken: b : 4, c : 6, d : e, e : f den Dividenden und Divisor nennen; er möge ferner in: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{e}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{10}$, $\frac{a}{7}$ den Zähler und den Nenner angeben.

2) Er möge $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, e : f berechnen, indem er a = 20, b = 10, c = 30, d = 6, e = 24, f = 8 annimmt.

Bemerkung. Betrachten wir Brüche wie $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{e}$, so finden wir über und unter dem Bruchstrich eine einfache Zahl oder einen einfachen Buchstaben. Es ist aber leicht, sich Brüche zu bilden, bei welchen Zähler oder Nenner oder auch Zähler und Nenner zugleich nicht durch einfache Zahlen und Buchstaben, sondern durch zusammengesetzte Ausdrücke repräsentirt werden. In:

$\frac{3+9}{4}$ ist der Zähler (3 + 9) eine Summe, zusammengesetzt aus den beiden Summanden 3 und 9. In:

$\frac{a+b}{7}$ ist ebenfalls der Zähler (a + b) eine Summe, zusammengesetzt aus den Summanden a und b. In:

$\frac{2 . 8}{4}$ ist der Zähler 2 . 8 ein Product, zusammengesetzt aus den Factoren 2 und 8.

In: $\frac{c . d}{e}$ ist der Zähler ebenfalls ein Product, zusammengesetzt aus den beiden Factoren c und d.

In: $\frac{e}{a . c}$ ist der Nenner ein Product, zusammengesetzt aus den beiden Factoren a und c.

Wollen wir $\frac{3+9}{4}$ berechnen, so werden wir zuerst 3 und 9 zusammenzählen, 3 und 9 giebt zusammen 12, 12 werden wir dann, wie der Bruchstrich andeutet, durch 4 dividiren. 12 dividirt durch 4 ist gleich 3.

In Zeichen haben wir: $\frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

Nehmen wir a = 5, b = 16, c = 2, d = 6, e = 3 an, so haben wir:

$$\frac{a+b}{7} = \frac{5+16}{7} = \frac{21}{7} = 3,$$
$$\frac{2+b}{e} = \frac{2+16}{2} = \frac{18}{3} = 6,$$
$$\frac{c . d}{e} = \frac{2 . 6}{3} = \frac{12}{3} = 4,$$
$$\frac{b-1}{a} = \frac{16-1}{5} = \frac{15}{5} = 3,$$
$$\frac{b-d}{a} = \frac{16-6}{5} = \frac{10}{5} = 2,$$
$$\frac{d}{a-e} = \frac{6}{5-3} = \frac{6}{2} = 3,$$
$$\frac{b-1}{e} = \frac{16-1}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge $\frac{a+8}{d}$,

$\frac{b+4}{5}$, $\frac{e+d}{a}$, $\frac{b+e}{d}$, $\frac{20}{c+2}$, $\frac{30}{b-1}$, $\frac{a.b}{c}$, $\frac{c.e}{d}$ berechnen, wenn $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$, $d = 3$, $e = 9$ gegeben ist.

8. VI. 10.

§ 25. Die Summe bei Buchstaben. Betrachten wir die Summe: $a + a + a + a + a$! In derselben zählen wir a 5-mal zusammen; wir nehmen mit anderen Worten das a 5-mal. Es ist daher: $a + a + a + a + a = 5 . a$, oder wenn wir das Malzeichen fortlassen:

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

Ebenso ist:

$a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$, $b + b = 2b$, $d + d + d + d + d + d = 6d$, $2a + 2a = 4a$, $5a + 3a = 8\,a$, $7b + 19b + 3b = 29b$.

In der Summe:

$$7a + 6a + 5b + 9b + 2b$$

sind die Buchstaben a und b vertreten, wir werden darum die a und die b für sich zusammenzählen und erhalten:

$$7a + 6a + 5b + 9b + 2b = 13a + 16b.$$

Ebenso ist:

$4a + 5a + 3b + 4b + 5c + 5c = 9a + 7b + 10c$ und $5c + 4c + 3e + 4e + 2f = 9c + 7e + 2f$.

In der Summe:

$$2a + 3b + 4a + 6b + 2a$$

kommen die a und die b vermischt vor; der erste Summand ist 2a, der dritte 4a, der fünfte 2a; zwischen den verschiedenen a stehen die b. Wir werden hier auch die a und die b zusammenzählen und erhalten dann die Gleichung:

$$2a + 3b + 4a + 6b + 2a = 8a + 9b.$$

In ähnlicher Weise ist:

$4c + 3d + 2c + 5d + 8c = 14c + 8d$,
$2c + 3e + 5e + 9c = 11c + 8e$.

Aufgaben. Der Schüler möge bei folgenden Summen die Summanden addiren:

1) $a + a + a + a + a + a$.
2) $b + b + b$.
3) $c + c + c + c$.
4) $7a + 8a + 5b + 9b$.
5) $5e + 3e + 13f + 17f$.
6) $6a + 5b + 9a + 6b + 4b$.
7) $4c + 5e + 6f + 7e + 8f + 9c$.
8) $8a + 19f + 17e + 14f + 15e + 10a$.

§ 26. Die arithmetische Summe. Bei all den Ausdrücken, welche wir im vorigen Paragraphen berechnet haben, waren die einzelnen Buchstaben resp. die Vielfachen der Buchstaben durch Pluszeichen von einander getrennt; wir hatten also immer eine regelrechte Summe vor uns, in welcher die durch das Pluszeichen getrennten Bestandtheile Summanden waren. Anders verhält es sich, wenn wir uns einen Ausdruck bilden, in welchem sowohl Plus- wie Minuszeichen vorkommen. In:

$$5a + 3a - 4a + 9a - 8a$$

wird nicht blos addirt, die Minuszeichen deuten vielmehr an, daß auch subtrahirt werden soll. Wir können daher den Ausdruck:

$$5a + 3a - 4a + 9a - 8a$$

nicht als Summe und 4a oder 8a als Summanden auffassen. Vielmehr, wie wir schon in § 7 auseinandersetzten, als wir noch mit reinen Zahlen operirten, nennt man einen Ausdruck, in welchem sowohl Plus- als auch Minuszeichen vorkommen, eine arithmetische Summe und die einzelnen durch Plus- und Minuszeichen von einander getrennten Bestandtheile Glieder. Gerade wie:

$7 + 8 - 3 + 12 - 9 + 4$ ist auch
$5a + 3a - 4a + 9a - 8a$

eine arithmetische Summe; 5a, 3a, 4a, 9a, 8a sind die Glieder.

In der arithmetischen Summe:

$$5c + 8c - 4c + 9c - 12c + 3c$$

sind 5c, 8c, 4c, 9c, 12c und 3c die Glieder.

In: $30c + 40c - 20c + 8a - 2a$

sind 30c, 40c, 20c, 8a und 2a die Glieder.

In: $29d - 15d + 4e + 6e - 13e$

sind 29d, 15d, 4e, 6e und 13e die Glieder.

Aufgaben I. Der Schüler möge bei den folgenden arithmetischen Summen die Glieder angeben:

1) $13a + 7b - 8a + 9b - 3b$,
2) $4m + 8n + 15m - 4n - 12m$,
3) $30p + 40q - 29p + 2q - 6q$.

Bemerkung I. Wir haben von Gliedern nur gesprochen, wenn wir arithmetische Ausdrücke hatten, bei welchen die Plus- und die Minuszeichen gemischt auftraten; man pflegt aber auch bei einer reinen Summe die Summanden Glieder zu nennen. Auch in:

$$6a + 4b + 3a + 5b$$

heißen die einzelnen Summanden 6a, 4b, 3a und 5b Glieder; ebenso werden in:

$$7c + 13d + 5c + 15d + 2c$$

die Summanden 7c, 13d, 5c, 15d und 2c Glieder genannt.

Bemerkung II. Die Glieder, welche wir bei den arithmetischen Summen bisher kennen gelernt haben, waren entweder Buchstaben oder ein Vielfaches von Buchstaben. Schon wenn wir ein solches Vielfache wie: 3c, 12d, 15e betrachten, wissen wir, daß es, genau genommen, ein Multiplicationsausdruck ist; heißt doch, wie wir in § 23 erörtert haben, 3c soviel wie 3 . c, 12d soviel wie 12 . d, 15e soviel wie 15 . e[1]).

Aber auch andere Multiplications- und auch Divisionsausdrücke können Glieder sein. In:

$$4a + a.b.c + 17.18.b.c + \frac{a}{c} + \frac{a.b}{c}$$

haben wir die fünf Glieder:

$$4a,\quad a.b.c,\quad 17.18.b.c,\quad \frac{a}{c},\quad \frac{a.b}{c}$$ [2]).

a . b . c ist ein Product aus den Factoren a, b und c.

17 . 18 . b . c ist ein Product aus den Factoren 17, 18, b und c.

$\frac{a}{c}$ ist ein Divisionsausdruck in Form eines Bruches; a ist der Dividend oder Zähler und c der Divisor oder Nenner.

$\frac{a.b}{c}$ ist auch ein Bruch; und zwar ist in demselben der Zähler a . b ein Product.

In: $c.d + \frac{c}{d} + \frac{c.f}{a} - \frac{a.d}{b}$

haben wir die vier Glieder

$$c.d,\quad \frac{c}{d},\quad \frac{c.f}{a} \text{ und } \frac{a.d}{b}.$$

1) Setzen wir $c = 5$, $d = 8$, $e = 7$, so haben wir:

$$3c = 3.c = 3.5 = 15,$$
$$12d = 12.d = 12.8 = 96,$$
$$7e = 7.e = 7.7 = 49.$$

2) Der Schüler möge immer bedenken, daß nur die Plus- und Minuszeichen die Glieder von einander trennen; es ist daher 4a, ebenso a . b . c, ebenso 17 . 18 . b . c, ebenso $\frac{a}{c}$ und $\frac{a.b}{c}$ ein Glied für sich, denn zwischen diesen Ausdrücken stehen in unserm Falle Pluszeichen.

Aufgaben II. Der Schüler möge bei den arithmetischen Summen.

1) $e.f + \frac{e}{f} + \frac{a.c}{b} + \frac{b.c}{c} - \frac{e}{f}.$

2) $m.n + \frac{a}{d} + \frac{m.n}{p} - r.q.$

3) $a.b.c - e.f.g + m.n.q$

die Glieder nennen.

§ 27. Die Berechnung arithmetischer Summen. Wie eine arithmetische Summe, deren einzelne Glieder Zahlen sind, berechnet werden kann, haben wir bereits in § 7 erörtert. In:

$$13 + 27 - 7 + 5 - 10 + 11 - 6$$

werden wir erst 27 zu 13 addiren, 27 und 13 giebt 40. Von 40 werden wir 7 subtrahiren, 40 weniger 7 giebt 33. Zu 33 werden 5 addiren, 33 und 5 giebt 38. Von 38 ist 10 zu subtrahiren; 38 weniger 10 giebt 28. Zu 28 haben wir 11 zu addiren, 28 und 11 giebt 39; und von 39 ist 6 zu subtrahiren, 39 weniger 6 giebt 33. Daher können wir die Gleichung aufstellen:

$$13 + 27 - 7 + 5 - 10 + 11 - 6 = 33.$$

Es ist aber nicht nöthig, daß wir die Additionen und Subtractionen gerade in der Reihenfolge vollziehen, welche wir soeben innegehalten haben, wir können vielmehr eine beliebige[1]) Reihenfolge wählen:

Z. B. könnten wir von 13 erst 7 abziehen (13 weniger 7 giebt 6), zu 6 dann die 27 addiren (27 und 6 giebt 33), von 33 die 10 subtrahiren (33 weniger 10 giebt 23), zu der 23 darauf die 5 und 11 addiren und von dem Resultat die 6 abziehen. (23 und 5 und 11 giebt 39, 39 weniger 6 giebt 33). Als Endresultat erhalten wir wieder 33.

Es ist also:

$$13 + 27 - 7 + 5 - 10 + 11 - 6,$$

gerade so groß wie

$$13 - 7 + 27 - 10 + 5 + 11 - 6.$$

1) Eine Beschränkung müssen wir uns jedoch noch auferlegen. Wir dürfen nämlich vorläufig die Zahlen nicht so ordnen, daß wir es nöthig hätten, eine größere Zahl von einer kleineren abzuziehen, denn eine solche Operation hätte für uns noch keinen Sinn. Später werden wir auf diesen Punkt näher eingehen und dadurch zur Theorie des **Positiven** und **Negativen** geführt werden.

Das Resultat 33 würde sich auch ergeben, wenn wir die Glieder in folgender Weise ordneten:

a) $13 + 5 + 11 - 7 - 6 + 27 - 10$,
b) $13 + 11 - 6 - 10 + 5 + 27 - 7$,
c) $13 - 7 + 27 - 6 + 5 - 10 + 11$.

Ja, es erleichtert die richtige Wahl der Reihenfolge, in der die Additionen und Subtractionen vorgenommen werden, die Rechnung oft sehr bedeutend. Haben wir z. B. die arithmetische Summe:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 9 & + & 6 & + & 10 & - & 9 & - & 6 & - & 10 & + & 3 \\ {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 5} & & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 6} & & {\scriptstyle 7} \end{array}$$

so werden wir die Additionen und Subtractionen am besten in der Ordnung vollziehen, welche die kleinen Zahlen, die unter die Glieder gesetzt sind, angeben. Wir werden damit sogleich übersehen, daß sich als Resultat 3 ergiebt, denn 9 weniger 9 giebt 0, 6 weniger 6 giebt 0, 10 weniger 10 giebt 0, und übrig bleibt nur die 3.

Wie bei den arithmetischen Summen, deren Glieder nur aus Zahlen bestehen, verhält es sich auch bei den übrigen arithmetischen Summen. Sind die Glieder Buchstaben oder aus Buchstaben und Zahlen[1]) zusammengesetzt, so kann man ebenfalls die Reihenfolge der Additionen und Subtractionen, welche durch die Plus- und Minuszeichen angedeutet werden, verändern.

$$8a - 5a + 3a - 2a + 4a - 3a$$

ist gerade so groß wie:

$8a + 3a + 4a - 5a - 2a - 3a$,
oder $8a + 3a - 5a + 4a - 2a - 3a$,
oder $8a + 4a - 5a - 2a + 3a - 3a$,
oder $8a - 5a - 2a + 4a + 3a - 3a$,

denn es ist:

$$8a - 5a + 3a - 2a + 4a - 3a = 5a,$$
$$8a + 3a + 4a - 5a - 2a - 3a = 5a,$$
$$8a + 3a - 5a + 4a - 2a - 3a = 5a,$$
$$8a + 4a - 5a - 2a + 3a - 3a = 5a,$$
$$8a - 5a - 2a + 4a + 3a - 3a = 5a.$$

Kommen mehrere Buchstaben oder Vielfache derselben, etwa a's, b's 2c. gemischt vor, so werden wir erst die a's, dann die b's 2c. zusammenzählen, bezüglich von einander abziehen; auch hier ist die Reihenfolge, in welcher wir die Additionen, bezüglich Subtrac- ausführen, in unser Belieben gestellt; welche Reihenfolge wir auch wählen, wir kommen zu demselben Resultat. Es ist:

$$4a + 13b - 2a + 9b - 7b = 2a + 15b,$$

ebenso ist:

$$4a - 2a + 13b - 7b + 9b = 2a + 15b,$$

und:

$$4a - 2a + 9b - 7b + 13b = 2a + 15b.$$

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:

1) $6a \pm 8a - 4a + 5b - 2b + 9b$,
2) $6a - 4a + 8a + 9b - 2b + 5b$,
3) $5c + 10d - 4c - 8d + 9c + 12d$,
4) $5c - 4c + 10d - 8d + 9c + 12d$.

Freuden nicht und auch nicht Sorgen
Ist der Weg, der uns bestimmt;
Handeln, so daß jedes Morgen
Höher als das heute klimmt.

Lection 21.

A. Die Glieder der arithmetischen Summe und die Klammern.

§ 28. Die Multiplications- und Divisionszeichen. Wie wir schon oftmals angeführt haben, werden die Bestandtheile einer arithmetischen Summe, welche durch Plus- und Minuszeichen von einander getrennt sind, Glieder genannt. In:

$$4 + 3 . 9 - 3 + 2 . 6 - 8 + \frac{21}{7}$$

haben wir daher 6 Glieder, nämlich:

4 und $3 . 9$ und 3 und $2 . 6$ und 8 und $\frac{21}{7}$.

Bei einigen von diesen Gliedern, nämlich bei 4, 3, 8 ist uns der bestimmte Zahlenwerth bekannt; drei dagegen $\left(3 . 9,\ 2 . 6,\ \frac{21}{7}\right)$ stellen an uns erst die Aufforderung, eine Multiplication bez. Division auszuführen.

Diese **Multiplication** resp. **Division** muß erst bei **jedem einzelnen Gliede** vollzogen

---

[1]) Wir wollen künftig die bestimmten Zahlen wie 2, 3, 5 2c. einfach Zahlen und die beliebigen oder unbestimmten Zahlen, welche uns durch Buchstaben repräsentirt werden, einfach Buchstaben nennen.

werden, ehe wir die arithmetische Summe finden können.

Es ist: $3 . 9 = 27$, $2 . 6 = 12$ und $\frac{21}{7} = 3$.

Wir haben daher:

$$4 + 3 . 9 - 3 + 2 . 6 - 8 + \frac{21}{7}$$
$$= 4 + 27 - 3 + 12 - 8 + 3 = 35.$$

In: $4 + 5 . 2 + 9 . 4 - 3 . 15 + 6 . 7$

haben wir vier Glieder $5 . 2$, $9 . 4$, $3 . 15$ und $6 . 7$, welche erst berechnet werden müssen, ehe wir zur Feststellung der arithmetischen Summe schreiten können.

Wir finden: $5 . 2 = 10$, $9 . 4 = 36$, $3 . 15 = 45$ und $6 . 7 = 42$. Daher ist:

$$4 + 5 . 2 + 9 . 4 - 3 . 15 + 6 . 7$$
$$= 4 + 10 + 36 - 45 + 42 = 47.$$

In: $18 : 3 + 14 : 7 + \frac{4 . 6}{2} + \frac{35 . 11}{7}$

sind nach einander $18 : 3$, $14 : 7$, $\frac{4 . 6}{5}$, $\frac{35 . 11}{7}$ die Glieder.

Diese Glieder haben wir erst für sich zu berechnen; es ist: $18 : 3 = 6$, $14 : 7 = 2$, $\frac{4 . 6}{2} = 12$, $\frac{35 . 11}{7} = 55$.

Daher haben wir:

$$18 : 3 + 14 : 7 + \frac{4 . 6}{2} + \frac{35 . 11}{7}$$
$$= 6 + 2 + 12 + 55 = 75.$$

So selbstverständlich dem Schüler auch diese Auseinandersetzungen scheinen mögen, von so großer Wichtigkeit sind sie für uns. Sie zeigen uns nämlich, daß die Additions- und Subtractionszeichen weiter reichen, gleichsam ein weiteres Wirkungsgebiet haben, als die Multiplications- und Divisionszeichen.

Wenden wir uns zu einem bestimmten Beispiele. In:

$$9 + 3 . 4 + 5 . 6$$

sagt uns das zweite Pluszeichen: das Glied $5 . 6$ soll zu dem **ganzen Vorhergehenden** addirt werden[1]). Dagegen fordert uns das Malzeichen (.) in $5 . 6$ nicht auf, das ganze Vorhergehende zu multipliciren; es soll nicht etwa

$$9 + 3 . 4 + 5$$

sondern nur die 5 6-mal genommen werden. Das **Multiplicationszeichen** ist auf das **Glied beschränkt**, in welchem es vorkommt.

Ebenso fordert uns das Malzeichen im zweiten Gliede nicht dazu auf: $9 + 3$ mit 4 zu multipliciren, vielmehr ist nur die 3 4-mal zu nehmen.

In: $8 + 3 . 5 + 6 . 7 - 7 . 3$

sind $3 . 5$, $6 . 7$, $7 . 3$ die Glieder. Im zweiten Gliede $(3 . 5)$ sagt uns das Malzeichen nicht, daß wir $8 + 3$,

sondern daß wir 3 mit 5 zu multipliciren haben.

Im dritten Gliede $6 . 7$ fordert uns das Malzeichen nicht auf,

$$8 + 3 . 5 + 6$$

7-mal zu nehmen, sondern das Malzeichen bezieht sich nur auf die 6.

Was die Malzeichen des vierten Gliedes $(7 . 3)$ betrifft, so ist nicht:

$$8 + 3 . 5 + 6 . 7 - 7$$

mit 3 zu multipliciren, sondern nur die 7, welche wir in dem vierten Gliede sehen.

Ebenso wie das Multiplicationszeichen ist auch das **Divisionszeichen** auf das **Glied beschränkt**, in welchem es vorkommt.

Die arithmetische Summe:

$$12 + \frac{4}{2} + 4 + \frac{6}{3} + 5$$

können wir auch schreiben:

$$12 + 4 : 2 + 4 + 6 : 3 + 5.$$

Wenn der Schüler die letzte Schreibweise vor sich sieht, wird er bei der Berechnung dieser arithmetischen Summe leicht irren. Er wird nämlich leicht folgendermaßen rechnen:

12 plus 4 giebt 16; 16 dividirt durch 2 ist gleich 8; 8 plus 4 ist gleich 12; 12 plus 6 giebt 18; 18 dividirt durch 3 ist gleich 6; 6 plus 5 ist gleich 11.

Dabei hätte er viele Fehler begangen, und er würde auch zu einem ganz falschen Resultate kommen.

Er hätte nämlich nicht berücksichtigt, daß die Divisionszeichen im zweiten und im vierten Gliede (in $4 : 2$ und $6 : 3$) sich nur auf dasjenige Glied erstrecken, in welchem sie enthalten sind. Nicht $12 + 4$ oder 16 ist durch 2 zu dividiren, sondern nur die 4; und ebenso

[1]) Auch jedes Minuszeichen fordert uns auf, das folgende Glied von dem **ganzen Vorhergehenden** zu subtrahiren.

ist beim zweiten Divisionszeichen nicht 18, wie wir bei der falsch ausgeführten Rechnung angenommen hatten, sondern nur die 6 durch 3 zu theilen.

Berechnen wir aber erst das zweite und vierte Glied (4 : 2 und 6 : 3), so erhalten wir:

$$4 : 2 = 2 \text{ und } 6 : 3 = 2.$$

Setzen wir nun in der Summe:

$$12 + 4 : 2 + 4 + 6 : 3 + 5$$

statt 4 : 2 die gleiche Größe 2 und statt 6 : 3 die gleiche Größe 2 ein, so ergiebt sich:

$$12 + 2 + 4 + 2 + 5.$$

Wenn wir nun die einzelnen Glieder zusammenzählen, so bekommen wir als Resultat 25. Es ist in Zeichen:

$$12 + 4 : 2 + 4 + 6 : 3 + 5$$
$$= 12 + 2 + 4 + 2 + 5$$
$$= 25.$$

In: $13 + \frac{27}{9} - \frac{25}{5} + \frac{16}{4} + 9$,

oder anders geschrieben:

$$13 + 27 : 9 - 25 : 5 + 16 : 4 + 9,$$

haben wir demnach erst die Glieder 27 : 9, 25 : 5, 16 : 4 auszurechnen, ehe wir die Summirung ausführen. Es ist:

$$27 : 9 = 3, \ 25 : 5 = 5 \text{ und } 16 : 4 = 4.$$

Darum haben wir:

$$13 + 27 : 9 - 25 : 5 + 16 : 4 + 9$$
$$= 13 + 3 - 5 + 4 + 9$$
$$= 24.$$

In: $12 + 3 . 7 - 6 : 2 + 5 . 2 + 1$

sind erst die Glieder 3 . 7, 6 : 2, 5 . 2 zu berechnen. Es ist:

$$3 . 7 = 21, \ 6 : 2 = 3, \ 5 . 2 = 10,$$

daher können wir die Gleichung aufstellen:

$$12 + 3 . 7 - 6 : 2 + 5 . 2 + 1$$
$$= 12 + 21 - 3 + 10 + 1$$
$$= 41.$$

In: $19 - 5 . 3 + \frac{49}{7} - \frac{24}{12} + 2 . 6$,

oder anders geschrieben:

$$19 - 5 . 3 + 49 : 7 - 24 : 12 + 2 . 6$$

ist 5 . 3 = 15, 49 : 7 = 7, 24 : 12 = 2 und 2 . 6 = 12.

Mithin haben wir:

$$19 - 5 . 3 + 49 : 7 - 24 : 12 + 2 . 6$$
$$= 19 - 15 + 7 - 2 + 12$$
$$= 21.$$

Aufgaben. Der Schüler möge folgende arithmetische Summen berechnen:

1) $17 + 3 . 2 - 4 . 3 + 3 . 6 - 2 . 5$,
2) $23 - 2 . 8 + 3 . 9 - 2 . 7 + 3 . 6$,
3) $13 + 20 : 4 - 36 : 9 + 5$,
4) $3 + 34 : 17 + 5 . 3 + 2 . 4$,
5) $17 + 15 : 5 + 5 . 7 + 3 . 8$,
6) $16 + \frac{9}{3} + \frac{8}{2} + \frac{18}{9} + 4 . 10$,
7) $14 + 2 . 13 + 3 . 19 + \frac{57}{3} + \frac{91}{7}$.
8) $3 + 5 . 11 + \frac{39}{13} + \frac{35}{7} + \frac{22}{11}$.

Bemerkung. Wir können uns an dieser Stelle nicht versagen, unsern Tadel darüber auszusprechen, daß in den Elementarschulen von dem Brauche, der sich in der Mathematik betreffs des Multiplications- und Divisionszeichens eingebürgert hat, abgewichen wird. Wenn der Lehrer die Aufgabe stellt:

$$4 + 8 - 2 \times 3,$$

so läßt er folgendermaßen rechnen:

4 und 8 ist 12, 12 weniger 2 ist 10, 10 mal 3 ist 30.

Er beschränkt also das Multiplicationszeichen nicht auf das Glied (2 × 3), in dem es enthalten ist, sondern bezieht es auf das ganze Vorhergehende. Diese Abweichung von dem mathematischen Brauche richtet viel Verwirrung an; sie bewirkt auch, daß dem Schüler die Festsetzungen der Mathematik als etwas Fremdes erscheinen, und sollte dies darum von einsichtigen Schulmännern bekämpft werden.

§ 29. Die Klammern.

In der Summe: 2 + 3 . 4 sehen wir im zweiten Gliede 3 . 4 ein Malzeichen (.). Dieses Malzeichen bezieht sich nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen nur auf die 3 und nicht auf 2 + 3. Nur die 3 ist 4-mal zu nehmen, nicht etwa die 2 + 3 oder 5. Es wird sich nun fragen, welcher Schreibweise wir uns zu bedienen haben, wenn wir nicht die 3, sondern die 2 + 3 mit 4 multipliciren wollen.

Ein solcher Fall kann leicht eintreten. Nehmen wir an, ein Vater habe jedem von seinen vier Söhnen erst 2 Mark und dann 3 Mark zu Schulmaterialien gegeben, und er wolle nun wissen, wie viel er Mark im Ganzen zu diesem Zweck verausgabt habe. Er wird dann erst 3 zu 2 addiren und das Ganze 4-mal nehmen, oder, anders ausgedrückt, er wird 2 + 3 mit 4 multipliciren.

Sollte er die Rechenaufgabe zu Papier bringen, so dürfte er nicht

$$2 + 3 . 4$$

schreiben, er müßte vielmehr schon durch die Schreibweise ausdrücken, daß $2 + 3$ zusammengehört und daß sich die Multiplication auf dieses zusammengehörige Ganze zu erstrecken habe.

Man hat nun in der Mathematik Zeichen eingeführt, welche trefflich die Zusammengehörigkeit ausdrücken, nämlich die **Klammern** ( ).

$(2 + 3)$[1] $. 4$ bedeutet:
$2 + 3$ soll mit 4 multiplicirt werden.

$(5 + 7) . 8$ bedeutet: $5 + 7$ soll mit 8 multiplicirt werden. Wenn wir die Klammern fortließen und $5 + 7 . 8$ schrieben, so würde uns das Malzeichen nur auffordern, die 7 mit 8 zu multipliciren.

Wollen wir: $(5 + 7) . 8$ berechnen, so werden wir erst 5 und 7 zusammenzählen. $5 + 7$ giebt 12; 12 werden wir 8-mal nehmen. 12 mal 8 ist gleich 96.

Soll $5 + 7 . 8$ berechnet werden, so werden wir erst 7 8-mal nehmen. $7 . 8$ giebt 56. Zu 56 werden wir 5 addiren; 56 und 5 ist gleich 61.

Wir können daher die Gleichungen aufstellen:

$$(5 + 7) . 8 = 96$$
und $$5 + 7 . 8 = 61.$$

In: $(8 + 5 + 6) . 10$
soll $8 + 5 + 6$,
in: $8 + 5 + 6 . 10$
soll nur die 6 mit 10 multiplicirt werden.

Um: $(8 + 5 + 6) . 10$ zu berechnen, werden wir erst 8, 5 und 6 zusammenzählen. $8 + 5 + 6$ ist gleich 19. 19 ist dann 10-mal zu nehmen; 10-mal 19 ist gleich 190.

Bei: $8 + 5 + 6 . 10$ werden wir 6 mit 10 multipliciren; 6 mal 10 ist 60. Für: $8 + 5 + 6 . 10$ können wir darum $8 + 5 + 60$ setzen. Addiren wir 8, 5 und 60 zu einander, so erhalten wir als Summe 73.

Es ist daher:

$$(8 + 5 + 6) . 10 = 190$$
und $$8 + 5 + 6 . 10 = 73.$$

Noch ein Beispiel! Es ist:

$$(10 - 5 + 2) . 6 = 42,$$

denn $10 - 5 + 2$ ist gleich 7; 7 mit 6 multiplicirt giebt 42. Dagegen ist:

$$10 - 5 + 2 . 6 = 17,$$

denn wir haben:

$$10 - 5 + 2 . 6 = 10 - 5 + 12 = 17.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge

1) $(3 + 4) . 11$,
2) $3 + 4 . 11$,
3) $(16 - 5) . 2$,
4) $16 - 5 . 2$,
5) $(9 + 11 + 5) . 3$,
6) $9 + 11 + 5 . 3$,
7) $(8 + 4 + 2) . 9$,
8) $8 + 4 + 2 . 9$,
9) $(13 - 8 + 2) . 2$,
10) $13 - 8 + 2 . 2$,
11) $(527 - 20) . 18$,
12) $527 - 20 . 18$

berechnen.

Aehnlich wie mit dem Multiplicationszeichen, verhält es sich auch mit dem **Divisionszeichen** (:). Während in:

$$3 + 16 - 7 + 8 : 4$$

das Divisionszeichen sich nur auf das Glied $(8 : 4)$ bezieht und auffordert, die 8 durch 4 zu dividiren, soll in

$$(3 + 16 - 7 + 8) : 4$$ [1]

$3 + 16 - 7 + 8$ durch 4 getheilt werden; in beiden Fällen werden sich ganz verschiedene Resultate ergeben. Es ist:

$$3 + 16 - 7 + 8 : 4$$
$$= 3 + 16 - 7 + 2$$
$$= 14,$$

dagegen ist:

$$(3 + 16 - 7 + 8) : 4 = 20 : 4 = 5.$$

Im ersten Falle ist also 14, im zweiten Falle ist 5 das Resultat.

Gehen wir noch zu einem zweiten Beispiele über!

[1]) $(2 + 3) . 4$ ist ein Product, dessen einer Factor die Klammer $(2 + 3)$ und dessen anderer Factor die 4 ist.

Statt $(2 + 3) . 4$ kann man auch schreiben: $4 . (2 + 3)$.

Ebenso sind weiter unten $(5 + 7) . 8$ und $(8 + 5 + 6) . 10$ Producte; und zwar ist in $(5 + 7) . 8$ die Klammer $(5 + 7)$ der eine Factor und die 8 der andere Factor. In: $(8 + 5 + 6) . 10$ ist die Klammer $(8 + 5 + 6)$ der eine und die 10 der andere Factor.

Statt: $(5 + 7) . 8$ und $(8 + 5 + 6) . 10$ kann auch $8 . (5 + 7)$ und $10 . (8 + 5 + 6)$ geschrieben werden.

[1]) In $(3 + 16 - 7 + 8) : 4$ ist die Klammer $(3 + 16 - 7 + 8)$ der Dividend und 4 der Divisor.

In: $18 - 6 + 2 + 21 : 7$
soll die 21, dagegen in:

$$(18 - 6 + 2 + 21) : 7$$

soll $18 - 6 + 2 + 21$ durch 7 getheilt werden.

Es ist daher:

$18 - 6 + 2 + 21 : 7 = 18 - 6 + 2 + 3 = 17$
und $(18 - 6 + 2 + 21) : 7 = 35 : 7 = 5$[1]).

Aufgaben II. Der Schüler möge berechnen:

1) $18 + 5 - 7 + 24 : 8$.
2) $(18 + 5 - 7 + 24) : 8$.
3) $22 - 4 + 27 : 9$.
4) $(22 - 4 + 27) : 9$.
5) $48 + 4 - 26 : 13$.
6) $(48 + 4 - 26) : 13$.

Bemerkung I. Wenn wir als Divisionszeichen den Bruchstrich verwenden, sind die Klammern nicht nöthig.

Der Bruch:

$$\frac{18 + 5 - 7 + 24}{8}$$

sagt uns ebenso wie der Ausdruck:

$$(18 + 5 - 7 + 24) : 8,$$

daß die ganze arithmetische Summe:

$$18 + 5 - 7 + 24$$

durch 8 zu dividiren ist.

Statt: $(22 - 4 + 27) : 9$
kann man daher auch schreiben:

$$\frac{22 - 4 + 27}{9},$$

ebenso statt: $(48 + 4 - 26) : 13$ auch:

$$\frac{48 + 4 - 26}{13}$$

Bemerkung II. Es mögen jetzt noch einige Bemerkungen folgen, die sich auf die Schreib- und Ausdrucksweise beziehen.

1) Wenn eine Klammer mit einer Zahl multiplicirt wird, läßt man das Malzeichen häufig fort.

$(3 + 8 - 5)\,4$ oder $4\,(3 + 8 - 5)$
bedeutet ebenso viel wie:
$(3 + 8 - 5) \,.\, 4$ oder $4 \,.\, (3 + 8 - 5)$.

Demgemäß kann für
$(6 + 12 - 5) \,.\, 4$
der Ausdruck: $(6 + 12 - 5)\,4$,
und für: $2 \,.\, (19 - 11 + 3)$
der Ausdruck $2\,(19 - 11 + 3)$
geschrieben werden.

2) $5 \,.\, (3 + 8 - 5)$ spricht man: 5 mal .... Klammer .... 3 plus 8 minus 5 .... Klammer geschlossen[1]).

$(6 + 12 - 5) \,.\, 4$ wird gesprochen: Klammer ... 6 plus 12 minus 5 .... Klammer geschlossen .... mal 4.

$(22 - 4 + 27) : 9$ spricht man: Klammer .... 22 minus 4 plus 27 .... Klammer geschlossen .... dividirt durch 9.

Aufgaben III. Wie spricht man:

1) $9 \,.\, (3 + 4 - 1)$,
2) $(3 + 11 - 5) \,.\, 4$,
3) $(4 + 9 + 5) : 3$?

§ 30. Die Auflösung der Klammern.

Um einen Ausdruck wie:

$$(4 + 5 - 3) \,.\, 7$$

zu berechnen, werden wir bei dem Verfahren, welches wir bisher kennen gelernt haben, zunächst den Werth der Klammer

$$(4 + 5 - 3)$$

feststellen. Wir werden 4 und 5 zusammenzählen, 4 und 5 giebt 9; von 9 werden wir 3 abziehen, 9 weniger 3 ist gleich 6. Diese 6, welche den Werth der Klammer repräsentirt, ist dann noch mit 7 zu multipliciren, in Zeichen, es ist:

$$(4 + 5 - 3) \,.\, 7 = 6 \,.\, 7 = 42.$$

Wir können aber auch einen andern Weg einschlagen, den der Schüler schon selbst aus der folgenden Gleichung herauslesen wird. Es ist:

$$\begin{aligned}(4 + 5 - 3) \,.\, 7 &= 4 \,.\, 7 + 5 \,.\, 7 - 3 \,.\, 7 \\ &= 28 + 35 - 21 \\ &= 42,\end{aligned}$$

d. h. wir haben **jedes Glied** der **Klammer**[2]) mit 7 **multiplicirt,** die Zeichen + und — unverändert stehen lassen und sind dann zu demselben Resultat gekommen, als wenn wir erst die Klammer $(4 + 5 - 3)$ berechnet und das Resultat 7-mal genommen hätten.

---

[1]) In: $(18 - 6 + 2 + 21) : 7$ ist die Klammer $(18 - 6 + 2 + 21)$ der Dividend und 7 der Divisor.

[1]) Die Punkte .... sollen andeuten, daß an der betreffenden Stelle eine Pause in der Rede eintreten muß. [2]) 4, 5 und 3 sind die Glieder der Klammer $(4 + 5 - 3)$; sowohl 4 wie 5 wie 3 ist mit 7 multiplicirt worden, wie die rechte Seite $47 + 5 \,.\, 7 + 3 \,.\, 7$ zeigt.
$4 \cdot 7 + 5 \cdot 7 - 3 \cdot 7$

Ebenso ist:

$$(13 - 6 + 5) \,.\, 8 = 13 \,.\, 8 - 6 \,.\, 8 + 5 \,.\, 8$$
$$= 104 - 48 + 40$$
$$= 96.$$

Wenn wir erst die Klammer berechnen, kommen wir zu demselben Resultat, denn es ist:

$$13 - 6 + 5 = 12, \text{ folglich}$$
$$(13 - 6 + 5) \,.\, 8 = 12 \,.\, 8 = 96.$$

Nehmen wir noch ein drittes Beispiel! Es ist:

$$(21 + 3 - 17) \,.\, 6 = 21 \,.\, 6 + 3 \,.\, 6 - 17 \,.\, 6$$
$$= 126 + 18 - 102$$
$$= 42.$$

42 ist auch das Resultat, wenn erst die Klammer berechnet wird, denn es ist:

$$21 + 3 - 17 = 7, \text{ daher}$$
$$(21 + 3 - 17) \,.\, 6 = 7 \,.\, 6 = 42.$$

Auch wenn eine Klammer durch eine Zahl dividirt werden soll, können wir die einzelnen Glieder dividiren.

Es ist:

$$(12 + 18 - 24) : 6 = 12 : 6 + 18 : 6 - 24 : 6$$
$$= 2 + 3 - 4$$
$$= 1.$$

Die Gleichung:

$$(12 + 18 - 24) : 6 = 12 : 6 + 18 : 6 - 24 : 6$$

wird noch übersichtlicher, wenn wir statt der beiden Punkte als Divisionszeichen einen Bruchstrich einführen. Wir erhalten dann nämlich

$$\frac{12 + 18 - 24}{6} = \frac{12}{6} + \frac{18}{6} - \frac{24}{6}$$
$$= 2 + 3 - 4$$
$$= 1.$$

Wenn wir erst die Klammer berechnen, erhalten wir:

$$12 + 18 - 24 = 6,$$

folglich ist:

$$(12 + 18 - 24) : 6 = 6 : 6 = 1,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{12 + 18 - 24}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Wir gelangen also zu demselben Resultat!

Doch wenden wir uns zu einem zweiten Beispiel! Es sei uns die Aufgabe gestellt, den Ausdruck:

$(64 + 48 - 16) : 8$ zu berechnen.

Wie vorher können wir zwei Wege einschlagen; entweder können wir die Klammer

$$(64 + 48 - 16)$$

berechnen und das Resultat durch 8 dividiren, oder wir können jedes der Glieder durch 8 theilen.

Den ersten Weg giebt die folgende Gleichung an:

$$(64 + 48 - 16) : 8 = 96 : 8$$
$$= 12,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{64 + 48 - 16}{8} = \frac{96}{8}$$
$$= 12.$$

Der zweite Weg wird aus der folgenden Gleichung ersichtlich:

$$(64 + 48 - 16) : 8 = 64 : 8 + 48 : 8 - 16 : 8$$
$$= 8 + 6 - 2$$
$$= 12,$$

oder bei Verwendung des Bruchstrichs

$$\frac{64 + 48 - 16}{8} = \frac{64}{8} + \frac{48}{8} - \frac{16}{8}$$
$$= 8 + 6 - 2$$
$$= 12.$$

Ueberlegen wir uns, ob wir die Betrachtungen dieses Paragraphen nicht kurz formuliren können. Wir haben eine neue Art und Weise kennen gelernt, Klammern zu multipliciren und zu dividiren. Während wir vorher erst den Werth der Klammer ermittelten, haben wir in diesem Paragraphen gesehen, daß wir zum richtigen Resultat kommen, wenn wir die einzelnen Glieder der Klammer multipliciren, bezüglich dividiren. Da die Klammer uns eine arithmetische Summe darstellte, können wir das Verfahren, welches wir in diesem Paragraphen kennen gelernt haben, in folgende Worte kleiden.

Eine arithmetische Summe können wir multipliciren, bezüglich dividiren, indem wir die einzelnen Glieder multipliciren, bezüglich dividiren.

Wenn wir die Multiplication oder Division einer arithmetischen Summe in der eben angegebenen Weise ausführen, erhalten wir eine Gleichung, deren linke Seite eine Klammer enthält. In:

$$(3 + 5 - 2) \,.\, 8 = 3 \,.\, 8 + 5 \,.\, 8 - 2 \,.\, 8$$

sehen wir z. B. auf der linken Seite die Klammer $(3 + 5 - 2)$.

Auf der rechten Seite dagegen ist die Klammer verschwunden, sie ist durch die Multiplication der einzelnen Glieder, wie man sich auszudrücken pflegt, **aufgelöst** worden.

Ueberhaupt spricht man vom **Auflösen einer Klammer,** wenn man durch irgend eine Rechenoperation die Klammer beseitigt, insbesondere aber, wenn man diejenige Rechenoperation ausführt, um derentwillen die Klammer überhaupt gesetzt ist[1]). In diesem Paragraphen diente uns immer die Multiplication oder Division zur Auflösung der Klammer; wir werden später noch andere Fälle besprechen.

Wird uns die Aufgabe gestellt, bei dem Ausdruck:

$$(18 + 4 - 19) \,.\, 2$$

die Klammer aufzulösen, so werden wir die Glieder der Klammer mit 2 multipliciren und die Gleichung aufstellen:

$$(18 + 4 - 19) \,.\, 2 = 18 \,.\, 2 + 4 \,.\, 2 - 19 \,.\, 2.$$

Die weitere Rechnung, welche zur vollständigen Ermittlung des Werthes führt, den der Ausdruck $(18 + 4 - 19) \,.\, 2$ hat, geht über die Aufgabe, die Klammer aufzulösen hinaus.

Stellen wir uns vor, wir sollten in den folgenden Ausdrücken:

a) $(9 - 8 + 7) \,.\, 5$,
b) $(10 - 3 + 4) \,.\, 8$,
c) $(14 + 28 - 7) : 7$,
d) $(16 - 8 + 12) : 4$.

die Klammen auflösen, so werden wir die Gleichungen aufstellen:

a) $(9 - 8 + 7) \,.\, 5 = 9 \,.\, 5 - 8 \,.\, 5 + 7 \,.\, 5$,
b) $(10 - 3 + 4) \,.\, 8 = 10 \,.\, 8 - 3 \,.\, 8 + 4 \,.\, 8$,
c) $(14 + 28 - 7) : 7 = 14 : 7 + 28 : 7 - 7 : 7$,
d) $(16 - 8 + 12) : 4 = 16 : 4 - 8 : 4 + 12 : 4$.

Aufgaben. 1) Der Schüler möge die Klammern bei folgenden Ausdrücken auflösen:

1) $(3 + 8 + 7) \,.\, 5$, 2) $(6 + 3 - 2) \,.\, 8$,
3) $(4 + 7 - 6) \,.\, 3$, 4) $(30 + 3) \,.\, 40$,
5) $(45 + 60 - 30) : 15$, 6) $(40 + 50 - 24) : 8$,
7) $(34 + 51 - 68) : 17$;

2) er möge den Werth aller dieser Ausdrücke ermitteln, indem er a) die Klammerauflösungen benützt und die Rechnung fortsetzt und b) erst die Klammern berechnet und dann das Resultat multiplicirt oder dividirt.

§ 31. Die Multiplication und Division von arithmetischen Summen, die Buchstaben enthalten.

Im vorigen Paragraphen sind wir zu dem wichtigen Satz gelangt:

Eine arithmetische Summe können wir multipliciren, bezüglich dividiren, indem wir die einzelnen Glieder multipliciren, bezüglich dividiren.

Diesen Satz, welchen wir bisher nur bei Zahlenbeispielen erprobt haben, können wir unmittelbar auf arithmetische Summen ausdehnen, deren Glieder ganz oder theilweise aus Buchstaben bestehen. Haben doch die Buchstaben auch die Bedeutung der Zahlen, wenn sie auch nicht aus Ziffern zusammenmengesetzt sind. Sollen wir z. B. die arithmetische Summe

$$a + b - c$$

mit 5 multipliciren, so werden wir die einzelnen Glieder a, b und c 5-mal nehmen und die Gleichung aufstellen:

$$(a + b - c) \,.\, 5 = a \,.\, 5 + b \,.\, 5 - c \,.\, 9 \\ = 5a + 5b - 5c.$$

Aehnlich ist:

$$(e + f - d) \,.\, 9 = e \,.\, 9 + f \,.\, 9 - d \,.\, 5 \\ = 9e + 9f - 9d,$$

ferner:

$$(2a + 5c + 6d) \,.\, 7 = 2a \,.\, 7 + 5c \,.\, 7 + 6d \,.\, 7^{1)} \\ = 14a + 35c + 42d,$$

und:

$$(5c + 6d + 7e) \,.\, 8 = 5c \,.\, 8 + 6d \,.\, 8 + 7e \,.\, 8 \\ = 40c + 48d + 56e.$$

Wir können die Klammern auch mit Buchstaben multipliciren. Es ist:

---

[1]) In $(3 + 5 - 2) \,.\, 8$ ist die Klammer z. B. nur gesetzt worden, weil alle Glieder 8-mal genommen werden sollen. Multipliciren wir also jedes einzelne Glied der Klammer mit 8, d. h. stellen wir die Gleichung auf:

$$(3 + 5 - 2) \,.\, 8 = 3 \,.\, 8 + 5 \,.\, 8 - 2 \,.\, 8,$$

so ist die Klammer **aufgelöst**.

[1]) 2a bedeutet eigentlich $2 \,.\, a$; $2a \,.\, 7$ ist folglich gleich $2 \,.\, a \,.\, 7$, und wenn wir die Reihenfolge der Factoren verändern, gleich $2 \,.\, 7 \,.\, a$. Multipliciren wir 2 und 7, so erhalten wir 14. Mithin ist

$$2a \,.\, 7 = 14 \,.\, a = 14a.$$

Ebenso ist:

$$5c \,.\, 7 = 5 \,.\, c \,.\, 7 = 5 \,.\, 7 \,.\, c = 35 \,.\, c = 35c,$$

und $6d \,.\, 7 = 6 \,.\, d \,.\, 7 = 6 \,.\, 7 \,.\, d = 42 \,.\, d = 42d$ und so fort.

$$
\begin{aligned}
(a + b + c) \,.\, d &= a \,.\, d + b \,.\, d + c \,.\, d \\
&= ad + bd + cd, \\
(m + n - p) \,.\, r &= m \,.\, r + n \,.\, r - p \,.\, r \\
&= mr + nr - pr, \\
(a + b + c) \,.\, a &= a \,.\, a + b \,.\, a + c \,.\, a \\
&= a^2 + ab + ac, \\
(b + c) \,.\, b &= b \,.\, b + b \,.\, c \\
&= b^2 + cb, \\
(a + c + 4d) \,.\, e &= a \,.\, e + c \,.\, e + 4d \,.\, e \\
&= ae + ce + 4de, \\
(5a + 6b + 7c) \,.\, b &= 5a \,.\, b + 6b \,.\, b + 7c \,.\, b \\
&= 5ab + 6b^2 + 7cb.
\end{aligned}
$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) $(4a + 5a - 3a + 8a) \,.\, 6$,
2) $(3b + 5c - 4d + 7e) \,.\, 8$,
3) $(7a + 9c + 15d - 14e) \,.\, 92$,
4) $(b + d + e + f) \,.\, e$,
5) $(a + b - c + d) \,.\, d$,
6) $(7a + 9d - 7e) \,.\, f$,
7) $(13a + 14c - 11f) \,.\, c$,
8) $(17e - 8d + 3f) \,.\, e$

berechnen. 11. III. 10.

B. Recapitulation.

Nachdem wir in den ersten beiden Abschnitten der **zwanzigsten Lection** die Aufgaben gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, wandten wir uns den Elementen der Buchstabenrechnung zu. Wir erkannten, daß der Inhalt der Mathematik uns nöthige, zu allgemeinen Zahlenbezeichnungen fortzuschreiten, und wählten dazu die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets. Da demnach die Buchstaben in der Mathematik Zahlen bedeuten, können wir sie auch den Rechenoperationen unterwerfen, welche wir im zehnten Briefe besprochen haben; wir können sie addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Da wir über die Addition und Subtraction nichts Besonderes auszusagen hatten, gingen wir sogleich zur Multiplication bei Buchstaben über. Wir multiplicirten Buchstaben mit Zahlen, und Buchstaben untereinander und erörterten, daß das Malzeichen häufig einfach fortgelassen werde. Im Anschluß an das Multipliciren besprachen wir kurz die Potenzen, deren Basen Buchstaben sind, und wandten uns dann der Division bei Buchstaben zu, die wir eingehender behandelten. Hiernach konnten wir auf die Summe und die arithmetische Summe, deren Glieder aus Zahlen und Buchstaben gemischt sind, näher eingehen. Wir wollen nicht wiederholen, wie wir uns ausführlich über diesen Gegenstand verbreiteten, sondern nur einige Punkte aus der **einundzwanzigsten Lection** besonders hervorheben. Wie wir auseinandersetzten, können die Glieder der Gleichung nicht blos Zahlen, Buchstaben und Vielfache von Buchstaben, sondern Multiplications- und Divisionsausdrücke sein, die erst genau berechnet werden müssen, ehe wir zur Feststellung der Summe oder der arithmetischen Summe schreiten können. Wenn man nicht leicht Fehler machen will, muß man, wie wir zeigten beständig bedenken, daß die Multiplications- und Divisionszeichen auf das Glied beschränkt sind, in dem sie vorkommen, während die Plus- und Minuszeichen uns anweisen, das kommende Glied zu dem ganzen Vorhergehenden zu addiren, bezüglich davon zu subtrahiren.

Inhaltlich schloß sich an diese Erörterung leicht die wichtige Lehre von den Klammern und von der Auflösung der Klammern; und zwar wählten wir erst zu Gliedern der Klammern Zahlen, um unsere Erläuterungen möglichst klar zu gestalten. Aus der Lehre von den Klammern ergab sich für uns ein Satz über die Multiplication und Division arithmetischer Summen, den wir auch auf Buchstaben ausdehnten. Damit beendigten wir die einundzwanzigste Lection.

C. Wiederholungsfragen.

1) Was bedeuten die Buchstaben in der Arithmetik?
2) Wie pflegt man Ausdrücke wie; $2 \,.\, a$, $b \,.\, b$, $a \,.\, c \,.\, d$ gewöhnlich zu schreiben?
3) Welche Zeichen trennen die Glieder einer arithmetischen Summe von einander?
4) Was bedeuten Ausdrücke von der Form: $c : 7$, $\frac{c}{7}$, $a : e$ und $\frac{a}{e}$?
5) Welche Zeichen erstrecken sich nur auf das Glied, in welchem sie vorkommen?
6) Wie steht es mit der Reihenfolge, in welcher wir die Glieder einer arithmetischen Summe zu addiren, resp. zu subtrahiren haben?
7) Wie unterscheiden sich die beiden Ausdrücke $5 + 4 \,.\, 8$ und $(5 + 4) \,.\, 8$ in Bezug auf das Malzeichen von einander?
8) Weshalb wird in: $(5 + 4) \,.\, 8$ die Summe $5 + 4$ durch Klammern eingeschlossen?
9) Wie kann man eine arithmetische Summe multipliciren und dividiren?
10) Was versteht man unter Factoren?
11) Was ist ein Minuend, ein Subtrahend und eine Differenz?
12) Was ist ein Dividend, ein Divisor und ein Quotient?
13) Wie wird der Dividend und der Divisor genannt, wenn man sich eines Bruchstriches als Divisionszeichen bedient?
14) Was versteht man unter den Gliedern einer arithmetischen Summe?
15) Wie wird $(4 + 4 - 2) \,.\, 13$ und $(18 - 4) \,.\, 7$ gesprochen?
16) Wie spricht man $6 \,.\, (13 - 12)$?
17) Welches Zeichen kann in: $4 \,.\, (18 - 5)$ fortgelassen werden?
18) Was kann man für $3 \,.\, 3$, $5 \,.\, 5 \,.\, 5$, $c \,.\, c \,.\, c \,.\, c$, $d \,.\, d$ schreiben?
19) Wie wird d^3, e^5, f^7 gesprochen?
20) Was ist in a^3, b^5, c^9 die Basis, was ist der Exponent?
21) Auf welchem Satz beruht die Subtractionsprobe?

Selbstverlag. — Druck von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 22 und 23.
Arithmetik.

12. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Als
Manuscript
gedruckt.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Vorwärts mein Geist den scharfen Pfad,
Nicht träg' umhergeschauet!
Dort oben winkt die Ruhestatt.
Wohlauf! Dir selbst vertrauet.
(Voß.)

Lection 22.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 20.

Abschnitt C. § 23. **Aufgaben I.** Setzen wir erst:

$a = 3, \quad b = 2, \quad c = 4, \quad d = 5,$ so ist:

$$\begin{aligned}
3a &= 3 . a = 3 . 3 = 9,\\
9a &= 9 . a = 9 . 3 = 27,\\
12a &= 12 . a = 12 . 3 = 36,\\
30a &= 30 . a = 30 . 3 = 90,\\
15a &= 15 . a = 15 . 3 = 45,\\
5b &= 5 . b = 5 . 2 = 10,\\
17b &= 17 . b = 17 . 2 = 34,\\
8b &= 8 . b = 8 . 2 = 16,\\
13b &= 13 . b = 13 . 2 = 26,\\
25b &= 25 . b = 25 . 2 = 50,\\
4c &= 4 . c = 4 . 4 = 16,\\
6c &= 6 . c = 6 . 4 = 24,\\
10c &= 10 . c = 10 . 4 = 40,\\
14c &= 14 . c = 14 . 4 = 56,\\
18c &= 18 . c = 18 . 4 = 72,\\
3d &= 3 . d = 3 . 5 = 15,\\
5d &= 5 . d = 5 . 5 = 25,\\
7d &= 7 . d = 7 . 5 = 35,\\
9d &= 9 . d = 9 . 5 = 45,\\
11d &= 11 . d = 11 . 5 = 55.
\end{aligned}$$

Nehmen wir zweitens $a = 2, \quad b = 1, \quad c = 7, \quad d = 8$ an, so erhalten wir auf gleiche Weise:

$$\begin{aligned}
&3a = 6, && 9a = 18, && 12a = 24, && 30a = 60,\\
&15a = 30, && 5b = 5, && 17b = 17, && 8b = 8,\\
&13b = 13, && 25b = 25, && 4c = 28, && 6c = 42,\\
&10c = 70, && 14c = 98, && 18c = 126, && 3d = 24,\\
&5d = 40, && 7d = 56, && 9d = 72, && 11d = 88.
\end{aligned}$$

Ist drittens $a = 4, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad d = 12,$ so ergiebt sich: $3a = 12,$

$$\begin{aligned}
&9a = 36, && 12a = 48, && 30a = 120,\\
&15a = 60, && 5b = 20, && 17b = 68,\\
&8b = 32, && 13b = 52, && 25b = 100,\\
&4c = 24, && 6c = 36, && 10c = 60,\\
&14c = 84, && 18c = 108, && 3d = 36,\\
&5d = 60, && 7d = 84, && 9d = 108,\\
&11d = 132.
\end{aligned}$$

Aufgaben II. Wird $a = 1. \quad b = 5, \quad c = 2, \quad d = 7, \quad e = 11, \quad f = 12$ gesetzt, so ist:

$$\begin{aligned}
ab &= a . b = 1 . 5 = 5,\\
ad &= a . d = 1 . 7 = 7,\\
af &= a . f = 1 . 12 = 12,\\
bd &= b . d = 5 . 7 = 35,\\
be &= b . e = 5 . 11 = 55,\\
bf &= b . f = 5 . 12 = 60,\\
ce &= c . e = 2 . 11 = 22,\\
ef &= e . f = 11 . 12 = 132,\\
abf &= a . b . f = 1 . 5 . 12 = 60,\\
acf &= a . c . f = 1 . 2 . 12 = 24,\\
bef &= b . e . f = 5 . 11 . 12 = 660,\\
def &= d . e . f = 7 . 11 . 12 = 924,\\
cef &= c . e . f = 2 . 11 . 12 = 264,\\
cde &= c . d . e = 2 . 7 . 11 = 154,\\
adf &= a . d . f = 1 . 7 . 12 = 84,\\
bdf &= b . d . f = 5 . 7 . 12 = 420,
\end{aligned}$$

Nehmen wir $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 10$, $f = 14$ an, so erhalten wir:

$ab = 8$, $ad = 16$, $af = 28$, $bd = 32$,
$be = 40$, $bf = 56$, $ce = 60$, $ef = 140$,
$abf = 112$, $acf = 168$, $bef = 560$,
$def = 1120$, $cef = 840$, $cde = 480$,
$adf = 224$, $bdf = 448$.

Aufgaben III. 1) c^3, c^5, e^5, e^7, f^2, f^9 wird der Reihe nach gesprochen:
c hoch 3, oder c zur dritten Potenz,
c hoch 5, oder c zur fünften Potenz,
e hoch 5, oder e zur fünften Potenz,
e hoch 7, oder e zur siebenten Potenz,
f hoch 2, oder f zur zweiten Potenz,
f hoch 9, oder f zur neunten Potenz.

2) In a^3 ist a die Basis, 3 der Exponent, in b^4 ist b die Basis und 4 der Exponent, in c^7 ist c die Basis und 7 der Exponent, in e^2 ist e die Basis und 2 der Exponent.

3) Setzen wir $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, so erhalten wir:

$a^6 = a.a.a.a.a.a = 2.2.2.2.2.2 = 64$
$b^7 = b.b.b.b.b.b.b$
$= 3.3.3.3.3.3.3 = 2187.$
$c^8 = c.c.c.c.c.c.c.c$
$= 4.4.4.4.4.4.4.4 = 65536.$

Wird $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ angenommen, so ist: $a^6 = 5^6 = 15625$, $b^7 = 6^7 = 279936$, $c^8 = 7^8 = 5764801$.

§ 24. **Aufgaben** I. 1) In dem Ausdruck $b:4$ ist b der Dividend und 4 der Divisor, in dem Ausdruck $c:6$ ist c der Dividend und 6 der Divisor, in $d:e$ ist d der Dividend und e der Divisor, in $e:f$ ist e der Dividend und f der Divisor. In $\frac{a}{b}$ ist a der Zähler, b der Nenner, in $\frac{c}{e}$ ist c der Zähler, e der Nenner, in $\frac{e}{a}$ ist e der Zähler, a der Nenner, in $\frac{c}{10}$ ist c der Zähler, 10 der Nenner, in $\frac{a}{7}$ ist a der Zähler, 7 der Nenner.

2) Es ist $\frac{a}{b} = \frac{20}{10} = 2$, $\frac{c}{d} = \frac{30}{6} = 5$, $c:f = 24:8 = 3$.

Aufgaben II. Es ist:

$$\frac{a+8}{d} = \frac{4+8}{3} = \frac{12}{3} = 4,$$
$$\frac{b+4}{5} = \frac{6+4}{5} = \frac{60}{5} = 12,$$
$$\frac{e+d}{a} = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3,$$
$$\frac{20}{c+2} = \frac{20}{8+2} = \frac{20}{10} = 2,$$
$$\frac{20}{b-1} = \frac{30}{6-1} = \frac{30}{5} = 6,$$
$$\frac{a.b}{c} = \frac{4.6}{8} = \frac{24}{8} = 3,$$
$$\frac{c.e}{d} = \frac{8.9}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

§ 25. Wir erhalten:
1) $a + a + a + a + a + a = 6a$,
2) $b + b + b = 3b$,
3) $c + c + c + c = 4c$,
4) $7a + 8a + 5b + 9b = 15a + 14b$,
5) $5e + 3e + 13f + 17f = 8e + 30f$,
6) $6a + 5b + 9a + 6b + 4b = 15a + 15b$,
7) $4c + 5e + 6f + 7e + 8f + 9c$
$= 13c + 12e + 14f$,
8) $8a + 19f + 17e + 14f + 15e + 10a$
$= 18a + 32e + 33f$.

§ 26. **Aufgaben** I. In:
$13a + 7b - 8a + 9b - 3b$
sind 13a, 7b, 8a, 9b, 3b die Glieder.

In: $4m + 8n + 15m - 4n - 12m$
sind 4m, 8n, 15m, 4n und 12m die Glieder.

In: $30p + 40q - 29p + 2q - 6q$
sind 30p, 40q, 29p, 2q und 6q die Glieder.

Aufgaben II. Bei der ersten Summe haben wir 5 Glieder, nämlich: $e.f$, $\frac{e}{f}$, $\frac{a.c}{b}$, $\frac{b.c}{c}$, $\frac{e}{f}$. Die zweite Summe enthält die 4 Glieder: $m.n$, $\frac{a}{d}$, $\frac{m.n}{p}$ und $r.q$.

In der dritten Summe haben wir 3 Glieder, nämlich: $a.b.c$, $e.f.g$ und $m.n.q$.

§ 27. Wir erhalten:
1) $6a + 8a - 4a + 5b - 2b + 9b = 10a + 12b$,
2) $6a - 4a + 8a + 9b - 2b + 5b$
$= 10a + 12b$,
3) $5c + 10d - 4c - 8d + 9c + 12d$
$= 10c + 14d$,
4) $5c - 4c + 10d - 8d + 9c + 12d$
$= 10c + 14d$.

Section 21.

Abschnitt A. § 28 Es ist:
1) $17 + 3.2 - 4.3 + 3.6 - 2.5$
$= 17 + 6 - 12 + 18 - 10 = 19$,
2) $23 - 2.8 + 3.9 - 2.7 + 3.6$
$= 23 - 16 + 27 - 14 + 18 = 38$,
3) $13 + 20:4 - 36:9 + 5$
$= 13 + 5 - 4 + 5 = 19$,
4) $3 + 34:17 + 5.3 + 2.4$
$= 3 + 2 + 15 + 8 = 28$,
5) $17 + 15:5 + 5.7 + 3.8$
$= 17 + 3 + 35 + 24 = 79$,
6) $16 + \frac{9}{3} + \frac{8}{2} + \frac{18}{9} + 4.10$,
$= 16 + 3 + 4 + 2 + 40 = 65$,
7) $14 + 2.13 + 3.19 + \frac{57}{3} + \frac{91}{7}$
$= 14 + 26 + 57 + 19 + 13 = 129$,
8) $3 + 5.11 + \frac{39}{13} + \frac{35}{7} + \frac{22}{11}$
$= 3 + 55 + 3 + 5 + 2 = 68$.

§ 29. **Aufgaben** I. Es ist:
1) $(3 + 4).11 = 7.11 = 77$,
2) $3 + 4.11 = 3 + 44 = 47$,
3) $(16 - 5).2 = 11.2 = 22$,
4) $16 - 5.2 = 16 - 10 = 6$,
5) $(9 + 11 + 5).3 = 25.3 = 75$,

6) $9 + 11 + 5 \cdot 3 = 9 + 11 + 15 = 35$,
7) $(8 + 4 + 2) \cdot 9 = 14 \cdot 9 = 126$,
8) $8 + 4 + 2 \cdot 9 = 8 + 4 + 18 = 40$,
9) $(13 - 8 + 2) \cdot 2 = 7 \cdot 2 = 14$,
10) $13 - 8 + 2 \cdot 2 = 13 - 8 + 4 = 9$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $18 + 5 - 7 + 24 : 8$
$= 18 + 5 - 7 + 3 = 19$,
2) $(18 + 5 - 7 + 24) \cdot 8 = 40 : 8 = 5$,
3) $22 - 4 + 27 : 9 = 22 - 4 + 3 = 21$,
4) $(22 - 4 + 27) : 9 = 45 : 9 = 5$,
5) $48 + 4 - 26 : 13 = 48 + 4 - 2 = 50$,
6) $(48 + 4 - 26) : 13 = 26 : 13 = 2$.

Aufgaben III. Man spricht:

1) $9 \cdot (3 + 4 - 1)$

9 mal . . . Klammer . . . 3 plus 4 minus 1 . . . Klammer geschlossen.

2) $(3 + 11 - 5) \cdot 4$

Klammer . . . 3 plus 11 minus 5 . . . Klammer geschlossen . . . mal 4.

3) $(4 + 9 + 5) : 3$

Klammer . . . 4 plus 9 plus 5 . . . Klammer geschlossen . . . dividirt durch 3.

§ 30. **Aufgaben.** Wenn wir die Klammern auflösen, erhalten wir:

1) $(3 + 8 + 7) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 7 \cdot 5$,
2) $(6 + 3 - 2) \cdot 8 = 6 \cdot 8 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8$,
3) $(4 + 7 - 6) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 6 \cdot 3$,
4) $(30 + 3) \cdot 40 = 30 \cdot 40 + 3 \cdot 40$,
5) $(45 + 60 - 30) : 15$
$= 45 : 15 + 60 : 15 - 30 : 15$
6) $(40 + 80 - 24) : 8$
$= 40 : 8 + 80 : 8 - 24 : 8$,
7) $(34 + 51 - 68) : 17$
$= 34 : 17 + 51 : 17 + 68 : 17$.

Wenn wir den Werth der sieben Ausdrücke ermitteln wollen, indem wir die Klammerauflösungen benützen, müssen wir in jedem einzelnen Falle die Rechnung weiter verfolgen; wir erhalten dann:

1) $(3 + 8 + 7) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 7 \cdot 5$
$= 15 + 40 + 35 = 90$,
2) $(6 + 3 - 2) \cdot 8 = 6 \cdot 8 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8$
$= 48 + 24 - 16 = 56$,
3) $(4 + 7 - 6) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 6 \cdot 3$
$= 12 + 21 - 18 = 15$,
4) $(30 + 3) \cdot 40 = 30 \cdot 40 + 3 \cdot 40$
$= 1200 + 120 = 1320$,
5) $(45 + 60 - 30) : 15$
$= 45 : 15 + 60 : 15 - 30 : 15$
$= 3 + 4 - 2 = 5$,
6) $(40 + 80 - 24) : 8$
$= 40 : 8 + 80 : 8 - 24 : 8$
$= 5 + 10 - 3 = 12$,
7) $(34 + 51 - 68) : 7$
$= 34 : 17 + 51 : 17 - 68 : 17$
$= 2 + 3 - 4 = 1$.

Berechnen wir erst die Klammern, um dann das Resulttat zu multipliciren, bezüglich zu dividiren, so gestaltet sich das Resultat folgendermaßen:

1) $(3 + 8 + 7) \cdot 5 = 18 \cdot 5 = 90$,
2) $(6 + 3 - 2) \cdot 8 = 7 \cdot 8 = 56$,
3) $(4 + 7 - 6) \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$,
4) $(30 + 3) \cdot 40 = 33 \cdot 40 = 1320$,
5) $(45 + 60 - 30) : 15 = 75 : 15 = 5$,
6) $(40 + 80 - 24) : 8 = 96 : 8 = 12$,
7) $(34 + 51 - 68) : 17 = 17 : 17 = 1$.

§ 31. Es ist:

1) $(4a + 5a - 3a + 8a) \cdot 6$
$= 4a \cdot 6 + 5a \cdot 6 - 3a \cdot 6 + 8a \cdot 6$
$= 24a + 30a - 18a + 48a = 84a$.

Zu demselben Resultat werden wir auch gelangen, wenn wir erst die Klammer berechnen; es ist nämlich:

$4a + 5a - 3a + 8a = 14a$, folglich:

$(4a + 5a - 3a + 8a) \cdot 6 = 14a \cdot 6 = 84a$

2) $(3b + 5c - 4d + 7e) \cdot 8$
$= 3b \cdot 8 + 5c \cdot 8 - 4d \cdot 8 + 7e \cdot 8$
$= 24b + 40c - 32d + 56e$,
3) $(7a + 9c + 15d - 14e) \cdot 92$
$= 7a \cdot 92 + 9c \cdot 92 + 15d \cdot 92 - 14e \cdot 92$
$= 644a + 828c + 1380d - 1288e$,
4) $(b + d + e + f) \cdot e$
$= b \cdot e + d \cdot e + e \cdot e + f \cdot e$
$= be + de + e^2 + fe$,
5) $(a + b - c + d) \cdot d$
$= a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d + d \cdot d$
$= ad + bd - cd + d^2$,
6) $(7a + 9d - 7e) \cdot f = 7a \cdot f + 9d \cdot f - 7e \cdot f$
$= 7af + 9df - 7ef$,
7) $(13a + 14c - 11f) \cdot c$
$= 13a \cdot c + 14c \cdot c - 11f \cdot c$
$= 13ac + 14c^2 - 11fc$,
8) $(17e - 8d + 3f) \cdot e$
$= 17e \cdot e - 8d \cdot e + 3f \cdot e$
$= 17e^2 - 8de + 3fe$.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 21 gestellten Fragen.

1) Die Buchstaben bedeuten in der Arithmetik beliebige oder wenigstens nicht fest bestimmte Zahlen. 1) Die Ausdrücke $2 \cdot a$, $b \cdot b$, $a \cdot c \cdot d$ schreibt man gewöhnlich $2a$, b^2, acd. 3) Die Plus- und Minuszeichen trennen die Glieder einer arithmetischen Summe von einander. 4) Die Ausdrücke $c : 7$ und $\frac{c}{7}$ bedeuten: c dividirt durch 7; die Ausdrücke $a : e$ und $\frac{a}{e}$ bedeuten: a dividirt durch e. 5) Die Multiplications- und Divisionszeichen erstrecken sich nur auf das Glied, in dem sie vorkommen. 6) Die Reihenfolge, in welcher wir die Glieder addiren bez. subtrahiren, können wir beliebig wählen, vorläufig freilich mit einer Einschränkung. Wir dürfen nämlich die Glieder nicht so ordnen, daß wir es nöthig hätten, eine größere Zahl von einer kleineren abzuziehen. 7) In $5 + 4 \cdot 8$ bezieht sich das Malzeichen nur auf die 4, in $(5 + 4) \cdot 8$ dagegen auf die ganze Summe $5 + 4$. $5 + 4$ wird in Klammern eingeschlossen, um anzudeuten, daß $5 + 4$ zusammengehört und daß sich die Multiplication auf dieses zusammengehörige Ganze zu erstrecken habe. 9) Um eine arithmetische Summe zu multipliciren, bezüglich zu dividiren, können wir zwei Wege einschlagen. Entweder können wir erst die arithmetische Summe be-

rechnen und dann das Resultat multipliciren, oder wir können die einzelnen Glieder multipliciren, bezüglich dividiren. 10) Der Multiplicand ebenso wie der Multiplicator wird Factor genannt. 11) Bei der Subtraction ist der Minuend die Zahl, welche vermindert werden soll, der Subtrahend die Zahl, welche abzuziehen ist, und die Differenz die Zahl, welche den Unterschied zwischen Minuend und Subtrahend angiebt. 12) Bei der Division ist der Dividend die Zahl, welche getheilt werden soll, der Divisor ist die Zahl, welche angiebt, in wie viel gleiche Theile der Dividend zu zerlegen ist, und der Quotient ist die Zahl, welche uns sagt, wie groß jeder einzelne der gleichen Theile ist. 13) Wenn man als Divisionszeichen einen Bruchstrich gebraucht, wird der Dividend Zähler und der Divisor Nenner genannt. 14) Die Bestandtheile einer arithmetischen Summe, welche durch Plus- oder Minuszeichen von einander getrennt sind, heißen Glieder. 15) (4 + 4 + 2) . 13 wird gesprochen: Klammer . . . 4 plus 4 plus 2 . . . Klammer geschlossen . . . mal 13. (18 — 4) . 7 spricht man: Klammer . . . 18 minus 4 . . . Klammer geschlossen . . . mal 7. 16) 6 . (13 — 12) spricht man: 6 mal Klammer . . . 13 minus 12 . . . Klammer geschlossen. 7) Der Ausdruck: 4 . (18 — 5) kann auch geschrieben werden: 4 (18 — 5); das Malzeichen darf man fortlassen. 18) Für 3 . 3 kann 3^2, für 5 . 5 . 5 kann 5^3, für c . c . c . c kann c^4 und für d . d kann d^2 geschrieben werden. 19) d^3 wird gesprochen: d hoch 3, oder d zur dritten Potenz. e^5 spricht man: e hoch 5, oder e zur fünften Potenz. f^7 wird gesprochen: f hoch 7, oder f zur siebenten Potenz. 20) In a^3 ist a die Basis und 3 der Exponent, in b^5 ist b die Basis und 5 der Exponent, in c^9 ist c die Basis und 9 der Exponent. 21) Die Subtractionsprobe beruht auf dem Satze, daß die Summe des Subtrahenden und der Differenz gleich dem Minuenden sei.

C. Die Multiplication und Division eines Products.

§ 32. Die Multiplication eines Products. Wollen wir eine Summe[1]) oder eine Differenz[1]) multipliciren, so können wir die Multiplication an jedem einzelnen Gliede der Summe, bezüglich der Differenz vollziehen. Es erhebt sich jetzt die Frage, wie wir ein Product, das aus zwei oder mehreren Factoren besteht, zu multipliciren haben. Dürfen wir, wenn wir z. B. das Product:

8 . 3 . 4

5-mal nehmen sollen, jeden der drei Factoren 8 und 3 und 4 mit 5 multipliciren oder müssen wir einen andern Weg einschlagen?

Es wird uns nicht schwer fallen, diese Frage zu beantworten. Wir werden jedenfalls zu einem richtigen Resultate gelangen, wenn wir erst 8 . 3 . 4 berechnen und dann das Ergebniß 5-mal nehmen.

8 . 3 . 4 ist gleich 96 und 96 mit 5 multiplicirt giebt **480**.

Prüfen wir, ob wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir jeden einzelnen Factor (8 und 3 und 4) mit 5 multipliciren.

8 mal 5 ist 40, 3 mal 5 ist 15, 4 mal 5 ist 20, daher wird aus

8 . 3 . 4

der Ausdruck

40 . 15 . 20.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß 40 . 15 . 20 gleich 12000 ist. Das richtige Resultat ist **480**; bei der Multiplication jedes einzelnen Factors ergiebt sich dagegen 12000. Wir dürfen daraus folgern, daß es **nicht** gestattet ist ein Product zu multipliciren, indem man **jeden** der Factoren multiplicirt.

Wir wollen jetzt in

8 . 3 . 4

einen der Factoren, etwa die 8, 5-mal nehmen, dann erhalten wir:

40 . 3 . 4.

40 . 3 . 4 ist gleich 480; es ergiebt sich also das richtige Resultat.

Multipliciren wir in 8 . **3** . 4 den Factor 3 mit 5, so erhalten wir:

8 . **15** . 4,

und nehmen wir in 8 . 3 . **4** den Factor **4** 5-mal, so ergiebt sich:

8 . 3 . **20**.

Sowohl 8 . 15 . 4 wie 8 . 3 . 20 ist gleich 480; auch in diesen beiden Fällen kommen wir zum richtigen Resultat.

Wir können also ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, multipliciren, indem wir **einen** der Factoren multipliciren.

Wollen wir demnach das Product

10 . 7 . 8 . 3 . 5

mit 2 multipliciren, so können wir entweder die 10 oder die 7 oder die 8 oder die 3 2-mal nehmen, in Zeichen, es ist:

---

1) Im § 30 des vorigen Briefes haben wir den Satz aufgestellt: **Eine arithmetische Summe können wir multipliciren, bezüglich dividiren, indem wir die einzelnen Gieder multipliciren, bezüglich dividiren.**

Eine einfache Summe wie: 3 + 4 + 7 ist auch eine arithmetische Summe, in der Minuszeichen nicht vorhanden sind, ebenso ist eine Differenz wie 13 — 8 eine arithmetische Summe, in der die Pluszeichen fehlen. Wir können daher den obigen Satz auch auf Summen und Differenzen ausdehnen.

$$(10 . 7 . 8 . 3)^{1)} . 2 = \mathbf{20} . 7 . 8 . 3^{2)}$$
$$= 10 . \mathbf{14} . 8 . 3$$
$$= 10 . 7 . \mathbf{16} . 3$$
$$= 10 . 7 . 8 . \mathbf{6}.$$

Ebenso haben wir:

$$(13 . 5 . 4 . 2) . 7 = \mathbf{91} . 5 . 4 . 2^{3)}$$
$$= 13 . \mathbf{35} . 4 . 2$$
$$= 13 . 5 . \mathbf{28} . 2$$
$$= 13 . 5 . 4 . \mathbf{14}.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge ähnlich wie bei den letzten Beispielen die Gleichungen aufstellen, wenn

1) (12 . 6 . 5 . 3) . 8, 2) (3 . 4 . 7 . 6) . 12

berechnet werden soll.

Doch gehen wir jetzt weiter! Nach unseren vorigen Auseinandersetzungen ist:

$$(4 . 8 . 5 . 2) . 9 = \mathbf{36} . 8 . 5 . 2$$
$$= 5 . \mathbf{72} . 5 . 2$$
$$= 4 . 8 . \mathbf{45} . 2$$
$$= 4 . 8 . 5 . \mathbf{18}.$$

Die **36** erhalten wir, indem wir 4 mit 9, die **72**, indem wir 8 mit 9, die **45**, indem wir 5 mit 9, die **18**, indem wir 2 mit 9 multiplicirten. Setzen wir für **36** die gleiche Größe 4 . 9, ferner 8 . 9 für **72**, 5 . 9 für **45**, 2 . 9 für **15** ein, so ergiebt sich:

$$(4 . 8 . 5 . 2) . 9 = 4 . \mathbf{9} . 8 . 5 . 2$$
$$= 4 . 8 . \mathbf{9} . 5 . 2$$
$$= 4 . 8 . 5 . \mathbf{9} . 2$$
$$= 4 . 8 . 5 . 2 . \mathbf{9}$$

Diese letzten Gleichungen sind für uns sehr lehrreich! Die linke Seite (4 . 8 . 5 . 2) . 9 fordert uns auf, das Product 4 . 8 . 5 . 2 mit 9 zu multipliciren, die vier Producte der rechten Seite sagen uns, daß wir diese Multiplication ausführen können, indem wir die 9 **an irgend einer Stelle unter die Factoren** des Products 4 . 8 . 5 . 2 **einreihen.**

---

[1]) In (10 . 7 . 8 . 3) . 2 haben wir 10 . 7 . 8 . 3 durch eine Klammer eingeschlossen, um anzudeuten, daß wir das Product 10 . 7 . 8 . 3, als zusammengehöriges Ganze aufgefaßt, mit 2 multipliciren wollen. [2]) Wir sehen unter einander vier Producte; beim ersten Product ist die 20 fettgedruckt, um anzudeuten, daß 10 mit 2 multiplicirt ist, im zweiten Product ist 14 fettgedruckt, weil wir die 7 mit 2 multiplicirt haben, und so fort. Führen wir die Rechnung aus, so ersehen wir, daß sowohl **20** . 7 . 8 . 3 wie 10 . **14** . 8 . 2 wie 10 . 7 . **16** . 3 wie 10 . 7 . 8 . **6** als Resultat 3360 ergiebt. [3]) Sowohl **91** . 5 . 4 . 2 wie 13 . **35** . 4 . 2, wie 13 . **28** . 5 . 2, wie 13 . 5 . 4 . **14** ist gleich 3640.

Demgemäß ist:

$$(8 . 4 . 5 . 9) . 13 = 8 . \mathbf{13} . 4 . 5 . 9$$
$$= 8 . 4 . \mathbf{13} . 5 . 9$$
$$= 8 . 4 . 5 . \mathbf{13} . 9$$
$$= 8 . 4 . 5 . 9 . \mathbf{13}$$

d. h. (8 . 4 . 5 . 9) . 13 ist ebenso viel wie 8 . **13** . 4 . 4 . 9 oder 8 . 4 . **13** . 5 . 9 oder 8 . 4 . 5 . **13** . 9 oder 8 . 4 . 5 . 9 . **13**.

Ueberhaupt können wir **ein Product, das aus mehreren Factoren zusammengesetzt ist,** mit einer **Zahl multipliciren,** indem wir diese **Zahl** zum **Factor des Products** machen. Da bei einem Producte die Reihenfolge der Factoren gleichgiltig ist, können wir die Zahl, mit welcher multiplicirt werden soll, unter die Factoren des Products an einer beliebigen Stelle einreihen.

Wir können aus diesem Satze noch eine wichtige Folgerung ziehen. Wie wir soeben gesehen haben, ist (8 . 4 . 5 . 9) . 13 ebenso groß wie 8 . 4 . 5 . 9 . 13, in Zeichen:

$$(8 . 4 . 5 . 9) . 13 = 8 . 4 . 5 . 9 . 13.$$

Betrachten wir diese Gleichung genauer; auf der linken Seite haben wir eine Klammer, auf der rechten Seite ist diese Klammer verschwunden, sonst ist aber nichts verändert. Da die rechte und die linke Seite einander gleich sind, können wir daraus den Schluß ziehen, **daß es überflüssig ist, eine Klammer zu setzen,** wenn ein Product aus mehreren Factoren mit einem neuen Factor multiplicirt wird. ~12. VI. 10.

3 . 4 . 6

multiplicirt mit 8 ist einfach gleich 3 . 4 . 6 . 8, und wenn die Factoren in anderer Reihenfolge geschrieben werden, gleich 3 . 4 . 8 . 6 oder gleich 3 . 8 . 4 . 6, oder gleich 8 . 4 . 3 . 6, oder gleich 8 . 6 . 3 . 4 und so fort.

a . b multiplicirt mit c ist gleich a . b . c oder gleich a . c . b, oder gleich c . a . b, oder gleich c . b . a und so fort.

Lassen wir die Malzeichen fort, so ist ab multiplicirt mit c gleich abc, oder gleich acb, oder gleich cba u. s. w. ef multiplicirt mit d giebt: efd oder edf oder def oder fde und so fort[1]).

Bemerkung I. Wenn wir das Product

---

[1]) Am liebsten läßt man die Buchstaben in der Ordnung auf einander folgen, welche sie im Alphabet haben. Man sagt also lieber def als dfe und fde, sowie lieber abc als acb und bca.

abc mit a multipliciren, erhalten wir abca, oder in anderer Reihenfolge aabc. Erinnern wir uns nun, daß wir gemäß § 23 für a . a oder aa kürzer a^2 schreiben können, so wird aus aabc das Product a^2bc.

abc multiplicirt mit b giebt demnach abbc[1]) oder ab^2c,

und abc multiplicirt mit c ist gleich abc^2.

Multipliciren wir de mit e, so erhalten wir dee oder de^2, und multipliciren wir de mit d, so ergiebt sich dde oder d^2e.

Nehmen wir an, es sei uns die Aufgabe gestellt, die Klammer

$$(ac + af + de)\ a$$

aufzulösen, so haben wir jedes Glied[2]) der arithmetischen Summe, welche durch die Klammern eingeschlossen ist, mit a zu multipliciren. Jedes dieser Glieder ist an und für sich schon ein Product aus zwei Factoren; wir werden es also mit a multipliciren, indem wir einfach noch a als Factor hinzufügen. Demgemäß können wir die Gleichung aufstellen:

$$(ac + af + de)\ a = aac + aaf + ade$$
$$= a^2c + a^2f + a^2de.$$

Ebenso ist:

$$(ab + bc + cd)\ b = abb + bbc + bcd$$
$$= ab^2 + b^2c + bcd,$$

und: $(ae + ef + df)\ f = aef + eff + dff$
$$= aef + ef^2 + df^2,$$

und:

$$(mr — np + nr)\ n = mnr — nnp + nnr$$
$$= mnr — n^2p + n^2r,$$

und:

$$(2ac + 3bc — 4cd)\ c = 2acc + 3bcc — 4ccd$$
$$= 2ac^2 + 3bc^2 — 4c^2d.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge folgende Klammern auflösen:

1) $(df + de + ae — ce)\ .\ e$,
2) $(mq + pq — rq)\ .\ q$,
3) $(3at + 5at + 7dt)\ .\ t$,
4) $(4ms + 6ns — 4rs)\ .\ s$.

Bemerkung II. Nach den vorigen Auseinandersetzungen ist 3 . 4 . 6 mit 10 multiplicirt gleich 3 . 4 . 6 . 10.

Da 10 = 2 . 5 ist, können wir dafür auch sagen:

3 . 4 . 6 multiplicirt mit 2 . 5 ist gleich 3 . 4 . 6 . 2 . 5.

3 . 4 . 6 ist ein Product, bestehend aus den drei Factoren 3, 4 und 6, ebenso ist 2 . 5 ein Product, zusammengesetzt aus den Factoren 2 und 5; 3 . 4 . 6 . 2 . 5 ist endlich ein Product, welches alle Factoren der beiden anderen Producte in sich faßt.

Der gesperrt gedruckte Satz sagt uns also:

Zwei Producte, welche aus mehreren Factoren zusammengesetzt sind, kann man mit einander multipliciren, indem man ein Product bildet, welches die Factoren der multiplicirten Producte zusammen in sich enthält.

3 . 7 . 8 multiplicirt mit 9 . 10 . 11 giebt demnach soviel wie 3 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11.

10 . 13 . 20 . 4 multiplicirt mit 19 . 34 . 15 giebt soviel wie 10 . 13 . 20 . 4 . 19 . 34 . 15.

a . b multiplicirt mit c . d ist gleich a . b . c . d,

oder anders geschrieben,

ab multiplicirt mit cd ist gleich abcd.

Multipliciren wir ade und aef mit einander, so ergiebt sich:

$$adeaef = aadeef = a^2de^2f.$$

Wird mnp mit mnr multiplicirt, so erhalten wir:

$$mnpmnr = mmnnpr = m^2n^2pr.$$

Von zwei Producten können wir unser Verfahren leicht auf drei und mehr Producte ausdehnen.

Z. B. geben die drei Producte 3 . 7 und 4 . 8 und 5 . 10 mit einander multiplicirt soviel wie

3 . 7 . 4 . 8 . 5 10.

Werden die drei Producte ab, cd und ef mit einander multiplicirt, so erhalten wir: abcdef.

Die Producte abd, ace und bcf geben bei der Multiplication

$$abdacebcf = aabbccdef = a^2b^2c^2def.$$

Sollen wir die Klammer auflösen in:

$$(ab + acd + 3bc)\ abc,$$

so haben wir jedes der Glieder der Klammer mit abc zu multipliciren. Es ist:

ab multiplicirt mit abc gleich a^2b^2c,
acd „ „ abc „ a^2bc^2d,
3bc „ „ abc „ $3ab^2c^2$.

Folglich haben wir:

$$\left\{\begin{array}{l}(ab + acd + 3bc)\ abc \\ = a^2b^2c + a^2bc^2d + 3ab^2c^2\end{array}\right\}$$

---

[1]) Wir ordnen die Buchstaben sogleich nach der Reihenfolge, welche sie im Alphabet haben. [2]) Die Glieder sind ac, af und de.

Ebenso ist:

$$\left\{\begin{array}{l}(mp - mrs + 5ms)\ mrst \\ = m^2prst - m^2r^2s^2t + 5m^2rs^2t,\end{array}\right\}$$

denn es ist:

mp multiplicirt mit mrst gleich m^2prst,
mrs „ „ mrst „ $m^2r^2s^2t$,
5ms „ „ mrst „ m^2rs^2t.

Aufgaben III. Der Schüler möge:

1) mn und np, 5) bc, cd und bd,
2) de und ef, 6) am, bm und bn,
3) lm und ln, 7) cd, cs und ds,
4) lmn und mns, 8) bcd, cde und bef

mit einander multipliciren.

Er möge ferner die folgenden Klammern auflösen:

1) (ae + af + at) af,
2) (mnp + mqr + mrv) mnr,
3) (3pqr + 5stu — 2prv) prt.

§ 33. **Die Division eines Products.** Wenn wir ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, multipliciren wollen, haben wir **nicht jeden,** sondern **nur einen** der Factoren zu multipliciren, wie am Anfang des vorigen Paragraphen von uns auseinandergesetzt wurde.

6 . 4 . 10 . 18

2-mal genommen, ist

entweder gleich **12** . 4 . 10 . 18,
oder gleich 6 . **8** . 10 . 18,
oder gleich 6 . 4 . **20** . 18,
oder gleich 6 . 4 . 10 . **36**.

Aehnlich wie mit dem Multipliciren steht es mit dem **Dividiren.** Auch wenn wir ein aus mehreren Factoren zusammengesetztes Product **dividiren** wollen, haben wir **nicht jeden** der Factoren, sondern **nur einen** derselben zu theilen.

Nehmen wir an, das schon genannte Product 6 . 4 . 10 . 18 solle durch 2 dividirt werden, so können wir entweder den Factor 6, oder den Factor 4, oder den Factor 10, oder den Factor 18 durch 2 theilen.

6 . 4 . 10 . 18 dividirt durch 2 ist daher:

entweder gleich $\frac{6}{2} . 4 . 10 . 18$,

oder gleich $6 . \frac{4}{2} . 10 . 18$,

oder gleich $6 . 4 . \frac{10}{2} . 18$,

oder gleich $6 . 4 . 10 . \frac{18}{2}$.

Führen wir die durch die Bruchstriche angedeuteten Divisionen aus, so erhalten wir der Reihe nach:

3 . 4 . 10 . 18,
6 . **2** . 10 . 18,
6 . 4 . **5** . 18,
6 . 4 . 10 . **9**.

Alle vier Producte sind, wie wir behaupten, gleich 6.4.10.18 dividirt durch 9.

In der That! Zu einem richtigen Resultate werden wir jedenfalls kommen, wenn wir das Product 6 . 4 . 10 . 18 erst berechnen und dann das Ergebniß durch 2 dividiren. Es ist nun:

6 . 4 . 10 . 18 = 4320;

4320 dividirt durch 2 giebt **2160.**

Dieses selbe Resultat erlangen wir auch, wenn wir die Producte berechnen, in denen die 3, die 2, die 5 und die 9 fettgedruckt ist, denn wir haben:

3 . 4 . 10 . 18 = **2160,**
6 . **2** . 10 . 18 = **2160,**
6 . 4 . **5** . 18 = **2160,**
6 . 4 . 10 . **9** = **2160.**

Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über! Nach der eben entwickelten Regel ist:

15 . 18 . 21 . 27 dividirt durch 3

entweder gleich $\frac{15}{3} . 18 . 21 . 27$,

oder gleich $15 . \frac{18}{3} . 21 . 27$,

oder gleich $15 . 18 . \frac{21}{3} . 27$,

oder gleich $15 . 18 . 21 . \frac{27}{3}$,

und wenn die Divisionen ausgeführt werden,

gleich **5** . 18 . 21 . 27,
oder gleich 15 . **6** . 21 . 27,
oder gleich 15 . 18 . **7** . 27,
oder gleich 15 . 18 . 21 . **9**[1]).

---

[1]) Als Resultat erhalten wir 51030, gleichviel ob wir **5** . 18 . 21 . 27, oder 15 . **6** . 21 . 27, oder 15 . 18 . **7** . 27, oder 15 . 18 . 21 . **9** multipliciren.

Ebenso ist:

35 . 21 . 28 . 14 dividirt durch 7

entweder gleich **5** . 21 . 28 . 14,
oder gleich 35 . **3** . 28 . 18,
oder gleich 35 . 21 . **4** . 14,
oder gleich 35 . 21 . 28 . **2**.

Aufgaben I. Wir wollen annehmen, es solle 39 . 26 . 52 durch 13, 30 . 45 . 60 durch 15 dividirt werden. Der Schüler möge die Division vollziehen, indem er ganz in der vorher angegebenen Weise die einzelnen Factoren theilt.

Bemerkung I. Es sei uns die Aufgabe gestellt, das Product:

10 . 15 . 25

durch 5 zu dividiren. Um diese Aufgabe in die kurze mathematische Zeichensprache zu kleiden, müssen wir uns fragen, wie

10 . 15 . 25 dividirt durch 5

geschrieben wird. Verwenden wir für „dividirt durch" den Bruchstrich, so entsteht nicht die mindeste Zweideutigkeit.

$$\frac{10 \,.\, 15 \,.\, 25}{5}$$

bedeutet zweifellos: 10 . 15 . 25 getheilt durch 5. Wenn wir aber statt des Bruchstriches zwei Punkte (:) setzen und schreiben 10 . 15 . 25 : 5, so könnte der Schüler meinen, diese Schreibweise deute nicht darauf hin, daß das ganze Product 10.15.25 durch 5 zu theilen sei, sie fordere uns vielmehr nur auf, die 25 durch 5 zu dividiren. Der Schüler wird darum vorschlagen, das Product 10 . 15 . 25 durch eine Klammer einzuschließen.

Eine leichte Ueberlegung wird uns indessen lehren, daß die Klammer überflüssig ist. Wir brauchen nur daran zu denken, daß das ganze Product dividirt ist, wenn wir einen Factor dividirt haben. Wird also auch in:

10 . 15 . 25 : 5

der Divisor 5 auf den Factor 25 bezogen und 25 durch 5 getheilt, so haben wir damit doch das ganze Product

10 . 15 . 25

durch 5 dividirt. Ohne Klammer bedeutet also 10.15.25:5 ebenso gut

10 . 15 . 25 dividirt durch 5

wie $\frac{10 \,.\, 15 \,.\, 25}{5}$.

Wenn wir uns einer der beiden Schreibweisen (des Bruchstriches oder der Punkte) bedienen und berücksichtigen, daß wir ein Product dividiren können, indem wir einen der Factoren dividiren, so können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$10 \,.\, 15 \,.\, 25 : 5 = \frac{10}{5} \,.\, 15 \,.\, 25 = \mathbf{2} \,.\, 15 \,.\, 25 = 750,$$
$$= 10 \,.\, \frac{15}{5} \,.\, 25 = 10 \,.\, \mathbf{3} \,.\, 25 = 750,$$
$$= 10 \,.\, 15 \,.\, \frac{25}{5} = 10 \,.\, 15 \,.\, \mathbf{5} = 750,$$

$$6 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 18 : 2 = \frac{6}{2} \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 18 = \mathbf{3} \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 18 = 2160,$$
$$= 6 \,.\, \frac{4}{2} \,.\, 10 \,.\, 18 = 6 \,.\, \mathbf{2} \,.\, 10 \,.\, 18 = 2160,$$
$$= 6 \,.\, 4 \,.\, \frac{10}{2} \,.\, 18 = 6 \,.\, 4 \,.\, \mathbf{5} \,.\, 18 = 2160,$$
$$= 6 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, \frac{18}{2} = 6 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, \mathbf{9} = 2160,$$

$$\frac{15 \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, 27}{3} = \frac{15}{3} \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, 27 = \mathbf{5} \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, 27 = 51030,$$
$$= 15 \,.\, \frac{18}{3} \,.\, 21 \,.\, 27 = 15 \,.\, \mathbf{6} \,.\, 21 \,.\, 27 = 51030,$$
$$= 15 \,.\, 18 \,.\, \frac{21}{3} \,.\, 27 = 15 \,.\, 18 \,.\, \mathbf{7} \,.\, 27 = 51030,$$
$$= 15 \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, \frac{27}{3} = 15 \,.\, 18 \,.\, 21 \,.\, \mathbf{9} = 51030.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge in der soeben angegebenen Weise die entsprechenden Gleichungen aufstellen, wenn

a) $33 \,.\, 55 \,.\, 88 : 11$, b) $24 \,.\, 48 \,.\, 64 : 8$

c) $\frac{18 \,.\, 27 \,.\, 45 \,.\, 90}{9}$, d) $\frac{30 \,.\, 50 \,.\, 70}{10}$.

berechnet werden soll.

§ 34. Die Division der Producte, in denen Buchstaben enthalten sind. Wie bereits in Paragraph 23 erörtert wurde, bedeutet 6a soviel wie 6 . a; 6a ist also ein Product, bestehend aus den Factoren 6 und a. Um dieses Product durch 3 zu dividiren, brauchen wir nur den e i n e n Factor, am bequemsten die 6, durch 3 zu theilen. 6 getheilt durch 3 giebt 2. Es ist daher:

$$6a : 3 = 2a.$$

Sollen wir 12b durch 4 dividiren, so werden wir die 12 durch 4 theilen; 12 getheilt durch 4 giebt 3. Wir haben mithin:

$$12b : 4 = 3b.$$

Ebenso ist:

$$21c : 7 = 3c, \quad 35d : 7 = 5d,$$
$$96e : 12 = 8e, \quad 64f : 8 = 8f,$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{21c}{7} = 3c, \quad \frac{35d}{7} = 5d,$$
$$\frac{96e}{12} = 8e, \quad \frac{64f}{8} = 8f.$$

30abc ist ein Product aus den 4 Factoren 30, a, b und c. Sollen wir dieses Product durch 6 dividiren, so werden wir 30 durch 6 theilen. 30 getheilt durch 6 ist 5. Wir erhalten also:

$$30abc : 6 = 5abc,$$

$$\text{oder } \frac{30abc}{6} = 5abc.$$

Ebenso ist: $32def : 16 = 2def$,

$$\text{oder } \frac{32def}{16} = 2def.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge berechnen:

$$15a : 5, \quad 28c : 7, \quad \frac{45f}{15}, \quad \frac{60d}{20},$$
$$26af : 13, \quad 42def : 14, \quad \frac{32cde}{8}, \quad \frac{40stu}{5}.$$

Doch verwenden wir sogleich, was dieser Paragraph uns bis jetzt gebracht hat! Wenn wir in:

$$(12ac + 18bd - 21ce + 9ef) : 3$$

die Klammer auflösen wollen, müssen wir jedes einzelne Glied, welches in der Klammer sich findet, durch 3 dividiren; also 12ac sowohl wie 18bd wie 21ce und 9ef muß durch 3 getheilt werden. Da wir im ersten Gliede nur den Factor 12, im zweiten Gliede den Factor 18, im dritten Gliede den Factor 21 und im vierten Gliede den Factor 9 zu dividiren haben, ist:

$$12ac : 3 = 4ac, \quad 18bd : 3 = 6bd,$$
$$21ce : 3 = 7ce, \quad 9ef : 3 = 3ef.$$

Demnach ist: $(12ac + 18bd - 21ce + 9ef) : 3 = 4ac + 6bd - 7ce + 3ef.$

Ferner:
$$(35ad + 21bc - 42de + 91ef) : 7 = \frac{35ad}{7} + \frac{21bc}{7} - \frac{42de}{7} + \frac{91ef}{7}$$
$$= \frac{35}{7}ad + \frac{21}{7}bc - \frac{42}{7}de + \frac{91}{7}ef$$
$$= 5ad + 3bc - 6de + 13ef,$$

und:
$$(50mnr - 20npr + 70prq + 80pst) : 10 = \frac{50mnr}{10} - \frac{20npr}{10} + \frac{70prq}{10} + \frac{80pst}{10}$$
$$= \frac{50}{10}mnr - \frac{20}{10}npr + \frac{70}{10}prq + \frac{80}{10}pst$$
$$= 5mnr - 2npr + 7prq + 8pst,$$

und:
$$(33suv + 55stv - 44rtv + 22uvt) : 11 = \frac{33suv}{11} + \frac{55stv}{11} - \frac{44rtv}{11} + \frac{22uvt}{11}$$
$$= \frac{33}{11}suv + \frac{55}{11}stv - \frac{44}{11}rtv + \frac{22}{11}uvt$$
$$= 3suv + 5stv - 4rtv + 2uvt.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge in der Weise, die wir soeben angegeben haben, die folgenden Klammern auflösen:

1) $(5ab + 10bc + 15cd) : 5$,
2) $(28amn + 42bmn + 56cst) : 14$,
3) $(75euv + 50muv + 100tuv) : 25$,
4) $(30ntu - 60stu + 45\,suv) : 15$.

Bemerkung I. Um auch Klammern auflösen zu können, welche durch einen Buchstaben dividirt werden sollen, müssen wir weiter ausholen. Wir wollen annehmen, wir sollten die 6 durch sich selbst theilen, in Zeichen: wir sollten 6 : 6 berechnen. In 6 : 6 ist 6 der Dividend und 6 der Divisor; der Divisor 6 sagt uns, daß der Dividend 6 in 6 gleiche Theile zerlegt werden soll, jeder der gleichen Theile ist gleich 1; wir haben daher (siehe § 14):

$$6 : 6 = 1 \text{ oder } \frac{6}{6} = 1.$$

Ebenso ist:

$$a : a = 1 \text{ oder } \frac{a}{a} = 1,$$

$$b : b = 1 \text{ oder } \frac{b}{b} = 1.$$

Ueberhaupt erhalten wir als Quotienten (Resultat) **immer 1, wenn wir eine Zahl durch sich selbst dividiren.**

Dieser Satz wird uns sogleich weiter führen. Es sei uns die Aufgabe gestellt, das Product

$$8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19$$

durch **13** zu dividiren. Wir werden diese Division ausführen, indem wir einen Factor, hier am besten die 13 durch 13 theilen. Wir haben dann:

$$8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19 : 13 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{13}{13} \cdot 19$$

oder $8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19 : 13 = 8 \cdot 7 \cdot \mathbf{1} \cdot 19$.

An die Stelle der 13 ist also eine **1** getreten. Wir wollen nun zusehen, welchen Einfluß die 1 auf das Product $8 \cdot 7 \cdot \mathbf{1} \cdot 19$ hat. Es ist: $5 \cdot \mathbf{1} = 5$, $6 \cdot \mathbf{1} = 6$,

ferner ist: $8 \cdot 7 \cdot \mathbf{1} = 8 \cdot 7$,

denn sowohl $8 \cdot 7 \cdot 1$ wie $8 \cdot 7$ giebt 56. Wir gewinnen aus diesen Beispielen den Satz:

Ist die **1 Factor eines Productes**, so kann sie einfach **fortgelassen** werden.

Wir hatten die Gleichung:

$$8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19 : \mathbf{13} = 8 \cdot 7 \cdot \mathbf{1} \cdot 19.$$

Bleibt die 1 auf der rechten Seite fort, so wird daraus

$$8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19 : \mathbf{13} = 8 \cdot 7 \cdot 19,$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot \mathbf{13} \cdot 19}{\mathbf{13}} = 8 \cdot 7 \cdot 19,$$

ebenso ist:

$$\frac{8 \cdot \mathbf{7} \cdot 13 \cdot 19}{\mathbf{7}} = 8 \cdot 13 \cdot 19\text{[1]},$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \mathbf{19}}{\mathbf{19}} = 8 \cdot 7 \cdot 13.$$

In allen diesen Fällen haben wir auf der linken Seite der Gleichung das Product durch einen der Factoren dividirt, erst durch 13, dann durch 7, darauf durch 19. Auf der rechten Seite der Gleichung sehen wir dann das Product ohne den Factor, durch welchen wir dividirt haben.

Wir brauchen also, um ein **Product** durch **einen der Factoren** zu **dividiren**, nur den betreffenden **Factor** aus dem Producte **fort**zulassen.

Demgemäß ist:

$$\frac{8 \cdot 11 \cdot 12}{11} = 8 \cdot 12, \qquad \frac{8 \cdot 11 \cdot 12}{8} = 11 \cdot 12,$$

$$\frac{8 \cdot 11 \cdot 12}{12} = 8 \cdot 11.$$

Ebenso:

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23}{2} = 5 \cdot 7 \cdot 23,$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23}{23} = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$

Ferner, wenn wir unsern Satz auf Buchstaben ausdehnen:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{a} = b \cdot c,$$

oder anders geschrieben,

$$\frac{abc}{a} = bc.$$

Ebenso ist:

$$\frac{abc}{b} = ac, \quad \frac{abc}{c} = ab, \quad \frac{def}{d} = ef,$$

$$\frac{3def}{e} = 3df, \quad \frac{4def}{f} = 4de.$$

---

[1]) $\frac{8 \cdot \mathbf{7} \cdot 13 \cdot 19}{\mathbf{7}} = 8 \cdot \frac{7}{7} \cdot 13 \cdot 19 = 8 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 19$
$= 8 \cdot 13 \cdot 19.$

Wollen wir die Klammer:

$$(abc + ade + 2aef) : a$$

auflösen, so haben wir jedes der Glieder abc, ade und 2aef durch a zu dividiren. Wir erhalten demnach:

$$(abc + ade + 2aef) : a = \frac{abc}{a} + \frac{ade}{a} + \frac{2aef}{a} = bc + de + 2ef,$$

ebenso:

$$(mnr - muv + mst) : m = \frac{mnr}{m} - \frac{muv}{m} + \frac{mst}{m} = nr - uv + st.$$

Doch gehen wir weiter! Wenn wir

$$5 . 7 . 9 . 13 . 17$$

durch 7 theilen, ergiebt sich:

$$5 . 9 . 13 . 17.$$

Wie wird sich nun die Rechnung gestalten, wenn wir 5 . 7 . 9 . 17 durch 7 . 9 oder durch 7 . 9 . 13 dividiren? Dürfen wir dann auch die Factoren 7 . 9 oder 7 . 9 . 13 aus dem Producte 5 . 7 . 9 . 13 . 17 einfach fortlassen und die Gleichungen:

$$\frac{5 . \mathbf{7} . \mathbf{9} . 13 . 17}{\mathbf{7} . \mathbf{9}} = 5 . 13 . 17$$

und $\frac{5 . \mathbf{7} . \mathbf{9} . \mathbf{13} . 17}{\mathbf{7} . \mathbf{9} . \mathbf{13}} = 5 . 17$

aufstellen?

Eine leichte Ueberlegung wird uns lehren, daß wir in der That so verfahren dürfen. Es ist jedenfalls:

$$\frac{5 . \mathbf{63} . 13 . 17}{\mathbf{63}} = 5 . 13 . 17$$

ebenso $\frac{5 . \mathbf{819} . 17}{\mathbf{819}} = 5.17.$

Nun ist aber 63 = 7 . 9 und 819 = 7 . 9 . 13. Setzen wir in den beiden vorigen Gleichungen 7 . 9 für die gleiche Größe 63 und 7 . 9 . 13 für die gleiche Größe 819 ein, so erhalten wir:

$$\frac{5 . \mathbf{7} . \mathbf{9} . 13 . 17}{\mathbf{7} . \mathbf{9}} = 5 . 13 . 17$$

und $\frac{5 . \mathbf{7} . \mathbf{9} . \mathbf{13} . 17}{\mathbf{7} . \mathbf{9} . \mathbf{13}} = 5 . 17.$

Ebenso wird:

$$\frac{2 . 11 . 23 . 29}{11 . 23} = 2 . 29,$$

$$\frac{22 . 9 . 31 . 15 . 90}{9 . 31 . 15} = 22 . 90,$$

$$\frac{a . b . c . d}{b . c} = a . d,$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{abcd}{bc} = ad,$$

ferner: $\frac{abcde}{bcd} = ae,$

$$\frac{abcde}{ade} = bc,$$

$$\frac{mnpqrstuv}{pqrs} = mntuv \text{ sein.}$$

Formuliren wir mit Hilfe des letzten Beispiels genau, wie wir verfahren sind. Wir hatten das Product mnpqrstuv zu dividiren. Der Divisor (Nenner) pqrs war wieder ein Product, bestehend aus Factoren, welche bereits in dem ersten Producte enthalten waren. Wir vollzogen die Division, indem wir die Factoren des Divisors (Nenners) einfach aus dem zu dividirenden Producte fortließen. Also:

um ein Product durch **mehrere seiner Factoren** zu dividiren, die mit einander multiplicirt sind, können wir diese **Factoren** aus dem Producte einfach **fortlassen.**

Wenn wir in:

$$(4abcd + 3bcde + 5bcdf) : bcd$$

die Klammer auflösen sollen, haben wir jedes einzelne Glied der Klammer durch bcd zu dividiren. Es ist daher:

$$(4abcd + 3bcde + 5bcdf) : bcd = \frac{4abcd}{bcd} + \frac{3bcde}{bcd} + \frac{5bcdf}{bcd} = 4a + 3e + 5f.$$

Ebenso: $(7mnpqr + 5pqrs - 3pqrtu) : pqr = \frac{7mnpqr}{pqr} + \frac{5pqrs}{pqr} - \frac{3pqrtu}{pqr} = 7mn + 5s - 3tu.$

Aufgaben III. Der Schüler möge in folgenden Ausdrücken:

$(3 \,.\, 7 \,.\, 5 + 6 \,.\, 7 \,.\, 8 - 2 \,.\, 7 \,.\, 3) : 7,$
$(5 \,.\, 9 \,.\, 2 + 3 \,.\, 9 \,.\, 2 - 4 \,.\, 9 \,.\, 2) : 9 \,.\, 2,$
$(auv - btu + csu) : u,$
$(cst + dst + stv) : st,$
$(mnprq + mnpst) : mnp$

die Klammern auflösen.

Bemerkung II. In: $\frac{7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13}{9 \,.\, 13}$ dividiren wir das Product 7 . 9 . 11 . 14 durch zwei seiner Factoren 9 . 13, die in 7 . 9 . 11 . 13 nicht neben einander stehen. Auch in diesem Falle können wir einfach die 9 und die 13 aus dem Producte 7 . 9 . 11 . 13 fortlassen, denn die Ordnung, in der sich die Factoren im Product folgen, kann ja, wie wir öfters erörtert haben, beliebig verändert werden. Es ist darum auch:

$$\frac{abcd}{ad} = bc \text{ und } \frac{mnpqr}{nr} = mpq.$$

Lösen wir in:

$$(3mnpqr + 4nstr) : nr$$

die Klammer auf, so erhalten wir:

$$(3mnpqr + 4nstr) : nr = \frac{3mnpqr}{nr} + \frac{4nstr}{nr}$$
$$= 3mpq + 4st.$$

Es giebt wenig Dinge, die an sich unmöglich sind, und der Fleiß, sie gelingen zu lassen, fehlt uns mehr als die Mittel.

Lection 23.

A. Die Multiplication und Division von Potenzen mit gleicher Basis.

§ 35. Die Multiplication von Potenzen mit gleicher Basis. 5^2 ist die zweite Potenz, 5^4 ist die vierte Potenz von 5. In 5^2 ist 5 die Basis und 2 der Exponent, in 5^4 ist 5 gleichfalls die Basis und 4 der Exponent. Die beiden Potenzen 5^2 und 5^4 haben also verschiedene Exponenten und — worauf wir zu achten bitten — die gleiche Basis. Der Exponent giebt uns an, wie oft wir die Basis als Factor zu setzen haben. Es ist also:

$$5^2 = 5 \,.\, 5 \text{ und } 5^4 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5.$$

Wollen wir 5^2 mit 5^4 multipliciren d. h. $5^2 \,.\, 5^4$ berechnen, so können wir daher,

5 . 5 für 5^2 und 5 . 5 . 5 . 5 für 5^4 schreiben und auf diese Weise die Gleichung:

$$5^2 \,.\, 5^4 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$$

erhalten. Auf der rechten Seite dieser Gleichung sehen wir 6 Factoren, deren jeder 5 ist. Für die rechte Seite können wir mithin kürzer 5^6 schreiben. Wir haben dann die Gleichung:

$$5^2 \,.\, 5^4 = 5^6.$$

Betrachten wir diese Gleichung genauer! Auf der linken Seite sehen wir ein Product von 2 Potenzen mit der gleichen Basis 5, auf der rechten Seite finden wir eine Potenz auch mit der Basis 5 und mit dem Exponenten 6. Es fragt sich nun, **wie** der Exponent 6 aus den beiden Exponenten 2 **und** 4 der linken Seite hervorgegangen ist.

Da die Potenzen 5^2 und 5^4 mit einander multiplicirt sind, läge es nahe zu glauben, daß der Exponent 6 durch Multiplication der beiden Exponenten 2 und 4 entstanden sei. Das ist indessen **nicht** so, denn 2 mal 4 giebt nicht 6, sondern 8. **Addiren wir** aber **2 und 4,** so erhalten wir **6.** Kleiden wir diese Bemerkung in die knappe mathematische Zeichensprache, so können wir schreiben:

$$5^2 \,.\, 5^4 = 5^{2+4} = 5^6.$$

Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über! Es sei uns die Aufgabe gestellt, 7^3 und 7^5 mit einander zu multipliciren. Es ist:

$$7^3 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \text{ und } 7^5 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7.$$

Mithin haben wir:

$$7^3 \,.\, 7^5 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7.$$

Auf der rechten Seite sehen wir ein Product, bei welchem die 7 erst 3-mal und dann noch 5-mal, im Ganzen also 3 + 5 = 8-mal als Factor vertreten ist. Nach § 11 können wir deswegen 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 in

Form einer Potenz schreiben, deren Basis 7 ist. Der Exponent, d. h. die Zahl, welche angiebt, wie oft die Basis 7 als Factor vorkommt, ist $3 + 5$ oder ausgerechnet 8. $7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7$ kann mithin kürzer geschrieben werden:

$$7^{3+5} \text{ oder } 7^8.$$

Wählen wir diese Schreibweise, so wird aus der Gleichung:

$$7^3 . 7^5 = 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7 . 7$$

die zweite:

$$7^3 . 7^5 = 7^{3+5} = 7^8.$$

Ebenso wird sein:

$$8^5 . 8^6 = 8^{5+6} = 8^{11},$$
$$2^7 . 2^8 = 2^{7+8} = 2^{15},$$
$$12^2 . 12^{11} = 12^{2+11} = 12^{13},$$

und wenn wir für Zahlen Buchstaben setzen:

$$a^2 . a^3 = a^{2+3} = a^5,$$
$$b^4 . b^5 = b^{4+5} = b^9,$$
$$m^3 . m^8 = m^{3+8} = m^{11},$$
$$m^a . m^b = m^{a+b},$$
$$n^a . n^a = n^{a+a} = n^{2a},$$
$$p^c . p^d = p^{c+d},$$
$$p^d . p^d = p^{d+d} = p^{2d}.$$

Kleiden wir unsere Auseinandersetzungen in die Form eines Lehrsatzes, so können wir sagen:

Zwei Potenzen mit gleichen Basen können mit einander multiplicirt werden, indem man die Exponenten addirt.

Aufgaben I. Der Schüler möge in der soeben ausgeführten Weise die unter 1 bis 12 genannten Potenzen mit gleichen Basen mit einander multipliciren, indem er die Exponenten addirt:

1) $10^2 . 10^5$, 2) $11^9 . 11^{10}$, 3) $a^7 . a^5$,
4) $b^{10} . b^{10}$, 5) $c^{11} . c^{12}$, 6) $d^6 . d^9$,
7) $e^{13} . e^{12}$, 8) $f^{15} . f^{11}$, 9) $m^c . m^d$,
10) $n^e . n^f$, 11) $s^u . s^v$, 12) $t^c . t^d$.

Wollen wir die Klammer:

$$(a^2b + a^3c + a^4e)\, a^5$$

auflösen, so müssen wir jedes der Glieder a^2b, a^3c, a^4e mit a^5 multipliciren. Nun ist:

$$a^2b . a^5 = a^2a^5b = a^{2+5}b = a^7b,\ ^{1)}$$
$$a^3c . a^5 = a^3a^5b = a^{3+5}b = a^8b.$$

Folglich haben wir:

$$(a^2b + a^3c + 5a^4e)\, a^5 = a^2a^5b + a^3a^5c + 5a^4a^5e$$
$$= a^{2+5}b + a^{3+5}c + 5a^{4+5}e,$$
$$= a^7b + a^8c + 5a^9e,$$

ebenso ist: $(n^4p + mn^5r + mn^7s)\, n^8 = n^4n^8p + mn^5n^8r + mn^7n^8s$
$$= n^{4+8}p + mn^{5+8}r + mn^{7+8}s$$
$$= n^{12}p + mn^{13}r + mn^{15}s,$$

und $(n^4p^2 + m^2n^5r^2 + m^6n^7s^3)\, n^8 = n^4n^8p^2 + m^2n^5n^8r^2 + m^6n^7n^8s^3$
$$= n^{4+8}p^2 + m^2n^{5+8}r^2 + m^6n^{7+8}s^3$$
$$= n^{12}p^2 + m^2n^{13}r^2 + m^6n^{15}s^3,$$

und $(pqr^a + r^bst + r^cuv)\, r^d = pqr^ar^d + r^br^dst + r^cr^duv$
$$= pqr^{a+d} + r^{b+d}st + r^{c+d}uv.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge folgende Klammern auflösen:

1) $(9ab^2c - b^3cd + b^5ef)\, b^4$,
2) $(13ad^6e^2 + 15bd^5f + 10ad^7)\, d^8$,
3) $(16mn^2 + 17mn^5s + 13mn^7t^2)\, n^{12}$,
4) $(s^at + s^cu + s^dv)\, s^e$,
5) $(u^ms + u^nt + u^pv)\, u^q$,
6) $(v^c + sv^e + tvd)\, v^b$.

Bemerkung I. Zwei Potenzen mit gleichen Basen können wir mit einander multipliciren, indem wir die Exponenten addiren. Es ist $9^5 . 9^6 = 9^{5+6} = 9^{11}$. Wie wird sich nun die Rechnung gestalten, wenn wir drei oder mehr Potenzen mit gleichen Basen multipliciren sollen, wenn etwa $9^5 . 9^6 . 9^7$ oder $a^2 . a^3 . a^4 . a^5$ zu berechnen ist? Dürfen wir dann auch die Exponenten addiren und die Gleichungen:

$$9^5 . 9^6 = 9^{5+6} = 9^{11}$$
$$a^2 . a^3\, a^4 . a^5 = a^{2+3+4+5}$$ aufstellen?

---

1) Der Schüler möge bedenken, daß man bei der Multiplication der Buchstaben die Malzeichen fortlassen und die Factoren eines Productes in einer beliebigen Reihenfolge ordnen kann.

Wir werden sogleich finden, daß wir dazu berechtigt sind; jedenfalls können wir zwei Potenzen multipliciren, indem wir die Exponenten zusammenzählen. Führen wir dies in $9^2 . 9^5 . 9^8$ bei den beiden ersten Potenzen 9^2 und 9^5 aus, so erhalten wir: $9^2 . 9^5 = 9^{2+5}$.

Folglich: $9^2 . 9^5 . 9^8 = 9^{2+5} . 9^8 = 9^7 . 9^8$.

Behandeln wir auch $9^7 . 9^8$ nach unserer Regel, so ist $9^7 . 9^8 = 9^{7+8} = 9^{15}$.

Mithin haben wir.

$9^2 . 9^5 . 9^8 = 9^{2+5} . 9^8 = 9^7 . 9^8 = 9^{7+8} = 9^{15}$.

Setzen wir für 15 die gleiche Größe $2 + 5 + 8$ ein, so ist:

$$9^2 . 9^5 . 9^8 = 9^{2+5+8}.$$

Auf ähnlichem Wege können wir zeigen, daß $a^2a^3a^4a^5 = a^{2+3+4+5} = a^{14}$ ist.

Ebenso ist:

$$5^3 . 5^7 . 5^9 = 5^{3+7+9} = 5^{19},$$
$$e^8e^3e^{12} = e^{8+3+12} = e^{23},$$
$$f^{12}f^{13}f^{15}f^{17} = f^{12+13+15+17} = f^{57},$$
$$m^am^bm^cm^d = m^{a+b+c+d}.$$

Aufgaben III. Der Schüler möge:

1) $10^3 . 10^5 . 10^7$,	2) $13^8 . 13^{16} . 13^{23}$,
3) $d^9d^{13}d^{24}d^{29}$,	4) $n^{10}n^{10}n^{10}n^{10}$,
5) $p^bp^cp^dp^e$,	6) $r^sr^tr^ur^v$ berechnen.

Bemerkung II. Wie wir wissen, ist:

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^4 = aaaa \text{ u. s. w.}$$

Wir haben in diesen Gleichungen nach einander die Exponenten 2, 3 und 4. Der Schüler wird nun die Frage an uns richten wollen, ob denn die Reihe der Exponenten erst mit der 2 beginnt, und ob nicht eine Potenz mit dem Exponenten 1 einen Sinn habe. In der That! a^2 ist gleich aa, a^3 gleich aaa; a^1 wird also einfach gleich a sein. Für b werden wir mithin b^1, für c ebenso c^1, für 13 ebenso 13^1 setzen können. Auch von dieser ersten Potenzen a^1, b^1, 13^1 u. s. w. gelten die Regeln, die wir über die Multiplication der Potenzen aufgestellt haben. Es ist:

$$5^2 . 5 = 5^2 . 5^1 = 5^{2+1} = 5^3,$$
$$a^3a^2a = a^3a^2a^1 = a^{3+2+1} = a^6,$$
$$b^4b^5b = b^4b^5b^1 = b^{4+5+1} = b^{10}.$$

§ 36. Die Division von Potenzen mit gleichen Basen.

Um Potenzen mit gleichen Basen zu multipliciren, können wir ihre Exponenten addiren. Wir müssen uns nun fragen, wie wir zu verfahren haben, wenn wir zwei Potenzen mit gleichen Basen durch einander dividiren sollen. Nehmen wir an, es solle a^6 durch a^2 dividirt, oder in Zeichen, es solle $\frac{a^6}{a^2}$ berechnet werden. Es ist: $a^6 = aaaaaa$, $a^2 = aa$, mithin haben wir:

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaaa}{aa}.$$

Auf der rechten Seite sehen wir im Dividenden (Zähler) aaaaaa die Factoren aa des Divisors (Nenners) vertreten. Wir können die Division deswegen ausführen, indem wir einfach die Factoren des Divisors (Nenners) im Dividenden (Zähler) fortlassen. Es ist mithin:

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4,$$

$$\text{oder kürzer } \frac{a^6}{a^2} = a^4.$$

Ueberlegen wir uns jetzt, wie der Exponent **4** der rechten Seite aus den beiden Exponenten **6** und **2** der linken Seite hervorgegangen ist. Jedenfalls **nicht** durch **Division**, denn 6 dividirt durch 2 giebt 3 und nicht 4; wir gelangen vielmehr zu dem Exponenten 4, indem wir 2 von 6 abziehen, d. h., indem wir den Exponenten 2 des Divisors vom Exponenten 6 des Dividenden **subtrahiren.**

Das ganze Verfahren wird durch die folgende Gleichung ersichtlich:

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4.$$

Wenden wir uns zu einem zweiten Beispiele, das dazu dienen möge, unser Verfahren noch von einer andern Seite zu beleuchten! Es sei uns die Aufgabe gestellt $\frac{7^8}{7^5}$ zu berechnen. Wie wir wissen, ist

$$\frac{7^8}{7^5} = \frac{7.7.7.7.7.7.7.7}{7.7.7.7.7}.$$

Die Division, welche durch den Bruchstrich der rechten Seite angedeutet ist, können wir ausführen, indem wir die Factoren des Nenners im Zähler fortlassen, d. h. indem wir die 8 Sieben des Zählers um die 5 Sieben des Nenners vermindern. Es werden dann noch 8 — 5 Sieben übrig bleiben, und zwar, genauer gesagt ein Product von 8 — 5 Factoren, deren jeder eine 7 ist. Ein solches

Product können wir gemäß § 11 kürzer schreiben: 7^{8-5}. Es ist demnach $\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} = 7^3$.

Ebenso wird sein:

$$\frac{b^{12}}{b^{10}} = b^{12-10} = b^2, \quad \frac{c^{13}}{c^7} = c^{13-7} = c^6,$$

$$\frac{12^5}{12^2} = 12^{5-2} = 12^3, \quad \frac{15^9}{15^4} = 15^{9-4} = 15^5,$$

$$\frac{18^{10}}{18} = \frac{18^{10}}{18^1} = 18^{10-1} = 18^9,$$

$$\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}, \quad \frac{p^s}{p^t} = p^{s-t}.$$

Als Divisionszeichen können wir statt des Bruchstriches auch die 2 Punkte (:) wählen; es ist dann:

$$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3,$$
$$b^{12} : b^{10} = b^{12-10} = b^2,$$
$$c^{13} : c^7 = c^{13-7} = c^6,$$
$$a^c : a^d = a^{c-d}.$$

Wenn wir das Verfahren, welches wir bei allen diesen Beispielen beobachtet haben, bestimmt formuliren, haben wir den Satz:

Zwei **Potenzen mit gleicher Basis** können wir durch einander **dividiren,** indem wir den **Exponenten des Divisors** (Nenners) **vom Exponenten des Dividenden** (Zählers) **subtrahiren.**

Aufgaben. Der Schüler möge folgende Aufgaben lösen:

1) $\frac{8^7}{8^4}$, 2) $\frac{17^9}{17^5}$, 3) $\frac{23^{10}}{23^8}$, 4) $\frac{29^{45}}{29^{30}}$,

5) $\frac{m^7}{m^4}$, 6) $\frac{n^9}{n^6}$, 7) $\frac{s^{10}}{s^5}$, 8) $\frac{t^{13}}{t^{10}}$,

9) $4^5 : 4^2$, 10) $7^4 : 7^2$, 11) $n^{14} : n^{10}$, 12) $v^{16} : v^9$.

Sollen wir die Klammer:

$$(a^7b + a^6b + a^8d) : a^5$$

auflösen, so haben wir jedes der Glieder a^7b, a^6c, a^8d durch a^5 zu dividiren. Alle drei Glieder sind Producte aus zwei Factoren zusammengesetzt. a^7b besteht aus den Factoren a^7 und b, a^6c aus den Factoren a^6 und c, a^8d aus den Factoren a^8 und d.

Nach § 34 können wir ein Product durch a^5 dividiren, indem wir einen Factor durch a^5 theilen. Es ist deshalb:

$$\frac{a^7b}{a^5} = \frac{a^7}{a^5}b = a^{7-5}b = a^2b,$$

$$\frac{a^6c}{a^5} = \frac{a^6}{a^5}c = a^{6-5}c = a^1c,$$

$$\frac{a^8d}{a^5} = \frac{a^8}{a^5}d = a^{8-5}d = a^3d.$$

Mithin: $(a^7b + a^6c + a^8d) : a^5 = \frac{a^7b}{a^5} + \frac{a^6c}{a^5} + \frac{a^8d}{a^5}$
$= \frac{a^7}{a^5}b + \frac{a^6}{a^5}c + \frac{a^8}{a^5}d$
$= a^{7-5}b + a^{6-5}c + a^{8-5}d$
$= a^2b + ac + a^3d.$

Ebenso ist:

$$(3abc^8 + 4bc^7d - 2c^9de + 6c^{10}f) : c^4 = \frac{3abc^8}{c^4} + \frac{4bc^7d}{c^4} - \frac{2c^9de}{c^4} + \frac{6c^{10}f}{c^4}$$
$$= 3ab\frac{c^8}{c^4} + 4b\frac{c^7}{c^4}d - 2\frac{c^9}{c^4}de + 6\frac{c^{10}}{c^4}f$$
$$= 3abc^{8-4} + 4bc^{7-4}d - 2c^{9-4}de + 6c^{10-4}f$$
$$= 3abc^4 + 4bc^3d - 2c^5de + 6c^6f,$$

und: $(5mn^{12}p - 7n^8pq + 6mn^{13}p^2r^3) : n^7 = \frac{5mn^{12}p}{n^7} - \frac{7n^8pq}{n^7} + \frac{6mn^{13}p^2r^3}{n^7}$
$= 5m\frac{n^{12}}{n^7}p - 7\frac{n^8}{n^7}pq + 6m\frac{n^{13}}{n^7}p^2r^3$
$= 5mn^{12-7}p - 7n^{8-7}pq + 6mn^{13-7}p^2r^3$
$= 5mn^5p - 7npq + 6mn^6p^2r^3.$

$$\text{und: } (s^a t + s^c u + s^d v) : s^e = \frac{s^a t}{s^e} + \frac{s^c u}{s^e} + \frac{s^d v}{s^e}$$
$$= \frac{s^a}{s^e} t + \frac{s^c}{s^e} u + \frac{s^d}{s^e} v$$
$$= s^{a-e} t + s^{c-e} u + s^{d-e} v.$$

Aufgaben. Der Schüler möge in der soeben ausgeführten Weise folgende Klammern auflösen:

1) $(10c^7m + 8c^{12}n - 4c^{17}p) : c^2$,
2) $(7d^9mn^2 + 4d^{13}uv - 5d^{15}st) : d^5$,
3) $(8f^mn + 9f^pq - 3f^qp) : f^r$.

§ 37. Division eines Productes durch ein anderes Product. Um a^8 durch a^5 zu dividiren, oder anders ausgedrückt, um $\frac{a^8}{a^5}$ zu berechnen, brauchen wir nur den Exponenten 5 des Divisors (Nenners) vom Exponenten 8 des Dividenden (Zählers) zu subtrahiren. Wie wir wissen, ist ja

$$\frac{a^8}{a^5} = a^{8-5} = a^3.$$

Wir wollen uns nun fragen, wie wir zu verfahren haben, wenn wir das Product a^8b^9 durch a^5b^4 theilen sollen. Dürfen wir dann auch den Exponenten 5 der Potenz a^5 vom Exponenten 8 der Potenz a^8 und den Exponenten 4 der Potenz b^4 vom Exponenten 9 der Potenz b^9 abziehen und die Gleichungen aufstellen:

$$\frac{a^8b^9}{a^5b^4} = a^{8-5}b^{9-4} = a^3b^5\,?$$

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir weiter ausholen!

Wir wollen annehmen, wir hätten

$$\frac{7 \,.\, 15 \,.\, 6 \,.\, 8}{5 \,.\, 4}$$

zu berechnen. Durch Multiplication erhalten wir:

$$7 \,.\, 15 \,.\, 6 \,.\, 8 = 5040,$$
$$\text{und} \quad 5 \,.\, 4 = 20.$$

Folglich ist:

$$\frac{7 \,.\, 15 \,.\, 6 \,.\, 8}{5 \,.\, 4} = \frac{5040}{20} = 252.$$

Zu demselben Resultat (252) gelangen wir, wenn wir in dem Dividenden (Zähler) 7 . 15 . 6 . 8 einen Factor durch den Factor 5 des Divisors (Nenners) und einen andern Factor durch den Factor 4 des Divisors dividiren. Da 5 in 15 und 4 in 8 aufgeht, werden wir in 7 . 15 . 6 . 8 am besten die 15 durch 5 und die 8 durch 4 theilen. Es ist dann:

$$\frac{7 \,.\, 15 \,.\, 6 \,.\, 8}{5 \,.\, 4} = 7 \,.\, \frac{15}{5} \,.\, 6 \,.\, \frac{8}{4} = 7 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 2 = 252.$$

Ebenso ist:

$$\frac{10 \,.\, 27 \,.\, 33}{9 \,.\, 11} = 10 \,.\, \frac{27}{9} \,.\, \frac{33}{11} = 10 \,.\, 3 \,.\, 3 = 90,$$

und

$$\frac{26 \,.\, 34 \,.\, 32}{13 \,.\, 17 \,.\, 8} = \frac{26}{13} \,.\, \frac{34}{17} \,.\, \frac{32}{8} = 2 \,.\, 2 \,.\, 4 = 16.$$

Also wir können **ein Product** durch ein **anderes Product** theilen, indem wir **jeden Factor des Divisors** (Nenners) in **irgend einem Factor des Dividenden** (Zählers) dividiren.

Wenn wir bei Potenzen nach diesem Satze verfahren, erhalten wir:

$$\frac{8^9 \,.\, 7^6}{8^3 \,.\, 7^2} = \frac{8^9}{8^3} \,.\, \frac{7^6}{7^2} = 8^{9-3} \,.\, 7^{6-2} = 8^6 \,.\, 7^4,$$

ferner:

$$\frac{a^8 \,.\, b^9}{a^5 \,.\, b^4} = \frac{a^8}{a^5} \,.\, \frac{b^9}{b^4} = a^{8-5} \,.\, b^{9-4} = a^3 \,.\, b^5,$$

oder wenn wir an den geeigneten Stellen die Malzeichen fortlassen,

$$\frac{a^8b^9}{a^5b^4} = \frac{a^8}{b^5} \,.\, \frac{b^9}{b^4} = a^{8-5}b^{9-4} = a^3b^5,$$

Ebenso ist:

$$\frac{mn^5p^7q}{n^2p^2} = m \,.\, \frac{n^5}{n^2} \,.\, \frac{p^7}{p^2} q = mn^{5-2}p^{7-2}q$$
$$= mn^3p^5q.$$

Wir hätten für „dividirt durch" auch überall statt des Bruchstriches die beiden Punkte (:) setzen können.

Sollen wir in:

$$(2a^{10}b^{11}c + 3a^9b^4d + 8a^6b^8e) : a^4b^2$$

die Klammer auflösen, so haben wir jedes der drei Glieder

$$2a^{10}b^{11}c, \quad 3a^9b^4d, \quad 8a^6b^8e$$

durch a^4b^2 zu theilen und erhalten dann:

$$(2a^{10}b^{11}c + 3a^9b^4d + 8a^6b^8e) : a^4b^2 = \frac{2a^{10}b^{11}c}{a^4b^2} + \frac{3a^9b^4d}{a^4b^2} + \frac{8a^6b^8e}{a^4b^2}$$
$$= 2 \cdot \frac{a^{10}}{a^4} \cdot \frac{b^{11}}{b^2} c + 3 \cdot \frac{a^9}{a^4} \cdot \frac{b^4}{b^2} d + 8 \cdot \frac{a^6}{a^4} \cdot \frac{b^8}{b^2} \cdot e$$
$$= 2a^{10-4}b^{11-2}c + 3a^{9-4}b^{4-2}d + 8a^{6-4}b^{8-2}e$$
$$= 2a^6b^9c + 3a^5b^2d + 8a^2b^6e,$$

ebenso:

$$(5m^{15}n^{17}p - 8m^{20}n^{23}q + 6m^{12}n^{19}r^2) : m^5n^6 = \frac{5m^{15}n^{17}p}{m^5n^6} - \frac{8m^{20}n^{23}q}{m^5n^6} + \frac{6m^{12}n^{19}r^2}{m^5n^6}$$
$$= 5 \cdot \frac{m^{15}}{m^5} \cdot \frac{n^{17}}{n^6} \cdot p - 8 \cdot \frac{m^{20}}{m^5} \cdot \frac{n^{23}}{n^6} \cdot q + 6 \cdot \frac{m^{12}}{m^5} \cdot \frac{n^{19}}{n^6} \cdot r^2$$
$$= 5m^{15-5}n^{17-6}p - 8m^{20-5}n^{23-6}q + 6m^{12-5}n^{19-6}r^2$$
$$= 5m^{10}n^{11}p - 8m^{15}n^{17}q + 6m^7n^{13}r^2.$$

Aufgaben. a) Der Schüler möge

1) $\frac{7^8 \cdot 8^{10} \cdot 13^{14}}{8^5 \cdot 13^7}$, 2) $\frac{15^4 \cdot 17^{13} \cdot 19^6}{17^8 \cdot 19^2}$,

3) $\frac{25^7 \cdot 27^4}{25^4 \cdot 27^2}$, 4) $\frac{r^5s^7t}{r^3s^3}$, 5) $\frac{r^9u^7v^{10}}{u^2v^2}$,

6) $\frac{m^an^b}{m^cn^d}$ berechnen, er möge b) in:

$(8m^8n^4p^2 + 6m^5n^6q^3 + 3m^{10}n^{10}r) : m^3n^3$ und
$(3u^{15}v^{14}t - 2u^9v^{12} + su^{11}v^{12}) : u^5v^4$

die Klammern auflösen.

B. Die positiven und negativen Größen.

§ 38. Die positiven und negativen Vorzeichen. In der arithmetischen Summe:

$$8 + 7 - 5 + 4 - 2 + 13$$

sind die Zahlen 8, 7, 5, 4, 2 und 13 die Glieder; vor dem Gliede 7 sehen wir ein +, vor dem Gliede 5 ein —, vor dem Gliede 4 wieder ein + u. s. f. Diese **Zeichen** (+ oder —), welche **vor** den einzelnen Gliedern stehen, heißen die **Vorzeichen** der Glieder; und zwar wird

+ ein **positives**[1]) Vorzeichen
und — ein **negatives**[1]) Vorzeichen

genannt. In:

$$8 + 7 - 5 + 4 - 2 + 13$$

haben demnach die Glieder 7, 4 und 13 ein positives und die Glieder 5 und 2 ein negatives Vorzeichen.

Wenn man ein einzelnes Glied aus einer arithmetischen Summe hervorhebt, pflegt man zugleich das Vorzeichen des Gliedes anzugeben; und zwar nennt man ein Glied mit positiven Vorzeichen eine **positive Größe** und ein Glied mit negativem Vorzeichen eine **negative Größe.** In: 8 + 7 — 5 + 4 — 2 + 13 sind + 7, + 4 und + 13 positive Größen, und — 5 und — 2 negative Größen.

In: 13 — 12 + 15 — 13 + 2 + 4 — 6 steht vor der 15, der 2 und der 4 ein positives, vor der 12, der 13 und der 6 ein negatives Vorzeichen. + 15, + 2 und + 4 sind daher positive und — 12, — 13 und — 6 sind negative Größen.

In: 3a + 6b — 5c + 8d — 3e haben wir zwei positive und zwei negative Vorzeichen; + 6b und + 8d sind die positiven, — 5c und — 3e die negativen Größen.

In: $9mn + 6\frac{pq}{r} - 7\frac{st}{u} - \frac{8pq}{r}$

haben wir ein positives und zwei negative Vorzeichen. $+ 6\frac{pq}{r}$ ist eine positive Größe, $- 7\frac{st}{u}$ und $- \frac{8pq}{r}$ sind negative Größen.

Aufgaben. Der Schüler möge bei folgenden arithmetischen Summen:

1) 19 + 8 — 3 + 7 — 10 + 2 + 19 — 18,
2) 9a + 6b — 5c + 3d + 5e,
3) 18ab + 13cd — 5ef + 10de,
4) $\frac{cd}{e} + \frac{15ef}{c} - \frac{19mn}{p} - \frac{21st}{u} + 3uv$

angeben

1) welche Glieder ein positives und welche Glieder ein negatives Vorzeichen haben,
2) welche Glieder mithin positive und welche Glieder negative Größen sind.

[1]) Positiv kommt her von dem lateinischen Zeitwort ponere „setzen, bejahen" und negativ von dem Zeitwort negare „verneinen".

§ 40. Die Vertauschung der Glieder einer arithmetischen Summe. Wie wir in § 7 ausführlich erörtert haben, können wir die Reihenfolge, in der wir bei einer arithmetischen Summe die Additionen und Subtractionen vornehmen, nach unserm Belieben wählen. Es ist:

$$13 - 5 + 8 - 3 + 7 - 2$$

ebenso groß wie:

$$13 + 8 - 3 + 7 - 5 - 2,$$

und $13 + 7 - 2 + 8 - 3 - 5.$

Den eben genannten Satz können wir jetzt, nachdem wir wissen, was man unter Vorzeichen versteht, auch anders aussprechen.

Wenn wir nämlich die Glieder einer arithmetischen Summe in einer andern Ordnung addiren, bezüglich subtrahiren, so verändern wir die Reihenfolge der Glieder, das Glied wird dabei aber immer von seinem Vorzeichen begleitet; ein positives Glied kann durch die veränderte Reihenfolge nicht negativ, ein negatives Glied nicht positiv werden. Die gesperrten Worte sagen uns also:

daß wir die **Glieder** einer arithmetischen Reihe **beliebig versetzen** dürfen; es müssen nur dabei die **Vorzeichen unverändert** bleiben.

Wenn wir den Satz in dieser Allgemeinheit aussprechen, wird der Schüler verschiedene Bedenken haben. Er wird

1) fragen, wie es mit dem ersten Gliede einer arithmetischen Summe steht. Wir haben es bisher gewissermaßen als Eckstein behandelt und seine Stelle am Anfang der Summe behalten lassen. Es erhebt sich jetzt die Frage, ob es nicht auch versetzt werden darf und welches Vorzeichen wir ihm dann geben müssen? Ein bestimmtes Beispiel wird uns darüber belehren! Berechnen wir

$$\mathbf{19} + 7 - 6 + 5 - 3,$$

so erhalten wir als Resultat 22.

Wenn wir das erste Glied 19 zum letzten Gliede machen und ihm das Vorzeichen + geben, erhalten wir:

$$7 - 6 + 5 - 3 + \mathbf{19}.$$

Berechnen wir die arithmetische Summe bei dieser Ordnung der Glieder, so ergiebt sich gleichfalls als Resultat 22; ebenso ist:

$$7 - 6 + \mathbf{19} + 5 - 3 = 22$$

und $7 + \mathbf{19} - 6 + 5 - 3 = 22.$

Kurz, wir sehen, daß wir die 19, welche bei der Ausgangssumme das erste Glied bildete, beliebig unter die übrigen Glieder mischen dürfen; und zwar müssen wir ihr dabei ein positives Vorzeichen geben.

Ebenso wird sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{13} + 8 - 6 + 12 - 2 &= 8 - 6 + 12 - 2 + \mathbf{13} \\ &= 8 - 6 + \mathbf{13} + 12 - 2 \\ &= 12 - 6 + 8 + \mathbf{13} - 2 \\ &= 12 - 6 - 2 + 3 + \mathbf{13}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{24} + 29 - 17 + 8 - 3 &= 29 - 17 + \mathbf{24} + 8 - 3 \\ &= 29 - 17 + 8 + \mathbf{24} - 3 \\ &= 29 - 17 + 8 - 3 + \mathbf{24} \end{aligned}$$

Ferner, wenn wir zu Buchstaben übergehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{9a} + 5a - 2a + 10a - 3a &= 5a - 2a + 10a - 3a + \mathbf{9a} \\ &= 5a - 2a + 10a + \mathbf{9a} - 3a \\ &= 5a - 2a + \mathbf{9a} + 10a - 3a \\ &= 5a + \mathbf{9a} - 2a + 10a - 3a. \end{aligned}$$

In allen diesen Fällen hatte das erste Glied bei der Ausgangssumme kein Vorzeichen; wir mischten es trotzdem unter die übrigen Glieder, nachdem wir ihm ein positives Vorzeichen gegeben hatten.

Wir haben daher den Satz:

Wenn das **erste Glied** einer arithmetischen Summe ohne Vorzeichen ist, so können wir es mit positivem Vorzeichen beliebig unter die übrigen Glieder versetzen.

Noch einen zweiten Satz können wir aus den obigen Beispielen erschließen. Wenn wir bei den vorstehenden arithmetischen Summen das erste Glied an eine andere Stelle rückten, trat ein anderes Glied an den Anfang der

arithmetischen Summe, welches vorher ein positives Vorzeichen hatte. Wie wir gesehen haben, ist z. B.

$$13 + 8 - 6 + 12 - 2 = 8 - 6 + 12 - 2 + 13$$

Auf der linken Seite ist die 8 das zweite Glied mit positivem Vorzeichen, auf der rechten Seite ist 8 das Anfangsglied und hat das **Vorzeichen verloren.**

Auch in:

$$24 + 29 - 17 + 8 - 3 = 29 + 24 - 17 + 8 - 3$$

hat 29 auf der linken Seite ein positives Vorzeichen; auf der rechten Seite steht es ohne Vorzeichen am Anfang der arithmetischen Summe.

Wir können also bei einer arithmetischen Summe jedes **Glied** mit **positivem** Vorzeichen **ohne Vorzeichen** zum **Anfangsglied** machen.

Damit werden wir freilich die Bedenken des Schülers noch nicht ganz gehoben haben! Ja, es wird noch ein Bedenken hinzugekommen sein. An den Anfang des vorletzten gesperrt gedruckten Satzes haben wir die Worte gesetzt:

Wenn das **erste Glied** ein Vorzeichen hat.

Darf denn, wird der Schüler sich

2) fragen, ein erstes Glied überhaupt ein Vorzeichen haben. Darf es denn positiv oder negativ sein?

Wie das Vorzeichen (+) sagt, soll eine positive Größe zu dem Vorhergehenden hinzugefügt, eine negative Größe davon abgezogen werden. Nun geht doch vor dem ersten Gliede nichts voraus; folglich hat, so wird der Schüler denken, an dieser Stelle ein Vorzeichen keinen Sinn. Und doch kann es Fälle geben, wo ein Vorzeichen vor dem ersten Gliede vollkommen berechtigt ist! Denken wir uns, wir hätten eine Geldsumme von 5000 Mark in unserm Geldschranke liegen und wollten den Stand unseres Vermögens berechnen. Wir werden dann zu den 5000 Mark unsere Forderungen zu addiren und unsere Schulden davon zu subtrahiren haben. Die Forderungen haben wir demgemäß als positive, die Schulden als negative Größen anzusehen, d. h. vor den einzelnen Posten, welche die Forderungen repräsentiren, müssen wir ein Pluszeichen, und vor den einzelnen Posten, welche die Schulden darstellen, ein Minuszeichen machen.

Nun möge uns zunächst eine Forderung von 412 Mark, dann eine Forderung von 210 Mark einfallen, darauf möge uns ein Schuldposten von 582 Mark, dann wieder eine Forderung von 82 Mark und zuletzt noch ein Schuldposten von 55 Mark in den Sinn kommen. Wenn wir diese Forderungen und die Schulden so wie wir sie uns ins Gedächtniß zurückrufen, als positive und negative Größen auf dem Papier aufzeichnen, so haben wir zu schreiben:

$$+ 412 + 210 - 582 + 82 - 55.$$

„Mk.“ als Zeichen für Mark brauchen wir nicht besonders zu den einzelnen Zahlen hinzuzufügen, da wir ja ohnehin wissen, daß es sich nur um Mark handelt.

Der Ausdruck:

$$+ 412 + 210 - 582 + 82 - 55$$

stellt uns dann, wie wir sogleich bemerken, eine arithmetische Summe dar, deren erstes Glied 412 eine positive Größe ist, d. h. ein positives Vorzeichen (+) hat.

Wenn uns zuerst der Schuldposten von 582 Mark einfällt, dann hinter einander unsere Forderungen und schließlich noch die Summe von 55 Mark, die wir zu zahlen haben, so werden wir schreiben:

$$- 582 + 412 + 210 + 82 - 55$$

d. h. wir werden eine arithmetische Summe haben, deren erstes Glied sogar eine negative Größe ist.

Wollen wir arithmetische Summen wie:

$$+ 412 + 210 - 582 + 82 - 55$$

und $- 582 + 412 + 210 + 82 - 55$

berechnen, so müssen wir ermitteln, wie groß der Ueberschuß der positiven Größen über die negativen Größen oder der Ueberschuß der negativen Größen über die positiven Größen ist.

Um diesen Ueberschuß zu finden, kann man mannichfache Wege einschlagen. Gewöhnlich zählt man erst alle positiven und darauf alle negativen Glieder zusammen; man erhält dann zwei Summen, die Summe der positiven und die Summe der negativen Glieder. Zieht man die kleinere Summe von der größeren ab, so ergiebt sich als Resultat der Werth der arithmetischen Summe. Das Resultat kann sowohl ein positives wie ein negatives Vorzeichen haben, mit anderen Worten, sowohl eine positive wie negative Größe sein; der erste Fall

wird eintreten, wenn die Summe der positiven Glieder größer ist als die Summe der negativen Glieder, den zweiten Fall werden wir haben, wenn umgekehrt die Summe der negativen Glieder mehr beträgt, als die Summe der positiven Glieder.

Erläutern wir das angegebene Verfahren an einem bestimmten Beispiele. In der arithmetischen Summe:

$$-582 + 412 + 210 + 82 - 55$$

haben wir die drei positiven Glieder: 412, 210 und 82. Addiren wir die drei Glieder, so ergiebt sich als Summe + 704, in Zeichen, es ist:

$$+412 + 210 + 82 = +704.$$

Zugleich sind in der obengenannten arithmetischen Summe die beiden negativen Glieder — 582 und — 55 vertreten; zählen wir diese negativen Glieder zusammen, so erhalten wir als Summe — 637. In Zeichen: es ist:

$$-582 - 55 = -637.$$

Wir haben jetzt gefunden, daß im Ganzen 704 addirt und 637 subtrahirt werden soll, und zwar ist, wie wir durch einfache Subtraction erkennen, die zu addirende Zahl 704 um 57 größer als die zu subtrahirende Zahl 637. In Zeichen, es ist:

$$+704 - 637 = +67.$$

Wir können mithin die Gleichung aufstellen:

$$-582 + 412 + 210 + 82 - 55 = +704 - 637$$
$$= +67.$$

C. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, wandten wir uns im Abschnitt C der **zweiundzwanzigsten Lection** der Multiplication und Division eines Productes zu, das aus mehreren Factoren zusammengesetzt ist. Wir sahen, daß wir ein Product multipliciren können, indem wir die Operation der Multiplication an e i n e m der Factoren vollziehen, oder indem wir den Multiplicator, bezüglich die Factoren des Multiplicators einfach unter die Factoren des zu multiplicirenden Productes einreihen. Wie wir weiter zeigten, steht es ganz ähnlich mit der Division eines Productes. Um ein Product zu dividiren, dürfen wir nicht jeden der Factoren theilen; wir können die Division vielmehr ausführen, indem wir e i n e n der Factoren theilen. Ja! wenn wir ein Product durch einen oder mehrere seiner eigenen Factoren zu dividiren haben, so brauchen wir nur den Divisor oder die Factoren des Divisors nur aus dem zu dividirenden Producte fortzulassen.

In der **dreiundzwanzigsten Lection** gingen wir dann zur M u l t i p l i c a t i o n d e r P o t e n z e n m i t g l e i c h e r B a s i s über. Wir besprachen, daß man zwei und mehr Potenzen, die eine gleiche Basis haben, mit einander multipliciren könne, indem man die Exponenten addire, und erläuterten durch zahlreiche Beispiele diesen wichtigen Satz. Darauf behandelten wir die Division der Potenzen mit gleichen Basen; wir zeigten, daß die Division ausgeführt werden könne, indem man den Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividenden subtrahire. Alle diese Sätze erläuterten wir erst an Zahlenbeispielen; wir versäumten aber nicht sie auch auf mehr und minder complicirte Buchstabenausdrücke anzuwenden, und boten dem Schüler besonders durch Klammerauflösungen Gelegenheit, alle die vielen Regeln gründlich in sich aufzunehmen.

Nachdem wir noch Producte, welche Potenzen mit gleichen Basen enthalten, durch einander dividirt hatten, wandten wir uns der wichtigen Lehre von den p o s i t i v e n und n e g a t i v e n Größen zu, mit der wir uns noch im nächsten Briefe ausführlicher beschäftigen werden.

D. Wiederholungsfragen.

1) Wie multiplicirt man ein Product, das aus mehreren Factoren zusammengesetzt ist?
2) Ist es nöthig, eine Klammer zu setzen, wenn ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, mit einer Größe multiplicirt werden soll?
3) Wie dividirt man ein aus mehreren Factoren zusammengesetztes Product?
4) Wie dividirt man ein Product durch einen oder mehrere seiner Factoren?
5) Wie multiplicirt man Potenzen mit einander, welche gleiche Basen haben?
6) Wie dividirt man zwei Potenzen, deren Basen einander gleich sind?
7) Eine arithmetische Summe sei durch eine Klammer eingeschlossen; die Klammer möge mit einer Größe multiplicirt oder durch eine Größe dividirt werden sollen. Wie löst man die Klammer auf?
8) Wozu fordert uns das Pluszeichen auf?
9) Wozu fordert uns das Minuszeichen auf?
10) Was versteht man unter einem positiven und unter einem negativen Vorzeichen?
11) Was ist eine positive, was ist eine negative Größe?
12) Kann das erste Glied einer arithmetischen Summe ein Vorzeichen haben?
13) Wann wird das Resultat der arithmetischen Summe eine positive, wann eine negative Größe sein?
14) Darf man Ausdrücke wie $a + b$ und $c - d$ auch eine arithmetische Summe nennen?
15) In welchen Fällen kann man das Malzeichen fortlassen?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 24 und 25.
Arithmetik.

Als
Manuscript
gedruckt.

13. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Der Weise ist glücklich, die Natur zu erforschen,
Der Narr ist glücklich, daß er nicht mehr weiß.

Lection 24.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 22.

Abschnitt C. § 32. **Aufgaben** I. Es ist:

1) $(12.6.5.3).8 = \mathbf{96}.6.5.3,$
$= 12.\mathbf{48}.5.3,$
$= 12.6.\mathbf{40}.3,$
$= 12.6.5.\mathbf{24},$

2) $(3.4.7.6).12 = \mathbf{36}.4.7.6,$
$= 3.\mathbf{48}.7.6,$
$= 3.4.\mathbf{84}.6,$
$= 3.4.7.\mathbf{72}.$

Aufgaben II. Es ist:

1) $(df + de + ae - ce).e = def + dee + aee - cee$
$= def + de^2 + ae^2 - ce^2,$

2) $(mq + pq - rq).q = mqq + pqq - rqq$
$= mq^2 + pq^2 - rq^2,$

3) $(3at + 5at + 7dt).t = 3at^2 + 5at^2 + 7dt^2,$

4) $(4ms + 6ns - 4rs).s = 4ms^2 + 6ns^2 - 4rs^2.$

Aufgaben III. Es ist:

1) mn multiplicirt mit np gleich mn^2p,
2) de " " ef " de^2f,
3) lm " " ln " l^2mn,
4) lmn " " mns " lm^2n^2s.
5) bc, cd und bd multiplicirt ergeben $b^2c^2d^2$,
6) am, bm und bn " " ab^2m^2n,
7) cd, cs und ds " " $c^2d^2s^2$,
8) bcd, cde und bef " " $bc^2d^3e^2f$.

§ 33. **Aufgaben** I. Es ist: 39 . 26 . 52 dividirt durch 13

entweder gleich $\frac{39}{13}.26.52 = \mathbf{3}.26.52,$

oder gleich $39.\frac{26}{13}.52 = 39.\mathbf{2}.52,$

oder gleich $39.26.\frac{52}{13} = 39.26.\mathbf{4}.$

Aufgaben II. Es ist:

a) $33.55.88:11 = \frac{33}{11}.55.88 = \mathbf{3}.55.88,$
$= 33.\frac{55}{11}.88 = 33.\mathbf{5}.88,$
$= 33.55.\frac{88}{11} = 33.55.\mathbf{8},$

b) $24.48.64:8 = \frac{24}{8}.48.64 = \mathbf{3}.48.64,$
$= 24.\frac{48}{8}.64 = 24.\mathbf{6}.64,$
$= 24.48.\frac{64}{8} = 24.48.\mathbf{8},$

c) $\frac{18.27.45.90}{9} = \frac{18}{9}.27.45.90 = \mathbf{2}.27.45.90,$
$= 18.\frac{27}{9}.45.90 = 18.\mathbf{3}.45.90,$
$= 18.27.\frac{45}{9}.90 = 18.27.\mathbf{5}.90,$
$= 18.27.45.\frac{90}{9} = 18.27.45.\mathbf{10},$

d) $\frac{30 \,.\, 50 \,.\, 70}{10} = \frac{30}{10} \,.\, 50 \,.\, 70 = 3 \,.\, 50 \,.\, 70,$

$= 30 \,.\, \frac{50}{10} \,.\, 70 = 20 \,.\, 5 \,.\, 70,$

$= 30 \,.\, 50 \,.\, \frac{70}{10} = 30 \,.\, 50 \,.\, 7.$

§ 34. **Aufaben I.** $15a : 5 = 3a$, $28c : 7 = 4c$, $\frac{45f}{15} = 3f$, $\frac{60d}{20} = 3d$, $26af : 13 = 2af$,

$42def : 14 = 3def$, $\frac{32cde}{8} = 4cde$,

$\frac{40stu}{5} = 8stu.$

Aufgaben II. Es ist:

1) $(5ab + 10bc + 15cd) : 5 = \frac{5ab}{5} + \frac{10bc}{5} + \frac{15cd}{5}$
$= \frac{5}{5}ab + \frac{10}{5}bc + \frac{15}{5}cd$
$= ab + 2bc + 3cd,$

2) $(28amn + 42bmn + 56cst) : 14$
$= 2amn + 3bmn + 4cst,$

3) $(75euv + 50muv + 100tuv) : 25$
$= 3euv + 2muv + 4tuv,$

4) $(30ntu - 60stu + 45suv) : 15$
$= 2ntu - 4stu + 3suv.$

Aufgaben III. Es ist:

$$(3 \,.\, 7 \,.\, 5 + 6 \,.\, 7 \,.\, 8 + 2 \,.\, 7 \,.\, 3) : 7 = \frac{3 \,.\, 7 \,.\, 5}{7} + \frac{6 \,.\, 7 \,.\, 8}{7} + \frac{2 \,.\, 7 \,.\, 3}{7}$$
$$= 3 \,.\, 5 + 6 \,.\, 8 + 2 \,.\, 3,$$

$$(5 \,.\, 9 \,.\, 2 + 3 \,.\, 9 \,.\, 2 - 4 \,.\, 9 \,.\, 2) : 9 \,.\, 2 = \frac{5 \,.\, 9 \,.\, 2}{9 \,.\, 2} + \frac{3 \,.\, 9 \,.\, 2}{9 \,.\, 2} - \frac{4 \,.\, 9 \,.\, 2}{9 \,.\, 2} = 5 + 3 - 4.$$

$(auv - btu + csu) : u = av - bt + cs,$
$(cst + dst + stv) : st = c + d + v,$
$(mnprq + mnpst) : mnp = rq + st.$

Section 23.

Abschnitt A. § 35. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $10^2 \,.\, 10^5 = 10^{2+5} = 10^7,$
2) $11^9 \,.\, 11^{10} = 11^{9+10} = 11^{19},$
3) $a^7 \,.\, a^5 = a^{7+5} = a^{12},$
4) $b^{10} \,.\, b^{10} = b^{10+10} = b^{20},$
5) $c^{11} \,.\, c^{12} = c^{11+12} = c^{23},$
6) $d^6 \,.\, d^9 = d^{6+9} = d^{15},$
7) $e^{13} \,.\, e^{12} = e^{13+12} = e^{25},$
8) $f^{15} \,.\, f^{11} = f^{15+11} = f^{26},$
9) $m^c \,.\, m^d = m^{c+d},$ 10) $n^e \,.\, n^f = n^{e+f},$
11) $s^u \,.\, s^v = s^{u+v},$ 12) $t^c \,.\, t^d = t^{c+d}.$

Aufgaben II. Es ist:

1) $(9ab^2c - b^3cd + b^5ef)\, b^4$
$= 9ab^2b^4c - b^3b^4cd + b^5b^4ef$
$= 9ab^{2+4}c - b^{3+4}cd + b^{5+4}ef$
$= 9ab^6c - b^7cd + b^9ef,$

2) $(13ad^6e^2 + 15bd^5f + 10ad^7)\, d^8$
$= 13ad^6d^8e^2 + 15bd^5d^8f + 10ad^7d^8$
$= 13ad^{6+8}e^2 + 15bd^{5+8}f + 10ad^{7+8}$
$= 13ad^{14}e^2 + 15bd^{13}f + 10ad^{15},$

3) $(16mn^2 + 17mn^5s + 13mn^7t^2)\, n^{12}$
$= 16mn^{2+12} + 17mn^{5+12}s + 13mn^{7+12}t^2$
$= 16mn^{14} + 17mn^{17}s + 13mn^{19}t^2,$

4) $(s^at + s^cu + s^dv)\, s^e$
$= s^as^et + s^cs^eu + s^ds^ev$
$= s^{a+e}t + s^{c+e}u + s^{d+e}v,$

5) $(u^ms + u^nt + u^pv)\, u^q$
$= u^mu^qs + u^nu^qt + u^pu^qv$
$= u^{m+q}s + u^{n+q}t + u^{p+q}v,$

6) $(v^c + sv^e + tvd)\, v^b$
$= v^cv^b + sv^ev^b + tv^1v^bd$
$= v^{b+c} + sv^{b+e} + tv^{b+1}d.$

Aufgaben III. Es ist:

1) $10^3 \,.\, 10^5 \,.\, 10^7 = 10^{3+5+7} = 10^{15},$
2) $13^8 \,.\, 13^{16} \,.\, 13^{23} = 13^{8+16+23} = 13^{47},$
3) $d^9d^{13}d^{24}d^{29} + d^{9+13+24+29} = d^{75},$
4) $n^{10} \,.\, n^{10} \,.\, n^{10} \,.\, n^{10} = n^{10+10+10+10} = n^{40},$
5) $p^bp^cp^dp^e = p^{b+c+d+e},$
6) $r^sr^tr^ur^v = r^{s+t+u+v}.$

§ 36. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $\frac{8^7}{8^4} = 8^{7-4} = 8^3,$ 2) $\frac{17^9}{17^5} = 17^{9-5} = 17^4,$

3) $\frac{23^{10}}{23^8} = 23^{10-8} = 23^2,$ 4) $\frac{29^{45}}{29^{30}} = 29^{45-30} = 29^{15},$

5) $\frac{m^7}{m^4} = m^{7-4} = m^3,$ 6) $\frac{n^9}{n^6} = n^{9-6} = n^3,$

7) $\frac{s^{10}}{s^5} = s^{10-5} = s^5,$ 8) $\frac{t^{13}}{t^{10}} = t^{13-10} = t^3,$

9) $4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3,$ 10) $7^4 : 7^2 = 7^{4-2} = 7^2,$
11) $u^{14} : u^{10} = u^{14-10} = u^4,$
12) $v^{16} : v^9 = v^{16-9} = v^5.$

Aufgaben II. Es ist:

1) $(10c^7m + 8c^{12}n - 4c^{17}p) : c^2 = \frac{10c^7m}{c^2} + \frac{8c^{12}n}{c^2} - \frac{4c^{17}p}{c^2}$
$= 10\frac{c^7}{c^2}m + 8\frac{c^{12}}{c^2}n - 4\frac{c^{17}}{c^2}p$
$= 10c^{7-2}m + 8c^{12-2}n - 4c^{17-2}p,$
$= 10c^5m + 8c^{10}n - 4c^{15}p,$

2) $(7d^9mn^2 + 4d^{13}uv - 5d^{15}st) : d^5 = 7d^4mn + 4d^8uv - 5d^{10}st.$

3) $(8f^mn + 9f^pq - 3f^qp) : f^r = 8f^{m-r}n + 9f^{p-r}q - 3f^{q-r}p.$

§ 37. a) Wir erhalten:

1) $\frac{7^8 . 8^{10} . 13^{14}}{8^5 . 13^7} = 7^8 . 8^{10-5} . 13^{14-7} = 7^8 . 8^5 . 13^7$,

2) $\frac{25^7 . 27^4}{25^4 . 27^2} = 25^{7-4} . 27^{4-2} = 25^3 . 27^2$,

3) $\frac{15^4 . 17^{12} . 19^6}{17^8 . 19^2} = 15^4 . 17^{12-8} . 19^{6-2}$
$= 15^4 . 17^4 . 19^4$,

4) $\frac{r^5 s^7 t}{r^3 s^3} = r^{5-3} . s^{7-3} t = r^2 s^4 t$,

5) $\frac{r^9 u^7 v^{10}}{u^2 v^2} = r^9 u^{7-2} v^{10-2} = r^9 u^5 v^8$,

6) $\frac{m^a n^b}{m^c n^d} = m^{a-c} n^{b-d}$.

b) Es ist:

$(8m^8 n^4 p^2 + 6m^5 n^6 q^3 + 3m^{10} n^{10} r) : m^3 n^3$
$= 8m^{8-3} n^{4-3} p^2 + 6m^{5-3} n^{6-3} q^3 + 3m^{10-3} n^{10-3} r$
$= 8m^5 n p^2 + 6m^2 n^3 q^3 + 3m^7 n^7 r$,

ferner: $(3u^{15} v^{14} t - 2u^9 v^{12} + su^{11} v^{12}) : u^5 v^4$
$= 3u^{10} v^{10} t - 2u^4 v^8 + su^6 v^8$.

Abschnitt B. § 38. Positive Größen sind

in dem 1sten	Ausdruck	+ 8, + 7, + 2, + 19,
„ „ 2ten	„	+ 6b, + 3d, + 5e,
„ „ 3ten	„	+ 13cd, + 10de,
„ „ 4ten	„	$+ \frac{15ef}{e}$, + 3uv.

Negative Größen sind:

in dem 1sten	Ausdruck	— 3, — 10, — 18,
„ „ 2ten	„	— 5c,
„ „ 3ten	„	— 5ef,
„ „ 4ten	„	$- \frac{19mn}{p}$, $- \frac{21st}{u}$.

Damit ist auch die erste Frage erledigt, denn positive Größen haben ein positives und negative Größen ein negatives Vorzeichen.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 23 gestellten Fragen.

1) Ein Product, das aus mehreren Factoren zusammengesetzt ist, multiplicirt man, indem man einen der Factoren multiplicirt oder den Multiplicator unter die Factoren einreiht. 2) Es ist nicht nöthig, ein Product, welches multiplicirt werden soll, durch eine Klammer einzuschließen. 3) Ein aus mehreren Factoren bestehendes Product dividirt man, indem man einen Factor theilt. 4) Man dividirt ein Product durch einen oder mehrere seiner Factoren, indem man aus dem Product den Factor, bez. die Factoren, durch welche dividirt werden soll, einfach fortläßt. 5) Potenzen, welche gleiche Basen haben, multiplicirt man mit einander, indem man die Exponenten addirt. 6) Man dividirt Potenzen mit gleichen Basen durch einander, indem man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden abzieht. 7) Die Klammer wird aufgelöst, indem man die einzelnen Glieder der Klammer multiplicirt bezüglich dividirt. 8) Das Pluszeichen fordert uns dazu auf, das folgende Glied zu dem ganzen Vorhergehenden zu addiren. 9) Das Minuszeichen sagt uns, daß das folgende Glied von dem ganzen Vorhergehenden abgezogen werden soll. 10) Unter dem positiven Vorzeichen versteht man das Pluszeichen, und unter dem negativen Vorzeichen das Minuszeichen. 11) Man nennt eine Größe positiv, wenn ihr ein Pluszeichen, und negativ, wenn ihr ein Minuszeichen vorausgeht. 12) Das erste Glied einer arithmetischen Summe kann ohne Vorzeichen sein, es kann aber auch ein positives oder negatives Vorzeichen haben. 13) Das Resultat einer arithmetischen Summe ist eine positive Größe, wenn die Summe der positiven die Summe der negativen Größen überwiegt, und umgekehrt. 14) a + b ist eine arithmetische Summe ohne Minuszeichen, a — b ist eine arithmetische Summe ohne Pluszeichen. 15) Das Malzeichen (.) kann fortgelassen werden,

a) zwischen einer Zahl und einem Buchstaben,
b) zwischen zwei Buchstaben,
c) zwischen einer Klammer und dem Multiplicator der Klammer.

C. Die Fortsetzung der Lehre von den positiven und negativen Größen.

§ 40. Die positiven, negativen und absoluten Größen. In dem Abschnitt B der dreiundzwanzigsten Lection haben wir die Lehre von den positiven und negativen Größen begonnen, und zwar hatten die Erörterungen, welche wir in diesem Capitel anstellten, mehr den Zweck, den Schüler auf eine exacte Behandlung dieses wichtigen Capitels der Arithmetik vorzubereiten als genau gefaßte Definitionen und Sätze zu bringen. Es wird jetzt die Aufgabe an uns herantreten, unsere Auseinandersetzungen kurz zu wiederholen, präciser zu fassen und zu erweitern.

Wir wurden zu den positiven und negativen Größen durch Betrachtung der einzelnen Glieder einer arithmetischen Summe geführt. In einer arithmetischen Summe kommen Glieder vor, denen ein Plus**zeichen** (+) **vor**ausgeht, und andere Glieder, **vor** welchen ein Minus**zeichen** (—) steht. Wie durch die fett gedruckten Silben verständlich wird, hat man dem + und dem — den Namen **Vorzeichen** gegeben; und zwar heißt das + ein **positives** und das — ein **negatives** Vorzeichen. Die Glieder mit positivem Vorzeichen werden **positive** und die Glieder mit negativem Vorzeichen **negative Größen** genannt. In:

$$19 + 12 - 13 + 4 - 6$$

sind + 12 und + 4 positive Größen
— 13 und — 6 dagegen negative Größen.

Das Pluszeichen fordert uns auf, die folgende Größe zu addiren; durch das Minus-

zeichen wird uns aufgetragen, die folgende Größe zu subtrahiren.

Positive Größen sind daher solche Größen, welche **addirt**,

und **negative Größen** sind solche Größen, welche **subtrahirt** werden sollen.

In: 17 + 3 und 20 — 10

ist + 3 eine positive und — 10 eine negative Zahl; in diesen beiden Fällen wissen wir, wozu wir die 3 zu addiren und wovon wir die 10 zu subtrahiren haben, aber es ist nicht immer schon aus dem arithmetischen Ausdruck, welcher die positiven und negativen Größen enthält, ersichtlich, wozu die positiven Größen hinzuzufügen und wovon die negativen Größen abzuziehen sind. In dem schon angeführten Abschnitt B der dreiundzwanzigsten Lection gelangten wir zu den arithmetischen Summen:

a) + **412** + 210 — 582 + 82 — 55
b) — **582** + 412 + 210 + 82 — 55.

In beiden Ausdrücken hat das erste Glied ein Vorzeichen, + **412** ist positiv und — **582** ist negativ; 412 soll mithin addirt und 582 subtrahirt werden, ohne daß wir das „wozu", bezüglich „wovon" aus den arithmetischen Summen selbst erfahren können. Aus der besonderen Beschaffenheit der Aufgabe, welche uns zur Aufstellung der beiden arithmetischen Summen a und b führte, wissen wir allerdings, daß es die Zahl 5000 ist, zu welcher wir im Falle a 412 hinzuzufügen und im Falle b 582 abzuziehen haben. Wurde doch von uns angenommen, daß wir im Geldschrank eine Summe von 5000 Mark liegen haben; und um unser Vermögen zu berechnen, addirten wir zu dieser Summe unsere ausstehenden Forderungen (darunter eine Forderung von 412 Mark) und subtrahirten die Zahlungen, welche wir zu leisten hatten (darunter eine Zahlung von 582 Mark).

Wenn wir bei Rechnungen, die das wirkliche practische Leben betreffen, auf positive und negative Größen stoßen, wird sich aus der Beschaffenheit des Falles immer ergeben, zu welcher Größe wir die positiven Werthe zu addiren und von der wir die negativen Werthe zu subtrahiren haben. Wir wollen uns, um noch ein Beispiel zu bringen, vorstellen, in einem nicht ganz gefüllten Gefäße seien 80 Liter Wein. Der positive Ausdruck + 10 l wird uns dann auffordern, 10 Liter zu diesen 80 Litern hinzuzugießen (zu addiren) und der negative Ausdruck — 20 l wird uns auftragen 20 Liter abzuzapfen (d. h. von den 80 Litern zu subtrahiren). Gewöhnlich ist die 0 die Zahl, welche den Ausgangswerth bildet, d. h. gewöhnlich werden positive Größen von 0 abgezogen. In solchen Fällen bedeutet + 18 soviel wie 0 + 18 und — 5 soviel wie 0 — 5. Hier begegnen wir einer Schwierigkeit. Der Schüler wird sich fragen: Welchen Sinn kann man mit dem Ausdruck 0 — 5 verbinden? Wie kann man die 5 von der 0 abziehen, das Nichts noch um 5 verringern? Wird uns da nicht das Kunststückchen des Escamoteurs zugemuthet, der aus dem leeren Hut beliebig viele Becher hervorzaubert? In der That! Diese Fragen sind durchaus berechtigt, und wir werden sie beantworten, indem wir auf einzelne Fälle des practischen Lebens eingehen. Kann es, um ein erstes Beispiel anzuführen, nicht vorkommen, daß jemand 0 Mark besitzt und 5 Mark Schulden hat? Soll er da nicht von den 0 Mark 5 Mark abzahlen, von der 0 die 5 abziehen. Hat da nicht die Aufforderung, welche in dem mathematischen Ausdruck: 0 — 5 liegt, einen thatsächlichen, wirklichen Sinn? Mußte nicht früher sogar Derjenige, an welchen diese Aufforderung gerichtet wurde, auf Verlangen des Gläubigers in das Schuldgefängniß wandern, und sich bei den alten Athenern vor Solon mit Leib und Leben dem Gläubiger verschreiben?

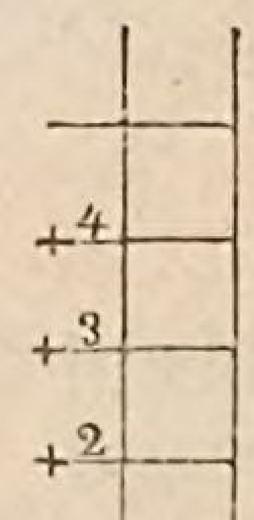


Fig. 1.

Doch wenden wir uns zu einem zweiten Beispiele. Die Fig. 1 zeigt uns den unteren Theil eines Quecksilberthermometers.

Wenn die Temperatur derart ist, daß das Wasser gefriert, steht die Kuppe der Quecksilbersäule auf dem Gefrier- oder Nullpunkt[1]), den wir an unserer Figur mit 0 bezeichnet haben. Die Quecksilbersäule steigt, wenn die Temperatur erhöht wird, sie fällt, wenn die Temperatur sinkt. Beim Steigen und Fallen passirt die Kuppe der Quecksilber-

[1]) Den Gefrier- oder Nullpunkt bestimmt man bei einem Thermometer, indem man die luftleere, theilweise mit Quecksilber gefüllte Thermometerröhre in schmelzendes Eis steckt. Es wird dann noch bei der Thermometerröhre der hier nicht bezeichnete

säule die Striche[1]), welche in gleicher Entfernung von einander über und unter dem Nullpunkt angebracht und über dem Nullpunkt mit + 1, + 2, + 3, + 4 und unter dem Nullpunkt mit — 1, — 2, — 3, — 4[2]) bezeichnet sind. Fragen wir uns, welchen Sinn hier die positiven Zahlen + 1, + 2, + 3, + 4 u. s. f. einerseits und die negativen Zahlen — 1, — 2, — 3, — 4 u. s. f. andererseits haben. Wir gehen vom Gefrier- oder **Nullpunkt** aus und wollen die Entfernung zweier Striche von einander eine Längeneinheit nennen. Ist die Quecksilbersäule um eine Maßeinheit gestiegen, so ist zu der **0**-Höhe eine Maßeinheit hinzugekommen, zur 0 ist eine 1 addirt worden. Steigt die Quecksilbersäule weiter und kommt bis zum zweiten Strich (+ 2), so steht ihre Kuppe zwei Maßeinheiten über dem Nullpunkt, 2 ist also zur 0 addirt. Demgemäß bedeuten die positiven Größen + 1, + 2, + 3 soviel wie 0 + 1, 0 + 2, 0 + 3. Wenn die Quecksilbersäule unter den Nullpunkt bis zum ersten Striche (— 1) herabsinkt, so ist die Höhe des Nullpunktes um 1 Maßeinheit vermindert, von der 0 ist eine 1 abgezogen worden. Gelangt die Kuppe der Quecksilbersäule beim Sinken bis zum zweiten Striche (— 2), so sind zwei Maßeinheiten von der Höhe des Nullpunktes subtrahirt, von der 0 ist eine 2 abgezogen. Unter — 1, — 2, — 3 haben wir demnach 0 — 1, 0 — 2, 0 — 3 zu verstehen. Auch hier haben wir also einen wirklichen Sinn für die Subtraction einer Zahl von der Null gefunden. 0 — 1, 0 — 2, 0 — 3 oder — 1, — 2, — 3 bedeuten einfach gewisse Höhen der Quecksilberkuppe.

Verweilen wir bei diesem Beispiele etwas länger. Das Quecksilber stellt uns gewissermaßen eine gerade Linie (siehe Fig. 2) dar, deren einer Punkt der Nullpunkt ist. Oberhalb dieses Nullpunktes sehen wir die positiven Zahlen + 1, + 2, + 3, + 4 u. s. f., unterhalb desselben die negativen Zahlen — 1, — 2, — 3, — 4 und so fort. Sowohl die positiven wie die negativen Zahlen haben in dieser Linie ihren Platz, man kann dieselbe deswegen die **Zahlenlinie** nennen. Die Seite derselben, auf welcher die positiven Zahlen liegen, ist die positive und die andere ihr entgegengesetzte ist die negative Seite der Zahlenlinie. Solche Zahlenlinien sind das Fundament der höhern Mathematik; ihre genaue Betrachtung hat den mathematischen Untersuchungen eine ganz veränderte Richtung gegeben.

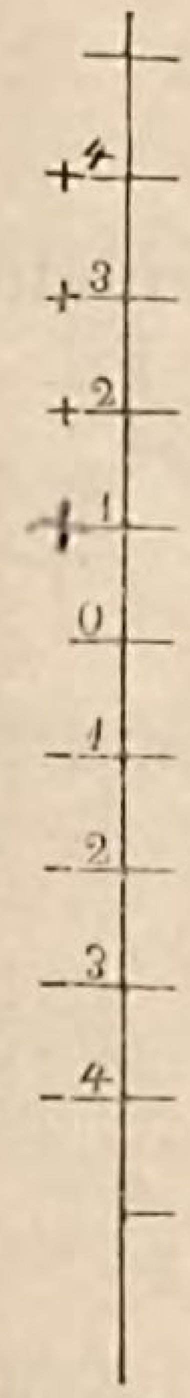


Fig. 2.

Doch wiederholen wir, was uns dieser Paragraph gebracht hat. Wir setzten zunächst fest, daß positive Zahlen addirt, negative subtrahirt werden sollen. Die Zahl, zu der addirt, bezüglich zu welcher subtrahirt werden soll, braucht nicht genannt zu sein, sie geht aus dem einzelnen Falle hervor. Selbst Subtractionen von 0 können wir, wie wir an zwei Beispielen zeigten, eine bestimmte Bedeutung beilegen. Die Betrachtung des Thermometers führte uns zur Zahlenlinie, deren Wichtigkeit für die höhere Mathematik wir kurz besprachen.

§ 41. **Die algebraischen und absoluten Größen.** Wenn Größen ein Vorzeichen haben, also positiv oder negativ sind, werden sie **algebraische Größen** genannt.

$+19, \quad -36, \quad +a, \quad -b, \quad +cd, \quad -mn,$

$+\frac{36}{9}, \quad -\frac{48}{12}, \quad +\frac{a}{b}, \quad -\frac{c}{d}, \quad +\frac{stu}{v}$

sind z. B. algebraische Größen.

Algebraische Größen mit einem gleichen Vorzeichen heißen **gleichnamig**; sie heißen dagegen **ungleichnamig**, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben.

+ 4 und + 7, ferner + c und + d,
— 3 und — 19, „ — e und — f,
+ cd und + ef, „ — mn und — st
sind gleichnamige Größen,
+ 8 und — 19, ferner — a und + b,
+ bc und — cd, „ — st und + uv
sind dagegen ungleichnamige Größen.

Siedepunkt, d. h. der Punkt festgestellt, bis zu welchem das Quecksilber in der Glasröhre bei der Temperatur des siedenden Wassers steigt. Der Raum zwischen dem Siedepunkt und Gefrierpunkt wird nach Réaumur in 80, nach Celsius in 100 Theile getheilt; die Theilpunkte werden durch Striche bezeichnet. [1]) Bei dem Réaumur'schen Thermometer haben wir 80, beim Celsius'schen 100 Striche von dem Null- bis zum Siedepunkt. [2]) Ist die Kuppe der Quecksilbersäule bis + 2, + 3, + 4, + 5 gestiegen, so sagt man, es sind 2, 3, 4, 5 Grad Wärme. Ist die Quecksilbersäule bis — 2, — 3, — 4 gesunken, so sagt man, es sind 2, 3, 4 Grad Kälte.

Eine Zahl oder einen zusammengesetzten Größenausdruck **ohne Vorzeichen** nennt man eine **absolute Größe.**

$$9, \quad 10, \quad a, \quad cd$$

sind absolute Größen.

Man spricht auch von dem **absoluten Werth** einer algebraischen Größe. 9 ist z. B. der absolute Werth der positiven Größe $+ 9$, 7 der absolute Werth von $- 7$, ab der absolute Werth von $+ ab$.

Aufgaben. Der Schüler möge unter den folgenden 10 Größen: 6, 8, $+17$, -19,

$$+a, \quad -b, \quad +uv, \quad 30, \quad -mn, \quad d$$

die algebraischen und die absoluten Größen heraussuchen; er möge ferner die absoluten Werthe der algebraischen Größen angeben.

§ 42. **Die absoluten und die positiven Größen.** Eine positive Größe soll, wie ihr Vorzeichen sagt, addirt werden; eine absolute Größe dagegen ist von keinem Vorzeichen begleitet, man sieht bei ihr vollkommen davon ab, ob sie der Addition oder Subtraction unterworfen werden soll und betrachtet nur ihren Zahlenwerth. Die absoluten und die positiven Größen haben also eine ganz verschiedene Bedeutung, und doch werden wir in späteren Capiteln sehen, daß sie vielfache Beziehungen zu einander haben und bei den arithmetischen Operationen gleich behandelt werden können. Ja, einige dieser Beziehungen haben wir schon herausgefunden, als wir im Abschnitt B der dreiundzwanzigsten Lection die Vertauschung der Glieder einer arithmetischen Summe behandelten. In:

$$19 + 7 - 6 + 5 - 3$$

ist das erste Glied 19 eine absolute Zahl, die anderen Glieder sind positiv oder negativ, gehören also zu den algebraischen Größen. Wie wir in dem erwähnten Abschnitt besprachen, ist:

$$\mathbf{19} + \mathbf{7} - 6 + 5 - 3$$

ebenso groß wie:

$$\mathbf{7} - 6 + 5 - 3 + \mathbf{19}$$

also 19 ist erst ein absolutes Glied und bei der zweiten arithmetischen Summe ein positives Glied geworden — und umgekehrt, ist 7 erst ein positives Glied und wird eine absolute Größe, wenn es zum Anfangsglied der arithmetischen Summe gemacht wird. Wir haben diese Beobachtung in zwei besonderen Sätzen ausgesprochen, die wir jetzt in den einen Satz zusammenfassen können:

Ein absolutes Anfangsglied einer arithmetischen Summe können wir als positives Glied unter die anderen Glieder mischen, ebenso können wir ein positives Glied zum absoluten Anfangsglied einer arithmetischen Summe machen.

§ 43. **Die Vereinigung gleichnamiger algebraischer Größen.** Der Ausdruck:

$$5 + 7 + 3$$

sagt uns, daß wir zur 5 erst 7 und zum Resultat (12) dann 3 addiren sollen. Führen wir diese Addition aus, so ergiebt sich 15. Wenn wir, anstatt nach einander 7 und 3 zu addiren, sogleich 10, die **Summe** von 7 und 3, hinzufügen, erhalten wir ebenfalls 15. Es ist demnach:

$$5 + \mathbf{7} + \mathbf{3} = 5 + \mathbf{10}.$$

Auch wenn wir statt der 5 eine andere Zahl, etwa eine 9, wählen, ist:

$$9 + \mathbf{7} + \mathbf{3} = 9 + \mathbf{10}.$$

Ueberhaupt haben wir immer:

$$+ 7 + 3 = 10.$$

Ebenso wird sein: $+ 10 + 10 = + 20$, $+ 11 + 12 = + 23$, $+ 2 + 3 + 12 = + 17$,

$$+ 8 + 12 + 10 + 17 = + 47,$$

$+ 2a + 3a = + 5a$, $+ 6b + 9b + 5b = + 20b$, also:

Anstatt mehrere Größen nach einander zu addiren, können wir sogleich die Summe dieser Größen addiren.

Doch beleuchten wir die vorstehenden Gleichungen noch von einer andern Seite. Wie bei den übrigen Gleichungen sehen wir in:

$$+ 8 + 12 + 10 + 17 = + 47$$

auf der linken Seite eine Reihe von positiven Größen nämlich: ($+ 8$, $+ 12$, $+ 10$ und $+ 17$); auf der rechten Seite sind diese vier positiven Größen in **eine,** nämlich $+ 47$, zusammengefaßt, oder, wie man sagt, **vereinigt.** Man nennt deswegen die ganze Operation **das Vereinigen positiver Größen.**

In: $\quad + 2 + 3 + 12 = + 17$

sind die positiven Zahlen $+ 2$, $+ 3$ und $+ 12$ zu $+ 17$, und in:

$$+ 2a + 3a = + 5a$$

sind die positiven Größen $+ 2a$ und $+ 3a$ zu $+ 5a$ vereinigt.

Aufgaben I. Der Schüler möge:

a) $+ 13 + 17$, b) $+ 19 + 21 + 20$,
c) $+ 40 + 90 + 100$, d) $+ 4e + 8e + 12e$,
e) $+ 2f + 4f + 6f$, f) $+ 3ac + 5ac$
vereinigen.

Gehen wir jetzt zur **Vereinigung negativer Größen** über! In dem Ausdruck: $15 - 7 - 3$ fordern uns die Minuszeichen auf, von der 15 erst die 7 und von dem Resultat (8) dann die 3 abzuziehen. Nehmen wir diese Subtractionen vor, so erhalten wir 5. Wenn wir, anstatt erst 7 und dann noch 3 zu subtrahiren, sogleich 10, d. i. die Summe von 7 und 3 abziehen, so ergiebt sich gleichfalls 5. Wir haben also:

$$15 - \mathbf{7} - \mathbf{3} = 15 - \mathbf{10}.$$

Setzen wir für 15 irgend eine beliebige andere Zahl, so ist ebenfalls:

$$33 - \mathbf{7} - \mathbf{3} = 33 - \mathbf{10}.$$

Ueberhaupt ist: $- 7 - 3 = - 10$.

Ebenso werden wir haben:

$$- 10 - 10 = - 20, \quad - 11 - 12 = - 23,$$
$$- 2 - 3 - 12 = - 17, \quad - 2a - 3a = - 5a,$$
$$- 6b - 9b - 5b = - 20b,$$

also:

Anstatt mehrere Größen nach einander zu subtrahiren, kann man sogleich die Summe derselben subtrahiren.

Betrachten wir die vorstehenden Gleichungen noch genauer! In:

$$- 12 - 13 - 6 - 2 = - 33$$

stehen wie bei den anderen Gleichungen auf der linken Seite negative Zahlen, nämlich $- 12$, $- 13$, $- 6$ und $- 2$. Auf der rechten Seite sind diese negative Zahlen in **eine** ($- 33$) zusammengefaßt, oder vereinigt. Die ganze Operation heißt daher das **Vereinigen negativer Größen.**

Aufgaben II. Der Schüler möge:

a) $- 4 - 8 - 12$, b) $- 13 - 26 - 29$,
c) $- 5 - 10 - 15 - 20$,
d) $- 5e - 6e - 9e - 12e$,
e) $- 15m - 16m - 17m - 18m$
vereinigen.

Bemerkung. Wie wir aus den vorigen Auseinandersetzungen wissen, ist:

$$\text{I)}\ + 8 + 10 + 2 + 3 = + 23.$$

Zu der 23 der rechten Seite sind wir gelangt, indem wir die 8, 10, 3 und 2 zusammenzählen, es ist mithin:

$$23 = 8 + 10 + 2 + 3,$$

daraus wird:

$$23 = (8 + 10 + 2 + 3),$$

wenn wir die Summe $8 + 10 + 2 + 3$ durch eine Klammer einschließen, um anzudeuten, daß sie ein zusammengehöriges Ganzes bilden soll.

Führen wir jetzt in Gl. I für 23 als gleiche Größe die Klammer: $(8 + 10 + 2 + 3)$ ein, so ergiebt sich

$$+ 8 + 10 + 2 + 3 = + (8 + 10 + 2 + 3).$$

Ebenso ist:

$$+ 2 + 3 + 12 = + (2 + 3 + 12),$$
$$+ 7 + 8 + 9 = + (7 + 8 + 9),$$
$$+ 13 + 25 + 75 + 80 = + (13 + 25 + 75 + 80),$$

oder wenn wir zu Buchstaben übergehen:

$$+ a + b = + (a + b),$$
$$+ c + d = + (c + d),$$
$$+ a + b + c + d = + (a + b + c + d).$$

Die letzte Gleichung wollen wir uns genauer ansehen: Die linke Seite derselben sagt uns, daß wir nach einander die Größen a, b, c, d addiren sollen. Die rechte Seite fordert uns auf, die **Summe** dieser Größen zu addiren. Mithin ist die letzte Gleichung der knappe mathematische Ausdruck für den Satz:

Anstatt mehrere Größen nach einander zu addiren, können wir sogleich die Summe derselben addiren.

Wenden wir uns zu den negativen Größen! Nach den Erörterungen unseres Paragraphen ist:

$$\text{I)}\ - 2 - 3 - 12 = -17.$$

Zur 17 sind wir gelangt, indem wir die 2, 3 und 12 zu einander addirten, in Zeichen, es ist:

$$17 = 2 + 3 + 12.$$

Wenn wir die rechte Seite der letzten Gleichung durch eine Klammer zusammenfassen und diese Klammer dann für die gleiche Größe 17 in Gl. I einsetzen, erhalten wir:

$$- 2 - 3 - 12 = - (2 + 3 + 12).$$

Ebenso wird sein:

$$-8-7-18=-(8+7+18),$$
$$-20-40-10-15=-(20+40+10+15),$$

oder wenn wir Buchstaben verwenden:

$$-a-b=-(a+b),$$
$$-c-d-e=-(c+d+e),$$
$$-a-b-c-d=-(a+b+c+d).$$

Untersuchen wir, welchen Sinn die letzte Gleichung hat. Die linke Seite fordert uns auf, nach einander die Größen a, b, c, d abzuziehen; durch die rechte Seite wird uns aufgetragen, die Summe dieser Größen zu subtrahiren. Die ganze Gleichung enthält also in mathematischen Zeichen den schon behandelten Satz:

Anstatt mehrere Größen nach einander zu subtrahiren, kann man sogleich die Summe derselben subtrahiren.

Auf die beiden Gleichungen:

$+a+b+c+d=+(a+b+c+d)$ und
$-a-b-c-d=-(a+c+c+d)$

werden wir später noch ausführlich eingehen.

Thu' das Deine und thu' es frisch!

Lection 25.

A. Fortsetzung der Lehre von der Vereinigung algebraischer Größen.

§ 44. Die Vereinigung zweier ungleichnamigen algebraischen Größen. In: $+9-9$ ist $+9$ eine positive und -9 eine negative Größe. Wir sollen also 9 erst addiren und dann subtrahiren. Wenn wir eine Größe erst addiren und dann wieder subtrahiren, wenn wir erst geben und dann wieder nehmen, was wir gegeben haben, so ist das Resultat, wie wir bereits in § 18 erörterten, dasselbe, als wenn wir wir nichts addirt und nichts subtrahirt haben. Es ist mithin:

$$+9-9=0,\ \text{ebenso}\ +12-12=0,$$
$$+a-a=0,\quad +2b-2b=0,$$

also:

Zwei algebraische Größen, welche denselben absoluten Werth, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, ergeben bei der Vereinigung 0.

Doch gehen wir weiter! In

$$10+9-5$$

sollen wir zur 10 erst 9 addiren und von dem Resultat dann 5 abziehen. 10 und 9 giebt 19, 19 weniger 5 giebt **14.** Zur **14** gelangen wir auch, wenn wir zur 10 sogleich 4 hinzufügen, also $10+4$ berechnen. Es ist mithin:

$$10+\mathbf{9}-\mathbf{5}=10+\mathbf{4},$$

ebenso ist auch:

$$12+\mathbf{9}-\mathbf{5}=12+\mathbf{4},$$
$$18+\mathbf{9}-\mathbf{5}=18+\mathbf{4},$$

überhaupt können wir, statt nach einander 9 zu addiren und dann 5 zu subtrahiren, sogleich 4 addiren, in Zeichen, es ist:

$$+9-5=+4.$$

Ebenso wird sein: $+15-9=+4$,
$+21-18=+3,\quad -6+2=-4,$
$-8+5=-3,\quad -20+10=-10.$

Der Schüler hat gewiß sogleich verstanden, wie wir verfahren sind. Es ist aber doch nöthig, daß wir unser Verfahren noch näher beleuchten und bestimmt formuliren. Wir hatten bei allen Gleichungen auf der linken Seite **zwei algebraische Größen mit entgegengesetztem Vorzeichen,** die von uns auf der rechten Seite zu einer vereinigt wurden.

In: $\qquad +9-5=+4$

haben wir z. B. $+9$ und -5 zu $+4$ vereinigt. Fragen wir uns, wie $+4$ aus $+9$ und -5 hervorgegangen ist. $+9$ hat den absoluten Werth 9, -5 den absoluten Werth 5. Der absolute Werth von $+9$ ist der größere, der von -5 der kleinere. Ziehen wir von dem größern absoluten Werth 9 den kleinern 5 ab, so erhalten wir 4. Der 4 geben wir das Vorzeichen von $+9$, d. h. der Zahl mit dem größern absoluten Werth. Also:

Um zwei algebraische Größen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu vereinigen, werden wir zuerst die absoluten Werthe

derselben suchen; dann werden wir den kleinern absoluten Werth vom größern abziehen und dem Resultat (der Differenz) das Vorzeichen der algebraischen Größe mit dem größern absoluten Werth geben.

Um $-15+3$ zu berechnen, werden wir demnach 3 von 15 abziehen; 15 weniger 3 ist 12. Die 12 erhält das Vorzeichen —, weil -15 einen größern absoluten Werth hat als $+3$. Es ist daher:

$$-15+3=-12.$$

Wollen wir $+12a-27a$ berechnen, so haben wir 12a von 27a zu subtrahiren; 27a weniger 12a ist 15a, 15a muß negativ genommen werden, weil $-27a$, die Größe mit dem höhern absoluten Werth, negativ ist.

Nach unserer Regel ist ferner:

$$+2a-8a=-6a,\quad -5b+19b=+14b,$$
$$+3ab-18ab=-15ab,$$
$$-10mn+20mn=+10mn.$$

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:

1) $-24+30$, 2) $-57+60$,
3) $+8-18$, 4) $-135+400$,
5) $-145+402$, 6) $+19-40$,
7) $+18a-24a$, 8) $-19s+27s$,
9) $-100st+15st$, 10) $-100st+75st$,
11) $-13uv+16uv$.

§ 45. Die Vereinigung von mehr als zwei algebraischen Größen mit entgegengesetztem Vorzeichen. In § 39 (im vorigen Briefe ist statt § 39 fälschlich § 40 gesetzt) sind wir zu der arithmetischen Summe:

$$+412+210-582+82-55$$

gelangt. In derselben haben wir drei positive Glieder nämlich: $+412$, $+210$ und $+82$ und zwei negative Glieder, nämlich: -582 und -55. Wie werden wir diese Glieder vereinigen, oder mit anderen Worten, die vorstehende arithmetische Summe berechnen?

Einen Weg, den man gewöhnlich einschlägt, haben wir bereits in § 39 erörtert. Man **vereinigt** nämlich zunächst die **positiven**, dann die **negativen Glieder** und schließlich noch **die beiden** sich ergebenden **Resultate.**

Bei: $+412+210-582+82-55$

werden wir also erst $+412+210+82$, darauf $-582-55$ vereinigen. Es ist:

$$+412+210+82=+704$$
und $-582-55=-637$, folglich:

$$+412+210-582+82-55=+704-637$$

Die beiden Resultate $+704$ und -637, geben vereinigt $+67$, folglich ist:

$$+412+210-582+82-55=+67.$$

Das ganze Verfahren wird noch klarer, wenn wir uns folgender Schreibweise bedienen:

$$\begin{aligned}+412+210-582+82-55 &= +412+210+82-582-55\\ &= +704-637\\ &= +67.\end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$\begin{aligned}+7+8-5-3+2-4+7-8 &= +7+8+2+7-5-3-4-8\\ &= +24-20\\ &= +4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+13-15+19-24+30-35 &= +13+19+30-15-24-35\\ &= +62-74\\ &= -12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-102+105-200+36-8-10 &= +105+36-102-200-8-10\\ &= +141-320\\ &= -179,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+5a-8a+6a+12a-9a-2a &= +5a+6a+12a-8a-9a-2a\\ &= +23a-19a\\ &= +4a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-18mn+20mn+49mn-50mn-2mn &= +20mn+49mn-18mn-50mn-2mn\\ &= +69mm-70mn\\ &= -1mn=-mn.\end{aligned}$$

Aufgaben I. Der Schüler möge in der eben besprochenen Weise bei den arithmetischen Summen:

a) $+49-30+17-20+13-12$,
b) $+23-31+11-52+17-8$,
c) $-10+5-30+7+70-11$,
d) $+15d-11d+18d-20d+35d-40d$,
e) $+17de-60de+13de+27de-80de$,
f) $+26st-37st+50st-49st+47st$

die Glieder vereinigen.

Oft ist es rathsamer, die Vereinigung der Glieder einer arithmetischen Summe auf eine andere Weise vorzunehmen. Wollten wir z. B. bei: $+37+7-7+15-15+3-3$ die Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} +37+7-7+15-15+3-3 &= +37+7+15+3-7-15-3 \\ &= +62-25 \\ &= +37, \end{aligned}$$

so würden wir zu umständlich verfahren. Wie wir wissen, ist sowohl $+7-7$ wie $+15-15$ und $+3-3$ gleich 0; wenn wir dies berücksichtigen, können wir unmittelbar schreiben:

$$+37+7-7+15-15+3-3=+37.$$

Sollen wir: $+172+86-72-46$ berechnen, so werden wir am zweckmäßigsten das erste und dritte, das zweite und vierte Glied vereinigen. Es ist dann:

$$\begin{aligned} +172+86-72-46 &= +172-72+86-46 \\ &= +100 \quad +40 \\ &= +140. \end{aligned}$$

Es mögen noch einige Beispiele folgen, welche zeigen, wie man sich durch eine zweckmäßig gewählte Reihenfolge der Glieder die Rechnung oft sehr erleichtern kann.

Es ist:

$$\begin{aligned} +100-144+26-50+72-13 &= +\overbrace{100-50}-\overbrace{144+72}+\overbrace{26-13} \\ &= +50 \quad -72+13 \\ &= \ -9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +1000-121-500-70+21+770 &= +\overbrace{1000-500}-\overbrace{121+21}-\overbrace{70+770} \\ &= +500 \quad -100+700 \\ &= 1100. \end{aligned}$$

Aufgaben II. Der Schüler möge
a) $+34+24-17-12$,
b) $+72-96-22+196$,
c) $+227-83-27+183$,
d) $-90+358+180-58$ berechnen.

B. Die Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Größen.

§ 46. Die Addition und Subtraction arithmetischer Summen. In dem Ausdrucke:

$$8+(7-5+4-2+6)$$

haben wir die arithmetische Summe:

$$7-5+4-2+6$$

durch eine Klammer eingeschlossen, um anzudeuten, daß sie als ein zusammengehöriges Ganze aufgefaßt werden soll. Wollen wir den Ausdruck:

$$8+(7-5+4-2+6)$$

berechnen, so werden wir zunächst den Werth der Klammer ermitteln und diesen Werth dann zu 8 addiren. Die Klammer

$$(7-5+4-2+6)$$

ist gleich 10; 8 und 10 giebt **18**, mithin ist

$$8+(7-5+4-2+6)=\mathbf{18}$$

Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir die Klammer einfach fortlassen. Es ist auch

$$8+7-5+4-2+6=\mathbf{18}.$$

Mithin besteht die Gleichung:

$$8+(7-5+4-2+6)=8+7-5+4-2+6.$$

Aus dieser Gleichung wollen wir unsere Schlüsse ziehen! Die linke Seite sagt uns: die durch eine Klammer eingeschlossene **arithmetische Summe soll addirt werden.** Aus der rechten Seite ersehen wir, daß wir diese Addition vornehmen können, indem wir die Klammer einfach entfernen; von den Gliedern der arithmetischen **Summe** behalten die 5 und die 2 ihr negatives, die 4 und die 6 ihr positives Vorzeichen, das absolute Glied 7 nimmt das positive Vorzeichen an. Also:

Bei der Addition einer arithmetischen Summe **bleiben** die **positiven** Glieder **positiv**, die **negativen** Glieder **negativ** und das **absolute** Glied wird **positiv**.

Demgemäß ist:

$$19 + (24 - 4 + 5 - 3) = 19 + 24 - 4 + 5 - 3,$$
$$21 + (9 - 13 + 16 - 27) = 21 + 9 - 13 + 16 - 27,$$
$$a + (2a - 5a + 7a) = a + 2a - 5a + 7a.$$

Gehen wir jetzt zur **Subtraction einer arithmetischen Summe** über! In:

$$54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6)$$

soll die durch eine Klamme eingeschlossene **arithmetische Summe** $(9 + 18 - 3 + 2 - 6)$ von 54 **subtrahirt werden.** Zu einem richtigen Resulsultat kommen wir jedenfalls, wenn wir erst die Klammer berechnen und dann ihren Werth von 54 abziehen. $(9 + 18 - 3 + 2 - 6)$ ist gleich 20; 54 weniger 20 ergiebt **34**. Es ist darum:

$$54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6) = \mathbf{34}.$$

Um arithmetische Summen zu addiren, konnten wir einfach die Klammern fortlassen. Versuchen wir, ob wir auch hier auf diese Weise zum Ziele gelangen. Entfernen wir die Klammer, so wird aus

$$54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6)$$

der Ausdruck:

$$54 - 9 + 18 - 3 + 2 - 6.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$54 - 9 + 18 - 3 + 2 - 6$$

nicht gleich 34, sondern gleich 56 ist. Wir dürfen also bei der Subtraction einer arithmetischen Summe nicht so verfahren, wie bei der Addition.

$(9 + 18 - 3 + 2 - 6)$ soll subtrahirt werden. **Kehren** wir die **Vorzeichen um**, d. h. machen wir aus dem + ein — und aus dem — ein +, oder anders ausgedrückt, aus positiven Gliedern negative und aus negativen Gliedern positive, so wird aus

$$(9 + 18 - 3 + 2 - 6)$$

der Ausdruck: $(9 - 18 + 3 - 2 + 6)$

und aus $54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6)$

der Ausdruck: $54 - (9 - 18 + 3 - 2 + 6)$.

Entfernen wir jetzt die Klammer, so erhalten wir:

$$54 - 9 - 18 + 3 - 2 + 6.$$

Wenn wir diesen Ausdruck berechnen, erhalten wir: **34**, also das richtige Resultat, denn dieses Resultat hatte sich auch ergeben, als wir in:

$$54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6)$$

erst den Werth der Klammer aufsuchten und diesen von 54 subtrahirten. Es ist mithin:

$$54 - (9 + 18 - 3 + 2 - 6) = 54 - 9 - 18 + 3 - 2 + 6.$$

Betrachten wir diese Gleichung! Auf der linken Seite hat die zu subtrahirende arithmetische Summe fünf Glieder; und zwar ein absolutes Glied, die 9, zwei positive Glieder, nämlich + 18 und + 2, ferner zwei negative Glieder — 3 und — 6. Aus dem absoluten Gliede 9 ist auf der rechten Seite das negative Glied — 9 geworden; die positiven und negativen Glieder der linken Seite haben auf der rechten Seite ihr Vorzeichen verändert; + 18 ist in — 18, + 2 in — 2, — 3 in + 3 und — 6 in + 6 verwandelt worden. Also:

Bei der Subtraction einer arithmetischen Summe **verändern** die Glieder ihr **Vorzeichen**, die **positiven** Glieder werden **negativ**, die **negativen positiv**; ein **absolutes** Glied nimmt das **negative** Vorzeichen an.

Nach dieser Regel ist:

$$23 - (18 - 3 + 2) = 23 - 18 + 3 - 2,$$
$$129 - (57 + 33 - 22 + 16 - 18) = 129 - 57 - 33 + 22 - 16 + 18,$$
$$334 + 212 - (44 - 33 + 17 - 19) = 334 + 212 - 44 + 33 - 17 + 19,$$
$$9a + 3a - (14a + 17a - 6a - 5a) = 9a + 3a - 14a - 17a + 6a + 5a,$$
$$113ab - (19ab + 23ab - 18ab + 15ab - 9ab) = 113ab - 19ab - 23ab + 18ab - 15ab + 9ab.$$

Aufgaben. Der Schüler möge den beiden Regeln über die Addition und Subtraction arithmetischer Summen gemäß folgende Aufgaben lösen:

1) $97 + (6 - 7 + 8 - 9 + 10)$,
2) $13 + (5 - 6 + 17 - 18 + 19 - 20)$,
3) $25 + (25 - 15 + 28 - 18 + 37 - 7)$,
4) $48 - (6 + 16 - 36 + 36 - 15)$,
5) $89 - (12 - 4 + 26 - 13 + 17)$,
6) $200 - (105 - 100 - 53 + 250)$,
7) $36d + (7d - 6d + 15d - 18d)$,
8) $46f + (14f - 7f + 2f + 4f)$,

9) $58e - (16e - 8e - 3e + 5e)$,
10) $156st - (35st - 66st + 55st - 11st)$.

Bemerkung I. Bei den beiden Regeln, welche wir über die Addition und Subtraction arithmetischer Summen aufgestellt haben, ist von uns immer das erste absolute Glied berücksichtigt worden. Wir haben in diesen Regeln besonders angeführt, daß bei der Addition einer arithmetischen Summe das absolute Glied positiv, bei der Subtraction negativ wird. Wir hätten dies unterlassen können, wenn wir **festgesetzt** hätten, daß wir ein **absolutes** Glied ebenso wie ein **positives** behandeln wollen. Machen wir diese Festsetzung, so ist es selbstverständlich, daß ein absolutes Glied ebenso wie die positiven Glieder bei der Addition einer arithmetischen Summe positiv wird (sein Vorzeichen behält) und bei der Subtraction der arithmetischen Summe ein negatives Vorzeichen annimmt, (sein Vorzeichen verändert).

Wenn wir jetzt nach Entfernung der Bemerkungen über das absolute Glied die beiden Regeln über die Addition und Subtraction einer arithmetischen Summe einander gegenüberstellen, erhalten wir:

Bei der **Addition** einer arithmetischen Summe **behalten** die Glieder ihr Vorzeichen, die **positiven** Glieder bleiben **positiv** und die **negativen** Glieder **negativ.**	Bei der **Subtraction** einer arithmetischen Summe **verändern** die Glieder ihr Vorzeichen, die **positiven** Glieder werden **negativ** und die **negativen** Glieder **positiv.**

Bemerkung II. Nach den in unserm Paragraphen entwickelten Regeln ist:

$$1)\quad 16 + (13 - 8 + 4 - 2) = 16 + 13 - 8 + 4 - 2,$$
$$2)\quad 16 - (13 - 8 + 4 - 2) = 16 - 13 + 8 - 4 + 2.$$

Wenn wir die Rechnung auf der rechten Seite vollständig ausführen, erhalten wir:

$$1)\quad 16 + (13 - 8 + 4 - 2) = 16 + 13 - 8 + 4 - 2 = 23,$$
$$2)\quad 16 - (13 - 8 + 4 - 2) = 16 - 13 + 8 - 4 + 2 = 9.$$

Ferner ist:

$$3)\quad 14e + 17e - (9e - 4e + 2e) = 14e + 17e - 9e + 4e - 2e$$
$$= 24e,$$

$$4)\quad 4a + 6b + 9c + (2a + 8b - 5c) = 4a + 6b + 9c + 2a + 8b - 5c$$
$$= 4a + 2a + 6b + 8b + 9c - 9c$$
$$= 6a + 14b + 3c,$$

$$5)\quad 8a + 10b + 9c + 7d + (4a - 6b + 3c - 5d)$$
$$= 8a + 10b + 9c + 7d + 4a - 6b + 3c - 5d$$
$$= 8a + 4a + 10b - 6b + 9c + 3c + 7d - 5d,$$
$$= 12a + 4b + 12c + 2d,$$

$$6)\quad 8a + 10b + 9c + 7d - (4a - 6b + 3c - 5d)$$
$$= 8a + 10b + 9c + 7d - 4a + 6b - 3c + 5d$$
$$= 8a - 4a + 10b + 6b + 9c - 3c + 7d + 5d$$
$$= 4a + 16b + 6c + 12d,$$

$$7)\quad 12mn + 14st + 26uv + (8mn + 2st - 16uv)$$
$$= 12mn + 14st + 26uv + 8mn + 2st - 16uv$$
$$= 12mn + 8mn + 14st + 2st + 26uv - 16uv$$
$$= 20mn + 16st + 10uv,$$

$$8)\quad 12mn + 14st + 26uv - (8mn + 2st - 16uv)$$
$$= 12mn + 14st + 26uv - 8mn - 2st + 16uv$$
$$= 12mn - 8mn + 14st - 2st + 26uv + 16uv$$
$$= 4mn + 12st + 42uv.$$

§ 47. Eine bequeme Form für die Subtraction algebraischer Summen. Um

$$8a^{1)} + 10b + 9c + 7d - (4a - 6b + 3c - 5d)$$

zu berechnen, haben wir (siehe im vorigen Paragraphen Beisp. 6) eine Reihe von Gleichungen aufgestellt, welche zwar den Gang der Rechnung genau angaben, aber doch nicht übersichtlich genug darthaten, wie wir verfahren sind. Sehen wir zu, ob wir nicht eine übersichtlichere Schreibweise finden können. Wenn wir eine Zahl von einer andern abziehen, pflegen wir den Subtrahenden **unter** den Minuenden zu setzen. Soll 2655 von 4800 subtrahirt werden, so ist 2655 der Subtrahend (d. h. die Zahl, welche subtrahirt werden soll), 4800 der Minuend (d. h. die Zahl, welche vermindert werden soll); man schreibt dann:

$$\begin{array}{rl} 4800 & \text{(Minuend)}, \\ 2655 & \text{(Subtrahend)} \\ \hline 2145. & \end{array}$$

2145 ist das Resultat der Subtraction, die Differenz. In:

$$8a + 10b + 9c + 7d - (4a - 6b + 3c - 5d)$$

soll $4a - 6b + 3c - 5d$ abgezogen und $8a + 10b + 9c + 7d$ vermindert werden. Daher ist: $4a - 6b + 3c - 5d$ der Subtrahend und $9a + 10b + 9c + 7d$ der Minuend. Setzen wir den Subtrahenden unter den Mi'nueden und zwar so, daß die a unter die a, die b unter die b kommen u. s. f., so erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrrl} & 8a + & 10b + & 9c + & 7d \text{ (Minuend)}, \\ (+)^{2)} & 4a - & 6b + & 3c - & 5d \text{ (Subtrahend)}. \\ & - & + & - & + \end{array}$$

Wie wir aus dem vorigen Paragraphen wissen, haben wir bei den Gliedern des **Subtrahenden** (d. h. der arithmetischen Summe, welche subtrahirt werden soll) die **Vorzeichen zu verändern,** oder wie man auch sagt, **umzukehren.** Wir haben darum bei $+ 4a$ unter das + ein —, bei $- 6b$ unter das — ein +, bei $+ 3c$ unter das + ein —, bei $- 5d$ unter das — ein + gesetzt. Um jetzt zum Resultat (der Differenz) zu kommen, werden wir einfach die Glieder des Minuenden und die Glieder des Subtrahenden (mit dem untern, veränderten Vorzeichen) an einander reihen und dann die gleichartigen Glieder (d. h. die a's, ferner die b's u. s. w.) vereinigen. Führen wir dies aus, so ergiebt sich:

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 8a + 10b + 9c + 7d \text{ (Minuend)}, \\ \quad (+)\ 4a - \ \ 6b + 3c - 5d \text{ (Subtrahend)}, \\ \qquad\quad\ - \qquad + \qquad - \qquad + \\ \hline 8a - 4a + 10b + 6b + 9c - 3c + 7d + 5d \\ = 4a \qquad + 16b \qquad + 6c \qquad + 12d. \text{ (Differenz)}. \end{array}$$

Wollen wir: $12mn + 14st + 26uv - (8mn + 2st - 16uv$ (siehe Beisp. 8 in Bemerkung II des vorigen Paragraphen) berechnen, so wird sich die Rechnung folgendermaßen gestalten:

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 12mn + 14st + 26uv \text{ (Minuend)} \\ \qquad + \ \ 8mn + \ \ 2st - 16uv \text{ (Subtrahend)} \\ \qquad\quad\ - \qquad\quad - \qquad + \\ \hline 12mn - 8mn + 14st - 2st + 26uv + 16uv \\ = \ \ 4mn \qquad + 12st \qquad + 42uv. \end{array}$$

---

¹) 8a ist zusammengesetzt aus zwei Factoren, aus der Zahl 8 und dem Buchstaben a. Die Zahl 8 nennt man den **Coefficienten** von a. Ebenso ist in 4a die Zahl 4 der Coefficient von a, in 7c die Zahl 7 der Coefficient von c, in 9abc die Zahl 9 der Coefficient von abc, in $10bd^2$ die Zahl 10 der Coefficient von bd^2. Ausdrücke wie: 8a und 4a, ferner wie $3a^2b$, $5a^2b$ und $6a^2b$, welche zwar nicht in ihren Coefficienten übereinstimmen, aber wohl in den Buchstaben, welche sie enthalten, wollen wir **gleichartig** nennen. Es sind daher 8a und 4a, 10b und 6b, 9c und 3c, 7d und 5d gleichartig. Man braucht in der Mathematik für gleichartig auch wohl das Wort „gleichnamig"; wir haben indessen mit „gleichnamig" Größen bezeichnet, welche dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgaben. Der Schüler möge in: $82b^2$, $18c^3$, $24de^4$, $33mr^2s^5$, $47rst^8$ die Coefficienten angeben.

²) 4a ist eigentlich eine absolute Größe; weil wir die absoluten Größen wie positive behandeln wollen, haben wir vor 4a ein durch eine Klammer eingeschlossenes Pluszeichen gesetzt. Künftig werden wir, falls die Deutlichkeit bei der Rechnung es nothwendig macht, vor die absoluten Größen ein Pluszeichen auch ohne Klammern setzen.

Sollen wir von: $13ab^2 - 25bc^2 + 36cd^2 - 18de^2$ die arithmetische Summe $2ab^2 - 28bc^2 + 17cd^2 + 19de^2$ subtrahiren, so werden wir schreiben:

$$\begin{array}{l}
\quad 13ab^2 - 25bc^2 + 36cd^2 - 18de^2 \\
+\ \ 2ab^2 - 28bc^2 + 17cd^2 + 19de^2 \\
-\qquad\quad +\qquad\quad -\qquad\quad - \\
\hline
13ab^2 - 2ab^2 - 25bc^2 + 28bc^2 + 36cd^2 - 17cd^2 - 18de^2 - 19de^2 \\
= 11ab^2 \qquad + 3bc^2 \qquad + 19cd^2 \qquad - 37de^2.
\end{array}$$

Aufgaben. Es sei gegeben:

1) $14m + 17n - 18s + 13r$
   $12m - 21n + 33s - 17r$,
2) $15e - 2f + 6s - 4t$
   $8e + 3f - 8s + 4t$,
3) $5a^2 + 8b^2 - 10c^2 + 16d^2$
   $7a^2 - 9b^2 + 17c^2 + 26d^2$,
4) $10p^2r^3 - 20st^2 + 29uv^4$
   $18p^2r^3 + 24st^2 - 25uv^4$,
5) $3pq + 13qr + 23uv$
   $12pq - 23qr - 33uv$,
6) $35mn + 17nr + 27st$
   $22mn + 28nr - 37st$.

Der Schüler möge die erste Zeile immer als Minuenden, die zweite Zeile als Subtrahenden ansehen und dann die Subtraction ausführen.

§ 48. Subtraction algebraischer Größen. Von unserer bequemen Subtractionsform ausgehend wollen wir einige Folgerungen machen. Ziehen wir $+5a - 6b + 7c$ von $+10a + 12b - 14c$ ab, so können wir schreiben:

$$\begin{array}{l}
\qquad + 10a + 12b - 14c \\
\qquad +\ \ 5a - \ \ 6b + \ \ 7c \\
\qquad -\qquad\ +\qquad - \\
\hline
+ 10a - 5a + 12b + 6b - 14c - 7c \\
= + 5a \qquad + 18b \qquad - 21c.
\end{array}$$

Genau genommen haben wir hierbei 3 Subtractionen ausgeführt; wir haben erst $+ 5a$ von $+ 10a$, dann $- 6b$ von $+ 12b$ und drittens $+ 7c$ von $- 14c$ abgezogen. Schreiben wir uns diese drei Subtractionsexempel einzeln hin, so haben wir:

$$1)\ \begin{array}{r} +10a \\ +\ 5a \\ - \\ \hline +10a - 5a, \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +12b \\ -\ 6b \\ + \\ \hline 12b + 6b, \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} -14c \\ +\ 7c \\ - \\ \hline -14c - 7c. \end{array}$$

Das erste Exempel sagt uns:

$+5a$ subtrahirt von $+10a$ ist gleich $+10a - 5a$,

oder anders ausgedrückt:

$+ 10a$ **weniger** $+5a$ ist gleich $+10a - 5a$.

Wir wollen $+ 5a$ einklammern und dann für **„weniger"** das Minuszeichen (—) setzen, so wird aus:

$+10a$ **weniger** $+5a$ ist gleich $+10a - 5a$

der Ausdruck:

$$+ 10a - (+ 5a) = + 10a - 5a,$$

also haben wir:

$$1)\ - (+ 5a) = - 5a.$$

Betrachten wir das zweite Exempel! Es sagt uns:

$-6b$ subtrahirt von $+12b$ ist gleich $+12b + 6b$,

oder anders ausgedrückt:

$+12b$ **weniger** $-6b$ ist gleich $+12b + 6b$.

Wenn wir $-6b$ einklammern und für weniger das Minuszeichen (—) einsetzen, so wird aus

$+ 12b$ **weniger** $- 6b$ giebt $+ 12b + 6b$,

der mathematische Ausdruck:

$$+ 12b - (- 6b) = + 12b + 6b.$$

Es ist daher:

$$2)\ - (- 6b) = + 6b.$$

Aus dem dritten Exempel können wir in gleicher Weise folgern:

$$- 14c - (+ 7c) = - 14c - 7c,$$

also $3)\ - (+ 7c) = - 7c$.

Wir wollen die Gleichungen 1, 2 und 3 unter einander schreiben, dann erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
1)\ - (+ 5a) = - 5a, \\
2)\ - (- 6b) = + 6b, \\
3)\ - (+ 7c) = - 7c.
\end{array}$$

In Gleichung 1 haben wir auf der linken Seite $- (+ 5a)$. $+ 5a$ ist eine positive Größe, das Minuszeichen vor $+ 5a$ deutet an, daß diese positive Größe subtrahirt werden soll. Durch die rechte Seite erfahren wir, daß wir diese Subtraction vollziehen können, indem wir aus der positiven Größe $+ 5a$ die negative $- 5a$ machen, also

das Vorzeichen umkehren. Mithin haben wir den Satz:

Bei der **Subtraction** wird eine **positive** Größe **negativ.**

Zu demselben Satze würde uns eine genaue Betrachtung der Gleichung 3 führen.

Dem Satze gemäß ist:

$$-(+4) = -4, \quad -(+8) = -8,$$
$$-(+ab) = -ab, \quad -(+mn^2) = -mn^2,$$
$$-(+st^3) = -st^3, \quad -\left(+\frac{c}{d}\right) = -\frac{c}{d}.$$

Sehen wir uns jetzt Gleichung 2 an. Dieselbe heißt: $-(-6b) = +6b$.

Auf der linken Seite ist $-6b$ durch eine Klammer eingeschlossen; das Minuszeichen davor sagt uns, daß $-6b$ subtrahirt werden soll. Wie die rechte Seite angiebt, ist diese Subtraction auszuführen, indem wir aus der negativen Größe $-6b$ die positive $+6b$ machen, also gleichfalls das Vorzeichen umkehren. Die zweite Gleichung giebt uns den Satz:

Bei der **Subtraction** wird eine **negative** Größe **positiv.**

Daher ist:

$$-(-5) = +5, \quad -(-16) = +16.$$
$$-(-a) = +a, \quad -(-mn) = +mn,$$
$$-(-uv) = +uv, \quad -(-st) = +st,$$
$$-(-abc^4) = +abc^4,$$
$$-(-4st^4v) = +4st^4v.$$

Wenn wir die beiden Sätze über die Subtraction der positiven und negativen Größen zusammenfassen, haben wir den Satz:

Wir können eine **algebraische Größe subtrahiren,** indem wir ihr **Vorzeichen umkehren.**

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:
1) $-(+30)$, 2) $-(+45)$, 3) $-(+63)$,
4) $-(-48)$, 5) $-(-75)$, 6) $-(-84)$,
7) $-(+mn)$, 8) $-(+rs)$, 9) $-(+uv)$,
10) $-(-cd^4)$, 11) $-(+ef^5)$, 12) $-(-uv^7)$.

Bemerkung II. Wenn der Schüler die beiden Gleichungen $-(+a) = -a$ und $-(-a) = +a$ übersieht, wird ihn besonders die zweite mit Verwunderung erfüllen. Eine negative Zahl negativ genommen soll positiv werden! das wird ihm nicht recht einleuchten wollen, selbst wenn er sich unsere streng mathematische Ableitung wiederholt. Vielleicht schwindet diese Verwunderung, wenn wir ihn darauf aufmerksam machen, daß wir in der Sprache etwas ganz Analoges[1]) vorfinden; auch hier giebt eine Negation[2]), wenn sie negirt[3]) wird, eine Bejahung. Niemand nicht bedeutet soviel wie Jeder, niemals nicht soviel wie immer, nirgends nicht soviel wie überall.

§ 49. Eine bequeme Form für die Addition arithmetischer Summen. Bei der Subtraction einer arithmetischen Summe von einer andern haben wir eine bequeme Form für die Rechnung gefunden.

Soll $+10a - 5b + 9c - 8d$ von $+25a + 10b + 19c - 16d$ subtrahirt werden, so schreiben wir:

$$\begin{array}{l} +25a + 10b + 19c - 16d \text{ (Minuend)} \\ +10a - 5b + 9c - 8d \text{ (Subtrahend)} \\ - + - + \\ \hline +25a - 10a + 10b + 5b + 19c - 9c - 16d + 8d \\ = +15a \quad +15b \quad +10c \quad -8d \text{ (Differenz).} \end{array}$$

Wir haben den Subtrahenden unter den Minuenden gesetzt, die Vorzeichen im Subtrahenden umgekehrt und dann die gleichartigen Größen (d. h. die a's, b's, c', d's) vereinigt. Nehmen wir an, es solle

$$+10a - 5b + 9c - 8d$$
$$\text{zu } +25a + 10b + 19c - 16d$$

addirt und nicht davon subtrahirt werden, so werden wir die beiden arithmetischen Summen auch derart unter einander setzen, daß die gleichartigen Größen unter einander stehen, und schreiben:

$$\begin{array}{l} +25a + 10b + 19c - 16d \\ +10a - 5b + 9c - 8d \end{array}$$

Darunter werden wir einen Strich ziehen; dann aber in $+10a - 5b + 9c - 8d$ die Vorzeichen nicht umkehren, sondern **ohne Umkehrung der Vorzeichen** die gleichartigen Größen vereinigen, denn, wie wir wissen, behalten bei der Addition einer arithmetischen Summe die Glieder ihr Vorzeichen bei. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

---

[1]) Analog = ähnlich, entsprechend. [2]) Negation = Verneinung. [3]) negiren = verneinen.

$$\begin{array}{l} +25a + 10b + 19c - 16d \text{ (Summand)} \\ +10a - 5b + 9c - 8d \text{ (Summand)} \\ \hline +25a + 10a + 10b - 5b + 19c + 9c - 16d - 8d \\ = +35a \quad + 5b \quad + 28c \quad - 24d \text{ (Summe).} \end{array}$$

Soll $+ 8b^2c - 16c^3d + 25d^2e^4 + 45ef^4$ zu $+ 4b^2c - 20c^3d - 34d^2e^4 + 19ef^4$ addirt werden, so werden wir schreiben:

$$\begin{array}{l} +4b^2c - 20c^3d - 34d^2e^4 + 19ef^4 \text{ (Summand)} \\ +8b^2c - 16c^3d + 25d^2e^4 + 29ef^4 \text{ (Summand)} \\ \hline +8b^2c + 4b^2c - 16c^3d - 20c^3d + 25d^2e^4 - 34d^2e^4 + 29ef^4 + 19ef^4 \\ = +12^2c \quad - 36c^3d \quad - 9d^2e^4 \quad + 48ef^4 \text{ (Summe).} \end{array}$$

Im Anfange des nächsten Briefes werden wir weitere Beispiele bringen und aus denselben unsere Folgerungen ziehen, welche uns zu Regeln über die Addition algebraischer Größen führen werden.

C. Recapitulation.

Nachdem wir bei Beginn der **vierundzwanzigsten Lection** die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, wandten wir uns wieder der Lehre von den positiven und negativen Größen zu. Zwar hatten wir den Schüler schon im letzten Abschnitt des vorigen Briefes in diese Lehre eingeführt, aber wir mußten unsere Auseinandersetzungen noch präciser fassen und erweitern. Wir definirten die positiven Größen als Größen, welche addirt, und die negativen Größen als Größen, welche subtrahirt werden sollen. Die Zahlenwerthe, zu welchen die positiven Größen hinzuzufügen, bez. von welchen die negativen Größen abzuziehen sind, gehen, wie wir ausführlich besprochen, aus der Beschaffenheit des Falles hervor, in dem man von den positiven und negativen Größen Gebrauch macht. Unsere besondere Aufmerksamkeit erregte der Fall, in welchem negative Größen von 0 zu subtrahiren sind. Auch damit konnten wir einen Sinn verbinden, wie uns die Beispiele mit den Schulden und dem Quecksilberthermometer belehrten. Das Quecksilberthermometer führte uns auch auf die Zahlenlinie, deren Wichtigkeit für die Untersuchungen der höheren Mathematik wir kurz besprachen.

Nach diesen Erörterungen über die positiven und negativen Größen unterschieden wir die algebraischen und absoluten, die gleichnamigen und ungleichnamigen Zahlen und gingen dann dazu über, die Vereinigung der algebraischen Größen zu behandeln. In der vierundzwanzigsten Lection zeigten wir noch, wie gleichnamige Größen zu vereinigen sind; in der **fünfundzwanzigsten Lection** wandten wir uns der Vereinigung von zwei und mehr ungleichnamigen Größen zu und kamen dann zu einem wichtigen, in diesem Briefe noch nicht beendeten Kapitel, welches wir „die Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischen Größen überschrieben. Volle Klarheit über die Gründe, weshalb wir diese Ueberschrift gewählt haben, wird der Schüler erst die Fortsetzung dieses Kapitels im nächsten Briefe bringen. Wir begannen es mit der Aufstellung zweier Regeln über die Addition und Subtraction über die von algebraischen Größen. Wie wir zeigten, können wir eine arithmetische Summe addiren, indem wir den Gliedern ihre Vorzeichen unverändert lassen, und subtrahiren, indem wir die Vorzeichen der Glieder verändern. Für die Subtraction einer arithmetischen Summe suchten wir dann eine bequemere Form; und von dieser Form ausgehend kamen wir zu dem Satze, daß man algebraische Größen subtrahirt, indem man ihr Vorzeichen umkehrt. Wir suchten dann noch für die Addition arithmetischer Summen eine bequemere Form und schlossen damit den zweiten Abschnitt der fünfundzwanzigsten Lection.

D. Wiederholungsfragen.

1) Was ist eine positive, was ist eine negative Zahl?
2) Was versteht man unter einer algebraischen, was unter einer absoluten Größe?
3) Was sind gleichnamige, was sind ungleichnamige algebraische Größen?
4) Wie vereinigt man positive, wie negative Größen mit einander?
5) Wie werden zwei, wie mehr Größen mit entgegengesetztem Vorzeichen vereinigt?
6) Was bedeutet der Ausdruck: die Vorzeichen umkehren oder verändern?
7) Was geschieht mit den Vorzeichen, wenn eine algebraische Summe subtrahirt wird.
8) Was bedeutet: $-(+a)$ und $-(-a)$?
9) Wie kann man die Gleichungen:
$$-(+a) = -a \text{ und } -(-a) = +a$$
in Worte kleiden?
10) Wie wird ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, mit einer Größe multiplicirt?
11) Wie wird ein Product durch einen oder mehrere seiner Factoren dividirt?
12) Was ist in $4^2 = 16$ die Basis, was ist der Exponent, was ist die Potenz?
13) Wie multiplicirt man zwei Potenzen mit gleichen Basen mit einander?
14) Wie werden zwei Potenzen mit gleichen Basen durch einander dividirt?
15) Was ist bei einem Multiplicationsexempel der Multiplicand und der Multiplicator?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 26 und 27.
Arithmetik.

14. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als Manuscript gedruckt.

Einem Herzen, das will, ist nichts unmöglich.

Lection 26.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 24.

Abschnitt C. § 41. **Aufgaben.** + 17, — 19, + a, — b, + uv, — mn sind algebraische, 6, 8 und d sind absolute Größen. 17 ist der absolute Werth von + 17, 19 von — 19, a von + a, b von — b, uv von + uv, mn von — mn.

§ 43. **Aufgaben I.** Es ist:

a) + 13 + 17 = + 30,
b) + 19 + 21 + 20 = + 60,
c) + 40 + 90 + 100 = + 230,
d) + 4e + 8e + 12e = + 24e,
e) + 2f + 4f + 6f = + 12f,
f) + 3ac + 5ac = + 8ac.

Aufgaben II. Wir haben:

a) — 4 — 8 — 12 = — 24,
b) — 13 — 26 — 29 = — 68,
c) — 5 — 10 — 15 — 20 = — 50,
d) — 5e — 6e — 9e — 12e = — 32e,
e) — 15m — 16m — 17m — 18m = — 66m.

Lection 25.

Abschnitt A. § 44. **Aufgaben.** Es ist:

1) — 24 + 30 = + 6,
2) — 57 + 60 = + 3,
3) + 8 — 18 = — 10,
4) — 135 + 400 = + 265,
5) — 145 + 402 = + 257,
6) + 19 — 40 = — 21.
7) + 18a — 24a = — 6a,
8) — 19s + 27s = + 8s,
9) — 100st + 15st = — 85st,
10) — 100st + 75st = — 25st,
11) — 13uv + 16uv = + 3uv.

§ 45. **Aufgaben I.** Es ist:

a) + 49 — 30 + 17 — 20 + 13 — 12 = + 49 + 17 + 13 — 30 — 20 — 12
= + 79 — 62 = + 17,

b) + 23 — 31 + 11 — 52 + 17 — 8 = + 23 + 11 + 17 — 31 — 52 — 8
= + 51 — 91 = — 40,

c) — 10 + 5 — 30 + 7 + 70 — 11 = + 5 + 7 + 70 — 10 — 30 — 11
= + 82 — 51 = + 31,

d) + 15d — 11d + 18d — 20d + 35d — 40d = + 15d + 18d + 35e — 11d — 20d — 40d
= + 68d — 71d = — 3d,

e) + 17de — 60de + 13de + 27de — 80de = + 17de + 13de + 27de — 60de — 80de
= + 57de — 140de = — 83de.

Aufgaben II. Am besten werden wir folgendermaßen rechnen:

a) $+ 34 + 24 - 17 - 12 = + 34 - 17 + 24 - 12$
$= + 17 + 12 = + 29,$

b) $+ 72 - 96 - 22 + 196 = + 72 - 22 + 196 - 96$
$= + 50 + 100 = + 150,$

c) $+ 227 - 83 - 27 + 183 = + 227 - 27 + 183 - 83$
$= + 200 + 100 = + 300,$

d) $- 90 + 358 + 180 - 58 = + 180 - 90 + 358 - 58$
$= + 90 + 300 = + 390.$

§ 46. **Aufgaben.** Wir haben:

1) $+ 97 + (6 - 7 + 8 - 9 + 10) = + 97 + 6 - 7 + 9 - 9 + 10 = + 106,$
2) $13 + (5 - 6 + 17 - 18 + 19 - 20) = 13 + 5 - 6 + 17 - 18 + 19 - 20 = 10,$
3) $25 + (25 - 15 + 28 - 18 + 37 - 7) = 25 + 25 - 15 + 28 - 18 + 37 - 7 = 75,$
4) $48 - (6 + 16 - 36 + 36 - 15) = 48 - 6 - 16 + 36 - 36 + 15 = 41,$
5) $89 - (12 - 4 + 26 - 13 + 17) = 89 - 12 + 4 - 26 + 13 - 17 = 54,$
6) $200 - (105 - 100 - 53 + 250) = 200 - 105 + 100 + 53 - 250 = 2,$
7) $36d + (7d - 6d + 15d - 18d) = 36d + 7d - 6d + 15d - 18d = 34d,$
8) $46f + (14f - 7f + 2f + 4f) = 46f + 14f - 7f + 2f + 4f = 59f,$
9) $58e - (16e - 8e - 3e + 5e) = 58e - 16e + 8e + 3e - 5e = 64e,$
10) $156st - (35st - 66st + 55st - 11st) = 156st - 35st + 66st - 55st + 11st = 143st.$

§ 47. **Aufgaben.** 1) Es ist: $14m + 17n - 18s + 13r$ (Minuend)
$+ 12m - 21n + 33s - 17r$ (Subtrahend)
$- \quad + \quad - \quad +$

$14m - 12m + 17n + 21n - 18s - 33s + 13r + 17r$
$= 2m + 38n - 51s + 30r$ (Differenz).

2) $15e - 2f + 6s - 4t$ (Minuend)
$+ 8e + 3f - 8s + 4t$ (Subtrahend)
$- \quad - \quad + \quad -$

$15e - 8e - 2f - 3f + 6s + 8s - 4t - 4t$
$= 7e - 5f + 14s - 8t$ (Differenz).

3) $5a^2 + 8b^2 - 10c^2 + 16d^2$ (Minuend)
$+ 7a^2 - 9b^2 + 17c^2 + 26d^2$ (Subtrahend)
$- \quad + \quad - \quad -$

$5a^2 - 7a^2 + 8b^2 + 9b^2 - 10c^2 - 17c^2 + 16d^2 - 26d^2$
$= - 2a^2 + 17b^2 - 27c^2 - 10d^2$ (Differenz).

4) $10p^2r^2 - 20st^2 + 29uv^4$ (Minuend)
$+ 18p^2r^2 + 24st^2 - 25uv^4$ (Subtrahend)
$- \quad - \quad +$

$10p^2r^2 - 18p^2r^2 - 20st^2 - 24st^2 + 29uv^4 + 25uv^4$
$= - 8p^2r^2 - 44st^2 + 54uv^4$ (Differenz).

5) $3pq + 13qr + 23uv$ (Minuend)
$+ 12pq - 23qr - 33uv$ (Subtrahend)
$- \quad + \quad +$

$3pq - 12pq + 13qr + 23qr + 23uv + 33uv$
$= - 9pq + 36qr + 56uv$ (Differenz).

6) $35mn + 17nr + 27st$ (Minuend)
$+ 22mn + 28nr - 37st$ (Subtrahend)
$- \quad - \quad +$

$35mn - 22mn + 17nr - 28nr + 27st + 37st$
$= 13mn - 11nr - 64st$ (Differenz).

Aufgaben in der Anmerkung. In $82b^2$ ist 82, in $18c^3$ ist 18, in $24de^4$ ist 24, in $33mr^2s^5$ ist 33, in $47rst^8$ ist 47 der Coefficient.

§ 48. **Aufgaben.** Es ist:

1) $-(+30) = -30,$ 2) $-(+45) = -45,$
3) $-(+63) = -63,$ 4) $-(-48) = +48,$
5) $-(-75) = +75,$ 6) $-(-84) = +84,$
7) $-(+mn) = -mn,$ 8) $-(+rs) = -rs,$
9) $-(+uv) = -uv,$ 10) $-(-cd^4) = +cd^4,$
11) $-(+ef^5) = -ef^5,$ 12) $-(-uv^7) = +uv^7.$

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 25 gestellten Fragen.

1) Eine positive Zahl ist eine solche Zahl, welche addirt, eine negative Zahl ist eine solche Zahl, welche subtrahirt werden soll. 2) Eine Größe mit Vorzeichen wird eine algebraische, eine Größe ohne Vorzeichen eine absolute Größe genannt. 3) Algebraische Größen mit gleichen Vorzeichen heißen gleichnamig, algebraische Größen mit un-

gleichen Vorzeichen dagegen ungleichnamig. 4) Positive bez. negative Größen vereinigt man, indem man ihre absoluten Werthe addirt und der Summe das positive bez. negative Vorzeichen giebt. 5) Um zwei Größen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu vereinigen, sucht man sich ihre absoluten Werthe, zieht den kleinern absoluten Werth vom größern ab und giebt dem Resultat (der Differenz) das Vorzeichen der Größe mit dem größern absoluten Werthe. 6) Die Vorzeichen werden verändert oder umgekehrt, indem man aus dem positiven das negative und aus dem negativen das positive Vorzeichen macht. 7) Wenn eine algebraische Summe subtrahirt wird, werden die Vorzeichen der Glieder umgekehrt. 8) $-(+a)$ bedeutet: die positive Größe $+a$ soll subtrahirt werden. $-(-a)$ bedeutet: die negative Größe $-a$ soll subtrahirt werden. 9) $-(+a) = -a$ heißt in Worten: Bei der Subtraction wird eine positive Größe negativ. $-(-a) = +a$ heißt in Worten: Bei der Subtraction wird eine negative Größe positiv. 10) Ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, wird multiplicirt, indem man einen Factor multiplicirt oder den Multiplicator unter die Factoren einreiht. 11) Ein Product wird durch einen oder mehrere seiner Factoren dividirt, indem man den Factor, bez. die Factoren, durch welche dividirt werden soll, aus dem Producte fortläßt. 12) In $4^2 = 16$ ist 4 die Basis, 2 der Exponent und 16 die Potenz: auch der ganze Ausdruck 4^2 wird Potenz genannt. 13) Zwei Potenzen mit gleichen Basen werden mit einander multiplicirt, indem man die Exponenten addirt. 14) Zwei Potenzen mit gleichen Basen werden durch einander dividirt, indem man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden abzieht. 15) Bei einem Multiplicationsexempel versteht man unter dem Multiplicanden die Zahl, welche vervielfältigt, oder mit andern Worten, zu sich selbst addirt werden soll, und unter dem Multiplicator die Zahl, welche angiebt, wie oft der Multiplicand zu addiren ist.

C. Fortsetzung der Lehre von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Größen.

§ 50. In dem letzten Paragraphen des vorigen Briefes haben wir eine bequeme Form für die Addition arithmetischer Summen gefunden. Wenn wir die beiden Zahlen 46851 und 96888 zu einander addiren sollen, so stellen wir sie unter einander und schreiben:

$$\begin{array}{rl} 46851 & \text{(Summand)} \\ 96888 & \text{(Summand)} \\ \hline 143739 & \text{(Summe).} \end{array}$$

Das Resultat (die Summe) ist von den zu addirenden Zahlen (den Summanden) durch **einen Strich** getrennt. Ganz dem entsprechend verfahren wir, wenn wir mehrere arithmetische Summen zusammenzuzählen haben. Nehmen wir an, es sollte $+4m - 6r + 5t$ und $-7m + 16r - 17t$ zusammengezählt werden, so werden wir schreiben:

$$\begin{array}{l} +4m - 6r + 5t \\ -7m + 16r - 17t \end{array}$$

Die Glieder sind, wie wir schon erwähnt haben, so zu ordnen, daß die gleichartigen Größen unter einander stehen, d. h. (die m's unter den m's, die r's unter den r's, die t's unter den t's). Wir werden dann einen Strich ziehen und die Summe (das Resultat der Addition) finden, indem wir die gleichartigen Glieder vereinigen. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rl} +4m - 6r + 5t & \text{(Summand)} \\ -7m + 16r - 17t & \text{(Summand)} \\ \hline +4m - 7m - 6r + 16r + 5t - 17t & \\ = -3m + 10r - 12t & \text{(Summe).} \end{array}$$

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn statt zweier arithmetischen Summen drei, vier oder fünf zusammengezählt werden sollen. In:

$$\begin{array}{rl} +13s + 16t + 19u + 20v & \text{(Summand)} \\ -23s - 26t - 29u - 30v & \text{(Summand)} \\ +28s - 31t + 34u - 35v & \text{(Summand)} \\ \hline +13s - 23s + 28s + 16t - 26t - 31t + 19u - 29u + 34u + 20v - 30v - 35v & \\ = +18s - 41t + 24u - 45v & \text{(Summe)} \end{array}$$

haben wir z. B. drei Summanden, und in:

$$\begin{array}{rl} +15a - 16b + 33c - 55d + 66e - 33f & \text{(Summand)} \\ -28a + 37b - 66c + 88d - 44e + 50f & \text{(Summand)} \\ -39a - 48b + 77c + 99d - 55e - 61f & \text{(Summand)} \\ +50a + 53b - 84c - 91d + 62e + 68f & \text{(Summand)} \\ +75a - 85b + 98c - 22d + 17e - 11f & \text{(Summand)} \\ +3a + 4b - 5c + 6d - 7e + 8f & \text{(Summand)} \\ \hline +76a - 55b + 53c + 25d + 39e + 21f & \text{(Summe).} \end{array}$$

finden wir sogar sechs Summanden.

Wir haben bei dem letzten Exempel sogleich die unter einander stehenden gleichartigen Größen vereinigt und unter dem Strich nur die Resultate der Vereinigung hingeschrieben. Es ist:

$$+76a = +15a - 28a - 39a + 50a + 75a + 3a,$$
$$-55b = -16b + 37b - 48b + 53b - 85b + 4b,$$
$$+53c = +33c - 66c + 77c - 84c + 98c - 5c,$$
$$+25d = -55d + 88d + 99d - 91d - 22d + 6d,$$
$$+39e = +66e - 44e - 55e + 62e + 17e - 7e,$$
$$+21f = -33f + 50f - 61f + 68f - 10f + 8f.$$

Aufgaben. Der Schüler möge bei folgenden Beispielen:

1) $+6d - 3e$ $-4d + 10e$, 2) $+10m - 6n$ $-17m - 5n$,

3) $+3s + 4t + 2u - 6v + 13w$ $-7s + 6t - 8u + 7v - 9w$,

4) $24a + 23b + 7c$ $26a - 13b - 16c$ $15a - 15b + 8c$, 5) $+9x - 8y + 2z$ $-3x - 2y - 3z$ $+5x + 3y - 5z$,

6) $-23m + 18n - 19r + 21s - 17t$ $+17m - 16n + 24r - 28s + 29t$,

7) $+10s + 15t + 20u + 25v + 30x + 35y$
$-35s - 30t - 25u - 20v - 15x - 10y$
$+42s - 45t + 52u - 88v + 19x - 23y$
$-40s + 53t - 38u + 41v - 5x + 14y$
$-16s - 17t - 18u - 19v - 20x - 21y$
$-33s + 32t - 31u + 30v - 29x + 28y$
$-31s + 30t - 28u - 27v - 22x + 13v$

die Additionen vornehmen.

§ 51. Die Addition algebraischer Größen. Es sei uns die Aufgabe gestellt: $+8a + 5b$ und $+2a - 3b$ zusammenzuzählen. Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen werden wir dann schreiben:

$$\begin{array}{r} +8a + 5b \\ +2a - 3b \\ \hline +8a + 2a + 5b - 3b \end{array}$$

Wenn wir dieses Additionsexempel ansehen, finden wir, daß wir zwei Additionen vollzogen haben. Erst ist $+2a$ zu $+8a$ und dann ist $-3b$ zu $+5b$ addirt worden. Führen wir jede dieser Additionen gesondert aus, so erhalten wir:

$$1)\ \begin{array}{r} +8a \\ +2a \\ \hline +8a + 2a \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +5b \\ -3b \\ \hline +5b - 3b \end{array}$$

Das erste Exempel sagt uns:

$+8a$ **und** $+2a$ ist **gleich** $+8a + 2a$.

Wir wollen $+2a$ einklammern, für „**und**“ das Pluszeichen (+) und für „**gleich**“ das Gleichheitszeichen (=) einsetzen, dann wird aus:

$+8a$ **und** $+2a$ ist **gleich** $+8a + 2a$

der mathematische Ausdruck:

$$+8a + (+\mathbf{2a}) = 8a + \mathbf{2a}.$$

Auf der linken Seite der Gleichung haben wir: $+(+2a)$, auf der rechten Seite ist dafür $+2a$ eingetreten. Mithin ist:

$$1)\ +(+2a) = +2a.$$

Betrachten wir jetzt das zweite der Additionsexempel, welche wir getrennt hingeschrieben haben. In demselben wird die negative Zahl $-3b$ zu $+5b$ **addirt;** als Resultat ergiebt sich: $+5b - 3b$. Es ist mithin:

$+5b$ **und** $-3b$ **gleich** $+5b - 3b$.

Wenn wir $-3b$ durch eine Klammer einschließen, für „**und**“ ein Pluszeichen (+) und für „**gleich**“ ein Gleichheitszeichen (=) setzen, so wird aus:

$+5b$ **und** $-3b$ **gleich** $+5b - 3b$

der mathematische Ausdruck:

$$+5b + (-\mathbf{3b}) = +5b - \mathbf{3b}.$$

Auf der linken Seite sehen wir: $+(-\mathbf{3b})$; auf der rechten Seite finden wir dafür: $-3b$. Es ist also

$$2)\ +(-3b) = -3b.$$

Stellen wir jetzt die beiden Gleichungen 1 und 2 zusammen, so erhalten wir:

$$1)\ +(+2a) = +2a$$
$$2)\ +(-3b) = -3b.$$

Untersuchen wir jetzt, welche Folgerungen wir aus diesen beiden Gleichungen ziehen können!

Bei der ersten Gleichung fordert uns die linke Seite auf, die **positive** Größe $+2a$ zu **addiren;** durch die rechte Seite erfahren wir, daß wir diese Addition ausführen **können,**

indem wir die **positive** Größe $+ 2a$ **positiv lassen.**

Durch die linke Seite der zweiten Gleichung wird uns aufgetragen, die **negative** Größe $- 3b$ zu **addiren,** die rechte Seite derselben Gleichung sagt uns, daß wir hier die Addition vorzunehmen haben, indem wir die **negative** Größe **negativ lassen.** Also:

Bei der **Addition** bleiben die **positiven** Größen **positiv** und die **negativen** Größen **negativ,**

oder anders ausgedrückt:

Bei der Addition **behalten** die algebraischen Größen ihr **Vorzeichen.**

Diesem Satze gemäß ist:

$$+(+7) = +7, \qquad +(-9) = -9,$$
$$+(+18) = +18, \qquad +(-20) = -20,$$
$$+(+8a) = +8a, \qquad +(-9bc) = -9bc,$$
$$+(+mn^2) = +mn^2, \qquad +\left(-\frac{s}{t}\right) = -\frac{s}{t},$$
$$+\left(+\frac{u^2}{v^2}\right) = +\frac{u^2}{v^2}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge die entsprechenden Gleichungen aufstellen, wenn gegeben ist:

1) $+(+13)$, 2) $+(-13)$, 3) $+(+29)$, 4) $+(-29)$, 5) $+(+81)$, 6) $+(-81)$, 7) $+(+de)$, 8) $+(-ef)$, 9) $+(+2d^2e^5)$, 10) $+(-10m^6n^4r)$.

§ 52. Zusammenfassung der Regeln über die Addition und Subtraction algebraischer Größen. Den Abschnitt, welchen wir schon von § 46 ab behandeln, haben wir überschrieben: Die Addition, Subtraction, Multiplication und Division **algebraischer** Größen. Wir wollten also nicht zeigen, auf welche Weise wir absolute Größen wie: 18 und 6, oder a und b zu einander addiren, von einander subtrahiren, mit einander multipliciren, durch einander dividiren können; die Erörterungen darüber haben uns schon die ersten algebraischen Briefe gebracht. Wir wollten vielmehr untersuchen, wie wir zu verfahren haben, wenn Größen mit einem Vorzeichen, also positive oder negative Größen, den Rechenoperationen der vier Species unterworfen werden sollen, wenn etwa $+ 5$ zu $- 9$ zu addiren, $- 17$ von $+ 28$ zu subtrahiren, $+ 3$ mit $- 5$ zu multipliciren, $+ 18$ durch $- 9$ zu dividiren ist.

Um die Regeln über die Addition und Subtraction algebraischer Größen aufzufinden, wandten wir uns zunächst der Addition und Subtraction arithmetischer Summen zu. Indem wir auf einzelne Zahlenbeispiele eingingen, gelangten wir zu beiden Sätzen:

Bei der **Addition** einer arithmetischen Summe **behalten** die Glieder ihr Vorzeichen, die **positiven** Glieder bleiben **positiv** und die **negativen** Glieder **negativ.**

Bei der **Subtraction** einer arithmetischen Summe **verändern** die Glieder ihr Vorzeichen, die **positiven** Glieder werden **negativ,** die **negativen** Glieder **positiv.**

Wir suchten sodann für die Addition und Subtraction arithmetischer Summen eine bequeme Form; und von dieser bequemen Form ausgehend ermittelten wir, wie algebraische Größen zu subtrahiren und zu addiren sind. Während sonst die Addition vor der Subtraction behandelt wird, verfuhren wir umgekehrt; wir besprachen erst die Subtraction und dann die Addition algebraischer Größen, weil die Formeln bei der Subtraction schärfer und in einem stärkern Gegensatz hervortreten und in Folge dessen die Aufmerksamkeit des Schülers in höherm Grade fesseln. Wir fanden dabei Regeln, welche wir in folgende Sätze zusammenfassen können:

Bei der **Addition behalten** die **algebraischen** Größen ihr Vorzeichen, die **positiven** Größen bleiben **positiv** und die **negativen** Größen bleiben **negativ.**

Bei der **Subtraction** verändern die **algebraischen** Größen ihr Vorzeichen, die **positiven** Größen werden **negativ** und die **negativen** Größen werden **positiv.**

Wenn wir diese beiden Sätze in knappen mathematischen Formeln ausdrücken, können wir schreiben:

$$+(+a) = +a, \qquad +(-a) = -a,$$
$$-(+a) = -a, \qquad -(-a) = +a\,[1]).$$

---

[1]) Diese Formeln geben in der That den Inhalt der beiden vorstehenden Sätze vollkommen wieder. Sie entsprechen auch der Allgemeinheit, welche in jedem mathematischen Satze liegt, denn der Buchstabe a bezeichnet nicht eine bestimmte, sondern jede beliebige Zahl.

Den beiden Sätzen gemäß ist:

$$+(10) - (-18) + (-27) = +10 + 18 - 27 = +1,$$
$$-(-a) + (-b) + (+3c) = +a - b + 3c,$$
$$-(+8m) - (-5m) - (+3m) = -8m + 5m - 3m = -6m,$$
$$+(-6s) - (-9s) + (+4s) = -6s + 9s + 4s = +7s,$$
$$-(-7t^2) - (-8t^2) - (-9t^2) = +7t^2 + 8t^2 + 9t^2 = +24t^2.$$

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen: 1) $+(+39)$, 2) $-(-4)$, 3) $+(-83)$, 4) $-(+83)$, 5) $+(+b^3)$, 6) $-(+b^3)$, 7) $+(-mn^5)$, 8) $-(-st^4)$, 9) $+(+3mn) - (-8mn) + (-2mn)$, 10) $-(+15st) + (-18st) - (-100st)$.

§ 53. Die Multiplication algebraischer Größen mit absoluten Zahlen. Nachdem wir die Addition und Subtraction algebraischer Größen erledigt haben, wollen wir uns folgerichtig zur Multiplication der algebraischen Größen wenden. Wir beginnen damit ein Kapitel, welches die Aufmerksamkeit des Schülers in einem besondern Grade erheischt. Obwohl die Regeln, zu welchen uns unsere Untersuchungen führen werden, außerordentlich klar und leicht verständlich sind, so wird uns doch die Entwickelung dieser Regeln einige Schwierigkeiten bieten. Wir müssen stufenweise vorgehen und wollen mit dem einfachsten Fall beginnen, indem wir annehmen, daß **eine algebraische Größe**, etwa die positive Zahl $+12$ oder die negative Zahl -12, **mit einer absoluten Größe**, etwa der 4, **multiplicirt werden solle.** Um anzudeuten, daß das Vorzeichen mit der folgenden Zahl zusammengehört, wollen wir sowohl $+12$ wie -12 einklammern.

$(+12).4$ heißt dann in Worten:

die positive Zahl $+12$ ist mit 4 zu multipliciren, und

$(-12).4$ bedeutet: die negative Zahl -12 soll mit 4 multiplicirt werden.

Untersuchen wir zunächst das erste Product $(+12).4$!

Das **Pluszeichen** in der Klammer fordert uns auf, die 12 zu **addiren**.

Das **Malzeichen** und dahinter die 4 sagt uns, daß wir diese **Addition 4=mal vorzunehmen haben.** Mithin ist:

$$(+12).4 = +12 + 12 + 12 + 12$$
$$= +48,$$

oder kürzer: $(+12).4 = +48$.

Fragen wir uns, wie wir die rechte Seite unmittelbar aus der linken ableiten können, so wird uns die Antwort nicht schwer fallen. Die rechte Seite erhalten wir, wenn wir den absoluten Werth 12 der algebraischen (hier positiven) Größe $+12$ mit 4 multipliciren und dem entsprechenden Product 48 das Vorzeichen der algebraischen Größe $+12$ geben. In Zeichen, es ist:

$$(+12).4 = +(12.4)^{1)} = +48.$$

Ebenso wird sein:

$$(+15).3 = +(15.3) = +45,$$
$$(+30).5 = +(30.5) = +150,$$
$$(+20).8 = +(20.8) = +160,$$
$$(+a).6 = +(a.6) = +6a \text{ u. s. f.}$$

Gehen wir jetzt dazu über, **negative Größen mit einer absoluten Zahl zu multipliciren.** Zu diesem Zwecke wollen wir zusehen, welche Bedeutung wir dem oben aufgestellten Product $(-12).4$ beilegen können.

Das **Minuszeichen** in der Klammer trägt uns auf, die Zahl 12 zu **subtrahiren.**

Das **Malzeichen** und dahinter die 4 deutet an, daß diese **Subtraction 4=mal vollzogen werden soll.**

Es ist mithin:

$$(-12).4 = -12 - 12 - 12 - 12$$
$$= -48.$$

Auch hier geht die rechte Seite aus der linken hervor, wenn wir den absoluten Werth 12 der algebraischen (hier negativen) Größe -12 mit der absoluten Zahl 4 multipliciren und dem entstehenden Product 48 das Vorzeichen der algebraischen Größe -12 geben. In Zeichen, es ist:

[1]) Zahlen, die mit einander multiplicirt sind, durch eine Klammer einzuschließen, ist nach § 32 überflüssig. Wir haben hier 12 . 4 eingeklammert, um recht nachdrücklich anzudeuten, daß wir den absoluten Werth 12 für sich ohne Vorzeichen mit 4 multipliciren wollen.

$$(-12) \cdot 4 = -(12 \cdot 4) = -48,$$

ebenso:

$$(-13) \cdot 5 = -(13 \cdot 5) = -65,$$
$$(-48) \cdot 2 = -(48 \cdot 2) = -96,$$
$$(-25) \cdot 6 = -(25 \cdot 6) = -150,$$
$$(-a) \cdot 8 = -(a \cdot 8) = -8a,$$
$$(-5b^2c^3) \cdot 9 = -(5b^2c^3 \cdot 9) = -45b^2c^3.$$

Fassen wir den Inhalt dieses Paragraphen kurz zusammen! Erst haben wir positive, dann negative Größen, also nach einander beide Arten der algebraischen Größen mit einer absoluten Zahl multiplicirt. Wie die gesperrtgedruckten Worte beweisen, hat sich in beiden Fällen der Satz bewährt:

Eine algebraische Größe können wir mit einer absoluten Zahl multipliciren, indem wir den absoluten Werth der algebraischen Größe mit der betreffenden absoluten Zahl multipliciren und dem entstehenden Product das Vorzeichen der algebraischen Größe geben.

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:
$(+16) \cdot 7$, $(+11) \cdot 10$, $(+17) \cdot 8$,
$(-23) \cdot 4$, $(-29) \cdot 7$, $(-36) \cdot 9$,
$(-d) \cdot 6$, $(-e) \cdot 9$, $(+f) \cdot 10$.

§ 54. Multiplication algebraischer Größen mit einander. Algebraische Größen sind entweder positiv oder negativ. Wenn zwei algebraische Größen mit einander multiplicirt werden, so können deswegen folgende drei Fälle eintreten. Die algebraischen Größen können

1) beide positiv,
2) beide negativ sein; sie können
3) verschiedene Vorzeichen haben.

Den **ersten** Fall finden wir in:

$$(+10) \cdot (+5),$$

den **zweiten** Fall in:

$$(-12) \cdot (-5),$$

den **dritten** Fall in:

$$(+13) \cdot (-4) \text{ und } (-10) \cdot (+12).$$

Jeden dieser drei Fälle wollen wir für sich erörtern, um die einfache Regel aufzufinden, welche für die Multiplication algebraischer Größen mit einander besteht.

Fall I. In $(+10) \cdot (+5)$ ist sowohl $+10$ wie $+5$ eine positive Zahl; wir haben $+10$ sowohl wie $+5$ eingeklammert, um anzudeuten, daß das Vorzeichen und die darauffolgende Zahl ein zusammengehöriges Ganzes bilden sollen. Wie das Malzeichen, welches zwischen den beiden Klammern steht, besagt, soll die positive Größe $+10$ mit der positiven Größe $+5$ multiplicirt werden.

Untersuchen wir, welchen Sinn wir mit dieser Multiplication verbinden können! Zu diesem Zwecke wollen wir uns erst das $+$ vor der 5 in dem Producte $(+10) \cdot (+5)$ fortdenken.

$(+10) \cdot (5)$ oder einfacher $(+10) \cdot 5$ bedeutet dann: die positive Zahl $+10$ soll mit 5 multiplicirt werden.

Kommt noch ein $+$ d. h. ein **Additionszeichen** zur 5 hinzu, so wird der ganze Ausdruck $(+10) \cdot (+5)$ bedeuten: die positive Zahl $+10$ soll mit 5 multiplicirt und das dann entstehende Product soll **addirt** werden.

$+10$ mit 5 multiplicirt giebt $+50$; um anzuzeigen, daß $+50$ noch addirt werden soll, werden wir $+50$ einklammern, ein $+$ davor setzen und auf diese Weise $+(+50)$ erhalten. $(+10) \cdot (+5)$ bedeutet also soviel wie $+(+50)$, in Zeichen, es ist:

$$(+10) \cdot (+5) = +(+50)$$
$$= +50\,[1],$$

oder kürzer! $(+10) \cdot (+5) = +50.$

Ebenso ist: $(+11) \cdot (+7) = +77,$
$(+25) \cdot (+4) = +100.$

Bei allen diesen Gleichungen haben wir auf der linken Seite zwei positive Größen, welche multiplicirt werden sollen (bei der letzten Gl. $+25$ und $+4$). Wie wir durch die rechte Seite erfahren, können wir die Multiplication ausführen, indem wir die absoluten Werthe der positiven Größen multipliciren (bei der letzten Gl. 25 und 4), und dem dadurch entstehenden Product (bei der letzten Gl. der 100) das positive Vorzeichen geben.

Die besondere Aufmerksamkeit des Schülers müssen wir auf die Vorzeichen lenken.

Auf der linken Seite haben wir bei allen Gleichungen zwei **positive** Factoren, auf der rechten Seite ein **positives** Product; wir können diese Bemerkung in den beiden kurzen Regeln aussprechen:

positiv mal positiv giebt wieder positiv,
oder: **$+$ mal $+$ giebt wieder $+$.**

[1] Nach dem vorletzten Paragraphen bleiben die positiven Größen positiv, wenn sie addirt werden sollen. $+(+50)$ ist daher gleich $+50$.

Aufgaben I. Der Schüler möge folgende Multiplicationen ausführen:

1) (+ 17) . (+ 6), 2) (+ 13) . (+ 9),
3) (+ 20) . (+ 8), 4) (+ 28) . (+ 7),
5) (+ 3) . (+ 2), 6) (+ 1) . (+ 4).

Fall II. In: (— 12) . (— 5) sehen wir zwei negative Größen, welche mit einander zu multipliciren sind. Prüfen wir, welchen Sinn die Multiplication dieser beiden negativen Größen haben kann! Wir wollen dabei ähnlich verfahren, wie im ersten Falle; wir wollen uns nämlich in (— 12) . (— 5) das Zeichen vor der 5 fortdenken.

(— 12) . (5) oder kürzer (— 12) . 5 bedeutet dann: die negative Zahl — 12 soll mit der 5 multiplicirt werden.

Wird vor die 5 noch ein —, das Zeichen der **Subtraction**, gesetzt, so wird (— 12) . (— 5) bedeuten: Die negative Zahl — 12 soll mit 5 multiplicirt und das sich ergebende Product soll dann noch **subtrahirt** werden.

— 12 multiplicirt mit 5 giebt — 60; zum Zeichen dafür, daß — 60 noch zu subtrahiren ist, werden wir vor — 60 noch ein — setzen und erhalten — (— 60).

Es ist also:

(— 12) . (— 5) = — (— 60)
= + 60 [1]),

oder kürzer: (— 12) . (— 5) = + 60.

Ebenso wird sein:

(— 30) . (— 3) = + 90,
(— 11) . (— 8) = + 88,
(— 16) . (— 5) = + 80.

Auf der linken Seite haben wir bei allen diesen Gleichungen zwei negative Größen, welche mit einander zu multipliciren sind. Die rechte Seite sagt uns, daß wir diese Multiplication vornehmen können, indem wir die absoluten Werthe der negativen Größen multipliciren (beim letzten Beisp. also 16 und 5) und dem entsprechenden Product (beim letzten Beisp. der 80) ein **positives** Vorzeichen geben.

Wieder sind es die Vorzeichen, welche unser besonderes Interesse in Anspruch nehmen. Auf der linken Seite der Gleichungen haben wir immer zwei **negative** Factoren, auf der rechten Seite ein **positives** Product. Wir kommen also zu dem absonderlich scheinenden Satze:

negativ mal negativ giebt positiv,

oder anders ausgedrückt:

— mal — giebt +.

Aufgaben II. Der Schüler möge folgende Multiplicationen ausführen:

1) (— 5) . (— 6), 2) (— 12) . (— 10),
3) (— 18) . (— 2), 4) (— 33) . (— 3),
5) (— 16) . (— 16), 6) (— 100) . (— 10).

Wir wenden uns jetzt zu

Fall III. In (+ 13) . (— 4) haben wir zwei ungleichnamige algebraische Größen, + 13 ist positiv, — 4 negativ. Wie das Malzeichen andeutet, sollen diese beiden Größen multiplicirt werden. Um den Weg zu finden, welchen wir bei der Multiplication einzuschlagen haben, wollen wir uns in (+ 13 . (— 4) wieder das Minuszeichen fortdenken.

(+ 13) . (4) oder kürzer (+ 13) . 4 heißt dann in Worten: die positive Größe + 13 ist mit 4 zu multipliciren.

Wird zur 4 noch ein —, das Zeichen der **Subtraction** hinzugefügt, so wird (+ 13) . (—4) bedeuten: die positive Größe + 13 soll mit 4 multiplicirt und das dadurch entstehende Product dann **subtrahirt** werden.

+ 13 multiplicirt mit 4 giebt + 52, um anzudeuten, daß wir + 52 noch zu subtrahihiren haben, werden wir + 52 einklammern und vor die Klammer ein — setzen; dadurch erhalten wir — (+ 52).

Es ist demnach:

(+ 13) . (— 4) = — (+ 52)
= — 52,

oder kürzer

(+ 13) . (— 4) = — 52.

Ebenso wird sein:

(+ 10) . (— 2) = — 20,
(+ 20) . (— 3) = — 60,
(+ 30) . (— 8) = — 240.

Auf der linken Seite haben wir bei allen diesen Gleichungen zwei Factoren mit **entgegengesetztem Vorzeichen.** Zur rechten Seite gelangen wir, indem wir die absoluten Werthe dieser Factoren mit einander multipliciren (beim letzten Beisp. 30 und 8), und dem Producte (beim letzten

[1]) Wie wir aus § 52 wissen, kehren die algebraischen Größen bei der Subtraction ihre Vorzeichen um, die negativen Größen werden positiv. Mithin ist: — (— 60) = + 60.

Beisp. der 240) das **negative** Vorzeichen geben.

Wenn wir die Vorzeichen für sich betrachten, können wir den Satz aufstellen:

positiv mal negativ giebt negativ,
oder: $+$ **mal** $-$ **giebt** $-$.

Aufgaben III. Der Schüler möge berechnen:

1) $(+15) \cdot (-2)$, 2) $(+18) \cdot (-3)$,
3) $(+17) \cdot (-4)$, 4) $(+20) \cdot (-6)$,
5) $(+16) \cdot (-8)$, 6) $(+23) \cdot (-10)$.

Bemerkung. Nach den Auseinandersetzungen des dritten Falles ist

$$(+12) \cdot (-10) = -120.$$

Auf der linken Seite haben wir ein Product aus den zwei Factoren $+12$ und -10. Da bei einem Product die Reihenfolge der Factoren nach Belieben verändert werden kann, können wir für: $(+12) \cdot (-10)$ auch setzen: $(-10) \cdot (+12)$.

Es ist mithin auch:

$$(-10) \cdot (+12) = -120,$$
ebenso:
$$(-14) \cdot (+3) = -42,$$
$$(-16) \cdot (+4) = -64,$$
$$(-12) \cdot (+6) = -72.$$

In Betreff der Vorzeichen können wir also auch den Satz aufstellen:

negativ mal positiv giebt negativ,
oder: $-$ **mal** $+$ **giebt** $-$.

Aufgaben IV. Der Schüler möge berechnen:

1) $(-5) \cdot (+6)$, 2) $(-2) \cdot (+5)$,
3) $(-5) \cdot (+4)$, 4) $(-7) \cdot (+3)$,
5) $(-9) \cdot (+12)$, 6) $(-200) \cdot (+100)$.

§ 55. Zusammenfassung der Sätze des vorigen Paragraphen. Im vorigen Paragraphen haben wir die vier Sätze gefunden:

$+$ mal $+$ giebt $+$,
$-$ mal $-$ giebt $+$,
$+$ mal $-$ giebt $-$,
$-$ mal $+$ giebt $-$.

Diese vier Sätze können wir auf zwei reduciren, wenn wir schreiben:

1) $\left.\begin{matrix} + \text{ mal } + \\ - \text{ mal } - \end{matrix}\right\}$ giebt $+$,

2) $\left.\begin{matrix} + \text{ mal } - \\ - \text{ mal } + \end{matrix}\right\}$ giebt $-$.

Gemäß § 41 heißen Größen mit gleichen Vorzeichen gleichnamig, Größen mit ungleichen Vorzeichen ungleichnamig. Wenn wir die beiden Ausdrücke gleichnamig und ungleichnamig verwenden, so wird

aus 1) $\left.\begin{matrix} + \text{ mal } + \\ - \text{ mal } - \end{matrix}\right\}$ giebt $+$ der Satz: I. Zwei **gleichnamige** Größen ergeben miteinander multiplicirt ein **positives** Product.

und aus 2) $\left.\begin{matrix} + \text{ mal } - \\ - \text{ mal } + \end{matrix}\right\}$ giebt $-$ der Satz: II. Zwei **ungleichnamige** Größen ergeben mit einander multiplicirt ein **negatives** Product.

Fassen wir I und II noch in einen Satz zusammen, so können wir schreiben:

Zwei $\left\{\begin{matrix} \textbf{gleichnamige} \\ \textbf{ungleichnamige} \end{matrix}\right\}$ Größen geben, mit einander multiplicirt, ein $\left\{\begin{matrix} \textbf{positives} \\ \textbf{negatives} \end{matrix}\right\}$ Product.

Zwar haben wir die Regeln, welche die Multiplication algebraischer Größen behandeln, schon durch zahlreiche Beispiele erläutert, aber diese Beispiele schlossen sich immer den einzelnen im letzten Paragraphen besprochenen Fällen an und nahmen nur auf bestimmte Zahlen und nicht auf Buchstaben Rücksicht. Es wird darum jetzt zum besseren Verständniß und zur Einübung der aufgestellten Sätze erforderlich sein, daß wir gemischte Beispiele bringen und die Rechnung auch auf Buchstabengrößen ausdehnen. Es ist:

1) $(+12) \cdot (+12) = +144$,
2) $(-12) \cdot (-12) = +144$,
3) $(+12) \cdot (-12) = -144$,
4) $(-12) \cdot (+12) = -144$,
5) $(+17) \cdot (+3) = +51$,
6) $(-17) \cdot (-3) = +51$,
7) $(-17) \cdot (+3) = -51$,
8) $(+17) \cdot (-3) = -51$,
9) $(+a) \cdot (+b) = +ab$,
10) $(-a) \cdot (-b) = +ab$,
11) $(+a) \cdot (-b) = -ab$,
12) $(-a) \cdot (+b) = -ab$,
13) $(+2ab) \cdot (+3ac) = +6aabc = +6a^2bc$,
14) $(+6a^4c^2) \cdot (-8a^5c^6) = -48a^4a^5c^2c^6$
$= -48a^{4+5}c^{2+6}$
$= -48a^9c^8$.

15) $(-7m^2n^4r^6) \cdot (-8m^3n^5r^2)$
$= +56m^2m^3n^4n^5r^6r^2$
$= +56m^{2+3}n^{4+5}r^{6+2}$
$= +56m^5n^9r^8$,

16) $(-33st^4uv^9) \cdot (+5pqrs^3u^8)$
$= -165pqrss^3t^4uu^8v^9$
$= -165pqrs^{1+3}t^4u^{1+8}v^9$
$= -164pqrs^4t^4u^9v^9$.

Aufgaben I. Der Schüler möge berechnen:

1) $(+9) \cdot (+9)$, 2) $(+9) \cdot (-9)$
3) $(-9) \cdot (+9)$, 4) $(+5) \cdot (-2)$
5) $(-5) \cdot (-3)$, 6) $(+5) \cdot (+2)$
7) $(+6) \cdot (-7)$, 8) $(+8) \cdot (-10)$,
9) $(-2) \cdot (+3)$, 10) $(+c) \cdot (+d)$,
11) $(-c) \cdot (-d)$, 12) $(-c) \cdot (+d)$,
13) $(+c) \cdot (-d)$, 14) $(-c) \cdot (-c)$,
15) $(+c^3d^2) \cdot (-c^4d^3)$, 16) $(+e^5f) \cdot (+6ef^2)$.

Bemerkung. Wir haben bisher immer zwei algebraische Größen mit einander multiplicirt. Wie werden wir nun zu verfahren haben, wenn wir drei und mehr Factoren multipliciren sollen? Es sei uns die Aufgabe gestellt,

$$(+3) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (+5) \cdot (-6)$$

zu berechnen. Wir werden dann erst $+3$ mit $+4$ multipliciren, das Resultat (Product) darauf -2-mal nehmen u. s. f.

$+3$ mal $+4$ ist gleich $+12$; $+12$ mal -2 ist gleich -24; -24 mal $+5$ giebt -120; -120 mal -6 giebt $+$ **720**. Wir haben mithin:

$$(+3) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (+5) \cdot (-6) = +720.$$

Ebenso wird sein:

$$(-7) \cdot (-8) \cdot (-10) = -560,$$

denn -7 mal -8 giebt $+56$, $+56$ mal -10 giebt $-$ **560**.

Ferner: $(-8) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = +192$, denn -8 mal -2 ist gleich $+16$, $+16$ mal -3 ist gleich -48 und -48 mal -4 ist gleich $+$ **192**.

$$(-10) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-6) = -1800,$$

denn -10 mal -5 giebt $+50$, $+50$ mal -2 giebt -100, -100 mal -3 ist gleich $+300$, $+300$ mal -6 ist gleich $-$ **1800**,

und: $(+a) \cdot (+b) \cdot (+c) \cdot (+d) = +abcd$,

denn $+a$ mal $+b$ ist gleich $+ab$, $+ab$ mal $+c$ ist gleich $+abc$; $+abc$ mal $+d$ giebt $+abcd$,

ferner:

$$(+2ab^2) \cdot (-3a^4b^2) \cdot (+7cd^2) \cdot (-8c^2d^3) = +336a^5b^4c^3d^5,$$

denn $+2ab^2$ mal $-3a^4b^2$ giebt $-6a^5b^4$; $-6a^5b^4$ mal $+7cd^2$ giebt $-42a^5b^4cd^2$; $-42a^5b^4cd^2$ mal $-8c^2d^3$ giebt $+336a^5b^4c^3d^5$.

Aufgaben II. Der Schüler möge berechnen:

1) $(+28) \cdot (+33) \cdot (+8) \cdot (-9) \cdot (-2)$,
2) $(-22) \cdot (+11) \cdot (+44) \cdot (+3) \cdot (+5)$,
3) $(-6) \cdot (-8) \cdot (-12) \cdot (-10)$,
4) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-7)$,
5) $(-21) \cdot (+22) \cdot (-4) \cdot (+5) \cdot (-6)$,
6) $(+m) \cdot (+n) \cdot (-p) \cdot (-q) \cdot (-r)$,
7) $(+3s^2) \cdot (-3t^2) \cdot (+2s^2) \cdot (-4t^2)$,
8) $(+4u) \cdot (-7u) \cdot (+uv^3) \cdot (7v^5)$,
9) $(+6s^6t^4) \cdot (-10s^7t^5u^2) \cdot (-12s^8t^9u^3)$.

Der Schüler möge ferner folgende Fragen beantworten:

1) Welches Vorzeichen hat das Product (Resultat), wenn

a) 5 positive und 2 negative,
b) 3 positive und 4 negative,
c) 4 positive und 3 negative,
d) 2 positive und 5 negative

Factoren mit einander multiplicirt werden?

2) Welches Vorzeichen hat überhaupt das Product (Resultat), wenn

a) eine gerade Anzahl negativer und sonst positive
a) eine ungerade Anzahl negativer und sonst positive

Factoren multiplicirt werden?

Denn Lohn mit hoher Ehre war der Mühen Preis!

Lection 27.

A. Fortsetzung des vorigen Abschnittes.

§ 58. Die Division algebraischer Größen. Die Addition, Subtraction und Multiplication algebraischer Größen haben wir erledigt. Wir müssen jetzt untersuchen, wie algebraische Größen durch einander zu **dividiren** sind. Diese Untersuchung wird uns nicht schwer fallen, weil wir die Division leicht auf die Multiplication zurückführen können.

Doch bevor wir uns zur Division algebraischer Größen selbst wenden, wollen wir noch Einiges wiederholen. Bei der Division sind uns immer zwei Größen gegeben, der Dividend und der Divisor; gesucht wird der Quotient.

In: $16 : 8 = 2$ ist 16 der Dividend, 8 der Divisor und 2 der Quotient.

In $\frac{30}{6} = 5$ ist 30 der Dividend, 6 der Divisor und 5 der Quotient.

Wie wir aus § 15 wissen, **ist der Quotienten multiplicirt mit dem Divisor immer gleich dem Dividenden.**

Mithin ist in dem ersten der angeführten Divisionsexempel: $2 . 8 = 16$, und in dem zweiten: $5 . 6 = 30$.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir mit der Division algebraischer Größen beginnen.

Vier Fälle können eintreten. Es kann

1) Dividend und Divisor positiv,
2) Dividend und Divisor negativ,
3) der Dividend positiv, der Divisor negativ,
4) der Dividend negativ, der Divisor positiv sein.

Fall I. Es sei uns die Aufgabe gestellt:

$\frac{+24}{+8}$ zu berechnen.

$+24$ ist hierbei der Dividend, $+8$ der Divisor; den Quotienten, welchen wir vorläufig q[1]) nennen wollen, kennen wir noch nicht; es ist uns unbekannt, ob er positiv ist oder negativ. Wir wissen nur, daß

$$\frac{+24}{+8} = q$$

ist und daß wir dem entsprechend haben:

$$q . (+8) = +24.$$

Aus der letzten Gleichung können wir den Werth von q leicht bestimmen. Wir sehen sofort, daß q gleichbedeutend sein muß mit der absoluten Zahl 3 oder mit der positiven Zahl $+3$, denn nur $3 . (+8)$ und $(+3) . (+8)$ giebt als Product $+24$. Wie wir schon öfter erörtert haben, werden bei der algebraischen Rechnung die absoluten wie die positiven Zahlen behandelt; wir brauchen darum nur den Werth

$$q = +3$$

zu berücksichtigen. Setzen wir in:

$$\frac{+24}{+8} = q$$

für q den gleichen Werth $+3$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{+24}{+8} = +3.$$

Untersuchen wir, wie $+3$ aus der linken Seite hervorgeht! $+24$ und $+8$ sind zwei positive Größen; $+24$ hat den absoluten Werth 24 und $+8$ hat den absoluten Werth 8. Dividiren wir 24 durch 8, so erhalten wir 3. Wenn wir der 3 das positive Vorzeichen geben, so wird $+3$ aus 3.

Wir können also zwei **positive** Größen durch einander **dividiren,** indem wir ihre **absoluten Werthe** dividiren und dem **Quotienten** (Resultat) das **positive** Vorzeichen geben.

Demgemäß ist:

$$\frac{+20}{+5} = +\frac{20}{5} = +4, \quad \frac{+36}{+4} = +\frac{36}{4} = +9.$$

Was die Vorzeichen betrifft, so können wir die Sätze aufstellen:

positiv dividirt durch positiv giebt positiv,

oder anders ausgedrückt:

+ dividirt durch + giebt +.

---

[1]) q ist der Anfangsbuchstabe von Quotient; wir haben darum q als Bezeichnung für den uns unbekannten Quotienten gesetzt.

Fall II. Wir wollen annehmen, der Dividend und der Divisor seien beide negative Größen, wir sollten etwa

$$\frac{-40}{-5}$$

berechnen.

In: $\frac{-40}{-5}$ ist -40 der Dividend, -5 der Divisor; der Quotient, welchen wir wieder mit q bezeichnen wollen, ist uns noch unbekannt; wir müssen ihn erst suchen. Vorläufig wissen wir, daß

$$\frac{-40}{-5} = q,$$

und in Folge dessen

$$q \,.\, (-5) = -40$$ [1]) ist.

Die letzte Gleichung läßt uns sofort erkennen, daß

$$q = +8$$

sein muß, denn nur $+8$ [2]) giebt mit -5 multiplicirt als Product -40.

Setzen wir in

$$\frac{-40}{-5} = q$$

für q den gleichen Werth $+8$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{-40}{-5} = +8.$$

Sehen wir zu, wie sich $+8$ aus der linken Seite ergiebt! Auf der linken Seite haben wir die beiden negativen Größen: -40 und -5; -40 hat den absoluten Werth 40, -5 den absoluten Werth 5. Dividiren wir 40 durch 5, so ergiebt sich 8. Wenn wir vor die 8 ein + setzen, so haben wir **+ 8.**

Also:

Zwei **negative** Größen können wir durch einander **dividiren,** indem wir die **absoluten Werthe** dividiren und dem sich ergebenden **Quotienten** das **positive** Vorzeichen geben.

Diesem Satze gemäß ist:

$$\frac{-14}{-7} = +\frac{14}{7} = +2,$$

$$\frac{-21}{-3} = +\frac{21}{3} = +7,$$

$$\frac{-36}{-9} = +\frac{36}{9} = +4 \text{ u. s. f.}$$

In Betreff der Vorzeichen haben wir den Satz:

negativ dividirt durch negativ giebt positiv,

oder anders ausgedrückt:

— dividirt durch — giebt +.

Aufgaben I. Der Schüler möge berechnen:

1) $\frac{-25}{-5}$, 2) $\frac{-18}{-6}$, 3) $\frac{-30}{-10}$,

4) $\frac{-12}{-3}$, 5) $\frac{-28}{-7}$, 6) $\frac{-48}{-8}$.

Fall III. Es möge der Dividend eine positive und der Divisor eine negative Zahl sein; es möge uns etwa die Aufgabe gestellt werden:

$$\frac{+18}{-3}$$

zu berechnen.

In: $\frac{+18}{-3}$ ist $+18$ der Dividend und -3 der Divisor, der Quotient, den wir mit q bezeichnen wollen, ist zu suchen. Von q ist uns vorläufig bekannt, daß

$$\frac{+18}{-3} = q$$

und mithin $q \,.\, (-3) = +18$ ist.

Aus der letzten Gleichung läßt sich der Werth von q leicht feststellen. Wir bemerken sofort, daß

$$q = -6$$

sein muß, denn nur -6 multiplicirt mit -3 kann gleich $+18$ sein.

Wenn wir in:

$$\frac{+18}{-3} = q$$

q mit dem gleichen Werth -6 vertauschen, haben wir

$$\frac{+18}{-3} = -6.$$

Prüfen wir, wie wir **— 6** aus der linken Seite gewinnen können! $+18$ ist ein positiver Dividend, -3 ein negativer Divisor; der absolute Werth von $+18$ ist 18, der

---

1) Denn der Quotient multiplicirt mit dem Divisor ist gleich dem Dividenden. 2) -8 multiplicirt mit -5 würde gleich $+40$ sein, weil, wie wir aus dem vorigen Paragraphen wissen, gleichnamige Größen mit einander multiplicirt ein positives Product ergeben.

absolute Werth von -3 ist 3. Wird 18 durch 3 dividirt, so erhalten wir 6. Wenn wir 6 negativ machen, ergiebt sich **-6**.

Also:

Wir können eine **positive** Zahl durch eine **negative dividiren**, indem wir die **absoluten** Werthe durch einander dividiren und dem Resultat **(Quotienten)** das **negative** Vorzeichen geben.

Mithin ist:

$$1)\ \frac{+28}{-7} = -\frac{28}{7} = -4,$$

$$2)\ \frac{+35}{-7} = -\frac{35}{7} = -5,$$

$$3)\ \frac{+72}{-9} = -\frac{72}{9} = -8,$$

$$4)\ \frac{+33}{-11} = -\frac{33}{11} = -3.$$

In Betreff der Vorzeichen können wir folgende Festsetzungen machen:

positiv dividirt durch negativ giebt negativ,

oder anders ausgedrückt:

+ dividirt durch — giebt —.

Aufgaben II. Der Schüler möge berechnen:

$$1)\ \frac{+26}{-13},\quad 2)\ \frac{+32}{-8},\quad 3)\ \frac{+44}{-11},$$

$$4)\ \frac{+49}{-7},\quad 5)\ \frac{+56}{-8},\quad 6)\ \frac{+64}{-16}.$$

Fall IV. Als wir Fall III erörterten, nahmen wir an, der Dividend sei positiv und der Divisor negativ — wir wollen uns jetzt umgekehrt vorstellen, daß der Dividend negativ und der Divisor positiv sei.

$$\frac{-21}{+7}$$

ist ein solcher Divisionsausdruck. -21 ist darin der Dividend, $+7$ der Divisor; der Quotient, den wir erst aufzusuchen haben, möge wieder q heißen. Es ist demnach

$$\frac{-21}{+7} = q,$$

daher auch $q \cdot (+7) = -21$[1]).

[1]) Denn, wie wir wissen, ist der Quotient multiplicirt mit dem Divisor gleich dem Dividenden.

Die letzte Gleichung beweist uns, daß

$$q = -3$$

ist, denn nur, wenn wir -3 und $+7$ multipliciren, erhalten wir als Product -21.

Führen wir für q den gleichen Werth -3 in der Gleichung

$$\frac{-21}{+7} = q$$

ein, so erhalten wir:

$$\frac{-21}{+7} = -3.$$

Fragen wir uns, wie die rechte Seite aus der linken hervorgeht! -21 ist ein negativer Dividend, $+7$ ein positiver Divisor. 21 ist der absolute Werth von -21, 7 der absolute Werth von $+7$. Dividiren wir 21 durch 7, so erhalten wir 3. Wenn wir vor die 3 ein negatives Vorzeichen setzen, ergiebt sich **-3**. Also:

Einen **negativen Dividenden** können wir durch einen **positiven Divisor** theilen, indem wir den **absoluten** Werth des Dividenden durch den **absoluten** Werth des Divisors theilen und dem Resultat **(Quotienten)** das **negative** Vorzeichen geben.

Demgemäß ist:

$$1)\ \frac{-20}{+5} = -\frac{20}{5} = -4,$$

$$2)\ \frac{-50}{+10} = -\frac{50}{10} = -5,$$

$$3)\ \frac{-63}{+9} = -\frac{63}{9} = -7,$$

$$4)\ \frac{-72}{+12} = -\frac{72}{12} = -6.$$

In Bezug auf die Vorzeichen können wir folgende Sätze aufstellen:

negativ dividirt durch positiv giebt negativ,

oder anders ausgedrückt:

— dividirt durch + giebt —.

Aufgaben III. Der Schüler möge folgende Divisionen ausführen.

$$1)\ \frac{-28}{+4},\quad 2)\ \frac{-32}{+8},\quad 3)\ \frac{-40}{+5},$$

$$4)\ \frac{-36}{+9},\quad 5)\ \frac{-26}{+13},\quad 6)\ \frac{-63}{+9}.$$

Bemerkung. Wir haben, während wir die vier Fälle behandelten, als Divisionszeichen immer einen Bruchstrich benutzt; statt des Bruchstriches hätten wir aber auch die bekannten beiden Punkte (:) verwenden können. Es ist auch:

$+15 : +5 = +3; \quad -42 : -7 = +6;$
$+81 : -9 = -9; \quad -72 : +12 = -6.$

§ 59. Zusammenfassung der Regeln des vorigen Paragraphen. Wir haben im letzten Paragraphen die vier Sätze gefunden:

+ dividirt durch + giebt +,
— dividirt durch — giebt +,
+ dividirt durch — giebt —,
— dividirt durch + giebt —.

Wenn wir in diesen vier Sätzen die Worte „dividirt durch" mit „multiplicirt mit" vertauschen, werden die obigen Sätze in die Multiplicationsregeln verwandelt, welche wir in § 56 nach einander aufgestellt haben. Ebenso wie damals die Multiplicationsregeln, werden wir darum auch unsere obigen Divisionssätze zusammenfassen und dann mit Benutzung der Ausdrücke: gleichnamig und ungleichnamig in Worte kleiden können. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir:

1) + dividirt durch +, — dividirt durch — } giebt + — I. **Gleichnamige** Größen durch einander dividirt ergeben **positive** Quotienten.

2) + dividirt durch —, — dividirt durch — } giebt — — II. **Ungleichnamige** Größen durch einander dividirt ergeben **negative** Quotienten.

I und II kann noch in den Satz zusammengezogen werden:

{**Gleichnamige** / **Ungleichnamige**} Größen ergeben durch einander dividirt {**positive** / **negative**} Quotienten.

Es mögen jetzt noch Anwendungen dieses letzten Satzes folgen!

$$\frac{+42}{+14} = +\frac{42}{14} = +3,$$

$$\frac{-42}{-14} = +\frac{42}{14} = +3,$$

$$\frac{+42}{-14} = -\frac{42}{14} = -3,$$

$$\frac{-42}{+14} = -\frac{42}{14} = -3,$$

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{-c}{-d} = +\frac{c}{d},$$

$$\frac{+d}{-e} = -\frac{d}{e}, \quad \frac{-m}{+n} = -\frac{m}{n},$$

$$\frac{+7^6}{+7^2} = +\frac{7^6}{7^2} = +7^{6-2} = +7^4,$$ [1]

$$\frac{+8^{12}}{+8^4} = +\frac{8^{12}}{8^4} = +8^{12-4} = +8^8,$$

$$\frac{+a^5}{+a^2} = +\frac{a^5}{a^2} = +a^{5-2} = +a^3,$$

$$\frac{-m^8}{-m^6} = +\frac{m^8}{m^6} = +m^{8-6} = +m^2,$$

$$\frac{+n^9}{-n^5} = -\frac{n^9}{n^5} = -n^{9-5} = -n^4,$$

$$\frac{-s^8t^7}{+s^3t^2} = -\frac{s^8t^7}{s^3t^2} = -s^{8-3}t^{7-2} = -s^5t^5,$$

$$\frac{+5tu^{10}v^5}{-u^4v^3} = -\frac{5tu^{10}v^5}{u^4v^3} = -5tu^{10-4}v^{5-3} = -5tu^6v^2.$$

Wir haben in allen diesen Fällen den Bruchstrich den beiden Punkten vorgezogen, weil die Rechnung dabei an Klarheit gewinnt.

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:

1) $\frac{+4}{+2}$, 2) $\frac{-4}{-2}$, 3) $\frac{+4}{-2}$, 4) $\frac{-4}{+2}$,

5) $\frac{-9}{+3}$, 6) $\frac{+9}{-3}$, 7) $\frac{-9}{-3}$, 8) $\frac{+35}{+7}$,

9) $\frac{-35}{-7}$, 10) $\frac{+99}{-9}$, 11) $\frac{-99}{+9}$,

12) $+91 : -13$, 13) $+91 : +13$, 14) $-91 : -13$,

15) $\frac{+4^8}{+4^6}$, 16) $\frac{-4^8}{-4^6}$, 17) $\frac{+4^8}{-4^6}$,

18) $\frac{-4^8}{+4^6}$, 19) $\frac{+a^7}{+a^3}$, 20) $\frac{-a^7}{-a^3}$,

21) $\frac{+s^9t^5}{-s^4t^2}$, 22) $\frac{-mn^8p^4}{+mn^3p^2}$.

[1] Der Schüler möge bedenken, daß man Potenzen mit gleichen Basen dividirt, indem man die Exponenten subtrahirt.

§ 60. Ueberblick über das ganze Capitel. Mit dem letzten Paragraphen haben wir die Lehre von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Größen zu einem Abschluß gebracht; wir wissen jetzt, wie algebraische Größen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden können. Die Entwicklung der Sätze, welche davon handeln, hielt uns lange auf; wir haben uns im letzten Abschnitt des vorigen Briefes und in den beiden Lectionen dieses Briefes damit beschäftigt. Die einzelnen Sätze, welche sich der Schüler zu merken hat, sind auf diesem ganzen Raume zerstreut; zwar haben wir die Sätze über die Addition und Subtraction einerseits, sowie über die Multiplication und Division andererseits schon zusammengefaßt, aber es wird dem Schüler angenehm sein, wenn er sie alle beisammen findet. Wir wollen darum die einzuprägenden Sätze zum Theil in etwas anderer Fassung als früher hinter einander aufzählen und jedem Satze die Formel beifügen, welche der mathematische Ausdruck des Satzes ist.

I. Bei der **Addition behalten** die algebraischen Größen ihr Vorzeichen.

Es ist:

$$+(+a) = +a, \quad +(-a) = -a.$$

II. Bei der **Subtraction verändern** die algebraischen Größen ihr Vorzeichen.

Es ist:

$$-(+a) = -a, \quad -(-a) = +a.$$

III. Zwei $\left.\begin{array}{l}\textbf{gleichnamige}\\ \textbf{ungleichnamige}\end{array}\right\}$ Größen geben mit einander multiplicirt ein $\left.\begin{array}{l}\textbf{positives}\\ \textbf{negatives}\end{array}\right\}$ Product.

$$\begin{aligned}(+a) \cdot (+b) &= +ab,\\ (-a) \cdot (-b) &= +ab,\\ (+a) \cdot (-b) &= -ab,\\ (-a) \cdot (+b) &= -ab.\end{aligned}$$

IV. $\left.\begin{array}{l}\textbf{Gleichnamige}\\ \textbf{Ungleichnamige}\end{array}\right\}$ Größen geben durch einander dividirt einen $\left.\begin{array}{l}\textbf{positiven}\\ \textbf{negativen}\end{array}\right\}$ Quotienten.

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b},$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-b}{+b} = -\frac{a}{b}.$$

Die vorstehenden vier Sätze, welche der Schüler sich genau merken muß, betreffen die Vorzeichen. In der That! wenn man weiß, in welcher Weise die Vorzeichen zu handhaben sind, verliert die Rechnung mit algebraischen, d. i. mit positiven und negativen Größen alle Schwierigkeit, denn abgesehen von den Vorzeichen werden die algebraischen Größen ebenso behandelt wie die absoluten Größen.

Soll $+3$ mit -4 multiplicirt werden, so multiplicirt man einfach die absoluten Größen 3 und 4 mit einander (und giebt dem Product 12 das negative Vorzeichen).

Soll -16 durch -8 dividirt werden, so dividiren wir die Zahlen 16 und 8 durch einander (und geben dem Quotienten 2 das positive Vorzeichen).

Mit besonderm Nachdruck wollen wir noch einmal darauf aufmerksam machen, daß wir keine speciellen Regeln für die Fälle aufzustellen brauchen, in welchen absolute Zahlen mit positiven in Verbindung treten, denn in allen solchen Fällen können wir die absoluten Zahlen gerade so behandeln wie die positiven. 3 multiplicirt mit $+12$ giebt gerade so gut $+36$, wie $+3$ multiplicirt mit $+12$. Wenn wir 8 von $+12$ abziehen, wird die Differenz ebenso gut $+4$, als wenn wir $+8$ von $+12$ subtrahiren und so fort.

Bemerkung. Weil uns noch Raum bleibt, wollen wir dem Schüler eine kurze Uebersicht über den Inhalt der nächsten Briefe geben. An die Lehre von der Multiplication und Division algebraischer Größen werden wir die Multiplication und Division arithmetischer Summen[1]) schließen, wir werden z. B.

$$5a^2b^2 - 7a^3b^3 + 9a^4b^4$$

$$\text{mit} \quad 2ab + 3a^2b^2 - 4a^3b^3$$

multipliciren und

$$+12a^3b^3 + 8a^4b^4 - 20a^5b^2$$

$$\text{durch} \quad 2ab + 5a^2b^2$$

dividiren. Wir werden darauf die Zerlegung

---

[1]) Was wir mit einer arithmetischen Summe bezeichnen, wird gewöhnlich eine algebraische Summe genannt. Wir haben aus bestimmten Gründen, welche wir erst später auseinandersetzen können, für „algebraische Summe" den Ausdruck: „arithmetische Summe" gebraucht.

in Factoren besprechen und uns dann zur Lehre von den Brüchen wenden. Im Anschluß an das Heben der Brüche werden wir die Neuner- und Elferrestprobe behandeln, zwei Proben, durch welche sich sowohl bei Additions-, wie bei Subtractions-, Multiplications- und Divisionsexempeln die Richtigkeit der Rechnung controliren läßt. Wir werden darauf zu den Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten übergehen und damit zu einem Abschnitt gelangen, in welchem wieder practische Beispiele in höherm Maaße die theoretischen Betrachtungen unterstützen werden.

B. Recapitulation.

Nachdem wir in den ersten beiden Abschnitten der **sechsundzwanzigsten Lection** die Lösungen der Aufgaben gebracht und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, fuhren wir fort, das im vorigen Brief begonnene Capitel von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Größen zu behandeln. Wie algebraische Größen zu subtrahiren sind, haben wir schon im dreizehnten Briefe besprochen, ebenso hatten wir dort bereits eine bequeme Form für die Addition algebraischer Summen gefunden. Von dieser bequemen Form gingen wir im dritten Abschnitt unseres Briefes aus und untersuchten, wie algebraische Größen zu addiren sind. Die Sätze über die Addition und Subtraction algebraischer Größen faßten wir zusammen und wandten uns darauf zur Multiplication der algebraischen Größen. Die Regeln, zu welchen wir bei den Untersuchungen über die Multiplication gelangten, sind zwar sehr einfach und verständlich, aber die Entwickelung derselben war doch mit Schwierigkeiten verknüpft. Wir mußten stufenweise vorgehen, und zeigten darum zuerst, wie positive und negative Größen mit absoluten Zahlen zu multipliciren sind. Dann multiplicirten wir algebraische Größen mit einander, unterschieden dabei drei Fälle und kamen zu vier Sätzen, welche wir zu dem einen zusammenfaßten, daß gleichnamige Größen mit einander multiplicirt, ein positives und ungleichnamige Größen ein negatives Product ergeben. Wir besprachen sodann, wie wir zu verfahren haben, wenn mehr als zwei algebraische Größen mit einander zu multipliciren sind. Bei diesem Abschnitt stellten wir an den Schüler einige Fragen; der Schüler sollte z. B. durch eigenes Nachdenken ermitteln, welches Vorzeichen das Product (Resultat) hat, wenn 1) eine gerade Anzahl negativer und sonst positive, 2) eine ungerade Anzahl negativer und sonst positive Factoren gegeben sind. Wir bitten den Schüler, sich der Beantwortung dieser Fragen mit Sorgfalt zu unterziehen.

In der **siebenundzwanzigsten Lection** gingen wir sodann zu der Lehre von der Division algebraischer Größen über. Auf Grund des Satzes, daß bei einem Divisionsexempel der Quotient multiplicirt mit dem Divisor gleich dem Dividenden sei, konnten wir die Division algebraischer Größen auf die Multiplication derselben zurückführen. Indem wir vier Fälle für sich betrachteten, fanden wir über die Vorzeichen vier Sätze, welche wir zu dem einen zusammenfaßten, daß gleichnamige Größen durch einander dividirt einen positiven, ungleichnamige einen negativen Quotienten ergeben. Wir machten darauf aufmerksam, daß dieser Satz ganz dem über die Multiplication aufgestellten entspreche.

An die Division der algebraischen Größen schlossen wir noch einen Ueberblick über die ganze Lehre von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Größen. Wir wiederholten die vier Hauptregeln und fügten ihnen Formeln bei, welche der mathematische Ausdruck für diese Regeln sind. Wir sprachen dann noch über die Behandlung der absoluten Größen und beendigten damit den ersten Abschnitt der siebenundzwanzigsten Lection.

C. Wiederholungsfragen.

1) Was haben wir unter gleichnamigen, was unter ungleichnamigen Größen verstanden?
2) Wie stellen wir die Glieder mehrerer arithmetischer Summen, welche zu einander addirt werden sollen?
3) Wie addirt man eine positive, wie eine negative Zahl?
4) Wie subtrahirt man eine positive, wie eine negative Zahl?
5) Wie multipliciren wir eine positive, wie eine negative Größe mit einer absoluten Zahl?
6) Welches Vorzeichen hat ein Product, das durch Multiplication zweier negativen Factoren entstanden ist?
7) Was giebt $+$ mal $+$,
   $-$ mal $-$,
   $+$ mal $-$,
   $+$ mal $-$?
8) Zwei gleichnamige Größen mögen mit einander multiplicirt sein, welches Vorzeichen hat dann das Product?
9) Zwei ungleichnamige Größen mögen mit einander multiplicirt sein, welches Vorzeichen hat dann das Product?
10) Was versteht man unter einem Dividenden Divisor und Quotienten?
11) Welches Vorzeichen hat der Quotient, wenn Dividend und Divisor ungleichnamig sind?
12) Welches Vorzeichen hat der Quotient, wenn Dividend und Divisor gleichnamig sind?
13) Was giebt: $+$ dividirt durch $+$,
    $-$ dividirt durch $-$,
    $+$ dividirt durch $-$,
    $-$ dividirt durch $+$?
14) Auf welchen Satz haben wir uns gestützt, als wir die Division algebraischer Größen auf die Multiplication zurückführten?
15) Was versteht man unter einem Coefficienten?
16) Wie multiplicirt man mehr als zwei algebraische Größen mit einander?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

15. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Sei nur geduldig,
Fest und getreu!
Geistesarbeit weckt einen Bronnen
Ungeahnter seliger Wonnen:
Strebe nur vorwärts,
Fröhlich und frei!

(Remy.)

Lection 28.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 26.

Abschnitt C. § 50. **Aufgaben.** Es ist:

1)
$$\begin{array}{rl} & +6d - 3e \\ & -4d + 10e \\ \hline & +6d - 3d - 3e + 10e \\ = & +2d \qquad\quad + 7e, \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rl} & +10m - 6n \\ & -17m - 5n \\ \hline & +10m - 17m - 6n - 5n \\ = & -7m \qquad\quad - 11n, \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} +3s + 4t + 2u - 6v + 13w \\ -7s + 6t - 8u + 7v - 9w \\ \hline -4s + 10t - 6u + v + 4w \end{array}$$ [1]),

4)
$$\begin{array}{l} 24a + 23b + 7c \\ 26a - 13b - 16c \\ 15a - 15b + 8c \\ \hline 65a - 5b - c, \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} +9x - 8y + 2z \\ -3x - 2y - 3z \\ +5x + 3y - 5z \\ \hline +11x - 7y - 6z, \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} -23m + 18n - 19r + 21s - 17t \\ +17m - 16n + 24r - 28s + 29t \\ \hline -4m + 2n + 5r - 7s + 12t, \end{array}$$

7) Bei diesem Beispiel wollen wir die Summanden nicht hinschreiben; die Summe ist:

$-103s + 38t - 68u - 58v - 42x + 36y.$

§ 51 **Aufgaben.** Wir erhalten:

1) $+(+13) = +13$, 2) $+(-13) = -13$,
3) $+(+29) = +29$, 4) $+(-29) = -29$,
5) $+(+81) = +81$, 6) $+(-81) = -81$,
7) $+(+de) = +de$, 8) $+(-ef) = -ef$,
9) $+(+2d^2e^5) = +2d^2e^5$,
10) $+(-10m^6n^4r) = -10m^6n^4r$.

§ 52. **Aufgaben.** Es ist:

1) $+(+39) = +39$, 2) $-(-4) = +4$,
3) $+(-83) = -83$, 4) $-(+83) = -83$,
5) $+(+b^3) = +b^3$, 6) $-(+b^3) = -b^3$,
7) $+(-mn^5) = -mn^5$, 8) $-(-st^4) = +st^4$,
9) $+(+3mn) - (-8mn) + (-2mn)$
$= +3mn + 8mn - 2mn = 9mn$,
10) $-(+15st) + (-18st) - (-100st)$
$= -15st - 18st + 10st = 23st$.

§ 53. **Aufgaben.** Es ist:

$(+16).7 = +112$, $(+11).10 = +110$,
$(+17).8 = +136$, $(-23).4 = -92$,
$(-29).7 = -203$, $(-36).9 = -324$,
$(-d).6 = -6d$, $(-e).9 = -9e$,
$(+f).10 = +10f$.

[1]) Wir haben bei diesem Exempel wie bei den folgenden die gleichartigen Größen sogleich vereinigt und unter dem Strich nur die Resultate der Vereinigung hingeschrieben.

§ 54. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $(+17).(+6) = +102$,
2) $(+13).(+9) = +117$,
3) $(+20).(+8) = +160$,
4) $(+28).(+7) = +196$,
5) $(+3).(+2) = +6$,
6) $(+1).(+4) = +4$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $(-5).(-6) = +30$,
2) $(-12).(-10) = +120$,
3) $(-18).(-2) = +36$,
4) $(-33).(-3) = +99$,
5) $(-16).(-16) = +256$,
6) $(-100).(-10) = +1000$.

Aufgaben III. Es ist:

1) $(+15).(-2) = -30$,
2) $(+18).(-3) = -54$,
3) $(+17).(-4) = -68$,
4) $(+20).(-6) = -120$,
5) $(+16).(-8) = -128$,
6) $(+23).(-10) = -230$.

Aufgaben IV. Es ist:

1) $(-5).(+6) = -30$,
2) $(-2).(+5) = -10$,
3) $(-5).(+4) = -20$,
4) $(-7).(+3) = -21$,
5) $(-9).(+12) = -108$,
6) $(-200).(+100) = -20\,000$.

§ 55. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $(+9).(+9) = +81$,
2) $(+9).(-9) = -81$,
3) $(-9).(+9) = -81)$
4) $(+5).(-2) = -10$,
5) $(-5).(-3) = +15$,
6) $(+5).(+2) = +10$,
7) $(+6).(-7) = -42$,
8) $(+8).(-10) = -80$,
9) $(-2).(+3) = -6$,
10) $(+c).(+d) = +cd$,
11) $(-c).(-d) = +cd$,
12) $(-c).(+d) = -cd$,
13) $(+c).(-d) = -cd$,
14) $(-c).(-c) = +cc = +c^2$,
15) $(+c^3d^2).(-c^4d^3) = -c^3c^4d^2d^3 = c^{3+4}d^{2+3}$
$= c^7d^2$,
16) $(+e^5f).(+6ef^2) = +6e^5eff^2 = 6e^{5+1}f^{1+2}$
$= 6e^6f^3$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $(+28).(+33).(+8).(-9).(-2) = 133056$,
denn $+24$ mal $+33$ giebt $+924$, $+924$ mal $+8$ giebt $+7392$, $+7392$ mal -9 giebt -66528 und -66328 mal 2 giebt 133056,
2) $(-22).(+11).(+44).(+3).(+5) = -159720$,
3) $(-6).(-8).(-12).(-10) = +5760$,
4) $(-2).(-3).(-5.(-7) = +210$,
5) $(-21).(+22).(-4).(+5).(-6) = -55440$.
6) $(+m).(+n).(-p).(-q).(-r) = -mnpqr$,
7) $(+3s^2).(-3t^2).(+2s^2).(-4t^2)$
$= +3.3.2.4\,s^2s^2t^2t^2$
$= +72s^{2+2}t^{2+2} = +72s^4t^4$,
8) $(+4u).(-7u).(+uv^3).(7v^5)$
$= -4.7.7uuuv^3v^5 = -196u^{1+1+1}v^{3+5}$
$= -196u^3v^8$,
9) $(+6s^6t^4).(-10s^7t^5u^2).(-12s^8t^9u^3)$
$= +6.10.12.s^6s^7s^8t^4t^5t^9u^2u^3$
$= +720s^{6+7+8}t^{4+5+9}u^{2+3} = +720s^{21}t^{18}u^5$.

Antworten auf die Fragen:

1) Das Product ist im Falle a positiv, im Falle b positiv, im Falle c negativ und im Falle d negativ.

2) Das Product ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Factoren eine gerade, negativ, wenn die Anzahl der negativen Factoren eine ungerade Zahl ist.

Section 27.

Abschnitt A. § 58. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $\frac{-25}{-5} = +5$, 2) $\frac{-18}{-6} = +3$,

3) $\frac{-30}{-10} = +3$, 4) $\frac{-12}{-3} = +4$,

5) $\frac{-28}{-7} = +4$, 6) $\frac{-48}{-8} = +6$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $\frac{+26}{-13} = -2$, 2) $\frac{+32}{-8} = -4$,

3) $\frac{+44}{-11} = -4$, 4) $\frac{+49}{-7} = -7$,

5) $\frac{+56}{-8} = -7$, 6) $\frac{+64}{-16} = -4$.

Aufgaben III. Es ist:

1) $\frac{-28}{+4} = -\frac{28}{4} = -7$,

2) $\frac{-32}{+8} = -\frac{32}{8} = -4$,

3) $\frac{-40}{+5} = -\frac{40}{5} = -8$,

4) $\frac{-36}{+9} = -\frac{36}{9} = -4$,

5) $\frac{-26}{+13} = -\frac{26}{13} = -2$,

6) $\frac{-63}{+9} = -\frac{63}{9} = -7$.

§ 59. **Aufgaben.** Wir erhalten:

1) $\frac{+4}{+2} = +\frac{4}{2} = +2$, 2) $\frac{-4}{-2} = +\frac{4}{2} = +2$,

3) $\frac{+4}{-2} = -\frac{4}{2} = -2$, 4) $\frac{-4}{+2} = -\frac{4}{2} = -2$,

5) $\frac{-9}{+3} = -\frac{9}{3} = -3$, 6) $\frac{+9}{-3} = -\frac{9}{3} = -3$,

7) $\frac{-9}{-3} = +\frac{9}{3} = +3$,

8) $\frac{+35}{+7} = +\frac{35}{7} = +5$,

9) $\frac{-35}{-7} = +\frac{35}{7} = +5$,

10) $\frac{+99}{-9} = -\frac{99}{9} = -11$,

11) $\frac{-99}{+9} = -\frac{99}{9} = -11$,

12) $+91 : -13 = -7$,

13) $+91 : +13 = +7$,

14) $-91 : -13 = +7$,

15) $\frac{+4^8}{+4^6} = +\frac{4^8}{4^6} = +4^{8-6} = +4^2$,

16) $\frac{-4^8}{-4^6} = +\frac{4^8}{4^6} = +4^{8-6} = +4^2$,

17) $\frac{+4^8}{-4^6} = -\frac{4^8}{4^6} = -4^{8-6} = -4^2$,

18) $\frac{-4^8}{+4^6} = -\frac{4^8}{4^6} = -4^{8-6} = -4^2$,

19) $\frac{+a^7}{+a^3} = +\frac{a^7}{a^3} = +a^{7-3} = +a^4$,

20) $\frac{-a^7}{-a^3} = +\frac{a^7}{a^3} = +a^{7-3} = +a^4$,

21) $\frac{+s^9t^5}{-s^4t^2} = -\frac{s^9t^5}{s^4t^2} = -s^{9-4}t^{5-2} = -s^5t^3$,

22) $\frac{-mn^8p^4}{+mn^3p^2} = -\frac{mn^8p^4}{mn^3p^2} = n^{8-3}p^{4-2} = mn^5p^2$.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 27 gestellten Fragen.

1) Größen mit gleichem Vorzeichen nennt man gleichnamig, Größen mit ungleichem Vorzeichen ungleichnamig. 2) Wenn wir arithmetische Summen addiren wollen, stellen wir die gleichartigen Größen unter einander. 3) Bei der Addition läßt man die positiven Zahlen positiv, die negativen negativ. 4) Eine positive Zahl subtrahirt man, indem man sie zu einer negativen macht; eine negative Zahl wird subtrahirt, indem sie in eine positive verwandelt wird. 5) Eine {negative / positive} Größe multiplicirt man mit einer absoluten Zahl, indem man ihren absoluten Werth mit der absoluten Zahl multiplicirt und dem entstehenden Product das {negative / positive} Vorzeichen giebt. 6) Ein Product, welches durch Multiplication zweier negativen Factoren entstanden ist, hat ein positives Vorzeichen. 7) + mal + giebt +, — mal — giebt +, + mal — giebt —, — mal + giebt —. 8) Wenn zwei gleichnamige Größen mit einander multiplicirt werden, hat das entstehende Product ein positives Vorzeichen. 9) Multiplicirt man zwei ungleichnamige Factoren, so wird das Product negativ. 10) Siehe § 13. 11) Sind Dividend und Divisor ungleichnamig, so hat der Quotient ein negatives Vorzeichen. 12) Wenn Dividend und Divisor gleichnamig sind, hat der Quotient ein positives Vorzeichen. 13) + dividirt durch + giebt +, — dividirt durch — giebt +, + dividirt durch — giebt —, — dividirt durch + giebt —. 14) Auf den Satz, daß der Quotient multiplicirt mit dem Divisor gleich dem Dividenden sei. 15) Die bestimmte Zahl, mit welcher ein Buchstabe oder ein Buchstabenausdruck multiplicirt ist. 16) Mehr als zwei algebraische Größen multiplicirt man mit einander, indem man erst das Product aus zweien derselben bildet, dieses Product dann mit der dritten Größe multiplicirt u. s. f.

C. Das Polynom. Die Multiplication vom Polynom.

§ 61. Das Polynom und das Mononom. Ein mathematischer Ausdruck wie:

$$+5a^2b - 4a^3b^2 + 9a^4b^3 - 9a^5b^4$$

heißt nach unserer Bezeichnungsweise eine **arithmetische Summe;** wir haben bereits erwähnt, daß man gewöhnlich für „arithmetische Summe" den Ausdruck **„algebraische Summe"** gebraucht; jetzt wollen wir den Schüler noch mit einer dritten Bezeichnungsweise bekannt machen. In:

$$+5a^2b - 4a^3b^2 + 9a^4b^3 - 9a^5b^4$$

sind die einzelnen Bestandtheile, welche durch + oder — von einander getrennt sind, **Glieder** der arithmetischen Summe.

$$+5a^2b - 4a^3b^2 + 9a^4b^3 - 9a^5b^4$$

ist also ein **mehr-**, ein **vielgliedriger Ausdruck,** oder wie man mit einem gleichbedeutenden griechischen Worte sagt, ein **Polynom**[1]). Polynom ist also nur ein anderer Name für: arithmetische oder algebraische Summe. Man spricht darum von **Gliedern eines Polynoms** gerade so gut, wie von Gliedern einer arithmetischen Summe. In dem Polynom:

$$+5a^2b - 4a^3b^2 + 9a^4b^3 - 9a^5b^4$$

sehen wir 4 Glieder, nämlich: $+5a^2b$ und $-4a^3b^2$ und $+9a^4b^3$ und $-9a^5b^4$.

In dem Polynom:

$$+7m^8n + 13m^7n^2 - 14m^6n^3$$

finden wir 3 Glieder, nämlich: $+7m^8n$ und $+13m^7n^2$ und $-14m^6n^3$.

Das Polynom:

$$+8 - 16 + 4 - 12 + 5$$

hat 5 Glieder, nämlich: $+8$ und -16 und $+4$ und -12 und $+5$.

Wie wir aus § 27 wissen, ist die Ordnung, in welcher die Glieder eines Polynoms (einer arithmetischen Summe) auf einander folgen, für den Werth des Polynoms gleichgiltig.

$$+a^2 + a^4 - a^3 + a^5$$

ist ebenso groß wie:

$$+a^4 - a^3 + a^2 + a^5.$$

[1]) Polynom kommt her von πολύς (polys) „viel" und νόμος (nomos) „das Gesetz, das Gesetzmäßige, das Gegliederte". Polynom bedeutet also eine vielgliedrige Größe.

Um aber eine bessere Ueberſicht über das ganze Polynom zu gewinnen, pflegt man die Reihenfolge der Glieder doch nach bestimmten Gesichtspunkten zu wählen.

Wir werden z. B. nicht schreiben:

$$ab + cd + bc + ef + de$$

sondern: $ab + bc + cd + de + ef$,

indem wir uns nach der Reihenfolge richten, welche die Buchstaben im Alphabet haben. Wir werden ferner nicht schreiben:

$$+ b^2 + b^5 - b^3 + b^4 + b^6,$$

sondern entweder

$$+ b^2 + b^3 + b^4 - b^5 + b^6$$

oder $+ b^6 - b^5 + b^4 + b^3 + b^2$,

indem wir die Glieder nach **steigenden** oder **fallenden Potenzen**[1]) von b **ordnen.**

Ein solches Ordnen nach **steigenden** und **fallenden Potenzen** einer Basis werden wir überall vornehmen, wo es sich ausführen läßt.

In dem Polynom:

$$+ 2d^7 + 8d^6 + 5d^5 + 14d^4$$

sind die Glieder nach fallenden Potenzen von d,

in dem Polynom:

$$- 2c^2d + 4c^3e - 5c^5 + 8c^7$$

sind sie nach steigenden Potenzen von c,

in dem Polynom:

$$+ 7a^3b^7 - 6a^4b^6 + 4a^5b^5 - 5a^6c^4 + 2a^7b^3$$

sind sie nach steigenden Potenzen von a und zugleich nach fallenden Potenzen von b geordnet.

Aufgaben. Der Schüler möge die Glieder in:

$$+ 3c^2 - 8c^6 + 4c^5 - 2c^3 + 4c^4$$

erst nach steigenden, dann nach fallenden Potenzen von c,

in: $+ 18f^8 - 19f^7 + 13f^4 + 21f^6 - 12f^5$

erst nach steigenden, dann nach fallenden Potenzen von f,

in: $+ 15x^5y^2 - 10x^3y^4 - x^4y^3 + 3x^2y^5$

nach steigenden Potenzen von x und zugleich nach fallenden Potenzen von y ordnen.

---

[1]) In: $+ b^2 + b^3 + b^4 - b^5 + b^6$ **steigen** die Potenzen, denn das erste Glied $+ b^2$ ist die 2te, das folgende Glied b^3 ist die 3te, das darauffolgende Glied die 4te Potenz von b u. s. f.

In: $+ b^6 - b^5 + b^4 + b^3 + b^2$ **fallen** dagegen die Potenzen, denn es ist das erste Glied $+ b^6$ die 6te, das zweite Glied $- b^5$ die 5te das dritte Glied $+ b^4$ die 4te Potenz von b.

Bemerkung I. Der **mehrgliedrigen** Größe, dem **Polynom**, steht die **eingliedrige** Größe, das **Mononom**[1]), gegenüber. Mononome sind z. B. $+ a^2c$, ferner a^3d^2, ferner $3a^5e^4$, ferner $- 8a^8e^9$. Alle Glieder eines Polynoms sind Mononome; das Polynom:

$$+ 5ab^4 + 7a^2b^3 - 6a^3b^2 + 9a^4b$$

ist aus den vier Mononomen $+ 5ab^4$ und $+ 7a^2b^3$ und $- 6a^3b^2$ und $+ 9a^4b$ zusammengesetzt.

Bemerkung II. Für **Polynome**, welche **zwei** und **drei Glieder** haben, hat man einen besondern Namen eingeführt. Man nennt ein **zweigliedriges** Polynom ein **Binom**[2]) und ein **dreigliedriges** Polynom ein **Trinom.** Z. B. sind

$+ 13a^2b - 15a^3b^2$, ferner $5m^7n - 6mn^7$

Binome, und

$+ 2st - 5tu + 8uv$, ferner $7mn - 12np + 16pr$

sind Trinome.

Wir werden von der Bezeichnung Binom und Trinom vorläufig keinen Gebrauch machen, sondern die Binome und Trinome auch unter den Namen Polynome begreifen.

§ 62. Multiplication eines Polynoms mit einem Mononom.

Wie wir wissen, ist:

$$(8 + 5 - 7 + 4 - 3 + 2) . 6$$
$$= 8 . 6 + 5 . 6 - 7 . 6 + 4 . 6 - 3 . 6 + 2 . 6,$$

und ebenso:

$$(4a^2b + 5a^3c - 3a^4d + 5a^5e) . a^4$$
$$= 4a^2a^4b + 5a^3a^4c - 3a^4a^4d + 5a^5a^4e$$

Auf der linken[3]) Seite der beiden Gleichungen haben wir ein **Polynom** (eine arithmetische Summe), **welches mit einem Mononom multiplicirt ist.** In der ersten Gleichung ist $8 + 5 - 7 + 4 - 3 + 2$ dieses Polynom und 6 das Mononom, in der zweiten ist

$$4a^2b + 5a^3c - 3a^4d + 5a^5e$$

das Polymon und a^4 das Mononom.

---

[1]) Mononom kommt her von dem griechischen *μόνος* (monos) „allein", „für sich" und von *νόμος* „das Gesetzmäßige, das Gegliederte". Mononom bedeutet also „das für sich allein Gegliederte", d. h. eine eingliedrige Größe. [2]) Binom kommt her von dem lateinischen bis „zweimal" und von *νόμος* (nomos), Trinom von tres „drei" und *νόμος*. Binom bedeutet also eine zweigliedrige, ein Trinom eine dreigliedrige Größe. [3]) Für linke Seite sollten wir hier genauer obere Seite und für rechte Seite untere Seite sagen. Wir behalten aber die Ausdrücke links und rechts doch bei, weil wir immer von der linken und rechten Seite einer Gleichung gesprochen haben.

Durch die rechte Seite der beiden Gleichungen erfahren wir, daß wir

das **Polynom mit dem Mononom multipliciren können,** indem wir jedes einzelne Glied des Polynoms mit dem Mononom multipliciren.

Dieser letztgenannte Satz bringt uns nichts Neues; wenn ihm auch die Worte Polynom und Mononom einen gelehrten Klang verleihen, so hat er doch denselben Inhalt wie der schon in § 30 aufgestellte Satz:

Eine arithmetische Summe können wir mit einer Größe multipliciren, indem wir die einzelnen Glieder mit der betreffenden Größe multipliciren.

Wir wollen jetzt aber einen Schritt weiter gehen! Früher haben wir das Polynom mit einer absoluten Zahl, mit einem absoluten Mononom, multiplicirt. Wie wird sich nun die Rechnung gestalten, wenn wir zum Multiplicator eine algebraische Zahl wählen, genauer ausgedrückt, wenn wir ein **Polynom** mit einem **positiven** oder **negativen Mononom** multipliciren? Gehen wir zu einem bestimmten Beispiele über! Es sei uns die Aufgabe gestellt, das Polynom

$$+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3$$

mit dem negativen Mononom $- 7$ zu multipliciren, oder in Zeichen:

$$(+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3) . (- 7)$$

zu berechnen. Um hier die Rechnung auszuführen, können wir auch jedes **einzelne Glied** des Polynoms mit $- 7$ **multipliciren;** aber ebenso wie wir die 7 in Verbindung mit ihrem negativen Vorzeichen betrachten, haben wir auch die Glieder des Polynoms als zusammengehörig mit ihrem Vorzeichen anzusehen, genauer gesagt, wir haben nicht 9, 4, 8, 6 und 3, sondern $+ 9$, dann $- 4$, dann $+ 8$, darauf $- 6$ und endlich $+ 3$ mit $- 7$ zu multipliciren.

Wenn wir an die beiden Sätze denken:

$$\left.\begin{matrix}+ \text{ mal } + \\ - \text{ mal } -\end{matrix}\right\} \text{ giebt } +, \qquad \left.\begin{matrix}+ \text{ mal } - \\ - \text{ mal } +\end{matrix}\right\} \text{ giebt } -.$$

so finden wir:

$$(+ 9) . (- 7) = - 9 . 7 = - 63, \qquad (- 4) . (- 7) = + 4 . 7 = + 28,$$
$$(+ 8) . (- 7) = - 7 . 8 = - 56, \qquad (- 6) . (- 7) = + 6 . 7 = + 42,$$
$$(+ 3) . (- 7) = - 3 . 7 = - 21.$$

Folglich ist:

$$(+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3) . (- 7) = - 9 . 7 + 4 . 7 - 8 . 7 + 6 . 7 - 3 . 7$$
$$= - 63 + 28 - 56 + 42 - 21 = - 70^{1)},$$

Ebenso werden wir haben:

$$(13 - 8 - 9 + 3 - 4 + 2)^{*)} . (- 3) = - 13 . 3 + 8 . 3 + 9 . 3 - 3 . 3 + 4 . 3 - 2 . 3$$
$$= - 39 + 24 + 27 - 9 + 12 - 6 = + 9,$$

denn es ist:

$$(13) . (- 3) = - 13 . 3 = - 39, \qquad (- 8) . (- 3) = + 8 . 3 = + 24,$$
$$(- 9) . (- 3) = + 9 . 3 = + 27, \qquad (+ 3) . (- 3) = - 3 . 3 = - 9,$$
$$(- 4) . (- 3) = + 4 . 3 = + 12, \qquad (+ 2) . (- 3) = - 2 . 3 = - 6.$$

Ferner wird sein:

$$(15 - 12 + 7 - 3 + 9) . (+ 4) = + 15 . 4 - 12 . 4 + 7 . 4 - 3 . 4 + 9 . 4$$
$$= + 60 - 48 + 28 - 12 + 36 = + 64,$$

denn es ist:

$$(15) . (+ 4) = + 15 . 4 = + 60, \qquad (- 12) . (+ 4) = - 12 . 4 = - 48,$$
$$(+ 7) . (+ 4) = + 7 . 4 = + 28, \qquad (- 3) . (+ 4) = - 3 . 4 = - 12,$$
$$(+ 9) . (+ 4) = + 9 . 4 = + 36.$$

---

[1]) Daß $(+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3) . (- 7) = - 70$ ist, würden wir leichter gefunden haben, wenn wir erst die Klammer berechnet und dann das Resultat mit $- 7$ multiplicirt hätten. Es ist:

$$+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3 = + 10,$$

folglich: $(+ 9 - 4 + 8 - 6 + 3) . (- 7) = (+ 10) . (- 7)$
$= - 70.$

[2]) In diesem Falle haben wir erst 13, dann $- 8$, darauf $- 9$, dann $+ 3$, darauf $- 4$, dann $+ 2$ mit $- 3$ zu multipliciren.

Gehen wir zu Buchstaben über! Es ist:

$$(a^4 - a^3 + a^2 - a) \,.\, (+ a^5) = + a^4a^5 - a^3a^5 + a^2a^5 - aa^5$$
$$= + a^{4+5} - a^{3+5} + a^{2+5} - a^{1+5}$$
$$= + a^9 - a^8 + a^7 - a^6,$$

denn wir haben:

$$a^4 . (+ a^5) = + a^4a^5 = + a^{4+5} = + a^9, \qquad (- a^3) . (+ a^5) = - a^3a^5 = - a^{3+5} = - a^8,$$
$$(+ a^2) . (+ a^5) = + a^2a^5 = + a^{2+5} = + a^7, \qquad (- a) . (+ a^5) = - aa^5 = - a^{1+5} = - a^6,$$

Ferner ist:

$$(a^2b - 2a^3b^2 + 3a^4b^3 - 5a^5b^4) \,.\, (-a^2b^2)$$
$$= - a^2a^2bb^2 + 2a^3a^2b^2b^2 - 3a^4a^2b^3b^2 + 5a^5a^2b^4b^2$$
$$= - a^{2+2}b^{1+2} + 2a^{3+2}b^{2+2} - 3a^{4+2}b^{3+2} + 5a^{5+2}b^{4+2}$$
$$= - a^4b^3 + 2a^5b^4 - 3a^6b^5 + 5a^7b^6,$$

denn wir haben:

$$a^2b . (- a^2b^2) = - a^2a^2bb^2 = - a^{2+2}b^{1+2} = - a^4b^3,$$
$$(- 2a^3b^2) . (- a^2b^2) = + 2a^3a^2b^2b^2 = + 2a^{3+2}b^{2+2} = + 2a^5b^4,$$
$$(+ 3a^4b^3) . (- a^2b^2) = - 3a^4a^2b^3b^2 = - 3a^{4+2}b^{3+2} = - 3a^6b^5,$$
$$(- 5a^5b^4) . (- a^2b^2) = + 5a^5a^2b^4b^2 = + 5a^{5+2}b^{4+2} = + 5a^7b^6.$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) $(+ 13 - 5 + 17 - 6 + 3 - 2) . (- 8)$,
2) $(+ 14 - 2 + 18 - 5 + 9 - 4) . (+ 2)$,
3) $(+ a^9 - a^7 + a^5) . (+ a^4)$,
4) $(+ a^9 - a^7 - a^5) . (- a^4)$,
5) $(+m^9n - 3m^8n^2 + 5m^7n^3 - 4m^6n^4) . (-m^3n^5)$.

berechnen.

§ 63. Multiplication zweier Polynome.

$+ 9 - 6$ ist ein Polynom, ebenso auch $+ 7 - 2$; wir wollen diese **beiden Polynome mit einander multipliciren**, also:

$$(+ 9 - 6) . (+ 7 - 2)$$

berechnen. In diesem Falle werden wir am bequemsten erst den Werth der beiden Polynome suchen und die beiden Werthe dann mit einander multipliciren. Es ist

$$+ 9 - 6 = + 3 \text{ und } + 7 - 2 = + 5,$$

mithin:

$$(+ 9 - 6) . (+ 7 - 2) = (+ 3) . (+ 5) = + 15.$$

Wir können aber auch einen andern Weg einschlagen, welcher zwar umständlich ist, aber uns zu einer wichtigen Regel führt; wir können nämlich, um den Werth von

$$(+ 9 - 6) . (+ 7 - 5)$$

zu ermitteln, $+ 9 - 6$ mit den einzelnen Gliedern des zweiten Polynoms, also erst mit $+ 7$ und dann mit $- 5$ multipliciren. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$(+ 9 - 6) . (+ 7 - 2) = + 9.7 - 6.7 - 9.2 + 6.2 \;{}^{1)}$$
$$= + 63 - 42 - 18 + 12 = + 15,$$

denn es ist:

$$(+ 9) . (+ 7) = + 9 . 7 = + 63, \qquad (- 6) . (+ 7) = - 6 . 7 = - 42,$$
$$(+ 9) . (- 2) = - 8 \;\, 2 = - 18, \qquad (- 6) . (- 2) = + 6 . 2 = + 12.$$

Sollen wir das Polynom $+ 10 - 12 - 5$ mit dem Polynom $+ 6 - 3$ multipliciren, so werden wir demgemäß $+ 10 - 12 - 5$ erst mit $+ 6$ und darauf mit $- 3$ multipliciren. Wir erhalten dann:

$$(+ 10 - 12 - 5) . (+ 6 - 3) = + 10 . 6 - 12 . 6 - 5 . 6 - 10 . 3 + 12 . 3 + 5 . 3$$
$$= + 60 - 72 - 30 - 30 + 36 + 15 = - 21,$$

denn es ist:

$$(+ 10) . (+ 6) = + 60 . 6 = + 60, \qquad (- 12) . (+ 6) = - 12 . 6 = - 60,$$
$$(- 5) . (+ 6) = - 5 . 6 = - 30, \qquad (+ 10) . (- 3) = - 10 . 3 = - 30,$$
$$(- 12) . (- 3) = + 12 . 3 = + 36, \qquad (- 5) . (- 3) = + 5 . 5 = + 15.$$

---

[1]) Die ersten beiden Glieder der rechten Seite: $+ 9 . 7 - 6 . 7$ haben wir erhalten, indem wir $(+ 9 - 6)$ mit $+ 7$ multiplicirten, zu den beiden letzten Gliedern $- 9 . 2 + 6 . 2$ sind wir dadurch gekommen, daß wir $(+ 9 - 6)$ mit $- 2$ multiplicirten. [2]) Die ersten drei Glieder: $+ 10.6 - 12.6 - 5.6$ haben wir erlangt, indem wir $+ 10 - 12 - 5$ mit 6 multiplicirten; die letzten drei Glieder $- 10 . 3 + 12 . 3 + 5 . 3$ haben wir erhalten, indem wir $+ 10 - 12 - 3$ mit $- 3$ multiplicirten.

Formuliren wir mit Hilfe des letzten Beispiels, wie wir verfahren sind. Wir haben erst alle Glieder des Polynoms $+10-12-5$ mit $+6$, dann mit -3 multiplicirt, also alle Glieder des einen Polynoms sind mit allen Gliedern des andern Polynoms multiplicirt worden. Die Producte (Theilproducte), welche bei der Multiplication der einzelnen Glieder sich ergaben, haben wir dann mit einander vereinigt; bei der Vereinigung ergab sich als Resultat -21.

Wir haben also den Lehrsatz:

Zwei Polynome kann man mit einander multipliciren, indem man alle Glieder des einen Polynoms mit allen Gliedern des andern Polynoms multiplicirt und die Theilproducte vereinigt.

Wenden wir diesen Satz bei der Multiplication von Polynomen an, die aus Buchstabengrößen zusammengesetzt sind! Es sei uns die Aufgabe gestellt: das Polynom $+a^4+a^5-3a^6$ mit dem Polynom $+a^2-a^3$ zu multipliciren. Wir haben dann jedes Glied des Polynoms $+a^4+2a^5-3a^6$ erst mit $+a^2$ und dann mit $-a^3$ zu multipliciren und erhalten:

$$\begin{aligned}(+a^4+2a^5-3a^6)\,.\,(+a^2-a^3) &= +a^4a^2+2a^5a^2-3a^6a^2-a^4a^3-2a^5a^3+3a^6a^3\\ &= +a^{4+2}+2a^{5+2}-3a^{6+2}-a^{4+3}-2a^{5+3}+3a^{6+3}\\ &= +a^6+2a^7-3a^8-a^7-2a^8+3a^9\\ &= +a^6+2a^7-a^7-3a^8-2a^8+3a^9\\ &= +a^6+a^7-5a^8+3a^9.\end{aligned}$$

Doch diese Schreibweise ist wenig übersichtlich. Sehen wir zu, ob wir nicht eine bessere finden können. Wenn wir die Zahl 325 mit 75 multipliciren, so schreiben wir folgendermaßen:

$$\begin{array}{r} 325 \times 75^{*)} \\ \hline 2275 \\ 1625 \\ \hline 24375. \end{array}$$

In der ersten Reihe sehen wir die beiden Zahlen 325 und 75, welche mit einander zu multipliciren sind. Darunter ist ein Strich gezogen; unter dem Strich bemerken wir zunächst die Zahl 2275, zu der wir durch Multiplication von 325 mit 7 gelangen, darauf die Zahl 1625, welche sich ergiebt, wenn wir 325 mit 5 multipliciren.

Dann folgt wieder ein Strich und unter diesem Strich befindet sich das Resultat der Multiplication, das Product 24375.

Wenn wir eine ähnliche Schreibweise einführen, um bei der Multiplication des Polynoms $+a^4+2a^5-3a^6$ mit $+a^2-a^3$ unser Verfahren anschaulich zu machen, so werden wir setzen:

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{(+a^4+2a^5-3a^6)\,.\,(+a^2-a^3)^{**)}} \\ \hline +a^6 & +2a^7 & -3a^8 & & \\ & -\ \ a^7 & -2a^8 & +3a^9 & \\ \hline +a^6 & +\ \ a^7 & -5a^8 & +3a^9. & \end{array}$$

Die erste Reihe nehmen die beiden Polynome ein, welche mit einander multiplicirt sind, dann kommt ein Strich. Unter diesem Strich sehen wir zunächst die Reihe

$$+a^6+2a^7-3a^8.$$

Diese Reihe haben wir erhalten, indem wir $(+a^4+2a^5-3a^6)$ mit $+a^{2*)}$, dem ersten Gliede des Multiplicators $(+a^2-a^3)$, multiplicirten. Es folgt nun eine zweite Reihe

$$-a^7-2a^7+3a^9,$$

die sich ergiebt, wenn wir $(+a^4+2a^5-3a^6)$ mit $-a^3$, dem zweiten Gliede des Multiplicators $(+a^2-a^3)$, multipliciren. Die beiden Reihen haben wir derart unter einander gesetzt, daß die **gleichartigen Größen unter einander stehen,** $-a^7$ unter $+2a^7$, ferner $-2a^8$ unter $-3a^8$. Unter der zweiten Reihe sehen wir darauf einen zweiten Strich und unter diesem zweiten Strich befindet sich das Resultat

$$+a^6+a^7-5a^8+3a^9$$

nach steigenden Potenzen von a geordnet. Zu dem Resultat sind wir gekommen, indem wir die zwischen den beiden Strichen unter einander stehenden gleichartigen Größen vereinigten**).

---

*) 325 ist der Multiplicand, 75 der Multiplicator. **) Hier ist $(+a^4+2a^5-3a^6)$ der Multiplicand, und $(+a^2-a^3)$ der Multiplicator.

*) Wir setzen jetzt voraus, daß der Schüler selbst ein Polynom mit einem Mononom multipliciren könne. Darum führen wir die Rechnung nicht mit allen Einzelheiten in jedem Falle aus.

**) Zwischen den Strichen sehen wir vier senkrechte Reihen: 1) $+a^6$, 2) $\begin{matrix}+2a^7\\-\ a^7\end{matrix}$, 3) $\begin{matrix}-3a^8\\-2a^8\end{matrix}$, 4) $+3a^9$. $+a^6$ und $+3a^9$ stehen vereinzelt, sie gehen darum

Bringen wir noch einige Beispiele!

1) $(+ 3b^8 - 7b^6 + 6b^4 - 9b^2) . (+ b^4 - b^2)$

$$\begin{array}{l} + 3b^{12} - 7b^{10} + 6b^8 - 9b^6 \text{*)} \\ \qquad - 3b^{10} + 7b^8 - 6b^6 + 9b^4 \text{**)} \\ \hline + 3b^{12} - 10b^{10} + 13b^8 - 15b^6 + 9b^4 \text{***)}, \end{array}$$

es besteht also die Gleichung:

$$(+ 3b^8 - 7b^6 + 6b^4 - 9b^2) . (+ b^4 - b^2) \\ = + 3b^{12} - 10b^{10} + 13b^8 - 15b^6 + 9b^4.$$

2) $(+ a^7b + 5a^5b^3 - a^3b^5) . (+ a^4b - 2a^2b^3)$

$$\begin{array}{l} + a^{11}b^2 + 5a^9b^4 - a^7b^6 \\ \qquad - 2a^9b^4 - 10a^7b^6 + 2a^5b^8 \\ \hline + a^{11}b^2 + 3a^9b^4 - 11a^7b^6 + 2a^5b^8, \end{array}$$

es ist also:

$$(+ a^7b + 5a^5b^3 - a^3b^5) . (+ a^4b - 2a^2b^3) \\ = + a^{11}b^2 + 3a^9b^4 - 11a^7b^6 + 2a^5b^3.$$

3) $(a + b) . (a + b)$

$$\begin{array}{l} a^2 + ab \text{†)} \\ \quad + ab + b^2 \text{††)} \\ \hline a^2 + 2ab + b^2, \end{array}$$

mithin ist:

$$(a + b) . (a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

4) $(a^2 + 2ab + b^2) . (a + b)$

$$\begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \end{array}$$

mithin ist: $(a^2 + 2ab + b^2) . (a + b)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

5) $(a - b) . (a - b)$

$$\begin{array}{l} a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2, \end{array}$$

daher ist: $(a - b) . (a - b = a^2 - 2ab + b^2.$

6) $(a^2 - 2ab + b^2) . (a - b)$

$$\begin{array}{l} a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{array}$$

folglich: $(a^2 - 2ab + b^2) . (a - b)$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

7) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) . (a^2 - 2ab + b^2)$

$$\begin{array}{l} a^5 - 3a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3 \\ \quad - 2a^4b + 6a^3b^2 - 6a^2b^3 + 2ab^4 \\ \qquad + a^3b^2 - 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5 \\ \hline a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \end{array}$$

daher: $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) . (a^2 - 2ab) + b^2 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

8) $(a^2 + 2ab + b^2) . (a^2 + 2ab + b^2)$

$$\begin{array}{l} a^4 + 2a^3b + a^2b^2 \\ \quad + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \qquad + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \end{array}$$

Es ist mithin:

$$(a^2 + 2ab + b^2) . (a^2 + 2ab + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^3 + 4ab^3 + b^4.$$

---

sogleich ins Resultat über. In der zweiten senkrechten Reihe haben wir $+ 2a^7$ und $- a^7$ zu vereinen und in der dritten $- 3a^8$ und $- 2a^8$. Es ist:

$$+ 2a^7 - a^7 = + a^7,$$

denn a^7 ist soviel wie $1a^8$, ferner:

$$- 3a^8 - 2a^8 = - 5a^8.$$

$+ a^7$ und $- 5a^8$ sehen wir im Resultat.

*) Zu dieser Reihe kommen wir, indem wir die erste Klammer $(+ 3b^8 - 7b^6 + 6b^4 - 9b^2)$ mit $+ b^4$, dem ersten Glied der zweiten Klammer, multipliciren. — **) Diese Reihe ergiebt sich, wenn die erste Klammer mit dem zweiten Gliede $- b^2$ der zweiten Klammer multiplicirt wird. ***) Diese Reihe, das Resultat (Product) erhalten wir, indem wir die zwischen den beiden Strichen senkrecht auf einander stehenden Mononome, vereinigen, so ist z. B. $- 10b^{10} = - 7b^{10} - 3b^{10}$ u. s. f. —

†) $a^2 + ab$ ergiebt sich, wenn die erste Klammer $(a + b)$ mit a, dem ersten Gliede der zweiten Klammer, multiplicirt wird, denn es ist:

$$(a + b) . a = aa + ab = a^1a^1 + ab = a^{1+1}ab \\ = a^2 + ab.$$

††) $ab + b^2$ erhalten wir durch Multiplication von $a + b$ mit $+ b$, denn es ist:

$$(a + b) . (+ b) = ab + bb = + ab + b^1b^1 \\ = + ab + b^{1+1} \\ = + ab + b^2.$$

Auf die letzten sechs Beispiele müssen wir noch näher eingehen, weil sie uns zu Formeln führen, von welchen sich der Schüler einige wenigstens merken muß.

In Beisp. 3 waren wir zu der Gleichung gelangt:

$$(a + b) . (a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Setzen wir auf der linken Seite $(a + b)^2$ für $(a + b) . (a + b)$*), so erhalten wir:

$$\text{I. } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{**)}$$

In Beispiel 5 hatten wir gefunden:

$$(a - b) . (a - b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Schreiben wir auch hier auf der linken Seite $(a - b)^2$, so ergiebt sich:

$$\text{II. } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{***)}$$

*) Es ist: $a . a = a^2$, $b . b = b^2$; mithin wird auch $(a + b) . (a + b) = (a + b)^2$, ferner:

$(a + b) . (a + b) . (a + b) = (a + b)^3$
$(a - b) . (a - b) . (a - b) = (a - b)^3$

sein und so fort.

a^3 spricht man: a hoch 3 oder a zur dritten Potenz.

$(a + b)^3$ wir man daher sprechen:

Klammer . . . a plus b . . . Klammer geschlossen . . . hoch 3, oder

Klammer . . . a plus b . . . Klammer geschlossen . . . zur dritten Potenz.

Aufgaben I. Wie wird demnach gesprochen: $(a - b)^4$, $(a + b)^4$, $(a - b)^5$, $(a + b + c)^4$?

Hat eine Basis den Exponenten 2, so drückt man sich gewöhnlich anders aus: a^2 spricht man meist: a Quadrat oder a zum Quadrat, b^2 wird demnach gesprochen: b Quadrat oder b zum Quadrat.

$(a + b)^2$ heißt in Worten: Klammer . . . a plus b . . . Klammer geschlossen . . . zum Quadrat, oder einfacher, a plus b . . . Quadrat.

$(a - b)^2$ heißt in Worten:

Klammer . . . a minus b . . . Klammer geschlossen . . . zum Quadrat, oder einfacher: a minus b . . . Quadrat.

Wir werden später sehen, welchen Zusammenhang der Exponent 2 mit der geometrische Figur, Quadrat genannt, hat. Es ist übrigens auch nicht falsch, zu sagen, a hoch 2, oder a zur 2ten Potenz, statt a Quadrat bez. a zum Quadrat.

**) Die ganze Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

wird gesprochen:

a plus b . . . Quadrat ist gleich a Quadrat plus zwei a . . . b plus b Quadrat.

***) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ heißt in Worten:

a minus b . . . Quadrat ist gleich a Quadrat minus zwei a . . . b plus b Quadrat.

Aufgaben II. Der Schüler möge aussprechen c^2, d^2, $(b - c)^2$, $(d - e)^2$.

I und II sind zwei Hauptformeln, welche der Schüler öfter berechnen, hinschreiben und sprechen muß, damit er sie fest in seinem Gedächtniß einprägt.

Beispiel 4 brachte uns die Gleichung:

$$(a^2 + 2ab + b^2) . (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Setzen wir für $a^2 + 2ab + b^2$ den gleichen Werth $(a + b)^2$ ein, so erhalten wir:

$$(a + b)^2 . (a + b)\text{*)} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

oder kürzer:

$$\text{III. } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\text{**)}$$

Es ist nöthig, daß der Schüler sich auch diese Formel merkt.

In Beispiel 6 haben wir die Gleichung

$$(a^2 - 2ab + b^2) . (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Setzen wir für $a^2 - 2ab + b^2$ die gleichbedeutende Größe $(a - b)^2$ ein, so wird die obige Gleichung verwandelt in:

$$(a - b)^2 . (a - b)\text{***)} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

oder wenn wir die linke Seite kürzer schreiben, in:

$$\text{IV. } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\dagger)$$

Auch diese Gleichung möge sich der Schüler merken.

Bei Beispiel 8 erhielten wir die Gleichung:

$$(a^2 + 2ab + b^2) . (a^2 + 2b + b^2) = a^4 + 4a^3b + 6ab^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Vertauschen wir $a^2 + 2ab + b^2$ mit $(a + b)^2$, so wird aus der linken Seite $(a + b)^2 . (a + b)^2$, oder kürzer $(a + b)^4$.††)

*) Es ist $a^2 . a = a^2 . a^1 = a^{2+1} = a^3$, folglich auch

$(a + b)^2 . (a + b) = (a + b)^2 . (a + b)^1 = (a + b)^{2+1} = (a + b)^3$.

**) Wird am besten gesprochen;

a plus b . . . hoch 3 ist gleich a hoch 3 plus drei a Quadrat b plus drei a . . . b Quadrat plus b hoch 3

***) Denn es ist:

$(a - b)^2 . (a - b) = (a - b)^{2+1} = (a - b)^3$.

†) Wird am besten gesprochen:

a minus b . . . hoch 3 ist gleich a hoch 3 minus drei a Quadrat b plus drei a . . . b Quadrat plus b^3.

††) Denn es ist:

$(a + b)^2 . (a + b)^2 = (a + b)^{2+2} = (a + b)^4$.

Es ist mithin:

V. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Aufgaben III. Der Schüler möge berechnen:

1) $(d^6 + 3d^5 - 4d^4 + 2d^3) . (d^5 - 2d^4)$,
2) $(b + c) . (b + c)$, 3) $(m + n) . (m + n)$,
4) $(b - c) . (b - c)$, 5) $(m + n) . (m - n)$,
6) $(s^2t - 2s^4t^3 + s^6t^5) . (s^3t^2 - s^5t^4)$,
7) $(u + v)^2$*), 8) $(s + t)^2$, 9) $(u - v)^2$,
10) $(x + y)^2$, 11) $(u + v)^3$, 12) $(u - v)^3$,
13) $(u + v)^4$.

Bemerkung I. Wir haben bisher immer zwei Polynome multiplicirt; wie wird sich nun die Rechnung gestalten, wenn wir drei und mehr derselben mit einander multipliciren sollen? Wir wollen uns sogleich zu einem bestimmten Beispiel wenden. Es sei uns die Aufgabe gestellt:

$$(a + b) . (a - b) . (a^2 + b^2)$$

zu berechnen.

Wir werden erst $a + b$ mit $a - b$ multipliciren; das Product, welches sich dabei ergiebt, muß dann noch mit $a^2 + b^2$ multiplicirt werden.

$$\begin{array}{l}
(a + b . (a - b) \\
\hline
a^2 + ab \\
\quad\; - ab - b^2 \\
\hline
(a^2 \qquad\; - b^2) . (a^2 + b^2) \\
\hline
a^4 - a^2b^2 \\
\quad\; + a^2b^2 - b^4 \\
\hline
a^4 \qquad\qquad - b^4.
\end{array}$$

Es ist mithin:

$$(a + b) . (a - b) . (a^2 + b^2) = a^4 - b^4.$$

Nehmen wir noch ein zweites Beispiel! Es sei uns aufgetragen:

$$(3x + 2x^2 - 5x^3) . (x^4 - x^5) . (x^6 - 2x^7)$$

zu berechnen.

Die Rechnung wird sich dann folgendermaßen gestalten:

$$\begin{array}{l}
(3x + 2x^2 - 5x^3) . (x^4 - x^5) \\
\hline
3x^5 + 2x^6 - 5x^7 \\
\qquad - 3x^6 - 2x^7 + 5x^8 \\
\hline
(3x^5 - x^6 - 7x^7 + 5x^8) . (x^6 - 2x^7) \\
\hline
3x^{11} - x^{12} - 7x^{13} + 5x^{14} \\
\qquad - 6x^{12} + x^{13} + 14x^{14} - 10x^{15} \\
\hline
3x^{11} - 7x^{12} - 6x^{13} + 19x^{14} - 10x^{15}.
\end{array}$$

Mithin ist:

$$(3x + 2x^2 - 5x^3) . (x^4 - x^5) . (x^6 - 2x^7)$$
$$= 3x^{11} - 7x^{12} - 6x^{13} + 19x^{14} - 10x^{15}.$$

Aufgaben IV. Der Schüler möge berechnen:

1) $(m^7 + 3m^6) . (4m^5 - 3m^4) . (m^3 - m^3)$,
2) $(u^3 + 2v^3) . (u^4 - 2v^4) . (u^5 - 3v^5)$,
3) $(b + c)^3$, 4) $(b - c)^3$, 5) $(s + t)^4$,
6) $(s - t)^4$, 7) $(m - n) . (m + n) . (m^2 + n^2)$.

Bemerkung II. Bei den Multiplicationen, welche von uns bisher ausgeführt wurden, gestaltete sich die Rechnung immer sehr einfach und regelmäßig. Die einzelnen Mononome gruppirten sich zwischen den beiden Strichen mit Ausnahme des ersten und letzten Gliedes zu senkrechten Reihen, die sich leicht vereinigen ließen. Z. B. in:

$$\begin{array}{l}
(+ a^7b + 5a^5b^3 - a^3b^5) . (+ a^4b - 2a^2b^3) \\
\hline
+ a^{11}b^2 + 5a^9b^4 - \qquad a^7b^6 \\
\qquad\quad - 2a^9b^4 - 10a^7b^6 + 2a^5b^8 \\
\hline
+ a^{11}b^2 + 3a^9b^4 - 11a^7b^6 + 2a^5b^8
\end{array}$$

stehen zwischen den Strichen unter einander die gleichartigen Größen $+ 5a^9b^4$ und $- 2a^9b^4$, ferner $- a^7b^6$ und $- 10a^7b^6$; vereinzelt steht nur links in der ersten Reihe das Glied $+ a^{11}b^2$ und rechts in der zweiten Reihe das Glied $+ 2a^5b^8$.

Bei vielen Multiplicationen stoßen wir aber gar nicht auf Glieder, welche gleichartig sind und daher in senkrechten Reihen unter einander gestellt werden können.

Wenn $(m + 3n) . (p + 2q)$ berechnet werden soll, so dürfen wir nicht schreiben:

$$\begin{array}{l}
(m + 3n) . (p + 2q) \\
\hline
mp + 3np \\
\qquad + 2mq + 6nq \\
\hline
mp + 3np + 2mq + 6nq,
\end{array}$$

denn es hat hier keinen Werth $2mq$ unter $3np$ zu setzen, weil diese beiden Größen nicht gleichartig sind und in Folge dessen nicht ver-

*) $(u + v)^2$ und ebenso $(s + t)^2$, $(u - v)^2$ und die übrigen unter 10, 11, 12 und 13 genannten Polynom-Potenzen muß der Schüler sogleich angeben können, wenn er sich die vorher unter I, II, III, IV, V genannten Gleichungen gründlich eingeprägt hat. Er braucht nur an Stelle von a und b, u und v oder s und t zu setzen.

einigt werden können. Wir werden in solchen Fällen schreiben:

$$\frac{(m + 3n) . (p + 2q)}{mp + 3np + 2mq + 6nq,}$$

oder ebenso einfach:

$$(m + 3n) . (p + 2q) = mp + 3np + 2mq + 6nq.$$

Aufgaben V. Der Schüler möge berechnen:

1) $(2a + 3d) . (3c + 5d)$,
2) $(m + n + p) . (r + t + u)$,
3) $(2pq + ru + 6uv) . (10s — 5t)$.

Eine besondere Gattung von Multiplicationsexempeln lernen wir ferner kennen, wenn wir: $a^2 — 5a^3 — 3a^6 + 9a^8$ mit $a^3 — 4a^4$ multipliciren. Wir werden dann schreiben:

$$\begin{array}{l} (a^2 — 5a^3 — 3a^6 + 9a^7) . (a^3 — 4a^4) \\ \hline a^5 — 5a^6 \qquad — 3a^9 + 9a^{10} \\ \qquad — 4a^6 + 20a^7 \qquad + 12a^{10} — 36a^{11} \\ \hline a^5 — 9a^6 + 20a^7 — 3a^9 + 21a^{10} — 36a^{11}. \end{array}$$

Hier steht in der ersten Reihe zwischen den Strichen nicht blos das erste Mononom a^5 für sich allein, sondern auch noch das dritte $— 3a^9$, in der zweiten Reihe nicht blos das letzte Glied $— 36a^{11}$, sondern auch das zweite Glied $+ 20a^7$.

Ein ähnliches Beispiel ist:

$$\begin{array}{l} (8a^3 — 5a^2b + 8b^3) . (4a^2 + 2ab — 3b^2) \\ \hline 32a^5 — 20a^4b \qquad + 32a^2b^3 \\ \qquad + 16a^4b — 10a^3b^2 \qquad + 16ab^4 \\ \qquad\qquad — 24a^3b^2 + 15a^2b^3 \qquad — 24b^5 \\ \hline 32a^5 — 4a^4b — 34a^3b^2 + 47a^2b^3 + 16ab^4 — 24b^5. \end{array}$$

Auch bei diesem Multiplicationsexempel findet sich zwischen den Strichen keine durchgehende senkrechte Reihe. Theils stehen die Mononome nur zu zweien unter einander, theils sind sie ganz vereinzelt.

Um die Mononome zwischen den Multiplicationsstrichen in allen diesen Fällen richtig zu setzen, muß sich der Schüler durch fortgesetzte Uebung einen sichern Blick erwerben. Er möge, wenn er zwei Polynome mit einander multiplicirt, vor Allem beachten, daß nur gleichartige Größen unter einander gestellt werden dürfen; er möge ferner die Mononome gleich so ordnen, daß sich ein Product ergiebt, welches nach steigenden oder fallenden Potenzen einer Basis geordnet ist.

Aufgaben VI. Der Schüler möge berechnen:

1) $(3a^2 + 2ab + b^2) . (a + 2b + b^2)$,
2) $(a^{10} — 4a^8 — 5a^4 — 3a^2) . (a^4 — 2a^2)$,
3) $(s^4 — 2s^5 + 3s^6 — 8s^8 + 10s^9) . (5s^3 — 3s^5)$,
4) $(m^8 + 2m^7 — 3m^5 + 7m^2) . (m^5 — m^3)$.

Was an dem Menschenschicksal menschlich ist,
Das soll der Mensch auch mit gestalten helfen.

Lection 29.

A. Die Division der Polynome.

§ 64. Division eines Polynoms durch ein Mononom. In § 30 haben wir den Satz aufgestellt:

Eine arithmetische Summe können wir dividiren, indem wir die einzelnen Glieder dividiren.

Diesem Satze gemäß ist:

$$(+ 30 + 45 — 15 — 20) : 5 = + \frac{30}{5} + \frac{45}{5} - \frac{15}{5} - \frac{20}{5} = + 6 + 9 - 3 - 4 = + 8.$$

Als Glieder der arithmetischen Summe: $+30+45-15-20$ haben wir, als wir den vorstehenden Satz behandelten, einfach die Zahlen 30, 45, 15, 20 aufgefaßt; um die Vorzeichen der Glieder haben wir uns nicht gekümmert. Seitdem wir aber die algebraischen Zahlen kennen gelernt haben, sind wir gewöhnt, jede Größe als zusammengehörig mit ihrem Vorzeichen zu betrachten. Wir werden daher jetzt nicht die absoluten Zahlen 30, 45, 15 und 20 als Glieder der arithmetischen Summe: $+30+45-15-20$ ansehen, — wir werden vielmehr sagen: $+30+45-15-20$ enthält die beiden positiven Glieder $+30$ und $+45$, und die beiden negativen Glieder -15 und -20. Wenn wir jetzt die einzelnen Glieder dividiren wollen, so haben wir nicht 30 und 45 15 und 20 durch 5 zu theilen, sondern $+30$ und $+45$ und -15 und -20.

Dividiren wir nach einander: $+30$, $+45$, -15 und -20 durch 5, so erhalten wir:

$$\frac{+30}{5}=+\frac{30}{5},\quad \frac{+45}{5}=+\frac{45}{5},$$
$$\frac{-15}{5}=-\frac{15}{5},\quad \frac{-20}{5}=-\frac{20}{5}\text{*)}$$

d. h. es ergeben sich dieselben Größen, welche wir bei der Gleichung

$$(+30+45-15-20):5=+\frac{30}{5}+\frac{45}{5}-\frac{15}{5}-\frac{20}{5}$$

auf der rechten Seite sehen. Der Satz, daß wir die eine arithmetische Summe dividiren können, indem wir die einzelnen Glieder theilen, wird also auch Geltung haben, wenn wir unter Gliedern die algebraischen Größen verstehen, aus welchen die arithmetische Summe zusammengesetzt ist.

Wenn wir die Ausdrücke „Polynom" und „Mononom" einführen, so können wir unserm Satze noch eine andere Form geben:

Ein Polynom können wir durch ein Mononom dividiren, indem wir die einzelnen Glieder des Polynoms durch das Mononom dividiren.

Lassen wir jetzt auch den Divisor, d. h. das Mononom, durch welches dividirt werden soll, eine algebraische Größe sein! Theilen wir etwa

$$+30+45-15-20$$

durch -5, oder in Zeichen, berechnen wir

$$(+30+45-15-20):-5!$$

Wir haben dann die einzelnen Glieder durch -5 zu dividiren, d. h. nach einander

$$\frac{+30}{-5},\quad \frac{+45}{-5},\quad \frac{-15}{-5},\quad \frac{-20}{-5}$$

zu berechnen.

Es ist
$$\frac{+30}{-5}=-\frac{30}{5}=-6,$$
$$\frac{+45}{-5}=-\frac{45}{5}=-9,$$
$$\frac{-15}{-5}=+\frac{15}{5}=+3,$$
$$\frac{-20}{-5}=+\frac{20}{5}=+4.$$

Mithin haben wir:

$$(+30+45-15-20):-5=-\frac{30}{5}-\frac{45}{5}+\frac{15}{5}+\frac{20}{5}$$
$$=-6-9+3+4=-8.$$

Es sei uns ferner die Aufgabe gestellt:

$$-33+55-88+99-77$$

durch -11 zu theilen, oder anders ausgedrückt:

$$(-33+55-88+99-77):-11$$

zu berechnen.

*) Wir dividiren durch die absolute Größe 5, gerade als wenn es eine positive Größe wäre. Es ist also:

$$\frac{+30}{5}=\frac{+30}{+5}=+\frac{30}{5}$$

$$\frac{-15}{5}=\frac{-15}{+5}=-\frac{15}{5}\text{ ꝛc.},$$

denn gleichnamige Größen durch einander dividirt geben einen positives, ungleichnamige Größen einen negatives Resultat.

Wir haben dann erst -33, dann $+55$, darauf -88 u. s. f. durch -11 zu dividiren und erhalten:

$$(-33+55-88+99-77):-11=+\frac{33}{11}-\frac{55}{11}+\frac{88}{11}-\frac{99}{11}+\frac{77}{11}$$
$$=+3-5+8-9+7=+4,$$

denn es ist:

$$\frac{-33}{-11}=+\frac{33}{11}=+3,\quad \frac{+55}{-11}=-\frac{55}{11}=-5,\quad \frac{-88}{-11}=+\frac{88}{11}=+8,$$
$$\frac{+99}{-11}=-\frac{99}{11}=-9,\quad \frac{-77}{-11}=+\frac{77}{11}=+7.$$

Nehmen wir noch mehrere andere Beispiele. Es ist

1) $$(+21+28-35+56-14):(-7)=-\frac{21}{7}-\frac{28}{7}+\frac{35}{7}-\frac{56}{7}+\frac{14}{7}$$
$$=-3-4+5-8+2=-8,$$

denn wir haben:

$$\frac{+21}{-7}=-\frac{21}{7}=-3,\quad \frac{+28}{-7}=-\frac{28}{8}=-4,\quad \frac{-35}{-7}=+\frac{35}{7}=+5,$$
$$\frac{+56}{-7}=-\frac{56}{7}=-8,\quad \frac{-14}{-7}=+\frac{14}{7}=+2.$$

2) $$(+16-24+32-40+64):(+8)=+\frac{16}{8}-\frac{24}{8}+\frac{32}{8}-\frac{40}{8}+\frac{64}{8}$$
$$=+2-3+4-5+8=+6,$$

denn wir haben:

$$\frac{+16}{+8}=+\frac{16}{8}=+2,\quad \frac{-24}{+8}=-\frac{24}{8}=-3,\quad \frac{+32}{+8}==\frac{32}{8}=+4,$$
$$\frac{-40}{+8}=-\frac{40}{8}=-5,\quad \frac{+64}{+8}=+\frac{64}{8}=+8.$$

3) $$(-a^8+a^7-5a^6+3a^5-2a^4):+a^3=-\frac{a^8}{a^3}+\frac{a^7}{a^3}-\frac{5a^6}{a^3}+\frac{3a^5}{a^3}-\frac{2a^4}{a^3}$$
$$=-a^{8-3}+a^{7-3}-5a^{6-3}+3a^{5-3}-2a^{4-3}$$
$$=-a^5+a^4-5a^3+3a^2-2a,$$

denn es ist:

$$\frac{-a^8}{+a^3}=-\frac{a^8}{a^3}=-a^{8-3}=-a^5,\quad \frac{+a^7}{+a^3}=+\frac{a^7}{a^3}=+a^{7-3}=+a^4,$$
$$\frac{-5a^6}{+a^3}=-\frac{5a^6}{a^3}=-5a^{6-3}=-5a^3,\quad \frac{+3a^5}{+a^3}=+\frac{3a^5}{a^3}=+3a^{5-3}=+3a^2,$$
$$\frac{-2a^4}{+a^3}=-\frac{2a^4}{a^3}=-2a^{4-3}=-2a^1=-2a.$$

4) $$(+12s^9t^{10}u^3-15s^{12}t^{11}u^4+21s^{15}t^{12}u^5):+3s^6t^5u^2$$
$$=+\frac{12s^9t^{10}u^3}{3s^6t^5u^2}-\frac{15s^{12}t^{11}u^4}{3s^6t^5u^2}+\frac{21s^{15}t^{12}u^5}{3s^6t^5u^2}$$
$$=+\frac{12}{3}s^{9-6}t^{10-5}u^{3-2}-\frac{15}{3}s^{12-6}t^{11-5}u^{4-2}+\frac{21}{3}s^{15-6}t^{12-5}u^{5-2}$$
$$=+4s^3t^5u-5s^6t^6u^2+7s^9t^7u^3.$$

5) $(+3m^8n^7 - 5m^7n^6 + 9m^6n^5) : -m^3n^2 = -\frac{3m^8n^7}{m^3n^2} + \frac{5m^7n^6}{m^3n^2} - \frac{9m^6n^5}{m^3n^2}$

$= -3m^{8-2}n^{7-3} + 5m^{7-2}n^{6-3} - 9m^{6-3}n^{5-2}$

$= -3m^5n^5 \quad + 5m^4n^4 \quad - 9m^3n^3.$

Aufgaben. Der Schüler möge berechnen:

1) $(+27 - 18 + 36 - 45 + 63) : -9$,
2) $(-24 + 36 + 72 - 84 - 108) : -12$,
3) $(+26 - 91 + 39 - 52 - 65) : +13$,
4) $(+8 + 10 - 8 - 10 + 2 + 6) : +2$,
5) $(c^9 - c^8 + c^7 - c^6 + c^5) : +c^2$,
6) $(d^{11} - 7d^9 + 5d^7 - d^5) : -d^4$,
7) $(18s^{16}t^{13} - 27s^{15}t^{10} + 36s^{14}t^7) : -9s^4t^4$,
8) $(25u^4v^8 - 30u^8v^{12} - 40u^{12}v^{16}) : +u^4v^5$.

§ 65. Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom. Es sei uns die Aufgabe gestellt, das Polynom

$$+a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4$$

durch das Polynom $+a^3 + a^2$ zu dividiren!

$+a^7 + 6a^6 + 11a^9 + 6a^4$ ist dann der Dividend und

$a^3 + a^2$ der Divisor.

Um den Weg zu finden, den wir bei der Ausführung der Division einzuschlagen haben, wollen wir auf ein gewöhnliches Divisionsexempel zurückgehen, bei welchem der Dividend und der Divisor Zahlen sind. Wenn 7958 durch 23 getheilt werden soll, schreiben wir:

```
23 | 7958 | 346
     69
     ---
      105
       92
      ---
       138
       138
       ---
        —
```

23 ist der Divisor, 7958 der Dividend und 346 die gesuchte Zahl, der Quotient.

Untersuchen wir, wie wir zu diesem Quotienten gelangt sind. Zunächst haben wir zugesehen, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer des Dividenden, wie oft die 2 in der 7 aufgeht. 2 geht in 7 3-mal auf, diese 3 haben wir hinter den zweiten senkrechten Strich als erste Ziffer des Quotienten geschrieben. Mit der 3 ist sodann der Divisor 23 multiplicirt worden; 23 mal 3 giebt 69; die 69 haben wir unter die 79, die beiden ersten Ziffern des Dividenden, gestellt, dann unter die 69 einen wagerechten Strich gezogen und 69 von 79 subtrahirt. Als Differenz ergab sich 10, die von uns unter den wagerechten Strich gesetzt wurde. Wenn die Rechnung bis zu diesem Punkte geführt ist, haben wir geschrieben:

```
23 | 7958 | 3
     69
     ---
     10.
```

Ganz ähnlich werden wir verfahren, wenn wir

$$a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 \text{ durch } a^3 + a^2$$

dividiren sollen. Erst werden wir den Dividenden hinschreiben und ihn rechts und links durch senkrechte Striche begrenzen.

An die linke Seite wird darauf der Divisor $a^3 + a^2$ gesetzt, an die rechte Seite kommt der Quotient, der noch zu suchen ist. Wir erhalten auf diese Weise:

$$a^3 + a^2 \mid a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 \mid$$

Jetzt werden wir prüfen, wie oft das erste Glied a^3 des Divisors in dem ersten Glied a^7 des Dividenden enthalten ist. a^7 dividirt durch a^3 giebt a^4*); a^4 wird als erstes Glied des Quotienten rechts vom Dividenden hinter den zweiten senkrechten Strich gesetzt. Wir haben dann:

$$a^3 + a^2 \mid a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 \mid a^4.$$

Mit a^4 werden wir den Divisor $a^3 + a^2$ multipliciren, $(a^3 + a^2) \,.\, a^4$ giebt $a^7 + a^6$.**)

$a^7 + a^6$ müssen wir unter die beiden ersten Glieder des Dividenden stellen. Wenn wir dies ausführen, ergiebt sich:

$$\begin{array}{l|l|l} a^3 + a^2 & a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 & a^4 \\ & a^7 + a^6. & \end{array}$$

Unter der letzten Reihe: $a^7 + a^6$ werden wir jetzt einen wagerechten Strich machen und dann $a^7 + a^6$ von den darüber stehenden

---

*) Denn es ist: $\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$.

**) Denn es ist:
$(a^3 + a^2) \,.\, a^4 = a^3a^4 + a^2a^4 = a^{3+4} + a^{2+4}$
$= a^7 + a^6$.

Gliedern des Dividenden $a^7 + 6a^6$ abziehen.*) Geschieht dies, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^6. & & & \end{array}$$

Damit sind wir gerade so weit gekommen, wie vorher bei unserm Zahlen-Divisions-Exempel. Um bei diesem Zahlenexempel die Rechnung weiter fortzuführen, werden wir aus dem Dividenden die 5 herunterziehen und hinter die 10 in der letzten Reihe setzen, wodurch die ganze Rechnung folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{array}{r|r|l} 23 & 7958 & 3 \\ & 69 & \\ \hline & 105 & \end{array}$$

Ganz ähnlich werden wir bei unserm Buchstaben-Divisions-Exempel verfahren; wir werden nämlich aus dem Dividenden das Glied $+ 11a^5$ herunterholen und hinter die $+ 5a^6$ in der letzten Reihe stellen. Aus

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^6 & & & \end{array}$$

wird dann

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^6 & + 11a^5 & & \end{array}$$

Der weitere Verlauf der Rechnung ist einfach. In der letzten Reihe sehen wir

$$+ 5a^6 + 11a^5$$

Wir untersuchen nun wieder, wie oft a^3, das erste Glied des Divisors, in $+ 5a^6$, dem ersten Glied der letzten Reihe enthalten ist. $+ 5a^6$ dividirt durch a^3 giebt $+ 5a^3$. Dieses $+ 5a^3$ werden wir nun als zweites Glied des Quotienten hinter a^4 setzen und auf diese Weise haben:

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 + 5a^3 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^5 & + 11a^5. & & \end{array}$$

Jetzt haben wir mit $+ 5a^3$, dem neuen Gliede des Quotienten, den Divisor $a^3 + a^2$ zu multipliciren. $a^3 + a^2$ multiplicirt mit $+ 5a^3$ giebt: $+ 5a^6 + 5a^5$.

Schreiben wir dieses neue Polynom unter die letzte Reihe unseres Divisionsexempels, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 + 5a^3 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^6 & + 11a^5 & & \\ & & + 5a^6 & + 5a^5. & & \end{array}$$

Jetzt haben wir von

$$+ 5a^6 + 11a^5$$

das Polynom $+ 5a^6 + 5a^5$

zu subtrahiren, nachdem wir einen wagerechten Strich gezogen haben. Als Differenz ergiebt sich dabei: $+ 6a^5$. Ziehen wir noch aus dem Dividenden das letzte Glied $+ 6a^4$ herunter, so wird die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{l|llll|l} a^3 + a^2 & a^7 & + 6a^6 & + 11a^5 & + 6a^4 & a^4 + 5a^3 \\ & + a^7 & + a^6 & & & \\ & - & - & & & \\ \hline & & + 5a^6 & + 11a^5 & & \\ & & + 5a^6 & + 5a^5 & & \\ & & - & - & & \\ \hline & & & + 6a^5 & + 6a^4. & \end{array}$$

Dividiren wir das erste Glied $+ 6a^5$ der letzten Reihe durch das erste Glied a^3 des Divisors, so erhalten wir $+ 6a^2$; dieses $+ 6a^2$ wird das letzte Glied des Quotienten, es wird hinter $+ 5a^3$ gestellt. Mit $+ 6a^2$ haben wir dann den Divisor $a^3 + a^2$ zu multipliciren; $+ a^3 + a^2$ multiplicirt mit $+ 6a^2$ giebt

$$+ 6a^5 + 6a^4$$

Stellen wir nun $+ 6a^5 + 6a^4$ unter die letzte Reihe, so ergiebt sich:

*) Um $a^7 + a^6$ von $a^7 + 6a^6$ zu subtrahiren, werden wir gemäß § 47 $a^7 + a^6$ unter $a^7 + 6a^6$ schreiben, in dem Subtrahenden die Vorzeichen umkehren und die gleichartigen Größen vereinigen. Das absolute Glied a^7 werden wir im Subtrahenden bei der Umkehrung der Vorzeichen wie ein positives behandeln und ihm darum sogleich das positive Vorzeichen geben. Wir erhalten dann, wie oben:

$$\begin{array}{ll} a^7 & + 6a^6 \\ + a^7 & + a^6 \\ - & - \\ \hline & + 5a^6 \end{array}$$

Denn bei der Vereinigung der gleichartigen Glieder giebt $a^7 - a^7$ Nichts und $+ 6a^6 - a^6$ ist gleich $+ 5a^6$.

$$
\begin{array}{llll}
a^3 + a^9 \mid & a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 \mid a^4 + 5s^3 + 6a^2 \\
& + a^7 + a^6 \\
& - \quad - \\
\hline
& \quad + 5a^6 + 11a^5 \\
& \quad + 5a^6 + 5a^5 \\
& \quad - \quad\; - \\
\hline
& \qquad\quad + 6a^5 + 6a^4 \\
& \qquad\quad + 6a^5 + 6a^4 \\
\hline
& \qquad\qquad\; - \quad -
\end{array}
$$

Die Rechnung geht gerade auf, ein Rest bleibt nicht.

Rechts vom zweiten senkrechten Striche sehen wir den gesuchten Quotienten:

$$a^4 + 5a^3 + 6a^2.$$

Der Quotient multiplicirt mit dem Divisor muß, wie wir wissen, **gleich dem Dividenden sein.**

In der That! wenn wir $a^4 + 5a^3 + 6a^2$ mit $a^3 + a^2$ multipliciren, erhalten wir

$$a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4,$$

denn es ist:

$$
\begin{array}{l}
(a^4 + 5a^3 + 6a^2) \,.\, (a^3 + a^2) \\
\hline
a^7 + 5a^6 + 6a^5 \\
\quad\; + a^6 + 5a^5 + 6a^4 \\
\hline
a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4.
\end{array}
$$

Aufgaben und weitere Beispiele wird der folgende Brief bringen.

B. Recapitulation.

In den ersten beiden Abschnitten der **achtundzwanzigsten Lection** brachten wir die Lösungen der Aufgaben und die Antworten auf die Wiederholungsfragen des vorigen Briefes. Im dritten Abschnitt führten wir dann für arithmetische Summe die neue Bezeichnung Polynom ein und stellten dem Polynom das Mononom gegenüber. Auch von Binomen und Trinomen sprachen wir, bemerkten aber sogleich, daß wir diese beiden letzteren Ausdrücke vorläufig nicht verwenden würden. In dem Abschnitt über Polynome erörterten wir besonders das Ordnen der Glieder nach fallenden oder steigenden Potenzen eines Basis, und wandten uns dann zur Multiplication der Polynome. Zunächst zeigten wir, wie ein Polynom mit einem Mononom multiplicirt werden müsse, und stellten den Satz auf, daß man ein Polynom mit einem Mononom multipliciren könne, indem man die einzelnen Glieder des Polynoms mit dem Mononom multiplicire. Diesen Satz hatten wir in einer andern Form schon in einem frühern Abschnitt kennen gelernt; wir kamen noch einmal darauf zurück, um zu zeigen, daß er auch Geltung habe, wenn wir die Glieder des Polynoms als algebraische Größen betrachten und zum Multiplicator ein algebraisches Mononom wählen. Wir gingen darnach zur Multiplication zweier Polynome mit einander über und fanden die Regel, daß wir zwei Polynome mit einander multipliciren können, indem wir jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Gliede des andern Polynoms multipliciren und die Theilproducte vereinigen.

Für die Ausführung dieser Multiplication fanden wir eine bequeme und zweckmäßige Schreibweise, indem wir auf die Multiplication zweier Zahlen zurückgingen. Wir müssen dem Schüler recht empfehlen, die Beispiele, durch welche wir das ganze Verfahren erläuterten, genau durchzurechnen und auch die Aufgaben, welche wir stellten, gewissenhaft zu lösen. Gerade diese Multiplication von Polynomen, deren einzelne Mononome Buchstabengrößen sind, übt den Schüler in der algebraischen Rechnung ganz besonders und erzeugt in ihm den Sinn für mathematische Exactheit!

Nachdem wir noch auseinander gesetzt hatten, wie man bei der Multiplication von drei und mehr Polynomen zu verfahren habe, wandten wir uns in der **neunundzwanzigsten Lection** der Division der Polynome zu und erörterten zunächst, wie ein Polynom durch ein Mononom zu dividiren sei. Wir ersahen, daß man diese Division ausführen könne, indem man die einzelnen Glieder des Polynoms durch das Mononom dividire. Den Divisor sowie die Glieder des Dividenden betrachteten wir als algebraische Größen. Die Division eines Polynoms durch ein anderes erläuterten wir mit Hilfe eines Zahlen-Divisionsexempels durch ein Beispiel. Die nächste Lection wird uns noch mehr darüber bringen.

C. Wiederholungsfragen.

1) Was versteht man unter einem Polynom?
2) Was ist ein Mononom, ein Binom, ein Trinom?
3) Nach welchen Gesichtspunkten haben wir die Glieder eines Polynoms geordnet?
4) Wie multiplicirt man die Glieder eines Polynoms mit einem Mononom?
5) Wie multiplicirt man zwei Polynome mit einander?
6) Wie werden drei und mehr Polynome mit einander multiplicirt?
7) Wie wird ein Mononom durch ein Polynom dividirt?
8) Welche Beziehung besteht zwischen dem Dividenden einerseits und dem Divisor und Quotienten andererseits?
9) Wie subtrahirt man ein Polynom von einem andern, etwa das Polynom $+ 8c^2 + 13c^3$ von $- 20c^2 + 17c^3$?
10) Eine algebraische Größe möge erst mit einer positiven, dann mit einer negativen Größe multiplicirt werden. In welchem Falle behält das Product das Product das Vorzeichen der multiplicirten Größe, in welchem Falle nimmt es ein anderes Vorzeichen an?
11) Wie multiplicirt und wie dividirt man Potenzen mit gleichen Basen?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus. Lection 30 und 31. Arithmetik.		Als Manuscript gedruckt.

16. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Wo Philosophie und Religion, die zwei unzertrennlichen Gestirne der ewigen Welt, nicht scheinen, dort ist Nacht. Feßler.

Lection 30.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 28.

Abschnitt C. § 61.

$$+ 3c^2 - 8c^6 + 4c^5 - 2c^3 + 4c^4$$

giebt nach steigenden Potenzen von c geordnet:

$$+ 3c^2 - 2c^3 + 4c^4 + 4c^5 - 8c^6,$$

nach fallenden Poten von c geordnet:

$$- 8c^6 + 4c^5 + 4c^4 - 2c^3 + 3c^2.$$

$$+ 18f^8 - 19f^7 + 13f^4 + 21f^6 - 12f^5$$

giebt nach steigenden Potenzen von f geordnet:

$$+ 13f^4 - 12f^5 + 21f^6 - 19f^7 + 18f^8,$$

nach fallenden Potenzen von f geordnet:

$$+ 18f^8 - 19f^7 + 21f^6 - 12f^5 + 13f^4.$$

Ordnen wir:

$$+ 15x^5y^2 - 10x^3y^4 - x^4y^3 + 3x^2y^5$$

nach steigenden Potenzen von x und fallenden Potenzen von y, so erhalten wir:

$$+ 3x^2y^5 - 10x^3y^4 - x^4y^3 + 15x^5y^2.$$

§ 62. Wir haben:

1) $(+ 13 - 5 + 17 - 6 + 3 - 2).(- 8)$
$= - 13.8 + 5.8 - 17.8 + 6.8 - 3.8 + 2.8$
$= - 104 + 40 - 136 + 48 - 24 + 16$
$= - 160,$

denn es ist:

$(+ 13).(- 8) = - 13.8 = - 104,$
$(- 5).(- 8) = + 5.8 = + 40,$
$(+ 17).(- 8) = - 17.8 = - 136,$
$(- 6).(- 8) = + 6.8 = + 48,$
$(+ 3).(- 8) = - 3.8 = - 24,$
$(- 2).(- 8) = + 2.8 = + 16.$

2) $(+ 14 - 2 + 18 - 5 + 9 - 4).(+ 2)$
$= + 14.2 - 2.2 + 18.2 - 5.2 + 9.2 - 4.2$
$= + 28 - 4 + 36 - 10 + 18 - 8,$

denn es ist:

$(+ 14).(+ 2) = + 14.2 = + 28,$
$(- 2).(+ 2) = - 2.2 = - 4,$
$(+ 18).(+ 2) = + 18.2 = + 36,$
$(- 5).(+ 2) = - 5.2 = - 10,$
$(+ 9).(+ 2) = + 9.2 = + 18,$
$(- 4).(+ 2) = - 4.2 = - 8.$

3) $(+ a^9 - a^7 + a^5).(+ a^4)$
$= + a^9a^4 - a^7a^4 + a^5a^4$
$= + a^{9+4} - a^{7+4} + a^{5+4}$
$= + a^{13} - a^{11} + a^9,$

4) $(+ a^9 - a^7 + a^5).(- a^4)$
$= - a^9a^4 + a^7a^4 - a^5a^4$
$= - a^{9+4} + a^{7+4} - a^{5+4}$
$= - a^{13} + a^{11} - a^9.$

§ 63. Aufgaben I (auf Seite 253 in den Anmerkungen). $(a - b)^4$ wird gesprochen: Klammer ... a minus b ... Klammer geschlossen ... hoch 4 (zur vierten Potenz).

Man kann dafür aber auch einfach sagen:

a minus b . . . hoch 4 (zur 4ten Potenz), nur müssen in diesem Falle die Worte a minus b recht schnell gesprochen werden,

$(a + b)^4$ spricht man: Klammer . . . a plus b . . . Klammer geschlossen . . . hoch 4 (zur 4ten Potenz), oder einfach:
a plus b . . . hoch 4 (zur 4ten Potenz),

$(a - b)^5$ wird gesprochen: Klammer . . . a minus b . . . Klammer geschlossen . . . hoch 5 (zur 5ten Potenz), oder einfacher:
a minus b . . . hoch 5 (zur fünften Potenz).

$(a + b + c)^5$ spricht man: Klammer . . . a plus b plus c . . . Klammer geschlossen . . . hoch 5 (zur fünften Potenz).

Aufgaben II. c^2 und d^2 wird gewöhnlich gesprochen: c Quadrat oder c zum Quadrat, d Quadrat oder d zum Quadrat.

$(b - c)^2$ spricht man: Klammer . . . b minus c . . . Klammer geschlossen . . . zum Quadrat, oder einfacher:
b minus c . . . Quadrat.

$(d - e)^2$ wird gesprochen: Klammer . . . d minus e . . . Klammer geschlossen . . . zum Quadrat, oder einfacher: d minus e . . . Quadrat.

Aufgaben III. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} 1)\ (d^6 + 3d^5 - 4d^4 + 2d^3) . (d^5 - 2d^4) \\ \hline d^{11} + 3d^{10} - 4d^9 + 2d^8 \\ \quad - 2d^{10} - 6d^9 + 8d^8 - 4d^7 \\ \hline d^{11} + d^{10} - 10d^9 + 10d^8 - 4d^7, \end{array}$$

daher ist:

$$(d^6 + 3d^5 - 4d^4 + 2d^3) . (d^5 - 2d^4) = d^{11} + d^{10} - 10d^9 + 10b^8 - 4d^7,$$

$$\begin{array}{l} 2)\ (b + c) . (b + c) \\ \hline b^2 + bc \\ \quad + bc + c^2 \\ \hline b^2 + 2bc + c^2, \end{array}$$

mithin ist: $(b + c) . (b + c) = b^2 + 2bc + c^2$,
oder kürzer: $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$,

$$\begin{array}{l} 3)\ (m + n) . (m + n) \\ \hline m^2 + mn \\ \quad + mn + n^2 \\ \hline m^2 + 2mn + n^2, \end{array}$$

mithin ist: $(m + n) . (m + n) = m^2 + 2mn + n^2$,
oder kürzer: $(m + n^2) = m^2 + 2mn + n^2$,

$$\begin{array}{l} 4)\ (b - c) . (b - c) \\ \hline b^2 - bc \\ \quad - bc + c^2 \\ \hline b^2 - 2bc + c^2, \end{array}$$

also ist: $(b - c) . (b - c) = b^2 - 2bc + c^2$,
oder kürzer: $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$,

$$\begin{array}{l} 5)\ (m + n) . (m - n) \\ \hline m^2 + mn \\ \quad - mn - n^2 \\ \hline m^2 \qquad - n^2, \end{array}$$

folglich ist: $(m + n) . (m - n) = m^2 - n^2$,

$$\begin{array}{l} 6)\ (s^2t - 2s^4t^3 + s^6t^5) . (s^3t^2 - s^5t^4) \\ \hline s^5t^3 - 2s^7t^5 + s^9t^7 \\ \quad - s^7t^5 + 2s^9t^7 - s^{11}t^9 \\ \hline s^5t^3 - 3s^7t^5 + 3s^9t^7 - s^{11}t^9, \end{array}$$

mithin ist: $(s^2t - 2s^4t^3 + s^6t^5) . (s^3t^2 - s^5t^4) = s^5t^3 - 3s^7t^5 + 3s^9t^7 - s^{11}t^9$.

Es ist ferner:

7) $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$,*)
8) $(s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2$,*)
9) $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$,**)
10) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,*)
11) $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$,***)
12) $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$,†)
13) $(u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$,††)

Aufgaben IV. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} 1)\ (m^7 + 3m^6) . (4m^5 - 3m^4) \\ \hline 4m^{12} + 12m^{11} \\ \quad - 3m^{11} - 9m^{10} \\ \hline (4m^{12} + 9m^{11} - 9m^{10}) . (m^3 - m^2) \\ \hline 4m^{15} + 9m^{14} - 9m^{13} \\ \quad - 4m^{14} - 9m^{13} + 9m^{12} \\ \hline 4m^{15} + 5m^{14} - 18m^{13} + 9m^{12}, \end{array}$$

mithin ist:

$$(m^7 + 3m^6) . (4m^5 - 3m^4) . (m^3 - m^2) = 4m^{15} + 5m^{14} - 18m^{13} + 9m^{12},$$

$$\begin{array}{l} 2)\ (u^3 + 2v^3) . (u^4 - 2v^4) \\ \hline (u^7 + 2u^4v^3 - 2u^3v^4 - 4v^7) . (u^5 - 3v^5) \\ \hline u^{12} + 2u^9v^3 - 2u^8v^4 \qquad - 4u^5v^7 \\ \quad - 3u^7v^5 \qquad - 6u^4v^8 + 6u^3v^9 + 12v^{12} \\ \hline u^{12} + 2u^9v^3 - 2u^8v^4 - 3u^7v^5 - 4u^5v^7 - 6u^4v^8 + 6u^3v^9 + 12v^{12} \end{array}$$

daher ist:

$$(u^3 + 2v^3) . (u^4 - 2v^4) . (u^5 - 3v^5) = u^{12} + 2u^9v^3 - 2u^8v^5 - 3u^7v^5 - 4u^5v^7 - 6u^4v^8 + 12v^{12}.$$

3) Setzt man in Gl. III (Seite 253) b für a und c für b ein, so erhält man:

$$(b + c)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + b^3$$

4) Wird in Gl. IV, (Seite 253) b für a, und c für b eingesetzt, so ergiebt sich:

$$(b - c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - b^3.$$

5) Wird in Gl. V, (Seite 254) s mit a, und t mit b vertauscht, so haben wir:

$$(s + t)^4 = s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 + t^4.$$

*) Gemäß Gl. I (Seite 253). **) Gemäß Gl. II (Seite 253). ***) Gemäß Gl. III (Seite 253). †) Gemäß Gl. IV (Seite 253). ††) Gemäß Gl. V (Seite 254).

6) Es ist $(s-t)^4 = (s-t).(s-t).(s-t).(s-t)$. Um $(s-t)^4$ zu berechnen, werden wir daher schreiben:

$$\begin{array}{l}
(s - t).(s - t) \\ \hline
s^2 - st \\
\quad - st + t^2 \\ \hline
(s^2 - 2st + t^2).(s - t) \\ \hline
s^3 - 2s^2t + st^2 \\
\quad - s^2t + 2st^2 - t^3 \\ \hline
(s^3 - 3s^2t + 3st^2 - t^3).(s - t) \\ \hline
s^4 - 3s^3t + 3s^2t^2 - st^3 \\
\quad - s^3t + 3s^2t^2 - 3st^3 + t^4 \\ \hline
s^4 - 4s^3t + 6s^2t^2 - 4st^3 + t^4.
\end{array}$$

Bemerkung. $(b+c)^3$, $(b-c)^3$, $(s+t)^4$ kann der Schüler in derselben Weise berechnen, wenn er bedenkt, daß

$(b + c)^3 = (b + c).(b + c).(b + c)$,

$(b - c)^3 = (b - c).(b - c).(b - c)$,

$(s + t)^4 = (s + t).(s + t).(s + t).(s + t)$ ist.

7) Wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
(m - n).(m + n) \\ \hline
m^2 - mn \\
\quad + mn - n^2 \\ \hline
(m^2 \qquad - n^2).(m^2 + n^2) \\ \hline
m^4 - m^2n^2 \\
\quad + m^2n^2 - n^4 \\ \hline
m^4 \qquad - n^4,
\end{array}$$

daher ist:

$(m - n).(m + n).(m^2 + n^2) = m^4 - n^4$.

Aufgaben V. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
1)\ (2a + 3d).(3c + 5d) \\ \hline
6ac + 9cd + 10ad + 15d^2,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2)\ (m + n + p).(r + t + u) \\ \hline
mr + nr + pr + mt + nt + pt + mu + nu + pu,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3)\ (2pq + ru + 6uv).(10s - 5t) \\ \hline
20pqs + 10rus + 60uvs - 10pqt - 5rut - 30uvt,
\end{array}$$

Aufgaben VI. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
1)\ (3a^2 + 2ab + b^2).(a + 2b + b^2) \\ \hline
3a^3 + 2a^2b \qquad + ab^2 \\
\quad + 6a^2b \qquad + 4ab^2 \qquad + 2b^3 \\
\qquad + 3a^2b^2 \qquad + 2ab^3 \qquad + b^4 \\ \hline
3a^3 + 8a^2b + 3a^2b^2 + 5ab^2 + 2ab^3 + 2b^3 + b^4,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2)\ (a^{10} - 4a^8 - 5a^4 - 3a^2).(a^4 - 2a^2) \\ \hline
a^{14} - 4a^{12} \qquad - 5a^8 - 3a^6 \\
\quad - 2a^{12} + 8a^{10} \qquad + 10a^6 + 6a^4 \\ \hline
a^{14} - 6a^{12} + 8a^{10} - 5a^8 + 7a^6 + 6a^4,
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3)\ (s^4 - 2s^5 + 3s^6 - 8s^8 + 10s^9).(5s^3 - 3s^5) \\ \hline
5s^7 - 10s^8 + 15s^9 \qquad - 40s^{11} + 50s^{12} \\
\quad - 3s^9 + 6s^{10} - 9s^{11} \qquad + 24s^{13} - 30s^{14} \\ \hline
5s^7 - 10s^8 + 12s^9 + 6s^{10} - 49s^{11} + 50s^{12} + 24s^{13} - 30s^{14},
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4)\ (m^8 + 2m^7 - 3m^5 + 7m^2).(m^5 - m^3) \\ \hline
m^{13} + 2m^{12} \qquad - 3m^{10} \qquad + 7m^7 \\
\quad - m^{11} - 2m^{10} + 3m^8 \qquad - 7m^5 \\ \hline
m^{13} + 2m^{12} - m^{11} - 5m^{10} + 3m^8 + 7m^7 - 7m^5.
\end{array}$$

Section 29.

Abschnitt A. § 64. Es ist:

1) $(+27 - 18 + 36 - 45 + 63) : -9$
$= -3 + 2 - 4 + 5 - 7 = -7$,

denn es ist:

$$\frac{+27}{-9} = -\frac{27}{9} = -3,\quad \frac{-18}{-9} = +\frac{18}{9} = +2,$$

$$\frac{+36}{-9} = -\frac{36}{9} = -4,\quad \frac{-45}{-9} = +\frac{45}{9} = +5,$$

$$\frac{+63}{-9} = -\frac{63}{9} = -7.$$

2) $(-24 + 36 + 72 - 84 - 108) : -12$
$= +2 - 3 - 6 + 7 + 9 = +9$,

3) $(+26 - 91 + 39 - 52 - 65) : +13$
$= +2 - 7 + 3 - 4 - 5 = -11$,

4) $(+8 + 10 - 8 - 10 + 2 + 6) : +2$
$= +4 + 5 - 4 - 5 + 1 + 3 = +4$,

5) $(c^9 - c^8 + c^7 - c^6 + c^5) : +c^2$
$= c^7 - c^6 + c^5 - c^4 + c^3$,

denn es ist:

$$\frac{+c^9}{+c^2} = +c^{9-2} = +c^7,$$

$$\frac{-c^8}{+c^2} = -c^{8-2} = -c^6,$$

$$\frac{+c^7}{+c^2} = +c^{7-2} = +c^5,$$

$$\frac{-c^6}{+c^2} = -c^{6-2} = -c^4,$$

$$\frac{+c^5}{+c^2} = +c^{5-2} = +c^3.$$

6) $(d^{11} - 7d^9 + 5d^7 - d^5) : - d^4$
$= - d^7 + 7d^5 - 5d^3 + d$,
7) $(18s^{16}t^{13} - 27s^{15}t^{10} + 36s^{14}t^7) : - 9s^4t^4$
$= - 2s^{16-4}t^{13-4} + 3s^{15-4}t^{10-4} - 4s^{14-4}t^{7-4}$
$= - 2s^{12}t^9 + 3s^{11}t^6 - 4s^{10}t^3$,
8) $(25u^4v^8 - 30u^8v^{12} - 40u^{12}v^{16}) : + u^2v^5$
$= + 25u^{4-2}v^{8-5} - 30u^{8-2}v^{12-5} - 40u^{12-2}v^{16-5}$
$= + 25u^2v^3 - 30u^6v^7 - 40u^{10}v^{11}$.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 29 gestellten Fragen.

1) Polynom ist nur ein anderer Name für „arithmetische und algebraische Summe"; Polynom kommt aus dem Griechischen und kann mit „vielgliedrige Größe" übersetzt werden. 2) Ein Mononom ist eine eingliedrige, ein Binom eine zweigliedrige, ein Trinom eine dreigliedrige Größe. 3) Die Glieder eines Polynoms haben wir nach der Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet und nach steigenden oder fallenden Potenzen einer Basis geordnet. 4) Bei der Multiplication der Glieder eines Polynoms mit einem Mononom bedenkt man, daß gleichnamige Größen mit einander multiplicirt ein positives Product, und ungleichnamige Größen ein negatives Product ergeben; sonst wird die Multiplication nach den gewöhnlichen Multiplicationsregeln vollzogen. 5) Zwei Polynome multiplicirt man mit einander, indem man alle Glieder des einen Polynoms mit allen Gliedern des andern Polynoms multiplicirt. 6) Drei und mehr Polynome werden mit einander multiplicirt, indem man erst das Product aus zweien derselben bildet und dieses Product mit dem dritten Polynom multiplicirt u. s. f. 7) Ein Polynom dividirt man durch ein Mononom, indem man die einzelnen Glieder des Polynoms durch das Mononom dividirt, dabei aber immer berücksichtigt, daß gleichnamige Größen durch einander dividirt einen positiven Quotienten und ungleichnamige Größen einen negativen Quotienten ergeben. 8) Der Quotient multiplicirt mit dem Divisor ist gleich dem Dividenden. 9) Um ein Polynom von einem andern zu subtrahiren, kehrt man im Subtrahenden die Vorzeichen um, und vereinigt die gleichartigen Größen. Soll $+ 8c^2 + 13c^3$ von $- 20c^2 + 17c^3$ subtrahirt werden, so gestaltet sich die Rechnung:

$$\begin{array}{rr} - 20c^2 & + 17c^3 \\ + 8c^2 & + 13c^3 \\ - & - \\ \hline - 28c^2 & - 4c^3. \end{array}$$

10) Eine algebraische Größe behält ihr Vorzeichen, wenn sie mit einer positiven Größe multiplicirt wird, sie verändert ihr Vorzeichen, wenn man sie mit einer negativen Größe multiplicirt. 11) Potenzen mit gleichen Basen werden $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicirt}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$, indem man die Exponenten $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$.

C. Fortsetzung des vorigen Abschnitts.

§ 65. Weitere Erörterungen über die Division eines Polynoms durch ein anderes. Im letzten Paragraphen haben wir ausführlich gezeigt, welchen Weg wir einschlagen müssen, um das Polynom

$$a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4$$

durch das Polynom $a^3 + a^2$ zu dividiren. Um diesen Weg zu finden, gingen wir auf ein Zahlen-Divisions-Exempel ein; wir überlegten uns, wie 7958 durch 23 zu dividiren sei. Das Verfahren, welches wir bei dem Zahlen-Divisions-Exempel beobachteten, konnten wir unmittelbar auf unser Buchstaben-Beispiel übertragen. Schrittweise verfolgten wir den Gang der Rechnung, die sich aus Divisionen, Multiplicationen und Subtractionen zusammensetzte. Als wir das Resultat, den Quotienten: $a^4 + 5a^3 + 6a^2$, gefunden hatten, machten wir die Divisionsprobe; wir multiplicirten den Quotienten mit dem Divisor und erhielten dadurch den Dividenden. Noch ein zweites Beispiel möge jetzt dem Schüler den Gang der Rechnung in allen Einzelheiten vor Augen führen. Wir wollen uns die Aufgabe stellen: $x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$ durch $x^2 - x^4$ zu dividiren. Es ist dann $x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$ der Dividend und $x^2 - x^4$ der Divisor.

Zunächst werden wir wieder den Dividenden durch zwei senkrechte Striche einschließen und an die linke Seite desselben den Divisor stellen. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$x^2 - x^4 \;\Big|\; x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} \;\Big|$$

Hierauf haben wir x^5, das erste Glied des Dividenden, durch x^2, das erste Glied des Divisors, zu theilen. x^5 getheilt durch x^2 giebt x^3; dieses x^3 ist nun das erste Glied des gesuchten Quotienten, es wird rechts vom Dividenden hinter den zweiten senkrechten Strich gesetzt. Wir haben dann:

$$x^2 - x^3 \;\Big|\; x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} \;\Big|\; x^3.$$

Mit x^3 müssen wir jetzt den Divisor $x^2 - x^4$ multipliciren; $(x^2 - x^4) . x^3$ ist gleich $x^5 - x^7$.

$x^5 - x^7$ ist unter die beiden ersten Glieder des Dividenden zu setzen. Wird dies ausgeführt, so ergiebt sich:

$$\begin{array}{r|l|l} x^2 - x^4 & x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 \\ & x^5 - x^7. & \end{array}$$

Das letzte Polynom: $x^5 - x^7$ müssen wir nun von den beiden ersten Gliedern: $x^5 + 2x^7$ des Dividenden subtrahiren. Als Resultat

der Subtraction ergiebt sich: $+ 3x^2$*). Wir haben dann:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x^4 & \quad x^5 + 2x^7 - 8x^9 + x^{11} & x^3 \\
& + x^5 - \; x^7 & \\
& - \quad\; + & \\
\cline{2-2}
& \quad\;\; + 3x^7. &
\end{array}
$$

Wenn wir jetzt $- 8x^9$ aus dem Dividenden herunterholen und unter den wagerechten Strich hinter $+ 3x^7$ stellen, so erhalten wir:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x^4 & \quad x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 \\
& + x^5 - \; x^7 & \\
& - \quad\; + & \\
\cline{2-2}
& \quad\;\; + 3x^7 - 8x^9. &
\end{array}
$$

Hierauf werden wir untersuchen, wie oft x^2, das erste Glied des Quotienten, in $+ 3x^7$, dem ersten Gliede der letzten Reihe unseres Divisionsexempels, enthalten ist. $+ 3x^7$ dividirt durch x^2 giebt $+ 3x^5$.**) Dieses $+ 3x^5$ wird das zweite Glied des Quotienten und als solches rechts vom Dividenden hinter x^3 gestellt. Es ist dann:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x^4 & \quad x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 + 3x^5 \\
& + x^5 - \; x^7 & \\
& - \quad\; + & \\
\cline{2-2}
& \quad\;\; + 3x^7 - 8x^9. &
\end{array}
$$

Nun haben wir den Divisor $x^2 - x^4$ mit $+ 3x^5$, dem neuen Gliede des Quotienten, zu multipliciren. $x^2 - x^4$ multiplicirt mit $+ 3x^5$ ist gleich $+ 3x^7 - 3x^9$.

Wird $+ 3x^7 - 3x^9$ unter die letzte Reihe gestellt und dann davon subtrahirt†), so haben wir:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x^4 & \quad x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 + 3x^5 \\
& + x^5 - \; x^7 & \\
& - \quad\; + & \\
\cline{2-2}
& \quad\;\; + 3x^7 - 8x^9 & \\
& \quad\;\; + 3x^7 - 3x^9 & \\
& \quad\;\; - \quad\;\; + & \\
\cline{2-2}
& \qquad\qquad - 5x^9. &
\end{array}
$$

Jetzt müssen wir das letzte Glied $+ 5x^{11}$ des Dividenden herunterziehen, hinter $- 5x^9$ stellen und mit x^2 in $- 5x^9$ dividiren. $- 5x^9$ dividirt durch x^2 giebt $- 5x^7$††); dieses $- 5x^7$ wird das letzte Glied des Quotienten und als solches hinter das zweite Glied $+ 3x^5$ desselben gesetzt. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x^4 & \quad x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 + 3x^5 - 5x^7 \\
& + x^5 - \; x^7 & \\
& - \quad\; + & \\
\cline{2-2}
& \quad\;\; + 3x^7 - 8x^9 & \\
& \quad\;\; + 3x^7 - 3x^9 & \\
& \quad\;\; - \quad\;\; + & \\
\cline{2-2}
& \qquad\qquad - 5x^9 + 5x^{11}. &
\end{array}
$$

---

*) Um $x^5 - x^7$ von $x^5 + 2x^7$ zu subtrahiren, haben wir gemäß § 47 $x^5 - x^7$ unter $x^5 + 2x^7$ zu stellen. $x^5 + 2x^7$ ist dann der Minuend, $x^5 - x^7$ der Subtrahend. Das erste absolute Glied x^5 des Subtrahenden werden wir dabei als positives Glied auffassen und ihm sogleich das positive Vorzeichen geben. Um die Subtraciton zu vollziehen, werden wir dann im Subtrahenden die Vorzeichen umkehren, einen wagerechten Strich ziehen und die senkrecht unter einander stehenden Größen vereinigen. Wenn wir dies ausführen, nimmt die Rechnung wie oben folgende Gestalt an:

$$
\begin{array}{l}
\quad\; x^5 + 2x^7 \\
+ x^5 - \; x^7 \\
- \quad\; + \\
\hline
\qquad\; + 3x^7.
\end{array}
$$

Das Resultat ist $+ 3x^7$, denn bei der Vereinigung der gleichartigen Glieder ergiebt $x^5 - x^5$ nichts, und $+ 2x^7 + x^7$ ist gleich $+ 3x^7$.

**) Denn es ist:

$$\frac{+ 3x^7}{x^2} = + 3x^{7-2} = + 3x^5.$$

†) Um diese Subtraction auszuführen, haben wir den Subtrahenden $+ 3x^7 - 3x^9$ unter den Minuenden $+ 3x^7 - 8x^9$ zu stellen, die Vorzeichen im Subtrahenden umzukehren, einen wagerechten Strich zu ziehen und die senkrecht unter einander stehenden Glieder zu vereinigen.

Es ergiebt sich wie oben:

$$
\begin{array}{l}
+ 3x^7 - 8x^9 \\
+ 3x^7 - 3x^9 \\
- \quad\;\; + \\
\hline
\qquad\; - 5x^9,
\end{array}
$$

denn:

$+ 3x^7$ und $- 3x^7$ vereinigt giebt Nichts,
$- 8x^9$ und $+ 3x^9$ vereinigt giebt $- 5x^9$.
$- 5x^9$ isi also das Resultat der Subtraction.

††) Denn es ist:

$$\frac{- 5x^9}{x^2} = - 5x^{9-2} = - 5x^7;$$

das absolute Glied ist wie ein positives zu betrachten, und ungleichnamige Größen durch einander dividirt geben einen negativen Quotienten.

Wenn wir noch den Divisor: $x^2 - x^4$ mit $-5x^7$, dem neuen Gliede des Quotienten, multipliciren, das sich ergebende Product $-5x^9 + 5x^{11}$*) unter die letzte Reihe unseres Divisionsexempels stellen und den üblichen wagerechten Strich ziehen, so haben wir schließlich:

$$\begin{array}{l|llll|l}
x^2 - x^4 & x^5 & + 2x^7 & - 8x^9 & + 5x^{11} & x^3 + 3x^5 - 5x^7 \\
 & + x^5 & - x^7 & & & \\
 & - & + & & & \\
\hline
 & & + 3x^7 & - 8x^9 & & \\
 & & + 3x^7 & - 3x^9 & & \\
 & & - & + & & \\
\hline
 & & & - 5x^9 & + 5x^{11} & \\
 & & & - 5x^9 & + 5x^{11} & \\
\hline
 & & & - & - &
\end{array}$$

Das Exempel geht auf, wie der Schüler sieht.

$x^3 + 3x^5 - 5x^7$ ist der gesuchte Quotient, das Resultat der Division.

Der Quotient multiplicirt mit dem Divisor muß gleich dem Dividenden sein.

In unserm Beispiel muß also

$$(x^3 + 3x^5 - 5x^7) \,.\, (x^2 - x^4)$$
$$= x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$$

sein. In der That! wir erhalten:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^5 - 5x^7) \,.\, (x^2 - x^4) \\
\hline
x^5 + 3x^7 - 5x^9 \\
\quad - x^7 - 3x^9 + 5x^{11} \\
\hline
x^5 + 2x^4 - 8x^9 + 5x^{11}.
\end{array}$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) $m^7 + 6m^6 + 11m^5 + 6m^4$ durch $m^3 + m^2$,
2) $x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$ durch $x^3 - x^4$,
3) $c^{11} + 3c^{10} - 9c^9 + 5c^8$ durch $c^6 - c^5$,
4) $s^7 + 10s^8 + s^9 - 12s^{10}$ durch $s^5 - s^6$

dividiren.

Bemerkung I. Wir haben bei den Divisionsexempeln, welche wir in den beiden letzten Paragraphen dem Schüler vorgeführt haben, immer den Dividenden durch zwei senkrechte Striche eingeschlossen, an die linke Seite den Divisor, an die rechte Seite den Quotienten gesetzt. In § 14 haben wir auch noch zwei andere Schreibweisen für Divisionsexempel kennen gelernt. Diesem Paragraphen gemäß können wir, wenn wir

$$x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} \text{ durch } x^2 - x^4$$

dividiren sollen, auch schreiben:

$$\begin{array}{llll|l}
x^5 & + 2x^7 & - 8x^9 & + 5x^{11} & x^2 - x^4 \\
\cline{5-5}
+ x^5 & - x^7 & & & x^3 + 3x^5 - 5x^7 \\
- & + & & & \\
\hline
 & + 3x^7 & - 8x^9 & & \\
 & + 3x^7 & - 3x^9 & & \\
 & - & + & & \\
\hline
 & & - 5x^9 & + 5x^{11} & \\
 & & - 5x^9 & + 5x^{11} & \\
\hline
 & & - & - &
\end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{llll}
(x^5 & + 2x^7 & - 8x^9 & + 5x^{11}) : x^2 - x^4 = x^3 + 3x^5 - 5x^7 \\
+ x^5 & - x^7 & & \\
- & + & & \\
\hline
 & + 3x^7 & - 8x^9 & \\
 & + 3x^7 & - 3x^9 & \\
 & - & + & \\
\hline
 & & - 5x^9 & + 5x^{11} \\
 & & - 5x^9 & + 5x^{11} \\
\hline
 & & - & -
\end{array}$$

In beiden Fällen ist: $x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$ der Dividend, $x^2 - x^4$ der Divisor und $x^3 + 3x^5 - 5x^7$ der Quotient.

Bemerkung II. In § 65 haben wir

$$a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4 \text{ durch } a^3 + a^2,$$

in unserm Paragraphen

$$x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} \text{ durch } x^2 - x^4$$

dividirt. Die Glieder des Dividenden sowohl wie des Divisors sind beim ersten Bei-

---

*) Es ist

$$(x^2 - x^4) \,.\, (-5x^7) = -5x^9 + 5x^{11},$$

denn es ist: $x^2 \,.\, (-5x^7) = -5x^{2+7} = -5x^9$
$(-x^4) \,.\, (-5x^7) = +5x^{4+7} = +5x^{11}$.

spiel nach fallenden Potenzen von a, beim zweiten Beispiel nach steigenden Potenzen von x geordnet.

Ueberhaupt müssen immer die Glieder des Dividenden und Divisors nach denselben Gesichtspunkten geordnet sein, wenn wir die Rechnung beginnen. Folgen sich im Dividenden die Glieder nach steigenden bez. fallenden Potenzen einer Basis, so müssen sie auch im Divisor nach steigenden bez. fallenden Potenzen derselben Basis geordnet werden. Soll $m^7 + m^6 + m^5 + m^4$ durch $m^2 + m^3$ dividirt werden, so dürfen wir nicht schreiben:

$$m^2 + m^3 \,|\, m^7 + m^6 + m^5 + m^4 \,|$$

sondern: $m^2 + m^3 \,|\, m^4 + m^5 + m^6 + m^7 \,|$

oder: $m^3 + m^2 \,|\, m^7 + m^6 + m^5 + m^2 \,|$.

§ 66. Complicirtere Divisionsexempel. Wir haben $a^7 + 6a^6 + 11a^5 + 6a^4$ durch $a^3 + a^2$ und $x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11}$ durch $x^2 - x^4$ dividirt. In beiden Fällen war der Divisor ein zweigliedriges Polynom; und sämmtliche Glieder des Divisors sowohl wie des Dividenden werden von einer einfachen Potenz*) gebildet, die in den meisten Fällen noch einen Coefficienten hat**). Wir wollen uns nun erst zu Beispielen wenden, bei welchen der Divisor ein drei- und viergliedriges Polynom ist, und darauf Fälle betrachten, bei welchen die Glieder des Dividenden und Divisors complicirtere Größenausdrücke sind, also etwa ein Product aus mehreren Potenzen darstellen.

Es sei uns zunächst die Aufgabe gestellt,

$$m^6 + 6m^7 - m^8 - 19m^9 + 38m^{10} - 30m^{11}$$
$$\text{durch } m^4 + 4m^5 - 6m^6$$

zu dividiren. Die Rechnung wird sich in diesem Falle ähnlich gestalten, als wenn der Divisor zweigliedrig ist. Wir werden erhalten:

$$\begin{array}{l|l|l}
m^4 + 4m^5 - 6m^6 & m^6 + 6m^7 - m^8 - 19m^9 + 38m^{10} - 30m^{11} & m^2 + 2m^3 - 3m^4 + 5m^5 \\
 & +m^6 + 4m^7 - 6m^8 & \\
 & -\quad -\quad + & \\
\hline
 & \quad +2m^7 + 5m^8 - 19m^9 & \\
 & \quad +2m^7 + 8m^8 - 12m^9 & \\
 & \quad -\quad -\quad + & \\
\hline
 & \qquad -3m^8 - 7m^9 + 38m^{10} & \\
 & \qquad -3m^8 - 12m^9 + 18m^{10} & \\
 & \qquad +\quad +\quad - & \\
\hline
 & \qquad\quad +5m^9 + 20m^{10} - 30m^{11} & \\
 & \qquad\quad +5m^9 + 20m^{10} - 30m^{11} & \\
\hline
 & \qquad\quad -\quad -\quad - &
\end{array}$$

Ueberzeugen wir uns durch die Divisionsprobe von der Richtigkeit der Rechnung. Wenn wir den Quotienten mit dem Divisor multipliciren, muß sich der Dividend ergeben. In der That! es ergiebt sich:

$$\begin{array}{l}
(m^2 + 2m^3 - 3m^4 + 5m^5) \,.\, (m^4 + 4m^5 - 6m^6) \\
\hline
m^6 + 2m^7 - 3m^8 + 5m^9 \\
\quad + 4m^7 + 8m^8 - 12m^9 + 20m^{10} \\
\qquad - 6m^8 - 12m^9 + 18m^{10} - 30m^{11} \\
\hline
m^6 + 6m^7 - m^8 - 19m^9 + 38m^{10} - 30m^{11}.
\end{array}$$

Es ist mithin:

$$(m^2 + 2m^3 - 3m^4 + 5m^5) \,.\, (m^4 + 4m^5 - 6m^6) = m^6 + 6m^7 - m^8 - 19m^9 + 38m^{10} - 30m^{11}.$$

Bei dem vorigen Divisionsexempel war der Divisor $m^4 + 4m^5 - 6m^6$ ein dreigliedriges Polynom. Wenn wir $3m^9 + 11m^{10} - 5m^{11} - 14m^{12} + 40m^{13} - 27m^{14} + 4m^{15}$ durch $m^7 + 2m^8 - 3m^9 + 4m^{10}$ dividiren, haben wir einen viergliedrigen Divisor. Wir erhalten dann:

---

*) a^3, a^2, x^2 und x^4 sind z. B. einfache Potenzen. **) Z. B. hat in $6a^6$ die Potenz a^6 noch den Coefficienten 6, in $8x^9$ die Potenz x^9 den Coefficienten 8.

$$
\begin{array}{llllllll|l}
3m^9 & + 11m^{10} & - 5m^{11} & - 14m^{12} & + 40m^{13} & - 27m^{14} & + 4m^{15} & & m^7 + 2m^8 - 3m^9 + 4m^{10}\text{*)} \\
+ 3m^9 & + 6m^{10} & - 9m^{11} & + 12m^{12} & & & & & 3m^2 + 5m^3 - 6m^4 + m^5\text{**)} \\
- & - & + & - & & & & & \\
\hline
& + 5m^{10} & + 4m^{11} & - 26m^{12} & + 40m^{13} & & & & \\
& + 5m^{10} & + 10m^{11} & - 15m^{12} & + 20m^{13} & & & & \\
& - & - & + & - & & & & \\
\hline
& & - 6m^{11} & - 11m^{12} & + 20m^{13} & - 27m^{14} & & & \\
& & - 6m^{11} & - 12m^{12} & + 18m^{13} & - 24m^{14} & & & \\
& & + & + & - & + & & & \\
\hline
& & & + m^{12} & + 2m^{13} & - 3m^{14} & + 4m^{15} & & \\
& & & + m^{12} & + 2m^{13} & - 3m^{14} & + 4m^{15} & & \\
\hline
& & & — & — & — & — & &
\end{array}
$$

Machen wir die Divisionsprobe. Wenn wir den Quotienten: $3m^2 + 5m^3 - 6m^4 + m^5$ mit dem Divisor $m^7 + 2m^8 - 3m^9 + 4m^{10}$ multipliciren, muß sich der Dividend

$$3m^9 + 11m^{10} - 5m^{11} - 14m^{12} + 40m^{13} - 27m^{14} + 4m^{15}$$

ergeben. In der That! wir erhalten:

$$
\begin{array}{lllllll}
\multicolumn{7}{l}{(3m^2 + 5m^3 - 6m^4 + m^5) \,.\, (m^7 + 2m^8 - 3m^9 + 4m^{10})} \\
\hline
3m^9 & + 5m^{10} & - 6m^{11} & + m^{12} & & & \\
& + 6m^{10} & + 10m^{11} & - 12m^{12} & + 2m^{13} & & \\
& & - 9m^{11} & - 15m^{12} & + 18m^{13} & - 3m^{14} & \\
& & & + 12m^{12} & + 20m^{13} & - 24m^{14} & + 4m^{15} \\
\hline
3m^9 & + 11m^{10} & - 5m^{11} & - 14m^{12} & + 40m^{13} & - 27m^{14} & + 4m^{15}.
\end{array}
$$

Wir gehen jetzt zu Beispielen über, bei welchen die Glieder Producte von Potenzen verschiedener Basen sind. Soll z. B. $3x^5y^7 - 14x^6y^8 + 21x^7x^9 - 18x^8y^{10}$ durch $x^2y^3 - 3x^3y^4$ ***) dividirt werden, sind im Dividenden sowohl wie im Divisor die Glieder Producte mehrerer Factoren, und zwar ist der erste Factor meist ein Coefficient, der zweite Factor eine Potenz von x und der dritte Factor eine Potenz von y. Z. B. besteht das erste Glied $3x^5y^7$ des Dividenden aus den drei Factoren 3, x^5 und y^7. Wenn wir in diesem Beispiel die Division ausführen, erhalten wir:

$$
\begin{array}{l|llll|l}
x^2y^3 - 3x^3y^4 & 3x^5y^7 & - 14x^6y^8 & + 21x^7y^9 & - 18x^8y^{10} & 3x^3y^4 - 5x^4y^5 + 6x^5y^6 \\
& + 3x^5y^7 & - 9x^6y^8 & & & \\
& - & + & & & \\
\cline{2-4}
& & - 5x^6y^8 & + 21x^7y^9 & & \\
& & - 5x^6y^8 & + 15x^7y^9 & & \\
& & + & - & & \\
\cline{3-5}
& & & + 6x^7y^9 & - 18x^8y^{10} & \\
& & & + 6x^7y^9 & - 18x^8y^{10} &
\end{array}
$$

---

*) Divisor. **) Quotient. ***) Bei diesem Beispiel sind sowohl im Dividenden wie im Divisor die Glieder nach steigenden Potenzen von x und nach steigenden Potenzen von y geordnet. Die Division wird auch bei diesem Beispiel in der in § 65 ausführlich geschilderten Weise ausgeführt. Zunächst wird das erste Glied $3x^5y^7$ des Dividenden durch das erste Glied x^2y^3 des Divisors getheilt. $3x^5y^7$ getheilt durch x^2y^3 giebt $3x^3y^4$, denn es ist:

$$\frac{3x^5y^7}{x^2y^3} = 3x^{5-2}y^{7-3} = 3x^3y^4.$$

$3x^3y^4$ wird das erste Glied des Quotienten und hinter den zweiten senkrechten Strich gestellt. Mit $3x^3y^4$ ist dann der Divisor $x^2y^3 - 3x^3y^4$ zu multipliciren. $x^2y^3 - 3x^3y^4$ multiplicirt mit $3x^3y^4$ giebt $3x^5y^7 - 9x^6y^8$, denn es ist:

$$
\begin{aligned}
(x^2y^3 - 3x^3y^4) \,.\, 3x^3y^4 &= 3x^2x^3y^3y^4 - 9x^3x^3y^4y^4 \\
&= 3x^{2+2}y^{3+4} - 9x^{3+3}y^{4+4} \\
&= 3x^5y^7 - 9x^6y^8.
\end{aligned}
$$

$3x^5y^7 - 9x^6y^8$ haben wir dann unter die beiden ersten Glieder des Dividenden zu stellen und zu subtrahiren. Wir geben zu diesem Zwecke dem ersten Gliede $3x^5y^7$ das positive Vorzeichen, kehren alle Vorzeichen um u. s. f.

Machen wir die Divisionsprobe! Es ergiebt sich:

$$\begin{array}{l}
(3x^3y^4 - 5x^4y^5 + 6x^5y^6) \,.\, (x^2y^3 - 3x^3y^4) \\
\hline
3x^5y^7 - 5x^6y^8 + 6x^7y^9 \\
\qquad\quad - 9x^6y^8 + 15x^7y^9 - 18x^8y^{10} \\
\hline
3x^5y^7 - 14x^6y^8 + 21x^7y^9 - 18x^8y^{10}.
\end{array}$$

Mithin ist:

$$(3x^3y^4 - 5x^4y^5 + 6x^5y^6) \,.\, (x^2y^3 - 3x^3y^4) = 3x^5y^7 - 14x^6y^8 + 21x^7y^9 - 18x^8y^{10},$$

d. h. der Divisor multiplicirt mit dem Quotienten ist gleich dem Dividenden.

Nehmen wir noch ein zweites ähnliches Beispiel! Es sei uns die Aufgabe gestellt:

$$8s^{10}t^{12} - 10s^{11}t^{11} - 24s^{12}t^{10} + 24s^{13}t^9 \text{ durch } 4s^3t^4 + 3s^4t^3 - 6s^5t^2$$

zu dividiren. Führen wir die Division aus, so werden wir schreiben:

$$\begin{array}{l|l|l}
4s^3t^4 + 3s^4t^3 - 6s^5t^2 & \quad 8s^{10}t^{12} - 10s^{11}t^{11} - 24s^{12}t^{10} + 24s^{13}t^9 & 2s^7t^8 - 4s^8t^7 \\
 & + 8s^{10}t^{12} + 6s^{11}t^{11} - 12s^{12}t^{10} & \\
 & \;\; - \qquad\quad - \qquad\qquad + & \\
\hline
 & \qquad - 16s^{11}t^{11} - 12s^{12}t^{10} + 24t^{13}t^9 & \\
 & \qquad - 16s^{11}t^{11} - 12s^{12}t^{10} + 24s^{13}t^9 & \\
\hline
 & \qquad\quad - \qquad\qquad - \qquad\qquad - &
\end{array}$$

Wenn wir die Divisionsprobe machen, haben wir:

$$\begin{array}{l}
(4s^3t^4 + 3s^4t^3 - 6s^5t^2) \,.\, (2s^7t^8 - 4s^8t^7) \\
\hline
8s^{10}t^{12} + 6s^{11}t^{11} - 12s^{12}t^{10} \\
\qquad\quad - 16s^{11}t^{11} - 12s^{12}t^{10} + 24s^{13}t^9 \\
\hline
8s^{10}t^{12} - 10s^{11}t^{11} - 24s^{12}t^{10} + 24s^{13}t^9.
\end{array}$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) $n^9 + 2n^8 - 5n^7 + 30n^6 - 18n^5$ durch $n^4 - 2n^3 + 6n^2$,
2) $n^9 + 2n^8 - 5n^7 + 30n^6 - 18n^5$ durch $n^5 + 4n^4 - 3n^3$,
3) $t^6 - 10t^7 + 19t^8 - 15t^9 + 5t^{10}$ durch $t^2 - 9t^3 + 10t^4 - 5t^5$,
4) $m^{15}n^{13} - 7m^{14}n^{12} + 13m^{13}n^{11} - 15m^{12}n^{10}$ durch $m^6n^5 - 5m^5n^4$,
5) $6s^{12}t^8 - 9s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$ durch $2s^8t^6 - 7s^{10}t^8$, und
6) $6s^{12}t^8 - 9s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$ durch $3s^4t^2 + 6s^6t^4$ dividiren.

§ 67. Fortsetzung des vorigen Paragraphen. Bei allen Divisionsexempeln, welche wir dem Schüler bis jetzt vorgeführt haben, ging die Division ganz regelrecht von Statten; wenn wir durch Multiplication des Divisors mit einem neuen Gliede des Quotienten eine neue Reihe erhielten, konnten wir die Glieder dieser neuen Reihe immer so unter die Glieder der letzten Reihe setzen, daß gleichartige Größen unter einander standen. Die Subtraction wurde uns dann leicht, wir konnten einfach die Vorzeichen in der unteren Reihe umkehren und dann die senkrecht unter einanderstehenden Glieder vereinigen (in **eine** Größe zusammenziehen), weil sie **gleichartig** waren.

Oft wird es aber vorkommen, daß die Größen, welche senkrecht unter einander stehen, gar **nicht** gleichartig sind. Wenden wir uns zu einem bestimmten Beispiele! Es sei uns die Aufgabe gestellt, $a^4 - b^4$ durch $a^2 + b^2$ zu dividiren. $a^4 - b^4$ ist der Dividend, $a^2 + b^2$ der Divisor. Wir werden also schreiben:

$$\begin{array}{l|l|}
a^2 + b^2 & a^4 - b^4
\end{array}$$

Wenn wir das erste Glied a^4 des Dividenden durch a^2, das erste Glied des Divisors, theilen, erhalten wir als Resultat a^2. Dieses a^2 wird das erste Glied des Quotienten; mit a^2 ist daher der Divisor $a^2 + b^2$ zu multipliciren. $a^2 + b$ mal a^2 giebt $a^4 + a^2b^2$. Dieses $a^4 + a^2b^2$ werden wir unter die beiden Glieder des Dividenden setzen. Wir haben dann:

$$\begin{array}{l|l|l}
a^2 + b^2 & \quad a^4 - b^4 & a^2 \\
 & + a^4 + a^2b^2 & \\
 & \;\, - \quad\;\; - & \\
\hline
\end{array}$$

Die letzte Reihe ist zu subtrahiren, wir werden darin die Vorzeichen umkehren, (nachdem wir dem absoluten Glied a^4 das positive Vorzeichen gegeben haben).

Nach Umkehrung der Vorzeichen sehen wir senkrecht unter einander erst a^4 und $-a^4$, dann b^4 und $-a^2b^2$. In der ersten senkrechten Reihe haben wir gleichartige Größen, die wir zusammenzählen (vereinigen) können. a^4 und $-a^4$ vereinigt giebt Nichts. In der zweiten senkrechten Reihe sind die Glieder nicht gleichartig; sie lassen sich darum auch nicht **vereinigen** (in **eine** Größe zusammenziehen). Wir werden sie vielmehr mit ihren Vorzeichen an einander fügen und dadurch erhalten:

$$-a^2b^2 - b^4.$$

Unsere Division gestaltet sich mithin folgendermaßen:

$$\begin{array}{r|l|l} a^2 + b^2 & a^4 - b^4 & a^2 \\ & +a^4 + a^2b^2 & \\ & - \quad - & \\ \hline & -a^2b^2 - b^2. & \end{array}$$

Theilen wir jetzt $-a^2b^2$ durch a^2, das erste Glied des Divisors, so ergiebt sich (gemäß Seite 202) $-b^2$. Dieses $-b^2$ ist das zweite Glied des Quotienten; wir müssen damit den Divisor $a^2 + b^2$ multipliciren. $a^2 + b^2$ mal $-b^2$ ist gleich $-a^2b^2 - b^4$. Stellen wir $-a^2b^2 - b^4$ unter die letzte Reihe unseres Divisions-Exempels, so haben wir:

$$\begin{array}{r|l|l} a^2 + b^2 & a^4 - b^4 & a^2 - b^2 \\ & +a^4 + a^2b^2 & \\ & - \quad - & \\ \hline & -a^2b^2 - b^4 & \\ & -a^2b^2 - b^4 & \\ \hline & - \quad - & \end{array}$$

Ganz ähnlich ist die Rechnung auszuführen wenn wir $x^4 - y^2$ durch $x + y$ dividiren. Wir erhalten dann:

$$\begin{array}{r|l|l} x + y & x^4 - y^4 & x^3\,{}^{*)} - x^2y\,{}^{***)} + xy^2 - y^3 \\ & +x^4 + x^3y\,{}^{**)} & \\ & - \quad - & \\ \hline & -x^3y - y^4 & \\ & -x^3y - x^2y^2\,{}^{\dagger)} & \\ & + \quad + & \\ \hline & +x^2y^2 - y^4\,{}^{\dagger\dagger)} & \\ & +x^2y^2 + xy^3 & \\ & - \quad - & \\ \hline & -xy^3 - y^4 & \\ & -xy^3 - y^4. & \\ \hline & - \quad - & \end{array}$$

Aufgaben I. Der Schüler möge

1) $x^4 - y^4$ durch $x^2 + y^2$,
2) $x^4 - y^4$ durch $x^2 - y^2$,
3) $s^2 - t^2$ durch $s + t$,
4) $s^6 - t^6$ durch $s^3 + t^3$,
5) $s^{10} - t^{10}$ durch $s^5 + t^5$

dividiren.

Der Schüler möge ferner bei den beiden Beispielen, welche wir vor den Aufgaben behandelt haben, die Richtigkeit der Rechnung durch die Divisionsprobe prüfen.

Ehe wir diesen Paragraphen schließen, wollen wir noch einige andere wichtige Divisionsbeispiele bringen.

---

*) x^3, das erste Glied des Quotienten, ergiebt sich, wenn wir x^4, das erste Glied des Dividenden, durch x, das erste Glied des Divisors, theilen, denn es ist:

$$\frac{x^4}{x} = \frac{x^4}{x^1} = x^{4-1} = x^3.$$

) Diese Reihe ergiebt sich, wenn der Divisor: $x + y$ mit x^3, dem ersten Gliede des Quotienten, multiplicirt wird. — *) Wird $-x^3y$ durch x, das erste Glied des Quotienten, getheilt, so erhalten wir: $-x^2y$, das zweite Glied des Quotienten, denn es ist:

$$\frac{-x^3y}{x} = -\frac{x^3y}{x^1} = -x^{3-1}y = -x^2y.$$

†) Die Reihe: $-x^3y - x^2y^2$ erhalten wir, wenn wir den Divisor $x + y$ mit $-x^2y$, dem zweiten Gliede des Quotienten, multipliciren, denn es ist:

$$(x + y).-x^2y = -xx^2y - x^2yy = -x^1x^2y - x^2y^1y^1 = -x^{1+2}y - x^2y^{1+1} = -x^3y - x^2y^2.$$

††) Die Einzelheiten der Rechnung wollen wir nicht weiter verfolgen; wir bemerken nur, daß sich das letzte Glied $-y^4$ des Dividenden durch die ganze Rechnung hindurchzieht, weil sich niemals ein unter ihm stehendes gleichartiges Glied findet, mit dem es zu **einer** Größe zusammengezogen werden könnte.

Es sei uns aufgetragen:

$32a^5 - 4a^4b - 34a^3b^2 + 47a^2b^3 + 16ab^4 - 24b^5$ durch $4a^2 + 2ab - 3b^2$ zu dividiren. Wir werden dann schreiben:

$$\begin{array}{l|l|l}
4a^2 + 2ab - 3b^2 & 32a^5 - 4a^4b - 34a^3b^2 + 47a^2b^3 + 16ab^4 - 24b^5 & 8a^3 - 5a^2b + 8b^3 \\
 & +32a^5 + 16a^4b - 24a^3b^2 & \\
 & - \quad\;\; - \qquad\;\; + & \\ \hline
 & \qquad - 20a^4b - 10a^3b^2 + 47a^2b^3 & \\
 & \qquad - 20a^4b - 10a^3b^2 + 15a^2b^3 & \\
 & \qquad\; + \qquad\quad + \qquad\quad - & \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad {}^{*}) + 32a^2b^3 + 16ab^4 - 24b^5 & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad + 32a^2b^3 + 16ab^4 - 24b^5 & \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad - \qquad - \qquad - &
\end{array}$$

Durch eine Anmerkung ist bereits angedeutet worden, daß die Subtraction bei zwei senkrechten Reihen 0 ergiebt. Es mußten darum sogleich zwei Glieder heruntergezogen werden, nämlich die beiden letzten Glieder $+ 16ab^4 - 24b^5$ des Dividenden. Aehnlich müssen wir verfahren, wenn wir $m^3 - n^3 + 4m^2 - 4n^2$ durch $m^2 - n^2$ dividiren wollen. Wir müssen dann schreiben:

$$\begin{array}{l|l|l}
m^2 - n^2 & m^6 - n^6 + 4m^3 - 4mn^2 & m^4 + m^2n^2 + n^4 + 4m \\
 & + m^6 - m^4n^2 & \\
 & - \qquad + & \\ \hline
 & \qquad + m^4n^2 - n^6 & \\
 & \qquad + m^4n^2 - m^2n^4 & \\
 & \qquad\; - \qquad\;\; + & \\ \hline
 & \qquad\qquad + m^2n^4 - n^6 & \\
 & \qquad\qquad + m^2n^4 - n^6 & \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad + 4m^3 - 4mn^2 & \\
 & \qquad\qquad\qquad + 4m^3 - 4mn^2 & \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad - \qquad - &
\end{array}$$

Auch in diesem Falle haben zwei Größen, nämlich $+ 4m^3 - 4mn^2$ auf einmal aus dem Dividenden herunterzuholen, weil bei der Subtraction kein Rest blieb. Wir verfahren dabei ganz ähnlich wie bei einem Zahlen-Divisions-Exempel, bei welchem die Subtraction mitten in der Rechnung keine Differenz (keinen Rest) läßt. Sollen wir z. B. 96 252 durch 26 dividiren, so werden wir schreiben:

$$\begin{array}{r|l|l}
26 & 96252 & 3702 \\
 & 78 & \\ \hline
 & 182 & \\
 & 182 & \\ \hline
 & \quad\;\; 52^{*} & \\
 & \quad\;\; 52 & \\ \hline
 & \quad\;\; - &
\end{array}$$

Auch hier haben wir an der durch einen Stern bezeichneten Stelle sogleich zwei Ziffern 5 und 2 des Dividenden heruntergezogen.

Aufgaben II. Der Schüler möge

1) $m^{13} + 2m^{12} - m^{11} - 2m^{10} + 7m^7 - 7m^6$ durch $m^5 - m^4$,

2) $s^6 - t^6 + 3s^3 + 3t^3$ durch $s^3 + t^3$

dividiren.

---

*) Bei der Subtraction ergiebt nicht blos die erste, sondern auch die zweite senkrechte Reihe 0, denn es ist

$$-20a^4b + 20a^4b = 0, \text{ ferner}$$
$$-10a^3b + 10a^3b^2 = 0.$$

Wir haben darum aus dem Dividenden nicht blos das nächste Glied $+ 16ab^4$, sondern auch das folgende $- 24b^4$ herunterzuziehen.

Es giebt keinen Zufall,
Und was uns blindes Ohngefähr nur dünkt
Gerade das stammt aus den tiefsten Quellen.
Schiller.

Lection 31.

A. Die Klammern.

§ 68. Ueber die Bedeutung der Klammern haben wir schon in § 29 ausführlich gesprochen. Wie wir in diesem Paragraphen auseinandersetzten, bezieht sich in dem Ausdruck $2 + 3 . 4$ das Malzeichen, welches zwischen der 3 und der 4 steht, nicht auf die ganze Summe $2 + 3$, sondern nur auf die 3. Wenn wir dagegen andeuten wollen, daß nicht blos die 3, sondern die ganze Summe $2 + 3$ mit 4 zu multipliciren sei, so müssen wir $2 + 3$ durch eine Klammer einschließen und setzen:

$$(2 + 3) . 4.$$

Die Klammer zeigt uns also an, daß die eingeschlossene Summe als ein **zusammengehöriges Ganze** zu betrachten sei und daß sich die Multiplication auf dieses zusammengehöriges Ganzes erstrecken müsse.

Wenn man eine Summe oder überhaupt ein Polynom einklammern will, so kann man sich mehrerer Arten von Klammern bedienen. Am gebräuchlichsten ist die runde Klammer ( ) und die eckige Klammer [ ]. Soll z. B. $a + b$ durch eine Klammer eingeschlossen werden, so kann man setzen:

$$(a + b) \text{ oder } [a + b].$$

Eine leichte Ueberlegung wird uns zeigen, daß wir zuweilen auch dieser beiden Klammerarten bedürfen.

Es sei uns z. B. die Aufgabe gestellt, erst die Zahlen 2, 3 und 4 zusammenzuzählen, die Summe dann mit 5 zu multipliciren, davon 6 zu subtrahiren und das Ergebniß mit 7 zu multipliciren. Wie können wir diese Aufgabe in mathematische Zeichen kleiden? Zunächst soll 2, 3 und 4 zusammengezählt werden, der mathematische Ausdruck dafür ist:

$$2 + 3 + 4.$$

Das Ganze d. h. die ganze Summe: $2 + 3 + 4$ ist dann 5-mal zu nehmen, wir werden daher schreiben:

$$(2 + 3 + 4) . 5,$$

davon ist 6 zu subtrahiren, in Zeichen, es ist:

$$(2 + 3 + 4) . 5 - 6$$

zu berechnen. Diesen ganzen Ausdruck sollen wir noch mit 7 multipliciren. Wir werden darum den Ausdruck einklammern, dabei aber, damit keine Verwirrung entstehe, **nicht** zum zweiten Male die runden, sondern die eckigen Klammern verwenden und schreiben:

$$[(2 + 3 + 4) . 5 - 6] . 7.$$

Wenn wir, um diesen Klammerausdruck zu berechnen, erst 2, 3 und 4 addiren, die Summe mit 5 multipliciren, davon 6 subtrahiren und das Ganze 7-mal nehmen, ergiebt sich:

$$2 + 3 + 4 = 9; \quad 9 . 5 = 45;$$
$$45 - 6 = 39, \quad 39 . 7 = 273.$$

Mithin ist:

$$[(2 + 3 + 4) . 3 - 6] . 7 = 273.$$

Gänz ähnlich ist der Ausdruck:

$$[(9 + 10 - 4) . 8 - 50] . 6.$$

Derselbe sagt uns: Erst soll $9 + 10 - 4$ berechnet und das Ergebniß mit 8 multiplicirt werden. Von dem entstehenden Product sollen wir darauf 50 abziehen und die sich auf diese Weise ergebende Differenz 6-mal nehmen.

Es ist: $9 + 10 - 4 = 15$; $15 . 8 = 120$; $120 - 50 = 70$; $70 . 6 = 420$.

Demnach ist:

$$[(9 + 10 - 4) . 8 - 50] = 420.$$

Wir würden zu einem ganz andern Resultat kommen, wenn wir die Klammer fortließen, denn es ist:

$$9 + 10 - 4 . 8 - 50 . 6$$
$$= 9 + 10 - 32 - 300$$
$$= -313.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge

1) $[(40 - 15 + 20) . 2 - 30] . 3,$
2) $30 - 15 + 20 . 2 - 30 . 3,$
3) $[(35 - 20 + 15) . 5 - 65] . 2,$
4) $35 - 20 + 15 . 5 - 65 . 2,$

5) $[35 - 20 + 15 . 5 - 65] . 2$,
6) $(35 - 20 + 15) . 5 - 65 . 2$

berechnen.

Auch schon in § 29 haben wir erörtert, daß sich das **Divisionszeichen** in Bezug auf die Klammern **ebenso** verhalte wie das **Multiplicationszeichen**.

$(5 + 15) : 5$ bedeutet demnach: $5 + 15$, als zusammengehöriges Ganze aufgefaßt, soll durch 5 dividirt werden. Dagegen sagt uns in $5 + 15 : 5$ das Divisionszeichen nur, daß 15 durch 5 zu theilen ist.

Es ist daher:

$$(5 + 15) : 5 = 20 : 5 = 4,$$
$$\text{und } 5 + 15 : 5 = 5 + 3 = 8.$$

$$[(3 + 6 + 9) : 3 + 14] : 10$$

bedeutet demnach: Erst soll 3, 6 und 9 zusammengezählt und das Ganze (die Summe) durch 3 dividirt werden. Zu den sich ergebenden Quotienten sollen wir darauf 14 addiren und die Summe, welche auf diese Weise entsteht, durch 10 theilen. Es ist:

$$3 + 6 + 9 = 18; \quad 18 : 3 = 6; \quad 6 + 14 = 20; \quad 20 : 10 = 2.$$

Mithin haben wir:

$$[(3 + 6 + 9) : 3 + 14] : 10 = 2.$$

Aehnlich ist:

$$[(14 + 21) : 7 + 16 - 6] : 3 = 5,$$

denn wir erhalten: $14 + 21 = 35$; $35 : 7 = 5$; $5 + 16 = 21$; $21 - 6 = 15$; $15 : 3 = 5$.

Lassen wir die beiden Klammern fort, so ergiebt sich dagegen:

$$14 + 21 :^{a)} 7 + 16 - 6 :^{b)} 3 = 14 + 3 + 6 - 2 = 21.$$

Ferner ist:

$$[(40 - 16) : 8 + 2] . 7 = 35,$$

denn wir erhalten: $40 - 16 = 24$; $24 : 8 = 3$; $3 + 2 = 5$; $5 . 7 = 35$.

Wenn die Klammern fortbleiben, ergiebt sich:

$$40 - 16 :^{c)} 8 + 2 . 7 = 40 - 2 + 14 = 52.$$

---

a) Das Divisionszeichen bezieht sich hier nur auf die 21, nicht auf das Vorhergehende; nur 21 soll durch 7 dividirt werden. Es ist $21 : 7 = 3$. b) Nur 6 ist durch 3 zu theilen; 6 getheilt durch 3 giebt 2. c) Nur 16 ist durch 8 zu theilen; 16 getheilt durch 8 giebt 2.

Aufgaben II. Der Schüler möge berechnen:

1) $[(6 + 30) : 12 + 24] : 3$,
2) $[(35 - 14) : 7 + 24 - 18] : 9$,
3) $[(17 + 2 - 6) . 4 + 14 - 12] : 6$,
4) $17 + 2 - 6 . 4 + 14 - 12 : 6$.

§ 69. Die Auflösung der Klammern.

Im letzten Paragraphen haben wir zwei Arten von Klammern kennen gelernt; wir haben auch an einem Beispiel erläutert, weshalb man beide Klammerarten bei einem mathematischen Ausdruck zur Anwendung bringt. Wie wir uns überzeugt haben, enthält ein Ausdruck, welcher eingeklammert werden soll, häufig schon eine runde Klammer; wir werden in diesem Falle, um ihn zusammenzufassen, nicht wieder eine runde, sondern vielmehr eine eckige Klammer wählen, damit genau beurtheilt werden kann, welche Klammerzeichen zu einander gehören. Um z. B. das Polynom: $(2 + 3 + 4) . 5 - 6$ mit 7 zu multipliciren, mußten wir das ganze Polynom durch eine Klammer einschließen, die andeuten sollte, daß sich die Multiplication auf dieses ganze Polynom zu erstrecken habe. Weil in dem Polynom schon eine runde Klammer vorkommt, werden wir uns der eckigen Klammer zum Einschließen bedienen und schreiben:

$$[(2 + 3 + 4) . 5 - 6] . 7.$$

Dieser Ausdruck und ähnliche können, wie wir gezeigt haben, leicht berechnet werden. Einige Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen führen uns zum Ziel. Anders steht es aber, wenn statt der bestimmten Zahlen Buchstaben in den Klammern stehen, wenn wir z. B. den Ausdruck haben:

$$[(a + b + c) . a - d]\ e.$$

Hier können wir nicht erst a, b und c zusammenzählen, als wenn dafür 2, 3 und 4 stände, und auch im Uebrigen die Rechnung nicht so weiter führen, als wenn wir mit bestimmten Zahlen zu operiren hätten. Und doch wird es wünschenswerth sein, den umständlichen Ausdruck in einen einfacheren umzuwandeln, der keine Klammer enthält.

Dies bezweckt die **Auflösung der Klammern**. Schon wiederholt haben wir erörtert, wie Klammern aufzulösen sind; es bleibt uns nur übrig, unsere Erörterungen kurz zu wiederholen und sie auf diejenigen mathematischen Ausdrücke auszudehnen, welche zwei und mehr

Klammern enthalten. Sollen wir in dem Ausdruck:

$$(b + c + d + e) . a$$

die runde Klammer entfernen, so werden wir uns an den Satz erinnern, daß wir ein Polynom mit einem Mononom multipliren können, indem wir die einzelnen Glieder multipliciren.*)

Diesem Satze gemäß ist:

$$(b + c + d + e) . a = ab + ac + ad + ae;$$

auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Klammer verschwunden, oder wie man auch sagt: **die Klammer ist aufgelöst.**

Von diesem Beispiel ausgehend wollen wir sogleich einen complicirtern Klammerausdruck behandeln. Es sei uns die Aufgabe gestellt, in:

$$[a + (b - c) . d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$

die Klammern fortzuschaffen. Wir werden hier am besten schrittweise vorgehen, nämlich die eckige Klammer erst bestehen lassen und nur die runden Klammern innerhalb der eckigen auflösen. Wenn wir die Auflösung der runden Klammern vornehmen, ergiebt sich:

$$(b - c) . d = bd - cd \text{ und}$$
$$(e - f) . 7 = 7e - 7f.$$

Wenn wir die positiven Vorzeichen, welche vor den runden Klammern stehen, berücksichtigen, erhalten wir**):

$$+ (b - c) . d = + bd - cd,$$
$$+ (e - f) . 7 = + 7e - 7f.$$

Vertauschen wir jetzt in dem Klammerausdruck:

$$[a + (b - c) . d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$

$+ (b - c) d$ und $+ (e - f)$ mit $+ bd - cd$ und $+ 7e - 7f$, so wird:

$$[a + (b - c) d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$
$$= [a + bd - cd + 7e - 7f + 25] . 3$$

Auf der rechten (untern) Seite sehen wir noch die eckige Klammer, welche wir jetzt leicht entfernen können, indem wir jedes Glied der Klammer mit 3 multipliciren. Es ist:

$$[a + bd - cd + 7e - 7f + 25] . 3$$
$$= 3a + 3bd - 3cd + 21e - 21f + 75.$$

Mithin haben wir:

$$[a + (b - c) d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$
$$= [a + bd - cd + 7e - 7f + 25] . 3$$
$$= 3a + 3bd - 3cd + 21e - 21f + 75.$$

Nehmen wir ein zweites Beispiel! Es sei uns aufgetragen, in dem Ausdruck:

$$[5u - (v - 6w) . 10 + 6x - (3y - 2z) . 4] . 15$$

die Klammern aufzulösen. Wir werden uns in diesem Falle zunächst wieder der Auflösung der beiden runden Klammern zuwenden, welche wir in der eckigen Klammer vorfinden. Wie wir wissen, ist:

$$(v - 6w) . 10 = 10v - 60w$$
$$\text{und } (3y - 2z) . 4 = 13y - 8z.$$

Wenn wir nun berücksichtigen, daß vor den runden Klammern Minuszeichen (Subtractionszeichen) stehen, so finden wir*):

$$- (v - 6w) . 10 = - v + 60w,$$
$$- (3y - 2z) . 4 = - 12y + 8z.$$

Setzen wir nun in unserm obigen Klammerausdruck für

$$- (v - 6w) . 10 \text{ und } - (3y - 2z) . 4$$

den gleichen Werth ein, so erhalten wir die Gleichung:

---

*) Siehe Seite 249; $b + c + d + e$ ist das Polynom, welches mit dem Mononom a multiplicirt werden soll.

) Es ist $(b - c) . d = bd - cd$. Wird vor $(b - c) d$ ein positives Vorzeichen $(+)$ gesetzt, so heißt dies: $(b - c) d$ oder die gleiche Größe $bd - cd$ **soll addirt werden.

$bd - cd$ ist eine arithmetische Summe (ein Polynom); **bei der Addition einer arithmetischen Summe behalten die Glieder ihr Vorzeichen und ein absolutes Glied wird positiv** (Seite 223); mithin wird aus $bd - cd$ bei der Addition: $+ bd - cd$.

Daher ist:

$$+ (b - c) . d = + bd - cd.$$

Wie wir ferner wissen, ist:

$$(e - f) . 7 = 7e - 7f,$$
$$\text{mithin: } + (e - f) . 7 = + 7e - 7f.$$

*) Wie wir gefunden haben, ist:

$$(v - 6w) . 10 = 10v - 60w.$$

Wird noch vor $(v - 6w) . 10$ ein Minuszeichen $(-)$ gesetzt, so bedeutet dies: $(v - 6w) . 10$ oder die gleiche Größe: $10v - 60w$ **soll subtrahirt werden.** $10v - 60w$ ist eine arithmetische Summe. Nach Seite 223 **verändern die Glieder einer arithmetischen Summe bei der Subtraction ihr Vorzeichen und ein absolutes Glied wird negativ.** Demgemäß wird aus: $10v - 60w$ bei der Subtraction $- 10v + 60w$. Es ist daher:

$$- (v - 6w) . 10 = - 10v + 60w.$$

Wie wir ferner wissen, ist:

$$(3y - 2z) . 4 = 12y - 8z$$
$$\text{folglich: } - (3y - 2z) . 4 = - 12y + 8z.$$

$$[5u-(v-6w).10+6x-(3y-2z).4].14 = [5u-10v+60w+6x-12y-8z].15$$
$$= 75u-150v+900w+90x-180y+120z^{*}).$$

Wenden wir uns zu einem dritten Beispiel! Es sei uns die Aufgabe gestellt, in:

$$a - [m - (n - 8r)\,p + (s^4 - 10t^2)\,s^3 + 9u].12$$

die Klammern aufzulösen. Wenn wir den bisher beschrittenen Weg einschlagen, werden wir zunächst die runden Klammern innerhalb der eckigen Klammer entfernen. Es ist:

$$^{**)} - (n - 8r)\,p = - np + 8pr \quad \text{und} \quad ^{***)} + (s^4 - 10t^2)\,s^3 = + s^7 - 10s^3t^2.$$

Folglich haben wir:

$$[m - (n - 8r)\,p + (s^4 - 10t^2)\,s^3 + 9u].12$$
$$= [m - np + 8pr + s^7 - 10s^3t^2 + 9u].12$$
$$= 12m - 12np + 96pr + 12s^7 - 120s^3t^2 + 108u,$$

mithin ist: $^{\dagger)} - [m - (n - 8r).p + (s^4 - 10t^2).s^3 + 9u).12$
$$= - 12m + 12np - 96pr - 12s^7 + 120s^3t^2 - 108u$$

und $a - [m - (n - 8r).p + (s^4 - 10t^2).s^3 + 9u].12$
$$= a - 12m + 12np - 96pr - 12s^7 + 120s^3t^2 - 108u.$$

Aufgaben. Der Schüler möge in den Ausdrücken:

1) $[a - (b - c) - (e - f).7 + 25].3$,

2) $[3u-(2v-w).5+2y-(6y+3z).2].10$,

3) $[12a-[b+(c-d).3-(e+f).5+19].17$

in der soeben besprochenen Weise die Klammern auflösen.

Bei allen vorhergehenden Beispielen haben wir erst die runden (inneren) Klammern entfernt, welche in der eckigen (äußern) Klammer enthalten waren, und sind dann zur Auflösung der eckigen Klammer geschritten. Wir wollen jetzt den umgekehrten Weg einschlagen, indem wir erst die eckige (äußere) Klammer fortschaffen und dann zur Auflösung der runden (innern) Klammern übergehen. Wenden wir uns zu dem schon behandelten Ausdrucke:

$$[a + (b - c)\,d + (e - f).7 + 25].3$$

Wie das Malzeichen hinter dem zweiten eckigen Klammerzeichen uns sagt, soll die ganze eckige Klammer mit 3 multiplicirt werden. Wir können diese Multiplication vornehmen, indem wir jedes Glied der eckigen Klammer 3-mal nehmen. Fragen wir nun, welche Größen wir als Glieder der eckigen Klammer

$$[a + (b - c)\,d + (e - f).7 + 25]$$

aufzufassen haben. Das erste Glied ist unzweifelhaft a, auf a folgt $+ b - c).d$, und zwar ist dieser ganze Ausdruck als zweites Glied zu betrachten, denn (b — c) bildet, wie die Klammer anzeigt, eine einheitliche zusammengehörige Größe, wir könnten für b — c

---

*) Zu:

$75u - 150v + 900w + 90x - 180y + 120z$

gelangen wir, indem wir jedes einzelne Glied der Klammer

$[5u - 10v + 60w + 6x - 12y + 8z]$

mit 15 multipliciren.

) Es ist: $(n - 8r)\,p = np - 8rp$. Wird vor $(n - 8r)\,p$ ein Minuszeichen gesetzt, so bedeutet dies: $(n - 8r)\,p$ oder die gleiche Größe: $np - 8rp$ **soll subtrahirt werden. Um $np - 8rp$ zu subtrahiren, haben wir die absolute Größe np in eine negative Größe und die negative Größe $- 8rp$ in eine positive zu verwandeln; bei der Subtraction wird also aus $np - 8rp$ die Größe $- np + 8pr$. Daher ist:

$- (np - 8r)\,p = - np + 8pr.$

***) Es ist: $(s^4 - 10t^2).s^3 = s^7 - 10s^3t^2$, mithin: $+ (s^4 - 10t^2).s^3 = + s^7 - 10s^3t^2$, denn bei der Addition behält das Glied $- 10s^3t^2$ sein Vorzeichen, das absolute Glied s^7 wird positiv. (Seite 223.)

†) Es ist:

$[m - np + 8pr + s^7 - 10s^3t^2 + 9u].12$
$= 12m - 12np + 96pr + 12s^7 - 120s^3t^2 + 108u;$

bei der Subtraction verändern die Glieder ihr Vorzeichen, die positiven bez. absoluten Glieder werden negativ, die negativen Glieder werden positiv, aus 12m wird daher bei der Subtraction — 12m, aus — 12m wird + 12m, aus + 8pr wird — 8pr u. s. f. Daher ist:

$- [m - np + 8pr + s^7 - 10s^3t^2 + 9u].12$
$= - 12m + 12np - 96pr + 12s^7 + 120s^3t^2 - 108u.$

auch einen einheitlichen Buchstaben m einsetzen. Es würde dann aus + (b — c) d die Größe + md werden, und daß + md als Glied anzusehen sei, wird dem Schüler sofort einleuchten. Das dritte Glied der eckigen Klammer ist aus ähnlichen Gründen + (e — f) . 7 und das vierte Glied ist + 25.

Jedes der vier Glieder

$$a, \quad + (b - c) . d, \quad + (e - f) . 7, \quad + 25$$

ist mit 3 zu multipliciren.

a mal 3 giebt 3a,
+ (b — c) d*) mal 3 giebt + 3 (b — c) d,
+ (e — f) . 7**) mal 3 giebt + (e — f) . 21
und + 25 mal 3 giebt 75.

Mithin ist:

$$[a + (b - c) d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$
$$= 3a + 3 (b - c) d + (e - f) . 21 + 75.$$

Die eckige Klammer ist jetzt auf der rechten Seite der Gleichung verschwunden; wir haben aber in den Gliedern:

$$+ 3 (b - c) d \text{ und } + (e - f) . 21$$

die runden Klammern aufzulösen. Es ist:

$$+ 3 (b - c) d = + 3bd - 3cd \text{ und}$$
$$+ (e - f) . 21 = + 21e - 21f.$$

Folglich ist:

$$3a + 3 (b - c) d + (e - f) . 21 + 75$$
$$= 3a + 3bd - 3cd + 21e - 21f + 75.$$

Ueberhaupt haben wir:

$$[a + (b - c) d + (e - f) . 7 + 25] . 3$$
$$= 3a + 3 (b - c) d + (e - f) . 21 + 75$$
$$= 3a + 3bd - 3cd + 21e - 21f + 75.$$

Nehmen wir noch ein zweites einfaches Beispiel! Es sei uns die Aufgabe gestellt, in:

$$[2s + (t - 6u) . 3 + (4v - 3w) . 2] . 7$$

die Klammern zu entfernen. Wir wollen wieder erst die eckige, dann die runden Klammern fortschaffen. Die eckige Klammer enthält die drei Glieder:

$$3s, \quad + (t - 6u) . 3, \quad + (4v - 3w) . 2.$$

Wird jedes dieser drei Glieder mit 7 multiplicirt, so ergiebt sich:

$$21s, \quad + (t - 6u) . 21, \quad + (4v - 3w) . 14.$$

Mithin ist:

$$[3s + (t - 6u) . 3 + (4v - 3w) . 2] . 7$$
$$= 21s + (t - 6u) . 21 + (4v - 3w) . 14$$
$$= 21s + 21t - 126u + 56v - 42w,$$

wenn wir auch noch die runden Klammern auflösen.

*) Gemäß Seite 197 können wir ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, mit einer Größe multipliciren, indem wir diese Größe unter die Zahl der Factoren einreihen; (b — c) . d ist ein Product aus zwei Factoren; (b — c) ist der eine Factor, d der andere; wir werden also (b — c) . d 3-mal nehmen, indem wir 3 auch zum Factor machen und schreiben: 3 (b — c) d.

**) Um (e — f) . 7 mit 3 zu multipliciren, brauchen wir gemäß Seite 197 nur 7 3-mal zu nehmen.

B. Recapitulation.

Die ersten beiden Abschnitte der **dreißigsten Lection** brachten uns die Auflösung der Aufgaben und die Beantwortung der Wiederholungsfragen des vorigen Briefes. Im dritten Abschnitt fuhren wir fort, zu zeigen, wie Polynome durch einander zu dividiren sind. Wir führten den Schüler noch einmal alle Einzelheiten der Rechnung vor, machten die Bemerkung, daß Dividend und Divisor immer nach denselben Gesichtspunkten zu ordnen seien, und gingen dann zu complicirten Beispielen über. Zunächst ließen wir den Divisor aus drei und vier Gliedern bestehen, darauf wählten wir zu Gliedern des Divisors Mononome, von welchen zwei Factoren Potenzen verschiedener Basis sind, und brachten schließlich Beispiele, bei denen mehr als zwei Glieder des Dividenden auf einmal herunterzuziehen sind.

Im ersten Abschnitt der **einunddreißigsten Lection** besprachen wir sodann noch einmal die Bedeutung der Klammern, zeigten, daß man sich manchmal zweier Klammerarten, der r u n d e n und der e c k i g e n bedienen müsse und wandten uns dann der Auflösung der Klammerausdrücke zu, in denen runde und eckige Klammern zugleich vorkommen.

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie dividirt man ein Polynom durch ein anderes? (der Schüler möge den Gang der Rechnung charakterisiren.)
2) Darf man den Dividenden nach fallenden und zugleich den Divisor nach steigenden Potenzen einer Basis ordnen?
3) Wie macht man die Divisionsprobe?
4) Welche beiden Arten von Klammern haben wir kennen gelernt?
5) Welche beiden Wege kann man einschlagen, um einen Ausdruck, bei dem innerhalb einer eckigen Klammer runde Klammern vorkommen, von den Klammern zu befreien?
6) Was bedeutet ein Bruchstrich?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 32 und 33.
Arithmetik.

17. Brief

Als Manuscript gedruckt.

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung
hervorragender Fachmänner und Gelehrten
bearbeitet von

W. Burckhardt.

> Man sieht die Blume welken und die Blätter fallen, aber man sieht auch Früchte reifen und neue Knospen keimen. Das Leben gehört den Lebendigen an und wer lebt, muß auf Wechsel gefaßt sein.
>
> Goethe.

Lection 32.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 30.

Abschnitt C. § 65. **Aufgaben.** Wenn wir die Divisionen ausführen, erhalten wir:

1)
$$\begin{array}{l|l} m^7 + 6m^6 + 11m^5 + 6m^4 & m^3 + m^2 \\ \underline{+ m^7 + m^6} & \overline{m^4 + 5m^3 + 6m^3} \\ \quad - \quad - & \\ \quad + 5m^6 + 11m^5 & \\ \quad \underline{+ 5m^6 + 5m^5} & \\ \quad\quad - \quad - & \\ \quad\quad + 6m^5 + 6m^4 & \\ \quad\quad \underline{+ 6m^5 + 6m^4} & \\ \quad\quad\quad - \quad - & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l} x^5 + 2x^7 - 8x^9 + 5x^{11} & x^3 - x^5 \\ \underline{+ x^5 - x^7} & \overline{x^2 + 3x^4 - 5x^6} \\ \quad - \quad + & \\ \quad + 3x^7 - 8x^9 & \\ \quad \underline{+ 3x^7 - 3x^9} & \\ \quad\quad - \quad + & \\ \quad\quad - 5x^9 + 5x^{11} & \\ \quad\quad \underline{- 5x^9 + 5x^{11}} & \\ \quad\quad\quad - \quad - & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l|l} c^{11} + 3c^{10} - 9c^9 + 5c^8 & c^6 - c^5 \\ \underline{+ c^{11} - c^{10}} & \overline{c^5 + 4c^4 - 5c^3} \\ \quad - \quad + & \\ \quad + 4c^{10} - 9c^9 & \\ \quad \underline{+ 4c^{10} - 4c^9} & \\ \quad\quad - \quad + & \\ \quad\quad - 5c^9 + 5c^8 & \\ \quad\quad \underline{- 5c^9 + 5c^8} & \\ \quad\quad\quad - \quad - & \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l|l} s^7 + 10s^8 + s^9 - 12s^{10} & s^5 - s^6 \\ \underline{+ s^7 - s^8} & \overline{s^2 + 11s^3 + 12s^4.} \\ \quad - \quad + & \\ \quad + 11s^8 - s^9 & \\ \quad \underline{+ 11s^8 - 11s^9} & \\ \quad\quad - \quad + & \\ \quad\quad + 12s^9 - 12s^{10} & \\ \quad\quad \underline{+ 12s^9 - 12s^{10}} & \\ \quad\quad\quad - \quad - & \end{array}$$

§ 66. **Aufgaben.** Die Division wird folgendermaßen ausgeführt:

1)
$$\begin{array}{l|l} n^9 + 2n^8 - 5n^7 + 30n^6 - 18n^5 & n^4 - 2n^3 + 6n^2 \\ \underline{+ n^9 - 2n^8 + 6n^7} & \overline{n^5 + 4n^4 - 3n^3} \\ \quad - \quad + \quad - & \\ \quad + 4n^8 - 11n^7 + 30n^6 & \\ \quad \underline{+ 4n^8 - 8n^7 + 24n^6} & \\ \quad\quad - \quad + \quad - & \\ \quad\quad - 3n^7 + 6n^6 - 18n^5 & \\ \quad\quad \underline{- 3n^7 + 6n^6 - 18n^5} & \\ \quad\quad\quad - \quad - \quad - & \end{array}$$

---

*) Um Raum zu sparen, stellen wir den Divisor und Quotienten hinter den Dividenden; wir haben von dieser Schreibweise zwar in § 65 Bemerkung I gesprochen, sie aber bisher selten angewendet.

2)
$$n^9 + 2n^8 - 5n^7 + 30n^6 - 18n^5 \mid n^5 + 4n^4 - 3n^3$$
$$+ n^9 + 4n^8 - 3n^7 \qquad \mid n^4 - 2n^3 + 6n^2$$
$$- \quad - \quad +$$
$$-2n^8 - 2n^7 + 30n^6$$
$$-2n^8 - 8n^7 + 6n^6$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$+6n^7 + 24n^6 - 18n^5$$
$$+6n^7 + 24n^6 - 18n^5$$
$$- \quad - \quad -$$

3)
$$t^6 - 10t^7 + 19t^8 - 15t^9 + 5t^{10} \mid t^2 - 9t^3 + 10t^4 - 5t^5$$
$$+ t^6 - 9t^7 + 10t^8 - 5t^9 \qquad \mid t^4 - t^5$$
$$- \quad + \quad - \quad +$$
$$- t^7 + 9t^8 - 10t^9 + 5t^{10}$$
$$- t^7 + 9t^8 - 10t^9 + 5t^{10}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

4)
$$m^6n^5 - 5m^5n^4 \mid m^{15}n^{13} - 7m^{14}n^{12} + 13m^{13}n^{11} - 15m^{12}n^{10} \mid m^9n^8 - 2m^8n^7 + 3m^7n^6$$
$$+ m^{15}n^{13} - 5m^{14}n^{12}$$
$$- \quad +$$
$$-2m^{14}n^{12} + 13m^{13}n^{11}$$
$$-2m^{14}n^{12} + 10m^{13}n^{11}$$
$$+ \quad -$$
$$+3m^{13}n^{11} - 15m^{12}n^{10}$$
$$+3m^{13}n^{11} - 15m^{12}n^{10}$$
$$- \quad -$$

5)
$$6s^{12}t^8 - 9s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12} \mid 2s^8t^6 - 7s^{10}t^8$$
$$+ 6s^{12}t^8 - 21s^{14}t^{10} \qquad \mid 3s^4t^2 + 6s^6t^4$$
$$- \quad +$$
$$+12s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$$
$$+12s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$$
$$- \quad -$$

6)
$$6s^{12}t^8 - 9s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12} \mid 3s^4t^2 + 6s^6t^4$$
$$+ 6s^{12}t^8 + 12s^{14}t^{10} \qquad \mid 2s^8t^6 - 7s^{10}t^8$$
$$- \quad -$$
$$-21s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$$
$$-21s^{14}t^{10} - 42s^{16}t^{12}$$
$$- \quad -$$

§ 67. Aufgaben I. Wir erhalten:

1)
$$x^2 + y^2 \mid x^4 - y^4 \mid x^2 - y^2$$
$$+ x^4 + x^2y^4$$
$$- \quad -$$
$$- x^2y^2 - y^4$$
$$- x^2y^4 - y^4$$
$$- \quad -$$

Divisionsprobe.
$$(x^2 - y^2) . (x^2 + y^2)$$
$$x^4 - x^2y^2$$
$$+ x^2y^2 - y^4$$
$$x^4 - y^4$$

d. h. es ist: $(x^2 - y^2) . (x^2 + y^2) = x^4 - y^4$,

d. h. der Quotient multiplicirt mit dem Divisor ist gleich dem Dividenden.

2)
$$x^2 - y^2 \mid x^4 - y^4 \mid x^2 + y^2$$
$$+ x^4 - x^2y^2$$
$$- \quad +$$
$$+ x^2y^2 - y^4$$
$$+ x^2y^2 - y^4$$
$$- \quad -$$

Divisionsprobe. Wir erhalten:
$$(x^2 + y^2) . (x^2 - y^2)$$
$$x^4 + x^2y^2$$
$$- x^2y^2 - y^4$$
$$x^4 - y^4$$

d. h. es ist: $(x^2 + y^2) . (x^2 - y^2) = x^4 - y^4$.

3)
$$s + t \mid s^2 - t^2 \mid s^{*)} - t$$
$$+ s^2 + st$$
$$- \quad -$$
$$- st - t^2$$
$$- st - t^2$$
$$- \quad -$$

Divisionsprobe. Es ist:
$$(s - t) . (s + t)$$
$$s^2 - st$$
$$+ st - t^2$$
$$s^2 - t^2$$

d. h. wir haben: $(s - t) . (s + t) = s^2 - t^2$.

4)
$$s^3 + t^3 \mid s^6 - t^6 \mid s^3 - t^3$$
$$+ s^6 + s^3t^3$$
$$- \quad -$$
$$- s^3t^3 - t^6$$
$$- s^3t^3 - t^6$$
$$- \quad -$$

Divisionsprobe. Wir erhalten:
$$(s^3 - t^3) . (s^3 + t^3)$$
$$s^6 - s^3t^3$$
$$+ s^3t^3 - t^6$$
$$s^6 - t^6$$

d. h. es ist: $(s^3 - t^3) . (s^3 + t^3) = s^6 - t^6$.

5)
$$s^5 + t^5 \mid s^{10} - t^{10} \mid s^5 - t^5$$
$$+ s^{10} + s^5t^5$$
$$- \quad -$$
$$- s^5t^5 - t^{10}$$
$$- s^5t^5 - t^{10}$$
$$- \quad -$$

Divisionsprobe.
$$(s^5 - t^5) . (s^5 + t^5)$$
$$s^{10} - s^5t^5$$
$$+ s^5t^5 - t^{10}$$
$$s^{10} - t^{10}$$

d. h. es ist: $(s^4 - t^5) . (s^5 + t^5) = s^{10} - t^{10}$.

---

*) Wenn wir das erste Glied s^2 des Dividenden durch s, das erste Glied des Divisors, theilen, erhalten wir s, denn es ist $\frac{s^2}{s} = \frac{s^2}{s^1} = s^{2-1} = s^1 = s$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $m^5 - m^4 \mid m^{13} + 2m^{12} - m^{11} - 2m^{10} + 7m^7 - 7m^6 \mid m^8 + 3m^7 + 2m^6 + 7m^2$

$+ m^{13} - m^{12}$
$- \quad +$
$+ 3m^{12} - m^{11}$
$+ 3m^{12} - 3m^{11}$
$- \quad +$
$+ 2m^{11} - 2m^{10}$
$+ 2m^{11} - 2m^{10}$
$- \quad +$
$+ 7m^7 - 7m^6$
$+ 7m^7 - 7m^6$
$- \quad -$

2) $s^3 + t^3 \mid s^6 - t^6 + 3s^3 + t^3 \mid s^3 - t^3 + 3$

$+ s^6 + s^3t^3$
$- \quad -$
$- s^3t^3 - t^6$
$- s^3t^3 - t^6$
$+ \quad +$
$+ 3s^3 + 3t^3$
$+ 3s^3 + 3t^3$
$- \quad -$

Section 31.

Abschnitt A. § 68. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $40 - 15 + 20 = 45; \quad 45 . 2 = 90,$
$90 - 30 = 60; \quad 60 . 3 = 180;$ folglich:
$[(40 - 15 + 20) . 2 - 30] . 3 = 180,$

2) $40 - 15 + 20 . 2 - 30 . 3 = 40 - 15 + 40 - 90$
$= - 25,$

3) $35 - 20 + 15 = 30; \quad 30 . 5 = 150;$
$150 - 65 = 85; \quad 85 . 2 = 170,$ mithin:
$[(35 - 20 + 15) . 5 - 65] . 2 = 170,$

4) $35 - 20 + 15 . 5 - 65 . 2 = 30 - 20 + 30 - 130$
$= - 90,$

5) $35 - 20 + 15 . 5 - 65 = 25;$
$25 . 2 = 50;$ folglich:
$[35 . 20 + 15 . 5 - 65] . 2 = 50,$

6) $35 - 20 + 15 = 30; \quad 30 . 5 - 150.$
$150 - 65 . 2 = 150 - 130 = 20;$
mithin: $(35 - 20 + 15) . 5 - 65 . 2 = 20.$

Aufgaben II. Es ist:

1) $6 + 30 = 36, \quad 36 : 12 = 3,$
$3 + 24 = 27, \quad 27 : 3 = 9,$ mithin:
$[(6 + 30) : 12 + 24] : 3 = 9,$

2) $35 - 14 = 21, \quad 21 : 7 = 3, \quad 3 + 24 = 27,$
$27 - 18 = 9, \quad 9 : 9 = 1,$ folglich:
$[(35 - 14) : 7 + 24 - 18] : 9 = 1,$

3) $17 + 2 - 6 = 13, \quad 13 . 4 = 52, \quad 52 + 14 = 66,$
$66 - 12 = 54, \quad 54 : 6 = 9,$ also:
$[(17 + 2 - 6) . 4 + 14 - 12] : 6 = 9,$

4) $17 + 2 - 6 . 4 + 14 - 12 : 6$
$= 17 + 2 - 24 + 14 - 2 = + 7.$

§ 69. **Aufgaben.** Wenn wir in dem Ausdruck:

$[a - (b - c) - (e - f) . 7 + 25] . 3$

die runden Klammern auflösen, erhalten wir:

$-(b - c) = - b + c, \quad -(e - f) . 7 = - 7e + 7f,$

folglich ist: $[a - (b - c)$*) $- (e - f) . 7$**) $+ 25] . 3$
$= [a - b + c - 7e + 7f + 25] . 3$
$= 3a - 3b + 3c - 21e + 21f + 75.$

2) Werden in dem Ausdruck:

$[3u - (2v - w) . 5 + 2y - (6y + 3z) . 2] . 10$

die runden Klammern aufgelöst, so ergiebt sich:

$- (2v - w) . 5 = - 10v + 5w$***)
$- (6y + 3z) . 2 = - 12y - 6z$§),

mithin:

$[3u - (2v - w) . 5 + 2y - (6y + 3z) . 2] . 10$
$= [3u - 10v + 5w + 2y - 12y - 6z] . 10$
$= [3u - 10v + 5w - 10y - 6z] . 10$
$= 30u - 100v + 50w - 100y - 60z.$

3) Lösen wir in:

$12a - [b + (c - d) . 3 - (e - f) . 5 + 19] . 17$

erst die runden Klammern auf, so erhalten wir:

$+ (c - d) . 3 = + 3c - 3d$†)
$- (e - f) . 5 = - 5e + 5f$††).

Also ist:

$[b + (c - d) . 3 - (e - f) . 5 + 19] . 17$
$= [b + 3c - 3d - 5e + 5f + 19] . 17$
$= 17b + 51c - 51d - 85e + 85e + 85f + 323,$

mithin:

†††) $- [b + (c - d) . 3 - (e - f) . 5 + 19] . 17$
$= - 17b - 51c + 51d + 85e - 85e - 323$ und

---

*) Steht vor $(b - c)$ ein Minuszeichen, so bedeutet dies: $b - c$ soll subtrahirt werden. Gemäß Seite 253 wird bei der Subtraction $- b$ aus b und $+ c$ aus $- c$, daher ist: $-(b - c) = - b + c.$

**) Wir haben $(e - f) . 7 = 7e - 7f.$ Wird vor $(e - f) . 7$ ein Subtractionszeichen gesetzt, so wird $- 7e$ aus $7e$ und $+ 7f$ aus $- 7f$, denn bei der Subtraction verändern die Glieder ihr Vorzeichen, daher ist: $- (e - f) . 7 = - 7e + 7f.$

***) Es ist $(2v - w) . 5 = 10v - 5w$, daher $- (2v - w) . 5 = - 10v + 5w.$

§) Es ist: $(6y + 3z) . 2 = 12y - 6z$, also $- (6y + 3z) . 2 = - 12y + 6z.$

†) Es ist $(c - d) . 3 = 3c - 3d$, folglich $+ (c - d) . 3 = + 3c - 3d$, denn bei der Addition behalten (gemäß Seite 253) die Glieder ihr Vorzeichen, und das absolute Glied wird positiv.

††) Es ist: $(e - f) . 5 = 5e - 5f$, mithin $- (e - f) . 5 = - 5e + 5f.$

†††) Wird ein Minuszeichen vor die eckige Klammer gesetzt, so müssen die Glieder der rechten

$$12a - [b + (c - d) . 3 - (e - f) . 5 + 19] . 17$$
$$= 12a - 17b - 51c + 51d + 85e - 85f - 323.$$

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 31 gestellten Fragen.

1) Um ein Polynom durch ein anderes zu dividiren, ordnet man zunächst beide Polynome nach demselben Gesichtspunkte. Darauf theilt man das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors und macht das sich ergebende Resultat zum ersten Gliede des gesuchten Quotienten. Mit diesem ersten Gliede wird der ganze Divisor multiplicirt; das entstehende Product wird unter die ersten Glieder des Dividenden gesetzt und von denselben subtrahirt. Hinter die Differenz (das Resultat der Subtraction) setzt man dann nach Bedürfniß ein oder mehrere Glieder, die man aus dem Dividenden herunterholt. Das erste Glied der so entstandenen Reihe dividirt man wieder durch das erste Glied des Divisors u. s. f. Wir haben bisher nur solche Divisionsexempel gebracht, bei welchen die Rechnung aufgeht; mit Beispielen, bei welchen ein Rest bleibt, werden wir uns erst später befassen. 2) Dividend und Divisor müssen nach denselben Gesichtspunkten geordnet werden; es ist daher falsch, wenn man den Dividenden nach fallenden und zugleich den Divisor nach steigenden Potenzen einer Basis ordnet. 3) Man macht die Divisionsprobe, indem man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt; es muß sich dabei der Dividend ergeben. 4) Die runden und die eckigen Klammern. 5) Man kann entweder die runden Klammern und dann die eckige Klammer entfernen, oder man kann erst die eckige Klammer und dann die runden Klammern auflösen. Im ersten Falle schreitet man gewissermaßen von innen nach außen, im zweiten Falle von außen nach innen fort. 6) Ein Bruchstrich bedeutet: „dividirt durch".

C. Die Auflösung der Klammern und das Heraussetzen aus den Klammern.

§ 70. Die Vorzeichen der Klammern.

Im letzten Paragraphen haben wir complicirtere Klammerausdrücke aufgelöst, bei welchen eine eckige Klammer mehrere Glieder mit runden Klammern enthielt. Um bei diesen Ausdrücken die Klammern zu entfernen, konnten wir zwei Wege einschlagen. Entweder konnten wir von innen nach außen fortschreiten, indem wir erst die runden Klammern und dann die eckige Klammer auflösten, oder wir konnten umgekehrt bei der Rechnung die Richtung von außen nach innen wählen und erst die eckige Klammer und darauf die runden Klammern entfernen. Wenn wir uns in den Gedankenkreis des Schülers versetzen, müssen wir annehmen, daß er für einige Punkte, die bei der Klammerauflösung in Betracht kamen, eine breitere und ausführlichere Erörterung wünscht.

Seite ihr Vorzeichen umkehren, aus 17b wird — 17b, aus + 51c wird — 51c u. s. f.

Zunächst wird es ihm angenehm sein, wenn wir noch einmal auf die Vorzeichen eingehen, welche vor den Klammern stehen. Wir haben im letzten Paragraphen wiederholt gesehen, daß sich bei der Auflösung eines Klammerausdrucks ein ganz anderes Resultat ergiebt, wenn er ein positives Vorzeichen hat, als wenn er von einem negativen Vorzeichen begleitet ist. Wir haben z. B. gefunden, daß

$$+ (e - f) . 7 = + 7e - 7f,$$

dagegen $- (e - f) . 7 = - 7e + 7f$ ist.

Bei der ersten Gleichung haben die Glieder der rechten Seite andere Vorzeichen als bei der zweiten Gleichung. Bei der ersten Gleichung ist 7e positiv, bei der zweiten negativ, bei der ersten Gleichung ist 7f negativ, bei der zweiten positiv. Wir hatten ferner:

$$- [m - (n - 8r) p + (s^4 - 10t^1) s^3 + 9u] . 12$$
$$= -12m + 12np - 96pr - 12s^7 + 120s^3t^1 + 108u$$

Wenn vor der eckigen Klammer statt des Minuszeichens ein Pluszeichen steht, so haben wir die Gleichung:

$$+ [m - (n - 8r) p + (s^4 - 10t^2) . s^3 + 9u) . 12$$
$$= + 12m - 12np + 96pr + 12s^7 - 120s^3t^2 + 108u$$

d. h. die Vorzeichen der rechten (untern) Seiten hätten sich verändert, aus — 12m wäre + 12m, aus + 12n wäre — 12n, aus — 96pr wäre + 96pr geworden u. s. f.

Ueberlegen wir uns noch einmal, nach welchen Regeln wir die Vorzeichen zu wählen haben. Wenn wir in $+ (e - f) . 7$ die Klammer beseitigen sollen, so werden wir zunächst von dem positiven Vorzeichen, welches wir vor der runden Klammer bemerken, ganz absehen und einfach: $(e - f) . 7$ berechnen. Es ist

$$(e - f) . 7 = 7e - 7f.$$

Wird nun vor: $(e - f) . 7$ ein Pluszeichen (Additionszeichen) gestellt, so müssen wir auch vor die rechte Seite: $7e - 7f$ ein Pluszeichen setzen, und zwar werden wir $7e - 7f$ einklammern, um anzudeuten, daß sich das Pluszeichen auf die ganze rechte Seite beziehen solle. Wir haben dann:

$$+ (e - f) . 7 = + (7e - 7f).$$

Durch die runde Klammer der rechten Seite ist die arithmetische Summe: $7e - 7f$ eingeschlossen. Das Pluszeichen davor sagt

uns, daß diese arithmetische Summe addirt werden soll. Wenn wir uns an den in § 47 behandelten Satz erinnern:

Bei der **Addition** einer arithmetischen Summe **bleiben** die **positiven** Glieder **positiv**, die **negativen** Glieder **negativ**, und das **absolute** Glied nimmt ein **positives** Vorzeichen an,

so finden wir:

$$+ (7e - 7f) = + 7e - 7f,$$

denn aus dem absoluten Glied 7e der Klammer wird das positive Glied $+ 7e$, und das negative Glied $- 7f$ der Klammer bleibt negativ. Im Ganzen haben wir also:

$$+ (e - f) . 7 = + (7e - 7f) = + 7e - 7f.$$

Sollen wir $+ (a + b - c) . 8$ berechnen, so werden wir in ähnlicher Weise unbekümmert um das positive Vorzeichen vor der runden Klammer erst $(a + b - c) . 8$ berechnen.

Es ist:

$$(a + b - c) . 8 = 8a + 8b - 8c.$$

Folglich ist:

$$+ (a + b - c) . 8 = + (8a + 8b - 8c) = + 8a + 8b - 8c^{*}).$$

Ebenso muß:

$$+ a (b - c) . 3^{**}) = + (3ab - 3ac) = + 3ab - 3ac,$$ und

$$+ (5s^3 - 3t^2) . 4s^4 = + (20s^7 - 12s^4t^2) = + 20s^7 - 12s^4t^2$$ sein.

Wenden wir uns jetzt zu einem Beispiele, bei welchem ein Minuszeichen vor der Klammer steht! Es sei uns aufgetragen, in $- (e - f) . 7$ die Klammer zu entfernen. Wir werden in diesem Falle wieder erst, ohne Rücksicht auf das negative Vorzeichen zu nehmen, $(e - f) . 7$ berechnen. Es ist:

$$(e - f) . 7 = 7e - 7f.$$

Tritt vor die rechte Seite dieser Gleichung ein Minuszeichen, so müssen wir auch vor die linke Seite ein Minuszeichen setzen; und zwar werden wir dabei die rechte Seite durch eine Klammer einschließen, um dadurch anzuzeigen, daß sich das Minuszeichen auf die ganze rechte Seite erstrecke. Wir erhalten dann:

$$- (e - f) . 7 = - (7e - 7f).$$

Auf der rechten Seite enthält die Klammer die arithmetische Summe: $7e - 7f$, welche aus den beiden Gliedern $7e$ und $- 7f$ zusammengesetzt ist. Das Minuszeichen vor der Klammer fordert uns auf, die ganze arithmetische Summe: $7e - 7f$ zu subtrahiren. Wie wir aus § 47 wissen,

verändern die Glieder einer arithmetischen Summe bei der **Subtraction** ihr Vorzeichen, die **positiven** Glieder werden **negativ**, die **negativen** Glieder **positiv**, und das **absolute** Glied nimmt ein **negatives** Vorzeichen an.

Folglich ist:

$$- (7e - 7f) = - 7e + 7f,$$

denn das absolute Glied 7e der Klammer muß negativ, und das negative Glied $- 7f$ der Klammer muß positiv werden.

Im Ganzen haben wir also:

$$- (e - f) . 7 = - (7e - 7f = - 7e + 7f.$$

Sollen wir

$$- (u^4 + 2u^5v^2 - 3u^6v^3) . 4v^4$$

berechnen, so erhalten wir zunächst:

$$(u^4 + 2u^5v^2 - 3u^6v^3) . 4v^4 = 4u^4v^4 + 8u^5v^6 - 12u^6v^7,$$ mithin:

$$- (u^5 + 2u^5v^2 - 3v^6v^3) . 4v^4 = - (4u^4v^4 + 8u^5v^6 - 12u^6v^7).$$

Auf der rechten (untern) Seite ist durch die Klammer eine arithmetische Summe mit den drei Gliedern: $4u^4v^4$, $+ 8u^5v^6$ und $- 12u^6v^7$ eingeschlossen. Diese arithmetische Summe soll subtrahirt werden; es muß darum $4u^4v^4$ in $- 4u^4v^4$, $+ 8u^5v^6$ in $- 8u^5v^6$, $- 12u^6v^7$ in $+ 12u^6v^7$ verwandelt werden.

Daher ist:

$$- (4u^4v^4 + 8u^5v^6 - 12u^6v^7) = - 4u^4v^4 - 8u^5v^8 + 12u^6v^7.$$

Im Ganzen haben wir also:

$$- (u^4 + 2u^5v^2 - 3u^6v^3) . 4v^4 = - (4u^4v^4 + 8u^5v^6 - 12u^6v^7) = - 4u^4v^4 - 8u^5v^6 + 12u^6v^7.$$

---

*) Denn von den drei Gliedern 8a, + 8b, — 8c der runden Klammer wird das absolute Glied 8a positiv und die beiden Glieder + 8b und — 8c behalten ihre Vorzeichen. **) Auch hier werden wir erst, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, a b — c) . 3 berechnen. Es ist

$$a(b - c) . 3 = 3ab - 3ac,$$ folglich:

$$+ a(b - c) . 3 = + (3ab - 3ac)$$ u. s. f.

Aehnlich ist:

$$-(16a^5 - 7b^6 - 10c^7 + 5d^8) . 2a^9$$
$$= -(32a^{14} - 14a^9b^6 - 20a^9c^7 + 10a^9d^8$$
$$= - 32a^{14} - 14a^9b^6 - 20a^9c^7 + 10a^9d^8,$$

und $-(x^2 + 2xy + y^2)\, x^3$
$$= -(x^5 + 2x^4y + x^3y^2)$$
$$= - x^5 - 2x^4y - x^3y^2.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge berechnen:
1) $+(d-c) . 10$, 2) $+(3x+2y-5z) . 9$,
3) $+(27m - 35n + 22p - 16q) . 6x$,
4) $-(a-b) . 12$, 5) $-(3d+2e-5f) . 8$,
6) $-(21x - 22y + 6z) . x^2$,
7) $-(10s^2 - 20t^4) . s^5$.

Bemerkung I. Den Erörterungen des vorigen Paragraphen gemäß ist:

$+(a-b+c-d) = +a-b+c-d$ und
$-(a-b+c-d) = -a+b-c+d.$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen haben wir aus den linken Seiten entwickelt, indem wir uns auf die beiden Sätze stützten, welche wir in § 47 über die Addition und Subtraction arithmetischer Summen aufgestellt haben. Wir können aber noch einen andern Weg einschlagen, um die rechten Seiten aus den linken herzuleiten. Es ist $5 = 1 . 5$, mithin auch $+5 = +1 . 5$ und $-5 = -1 . 5$; ebenso wird sein: $+a = +1 . a$, $-a = -1 . a$,

$$+(a+b) = +1 . (a+b),$$
$$-(a+b) = -1 . (a+b),$$
$$+(a-b+c-d) = +1 . (a-b+c-d),$$
$$-(a-b+c-d) = -1 . (a-b+c-d).$$

Betrachten wir zunächst die vorletzte Gleichung genauer! Die rechte Seite derselben ist:

$$+1 . (a-b+c-d);$$

bei diesem Ausdrucke ist die Klammer: $(a-b+c-d)$ mit $+1$ multiplicirt; wir können darum leicht die runde Klammer entfernen, wenn wir jedes der vier Glieder: a, $-b$, $+c$ und $-d$ mit $+1$ multipliciren.

$+1$ mal a giebt $+1 . a = +a$,
$+1$ mal $-b$ giebt $-1 . b = -b$,
$+1$ mal $+c$ giebt $+1 . c = +c$,
$+1$ mal $-d$ giebt $-1 . d = -d$.

Mithin ist:

$$+1 . (a-b+c-d) = +a-b+c-d,$$

im Ganzen also:

$$+(a-b+c-d) = +1 . (a-b+c-d)$$
$$= +a-b+c-d.$$

Ebenso wird sein:

$$+(13m - 15n - 19p + 3q$$
$$= +1 . (13m - 15n - 19p + 3q)$$
$$= +13m - 15n - 19p + 3q,$$ und

$$+(19x + 29y - 30z)$$
$$= +1 . (19x + 29y - 30z)$$
$$= +19x + 29y - 30z).$$

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Gleichung:

$$-(a-b+c-d) = -1 . (a-b+e-d)$$

über. Auf der linken Seite ist die Klammer: $(a-b+c-d)$ mit -1 multiplicirt; wir können darum leicht die Klammer auflösen, wenn wir jedes der vier Glieder der Klammer mit -1 multipliciren.

-1 mal a giebt $-1 . a = -a$*)
-1 mal $-b$ giebt $+1 . b = +b$,
-1 mal $+c$ giebt $-1 . c = -c$,
-1 mal $-d$ giebt $+1 . d = +d$,

daher ist:

$$-1 . (a-b+c-d) = -a+b-c+d.$$

Wir haben mithin:

$$-(a-b+c-d) = -1 . (a-b+c-d)$$
$$= -a+b-c+d.$$

Ebenso wird sein:

$$-(s+2t-5u+3w)$$
$$= -1 . (s+2t-5u+3w)$$
$$= -s-2t+5u-3w,$$ und:

$$-(s^2 - 5s^3t - 4s^4t^2 + 6s^5t^3)$$
$$= -1 . (s^2 - 5s^3t - 4s^4t^2 + 6s^5t^3)$$
$$= -s^2 + 5s^3t + 4s^4t^2 - 6s^5t^3.$$

Also:

Wenn vor einer durch eine Klammer eingeschlossenen arithmetischen Summe ein Plus- bez. Minuszeichen steht, so können wir bei der Auflösung der Klammer gerade so verfahren, als wenn die arithmetische Summe mit $+1$ bez. -1 multiplicirt wäre.

Aufgaben II. Der Schüler möge in:
1) $+(13xy - 15yz + 29xz)$,
2) $-(18m^2 + 22n^2 - 14p^2 + 15r^2)$,
3) $-(23t^2 - 24t^3 + 21t^4 + 33t^5)$,
4) $-(27u^3v^2 + 29u^4v^3 - 21u^5v^4)$,
5) $+(18d^2e^3 - 17d^3e^4 + 19d^4e^5)$,

*) Der Schüler möge sich des Satzes erinnern:
$\left.\begin{matrix}+ \text{ mal } + \\ - \text{ mal } -\end{matrix}\right\}$ giebt $+$. $\left.\begin{matrix}+ \text{ mal } - \\ - \text{ mal } +\end{matrix}\right\}$ giebt $-$.

6) $+ (7 - 8 + 16 - 13 + 12)$,
7) $+ (5 - 6 + 12 - 13 + 16)$,
8) $- (22 - 11 + 33 - 44 - 8)$,
9) $- (7 + 5 + 3 + 2 + 9)$,
10) $- (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)$

die Klammern auflösen, indem er für das Pluszeichen vor der Klammer + 1 und für das Minuszeichen — 1 einstellt.

Bemerkung II. Wie wir wissen, ist:

$$+ (a - b + c - d) = + a - b + c - d,$$

und $+ (12 - 6 + 3 - 4 + 5)$
$= + 12 - 6 + 3 - 4 + 5.$

Wenn wir diese beiden Gleichungen genauer ansehen, so finden wir, daß die Klammer der obern Seite auf der untern Seite verschwunden ist, während sich sonst nichts geändert hat. In der That! Wenn eine arithmetische Summe, deren erstes Glied eine absolute Größe darstellt, nur deswegen in eine Klammer eingeschlossen ist, um anzudeuten, daß die ganze arithmetische Summe addirt werden soll, so kann man die Klammer einfach fortlassen, ohne den Werth des Ausdrucks zu verändern. Für $+ (a + b)$, $+ (c - d)$ und so weiter können wir ohne weiteres setzen $+ a + b$, $+ c - d$, indem wir die Klammer entfernen. Falsch würde es dagegen sein, in $+ (a + b) . c$ die Klammer fortzulassen, weil sie nicht blos des Pluszeichens wegen gesetzt ist, sondern auch, um anzudeuten, daß die ganze Summe $a + b$ mit c multiplicirt werden soll.

§ 71. Die Glieder der eckigen Klammer. Im vorigen Paragraphen haben wir die Vorzeichen der Klammern behandelt. Wir kommen jetzt zu einem zweiten Punkt, dessen nochmalige Besprechung der Schüler nach unsere Ansicht wünschen wird*). Wenn wir einen complicirten Klammerausdruck auflösen wollen, bei welchem innerhalb einer eckigen Klammer noch runde Klammern vorkommen, so können wir gemäß § 69 erst die eckige Klammer entfernen, und uns dann erst zur Auflösung der runden Klammern wenden. Wir haben zu diesem Zwecke die **einzelnen Glieder** der eckigen Klammer {mit der / durch die} Größe zu {multipliciren, / dividiren,} {mit welcher / durch welche} der ganze Klammerausdruck {multiplicirt / dividirt} werden soll. Die **Bestimmung dieser einzelnen Glieder** wird dem Schüler noch einige Schwierigkeiten bereiten. In:

$$[13a - (b + c) . 3 + (e - f) . 7 + 5] . 8$$

hat die eckige Klammer vier Glieder.

Das erste ist: $13a$,
das zweite: $- (b + c) . 3$,
das dritte: $+ (e + f) . 7$,
das vierte: $+ 5$

Der Schüler wird sich nun fragen, weshalb denn der ganze Ausdruck: $- (b + c) . 3$ als zweites Glied, und $+ (e - f) . 7$ als drittes Glied aufgefaßt werden müsse? Als wir den Begriff des Gliedes bestimmten, sagten wir, wir wollten unter Gliedern die Bestandtheile einer arithmetischen Summe verstehen, welche durch Plus- oder Minuszeichen von einander getrennt werden. Demnach müßte in:

$$[13a - (b + c) . 3 + (e + f) . 7 + 5]$$

$13a$ als erstes, $- b$ als zweites, $+ c . 3$ als drittes, $+ e$ als viertes, $+ f . 7$ als fünftes, $+ 5$ als sechstes Glied angesehen werden. Indeß wir haben bereits in § 69 angedeutet, weshalb wir falsch urtheilen würden, wenn wir diese sechs Größen als Glieder der eckigen Klammer betrachteten. Die runden Klammern fassen die in ihnen eingeschlossenen Summen als Einheit zusammen. $(b + c)$ und $(e + f)$ sind also ebenso zu behandeln, als wenn dafür einheitliche Buchstaben, für $b + c$ etwa ein m, und für $e + f$ ein n ständen. Setzen wir m für $(b + c)$, und n für $(e + f)$, so wird aus:

$$[13a - (b + c) . 3 + (e + f) . 7 + 5]$$

der Ausdruck:

$$[13a - m . 3 + n . 7 + 5];$$

und daß in diesem Ausdruck $13a$ das erste, $- m . 3$ das zweite, $+ n . 7$ das dritte, $+ 5$ das vierte Glied sei, wird jeder unserer Schüler wissen.

Vertauschen wir wieder m mit $b + c$ und n mit $e + f$, so ergiebt sich, daß wir in:

$$[13a - (b + c) . 3 + (e + f) . 7 + 5]$$

die vier Glieder: $13a$, $-(b+c).3$, $+(e+f).7$ und $+ 5$ haben, wie vorher behauptet wurde.

In: $[15x - (7y + 2z) . 6 + (x^2 - y^2) . 3]$ sind: $15x$, $- (7y + 2z) . 6$ und drittens

*) Siehe § 70.

$+ (x^2 - y^2) . 3$ die Glieder der vorigen Klammer, und in:

$$[10s + (12t - 3u) . 7 - (3v^2 + w^3) v^3 + 8]$$

ist erstens 10s, zweitens $+ (12t - 3u) . 7$, drittens $- (3v^2 + w^3) . v^3$ und viertens $+ 8$ ein Glied der eckigen Klammer.

Aufgaben I. Der Schüler möge bei den Ausdrücken:

1) $-3 [4 . (c + d) - 5 (c^2 - d^2) + 17e]$,
2) $[5a^3 - (b^4 + 5c^5) b^3 + (d^6 - e^6) d^2]$,
3) $[4 + (3 - 6) . 5 - (9 - 12) . 8 + 13] . 6$,
4) $[12 - (8 - 12) + (19 - 18) + 23] . 4$,

die Glieder der eckigen Klammer angeben.

Nachdem der Schüler sich im Angeben der Glieder eines complicirten Klammerausdrucks geübt hat, wird es ihm nicht schwer fallen, bei der Auflösung eines solchen Ausdrucks erst die eckige und dann die runden Klammern zu entfernen, oder anders ausgedrückt, von außen nach innen bei der Klammerauflösung fortzuschreiten. Wenn wir z. B. in dem Ausdruck:

$$- [a^2 + (b^2 - c^2) d^2 - (e^3 - f^3) e^4]$$

die Klammer entfernen sollen, werden wir uns die Glieder der eckigen Klammen suchen.

Das erste ist: a^2,
das zweite: $+ (b^2 - c^2) d^2$,
das dritte: $- (e^3 - f^3) e^4$.

Weil ein Minuszeichen vor der eckigen Klammer steht, haben wir jedes dieser drei Glieder gemäß § 70 Bemerkung II mit -1 zu multipliciren. Es ist:

$$a^2 . (-1) = -a^2,$$
$$+ (b^2 - c^2) . d^2 . (-1) = -(b^2 - c^2) d^2,$$
$$- (e^3 - f^3) . e^4 . (-1) = + (e^3 - f^3) e^4.$$

Mithin haben wir:

$$- [a^2 + (b^2 - c^2) d^2 - (e^3 - f^3) e^4]$$
$$= - a^2 - (b^2 - c^2) d^2 + (e^3 - f^3) e^4.$$

Auf der rechten (untern) Seite ist die eckige Klammer verschwunden; wir haben nun noch in den beiden Gliedern: $- (b^2 - c^2) d^2$ und $+ (e^3 - f^3) e^4$ die runden Klammern auflösen. Es ist:

$$(b^2 - c^2) d^2 = b^2d^2 - c^2d^2,$$

folglich:

$$- (b^2 - c^2) d^2 = - (b^2d^2 - c^2d^2)$$
$$= (-1) . (b^2d^2 - c^2d^2)$$
$$= - b^2d^2 + c^2d^2.$$

Ferner ist: $(e^3 - f^3) e^4 = e^7 - e^4f^3$,

mithin:

$$+ (e^3 - f^3) e^4 = + (e^7 - e^4f^3)$$
$$= (+1) . (e^7 - e^4f^3)$$
$$= + e^7 - e^4f^3.$$

Daher ist im Ganzen:

$$- [a^2 + (b^2 - c^2) d^2 - (e^3 - f^3) e^4]$$
$$= - a^2 - (b^2 - c^2) d^2 + (e^3 - f^3) e^4$$
$$= - a^2 - b^2d^2 + c^2d^2 + e^7 - e^4f^3.$$

Wenn wir erst die runden Klammern Klammern und dann die eckige Klammer entfernen, erhalten wir die Gleichung:

$$- [a^2 + (b^2 - c^2) d^2 - (e^3 - f^3) . e^4]$$
$$= - [a^2 + b^2d^2 - c^2d^2 - e^7 + e^4f^3]$$
$$= - a^2 - b^2d^2 + c^2d^2 + e^7 - e^4f^3.$$

Wir gelangen also zu demselben Resultat.

Aufgaben II. Der Schüler möge in

$$- 3 . [- u + 3 (v + w) - (x - y)]$$

und in

$$- 3a . [- b - (c - d) + 3 (e - f)]$$

die Klammern auflösen, indem er

1) zunächst die eckige Klammer und dann die runden Klammen,

2) zunächst die runden Klammern und dann die eckige Klammer entfernt.

§ 72. Das Heraussetzen gemeinsamer Factoren. Im letzten Abschnitt des vorigen Briefes und im ersten Theile dieses Briefes haben wir uns damit beschäftigt, Klammerausdrücke aufzulösen, oder anders gesagt, in arithmetischen Ausdrücken **die Klammern zu entfernen.** Indessen, wenn auch in vielen Fällen die Auflösung der Klammern geboten ist, so werden wir doch oft **umgekehrt** verfahren müssen, d. h. es wird an uns die Aufgabe herantreten, künstlich **Klammern zu schaffen.** Welchen Weg wir dabei einzuschlagen haben, soll uns dieser Paragraph lehren.

Wenden wir uns zunächst zu einem ganz einfachen Fall! Wie wir wissen, ist:

$$a (b + c) = ab + ac.$$

Wenn uns bei dieser Gleichung die **linke** Seite: $a (b + c)$ **gegeben** ist, so gelangen wir zur **rechten** Seite: $ab + ac$, indem wir die runde Klammer auflösen. Wie haben wir uns nun zu verhalten, wenn wir die **rechte** Seite:

$$ab + ac$$

als **gegeben** betrachten und daraus die **linke** Seite:

$$a(b + c)$$

herleiten sollen?

Die gegebene rechte Seite: $ab + ac$ ist ein Polynom, welches aus den beiden Gliedern ab und ac besteht. Das erste Glied ab besteht aus den Factoren a und b, das zweite Glied ac aus den Factoren a und c. Die beiden Glieder ab und ac haben also den **gemeinsamen Factor** a.

Dividiren wir $ab + ac$ durch den gemeinsamen Factor a*), so ergiebt sich $b + c$. Wird $b + c$ eingeklammert und der gemeinsame Factor a vor die Klammer gestellt, so erhalten wir:

$$a(b + c).$$

Jetzt wissen wir, wie $a(b + c)$ aus $ab + ac$ hervorgeht! Nachdem wir $ab + ac$ durch den **gemeinsamen Factor** a der beiden Glieder **dividirt** haben, schließen wir das **Resultat:** $b + c$ **der Division** durch eine **Klammer** ein, und diese Klammer **multipliciren** wir **mit dem gemeinsamen Factor** a, indem wir a als Factor vor bez. hinter die Klammer setzen.

Man sagt in diesem Falle, man habe in: $ab + ac$ den **gemeinsamen Factor** a **herausgesetzt.**

Wenn wir in: $2.3 + 2.4$ den gemeinsamen Factor 2 heraussetzen, erhalten wir:

$$2.3 + 2.4 = 2.(3 + 4)^{**)},$$

oder damit gleichbedeutend:

$$2.3 + 2.4 = (3 + 4).2^{***)}.$$

Wird in: $23.4 - 15.4$ der gemeinsame Factor 4 herausgesetzt, so ergiebt sich:

$$23.4 - 15.4 = (23 - 15).4 \dagger)$$

oder: $$23.4 - 15.4 = 4.(23 - 15).$$

In dem Polynom: $2.3.4 + 2.3.10$ haben die beiden Glieder $2.3.4$ und $2.3.10$ das Product 2.3 mit einander gemein; wir können darum 2.3 heraussetzen und erhalten:

$$2.3.4 + 2.3.10 = 2.3.(4 + 10),$$

oder $$2.3.4 + 2.3.10 = (4 + 10).2.3.$$

Ebenso ist:

$$4.5.8.9 - 4.5.6.7 = 4.5.(8.9 - 6.7),$$

und: $stuv - stxy = st(uv - xy)$,

ferner: $3ab + 3ac - 3ad = 3a(b + c - d)$,

und: $5abc - 5abd + 5abe = 5ab(c - d + e)$.

Aufgaben. Der Schüler möge:

1) in: $xy + xz$, 2) in: $uv + uw$,
3) in: $7.10 - 7.6$,
4) in: $2.5 - 3.5 + 4.5$,
5) in: $3uv - 3uw + 3ux - 3uy$,
6) in: $7.8.9 - 7.8.10 + 7.8.12$

den gemeinsamen Factor, bez. die gemeinsamen Factoren heraussetzen.

§ 73. Complicirtere Fälle. Im vorigen Paragraphen haben wir nur solche Beispiele behandelt, bei welchen der gemeinsame Factor bez. die gemeinsamen Factoren unmittelbar klar hervortraten. Oft ist aber erst eine kurze Ueberlegung nöthig, um alle Factoren, welche den Gliedern eines Polynoms gemeinsam sind, zu erkennen. Es sei uns z. B. die Aufgabe gestellt, in $3ab - 6ac + 12ad$ die gemeinsamen Factoren herauszusetzen. Unmittelbar finden wir, daß die drei Glieder $3ab$, $-6ac$ und $12ad$ den Factor a mit einander gemein haben. Wenn wir aber bedenken, daß wir die Gleichung haben:

$$3ab - 6ac + 12ad^{*)} = 3ab - 2.3ac + 4.3ad,$$

so entdecken wir, daß außer a auch noch 3 gemeinsamer Factor ist. Mithin haben wir:

$$3ab - 6ac + 12ad = 3ab - 2.3ac + 4.3ad$$
$$= 3a(b - 2c + 4d).$$

Aehnlich ist:

$$5st + 10su - 15sv = 5s(t + 2u - 3v),$$

denn wir haben:

$$5st + 10su - 15sv = 5st + 2.5su + 3.5sv;$$

und: $7x - 21y + 35z = 7(x - 3y + 5z)$,

denn es ist:

$$7x - 21y + 35z = 7x - 3.7y + 5.7z.$$

*) Um $ab + ac$ durch a zu theilen, werden wir erst das Glied ab und dann das Glied $+ ac$ durch a dividiren. ab dividirt durch a giebt b, denn um ein Product durch **einen seiner Factoren** zu dividiren, brauchen wir gemäß § 34 nur den betreffenden **Factor** aus dem Producte **fortzulassen**. Aus demselben Grunde ist $+ ac$ dividirt durch a gleich $+ c$. Wenn wir $ab + ac$ durch a theilen, erhalten wir daher $b + c$. **) Hier ist 2 herausgesetzt. ***) Da die Reihenfolge der Factoren gleichgiltig ist, dürfen wir für $2.(3 + 4)$ auch $(3 + 4).2$ setzen, ebenso in anderen Fällen. †) Hier ist 4 herausgesetzt.

*) Denn es ist $6 = 2.3$ und $12 = 4.3$.

Aufgaben I. Der Schüler möge

1) in: $6c - 12d + 18e - 24f$,
2) in: $8abd - 16abe + 24abf$,
3) in: $11u^2v^3x^4 + 22u^2v^3y^4 - 33u^2v^3z^4$

die gemeinsamen Factoren, bez. den gemeinsamen Factor heraussetzen.

Wenden wir uns noch zu anderen Beispielen! Es ist:

$$x^2 + xy = \mathbf{x} . x + \mathbf{x} . y$$

d. h. die beiden Glieder x^2 und xy haben den Factor x mit einander gemein. x kann also herausgesetzt werden. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir:

$$x^2 + xy = x\,(x + y).$$

Aehnlich ist:

$$x^2 - xy = x\,(x - y),$$
und $$x^4 - x^2y^2 = x^2\,(x^2 - y^2).$$

Für: $3x^4y^5 - 4x^3y^4 + 5x^2y^3$ können wir schreiben:

$$^{*)}\,3x^2\mathbf{x^2y^3}y^2 - 4x\mathbf{x^2y^3}y + 5\mathbf{x^2y^3}.$$

Die drei Glieder haben also x^2y^3 als Factoren mit einander gemein. Wir können darum x^2y^3 heraussetzen und erhalten dann:

$$\begin{aligned} &3x^4y^5 - 4x^3y^4 + 5x^2y^3 \\ &= 3x^2\mathbf{x^2y^3}y^2 - 4x\mathbf{x^2y^3}y + 5\mathbf{x^2y^3} \\ &= (3x^2y^2 - 4xy + 5)\,x^2y^3. \end{aligned}$$

Aehnlich ist:

$$\begin{aligned} &2s^6t^5u - 4s^4t^3v \\ &= 2s^2\mathbf{s^4t^3}t^2u - 4\mathbf{s^4t^3}v \\ &= (2s^2t^2u - 4v)\,s^4t^3. \end{aligned}$$

Aufgaben II. Der Schüler möge

1) in: $5mn - 10mr + 15mp$,
2) in: $7uv - 14us + 21ut$,
3) in: $a^2 + ab$, 4) in: $a^2 - ab$,
5) in: $a^4b^6 - 3a^3b^5 + 6a^2b^4$

die gemeinsamen Factoren heraussetzen.

In: $ax + ay - bz$ haben die beiden ersten Glieder ax und $+ ay$ den gemeinschaftlichen Factor a. Setzen wir bei diesen Gliedern a heraus, so ergiebt sich die Gleichung:

$$ax + ay - bz = a\,(x + y) - bz.$$

Aehnlich ist:

$$cu + bv - bw = cu + b\,(v - w).$$

In: $a^2 + ab + ab + b^2$ können wir bei den beiden ersten Gliedern a und bei den beiden letzten Gliedern b als gemeinsamen Factor heraussetzen. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a\,(a + b) + b\,(a + b).$$

Auf der rechten Seite sehen wir jetzt ein Polynom, welches aus den beiden Gliedern $a\,(a + b)$ und $+ b\,(a + b)$ zusammengesetzt ist;

das erste Glied $a\,(a + b)$ besteht aus den beiden Factoren

$$a \text{ und } (a + b),$$

das zweite Glied hat die Factoren

$$b \text{ und } (a + b).$$

Die beiden Glieder $a\,(a + b)$ und $b\,(a + b)$ haben mithin den Factor: $(a + b)$ mit einander gemein. Setzen wir $(a + b)$ heraus, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a\,(a + b) + b\,(a + b) &= (a + b) . (a + b) \\ &= (a + b)^2. \end{aligned}$$

Wir haben also im Ganzen:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + ab + b^2 &= a\,(a + b) + b\,(a + b) \\ &= (a + b) . (a + b) \\ &= (a + b)^2. \end{aligned}$$

Aehnlich ist: $$\begin{aligned} &u^2 + 2uv + uv + 2v^2 \\ &= u\,(u + 2v) + v\,(u + 2v) \\ &= (u + v) . (u + 2v), \end{aligned}$$

und: $$\begin{aligned} &u^2 - 2uv + uv - 2v^2 \\ &= u\,(u - 2v) + v\,(u - 2v) \\ &= (u + v) . (u - 2v). \end{aligned}$$

Aufgaben III. Der Schüler möge

1) $xy + xz - uv$,
2) $5st + 8uv - 12uw$,
3) $x^2 + xy + xy + y^2$

in der Weise behandeln, wie wir es bei den vorstehenden Beispielen ausgeführt haben.

---

*) Denn es ist: $3x^2x^2y^3y^2 = 3x^{2+2}y^{3+2} = 3x^4y^5$.
ferner $4xx^2y^3y = 4x^{1+2}y^{3+1} = 4x^3y^4$.

Das Glück ist der echte Prüfstein des Werthes oder des Unwerthes der Menschen.

Lection 33.

A. Die Lehre von den Brüchen.

§ 74. Die Bedeutung eines Bruches. Wenn wir den Inhalt der sieben arithmetischen Briefe, welche wir bisher gebracht haben, mit einem Blicke übersehen, so finden wir, daß wir uns beständig mit Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen beschäftigt haben. War doch auch das Potenziren weiter nichts als ein wiederholtes Multipliciren! Deuteten uns doch die complicirtesten Klammerausdrücke nur eine Reihe von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen an! Wenn wir uns jetzt zu den Brüchen wenden, so verlassen wir auch das Gebiet der vier Species nicht, denn, wie wir schon in § 16 auseinandergesetzt haben, sind die Brüche, genau genommen, nichts als Divisionen, die allerdings, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, zuweilen einen eigenthümlichen Charakter annehmen. Wiederholen wir kurz, was wir bis jetzt von den Brüchen wissen!

Für **„dividirt durch"** haben wir **zwei Zeichen** kennen gelernt und durchgehends als gleichbedeutend mit einander gebraucht, nämlich die beiden senkrecht über einander stehenden Punkte (:) und den wagerechten Bruchstrich (—).

15 dividirt durch 5

können wir in Zeichen:

$$15:5 \text{ oder } \frac{15}{5}$$

schreiben.

In beiden Fällen ist 15 der **Dividend**, d. i. die Zahl, welche dividirt (getheilt) werden soll, und 5 der **Divisor** d. i. die Zahl, welche angiebt, in wie viel Theile der Dividend zu zerlegen ist.

Wenn man für „dividirt durch" den Bruchstrich setzt, so sagt man gewöhnlich **Zähler** für **Dividend** und **Nenner** für **Divisor**; und den ganzen aus Zähler, Bruchstrich und Nenner zusammengesetzten Ausdruck nennt man einen **Bruch**.

$\frac{15}{5}$ ist also ein Bruch;

15 ist der Zähler (Dividend),
und 5 ist der Nenner (Divisor);

und zwar bedeutet $\frac{15}{5}$:

15 dividirt durch (getheilt durch) 5).

Ebenso ist $\frac{18}{6}$ ein Bruch;

18 ist der Zähler (Dividend),
und 6 ist der Nenner (Divisor);

und zwar bedeutet $\frac{18}{6}$:

18 dividirt durch 6.

Auch $\frac{a}{b}$ ist ein Bruch; bei demselben ist:

a der Zähler (Dividend),
und b der Nenner (Divisor);

$\frac{a}{b}$ bedeutet: a dividirt durch b.

Aufgaben. Der Schüler möge

1) angeben, welche Bedeutung die Brüche:

$$\frac{4}{2}, \quad \frac{6}{3}, \quad \frac{12}{4}, \quad \frac{40}{10}, \quad \frac{60}{12}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{x}{y}$$

haben. Er möge

2) bei allen sieben Brüchen die Zähler und die Nenner nennen, und

3) bei den ersten fünf Brüchen die durch den Bruchstrich angedeuteten Divisionen ausführen.

§ 75. Die echten Brüche. Nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen sind die Brüche nichts als Divisionsexempel, bei welchen als Divisionszeichen ein wagerechter Strich gebraucht wird. Damit wird der Schüler nicht ganz einverstanden sein; er wird meinen, daß es uns nicht schwer geworden sei, die Brüche als Divisionsexempel darzustellen, weil wir immer solche Beispiele gewählt haben, bei welchen der Zähler leicht durch den Nenner getheilt werden kann. In der That! bei den Brüchen, welche wir bis jetzt dem Schüler vorgeführt haben (z. B. bei $\frac{15}{5}$ und $\frac{18}{6}$) war der Zähler immer größer

als der Nenner und zugleich so beschaffen, daß der Nenner bei der Division ohne Rest in ihn aufging.

Welche Bedeutung sollen wir nun Brüchen beilegen, **bei welchen der Zähler kleiner ist als der Nenner,** wie bei: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{15}$ *) u. s. w.?

Diese Frage wird jetzt an uns herantreten, wir werden untersuchen müssen, was wir unter Brüchen wie: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w. zu verstehen haben.

Um den Sinn solcher Brüche festzustellen, wollen wir noch einmal auf den Bruch $\frac{15}{5}$ eingehen.

Es ist $\frac{15}{5} = 3$;

3 ist der 5te Theil von 15;

$\frac{15}{5}$ ist der 3 gleich; folglich bezeichnet auch

$\frac{15}{5}$ den 5ten Theil von 15.

Ebenso wird:

$\frac{18}{6}$	den 6ten	Theil	von	18,
$\frac{5}{6}$	„ 6ten	„	„	5,
$\frac{1}{6}$	„ 6ten	„	„	1,
$\frac{1}{2}$	„ 2ten	„	„	1,
$\frac{1}{3}$	„ 3ten	„	„	1,
$\frac{1}{5}$	„ 5ten	„	„	1,
$\frac{3}{4}$	„ 4ten	„	„	3,
$\frac{4}{5}$	„ 5ten	„	„	4,
$\frac{10}{13}$	„ 13ten	„	„	10,
$\frac{a}{b}$	„ bten	„	„	a

bedeuten.

Aufgaben I. Was bedeutet:

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{9},\ \frac{c}{a}?$$

Bleiben wir zunächst bei den **Brüchen, deren Zähler eine 1 ist.** Wie wir soeben gesehen haben, wird mit $\frac{1}{3}$ der dritte Theil der 1, oder klarer ausgedrückt, der **dritte Theil eines Ganzen** bezeichnet. Wenn wir ein ganzes Brot in drei gleiche Theile zerschneiden, ist jeder dieser gleichen Theile $\frac{1}{3}$ (ein Drittel) des ganzen Brotes. Zerlegen wir ein Ackerfeld in sechs gleich große Stücke, so stellt uns jedes Stück $\frac{1}{6}$ (ein Sechstel) des Feldes dar. Aehnlich steht es mit $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ ꝛc. Wie wir sehen, bieten die Brüche mit dem Zähler 1 der Erklärung keine Schwierigkeiten.

Anders steht es dagegen mit **Brüchen, deren Zähler nicht gleich 1 ist.** Hier müssen wir den Begriff des Bruches etwas umformen. $\frac{3}{4}$ (drei Viertel) bedeutet nach dem Vorhergehenden den vierten Theil von 3 oder besser gesagt, den

vierten Theil von **drei** Ganzen.

„Drei Viertel Meter“, bez. „drei Viertel Dutzend“ würden demnach den

vierten Theil von **drei** Metern,

bez. den **vierten** Theil von **drei** Dutzend

bedeuten.

Wenn man nun von „drei Viertel Meter“ oder „drei Viertel Dutzend“ spricht, so meint man gewöhnlich nicht den

vierten Theil von **drei** Metern,

bez. den **vierten** Theil von **drei** Dutzend,

sondern, wie schon die Worte besagen,

drei vierte Theile (**drei** Viertel) von **einem** Meter,

bez. **drei vierte** Theile (**drei** Viertel) von **einem** Dutzend.

Wenn wir in einen Laden gehen, um uns „drei Viertel Dutzend“ Knöpfe zu kaufen, so wird der Kaufmann nicht drei Dutzend Knöpfe hervorholen und uns von den

drei Dutzend den **vierten** Theil

geben, sondern er wird **ein** Dutzend in **vier** gleiche Theile theilen und uns von den

vier Theilen des **einen** Dutzends **drei**

verabreichen.

Sonach scheint ein Widerspruch zu bestehen zwischen unserer Begriffsbestimmung des Bruches und der Auffassung im gewöhnlichen Leben. Der Widerspruch ist aber nur scheinbar, denn der

vierte Theil von **drei** Metern

ist ebenso groß wie

drei vierte Theile von **einem** Meter;

und ebenso beträgt der

vierte Theil von **drei** Dutzend

ebenso viel wie

drei vierte Theile von **einem** Dutzend.

*) Wir dürfen gewiß voraussetzen, daß der Schüler weiß, wie man Brüche spricht. Nur der Vollständigkeit halber wollen wir es kurz erwähnen. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ wird der Reihe nach gesprochen: ein Viertel, ein Fünftel, ein Sechstel, ein Siebentel. Für $\frac{1}{2}$ sagt man nicht: ein **Zweitel,** sondern ein **Halb,** für $\frac{1}{3}$ nicht ein **Dreitel,** sondern ein **Drittel.** $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ spricht man: zwei Drittel, drei Viertel, vier Fünftel u. s. w.

Eine leichte Rechnung wird dies beweisen. Drei Meter haben 300 Centimeter; den vierten Theil von 300 Centimetern bilden daher **75 Centimeter;** ein Meter besteht aus 100 Centimetern; ein vierter Theil eines Meters ist mithin gleich 25 Centimetern, und drei vierte Theile eines Meters sind gerade wie der vierte Theil von drei Metern gleich **75 Centimetern.**

Ebenso verhält es sich mit dem Dutzend. Drei Dutzend haben 36 Stück; der vierte Theil von drei Dutzend ist daher gleich **9 Stück.** Ein Dutzend hat 12 Stück, ein vierter Theil davon hat 3 Stück, und drei vierte Bheile eines Dutzend sind ebenso wie ein vierter Theil von drei Dutzend **gleich 9 Stück.**

Wir können aus unseren Beispielen den wichtigen Schluß ziehen, daß $\frac{3}{4}$ sowohl den

vierten Theil von **drei** Ganzen,

als auch

drei vierte Theile von **einem** Ganzen

bedeuten kann.

Ebenso kann $\frac{4}{5}$ sowohl

den 5ten Theil von 4 Ganzen,

als auch

vier 5te Theile von 1 Ganzen

und $\frac{5}{6}$ sowohl

den 6ten Theil von 5 Ganzen,

als auch

fünf 6te Theile von 1 Ganzen

bezeichnen.

Bleiben wir bei $\frac{5}{6}$ stehen! Legen wir $\frac{5}{6}$ die erste der beiden genannten Bedeutungen bei, so haben wir 5 Ganze in 6 gleiche Theile zu zerlegen; jeder einzelne dieser gleichen Theile ist dann gleich $\frac{5}{6}$.

Wenn wir $\frac{5}{6}$ dagegen in seiner zweiten Bedeutung auffassen; so haben wir 1 Ganzes in 6 gleiche Theile zu theilen, und fünf von diesen Theilen stellen uns $\frac{5}{6}$ des Ganzen dar. Im ersten Falle bezeichnet

der **Zähler** 5 die **Zahl der Ganzen,** deren Summe getheilt werden soll; und der **Nenner** nennt die **Zahl der Theile,** in welche **die Summe der Ganzen** zu zerlegen ist.

Im zweiten Falle

ist nur **ein Ganzes** zu theilen und zwar in **soviel** gleiche **Theile,** wie der **Nenner** angiebt; und von diesen gleichen Theilen haben wir **soviel** zu nehmen, wie der **Zähler** anzeigt. Der **Nenner** nennt somit die Zahl der gleichen Theile, in welche ein Ganzes zerlegt werden soll, der **Zähler** zählt die Theile, welche von diesen gleichen Theilen in Betracht kommen.

Wie wir schon bemerkt haben, verbindet man mit den Worten Zähler und Nenner gewöhnlich den letztern Sinn; **ein** Ganzes, eine **Einheit** soll **gebrochen** (getheilt) werden, wenn man von einem **Bruche** spricht, nicht **mehrere** Ganze, **mehrere** Einheiten. Wenn wir daher von $\frac{2}{3}$ (zwei Drittel) Pfund sprechen, so bedeutet dies: Wir sollen **ein** Pfund in drei gleiche Theile zerlegen und von diesen drei Theilen zwei nehmen.

Ebenso heißt $\frac{7}{8}$ Meter:

ein Meter soll in 8 gleiche Theile getheilt werden, von welchen wir 7 zu nehmen haben.

$\frac{11}{12}$ Schock bedeutet:

ein Schock ist in 12 Theile zu theilen; und von diesen gleichen Theilen haben wir 11 zu nehmen.

Aufgaben II. Was bedeutet:

$\frac{1}{2}$ Centimeter,	$\frac{3}{5}$ Mark,	$\frac{3}{7}$ Centner,
$\frac{5}{8}$ Liter,	$\frac{2}{9}$ Pfund,	$\frac{5}{9}$ Meter,
$\frac{12}{13}$ Gulden,	$\frac{19}{20}$ Morgen,	$\frac{1}{5}$ Schock,
$\frac{1}{8}$ Centner,	$\frac{1}{12}$ Liter.	

Bemerkung I. Die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ bedeuten nach den vorstehenden Erörterungen den fünften, sechsten und siebenten Theil eines Ganzen. Aus Fünf**theil** (fünfte Theil) ist Fünf**tel,** aus Sechs**theil** (sechste Theil) ist Sechs**tel,** aus Sieben**theil** (siebente Theil) Sieben**tel** bei der Entwicklung der Sprache geworden. Die Bezeichnungen: Fünftel, Sechstel, Siebentel u. s. w. stehen also in engster Beziehung zur Bedeutung der Brüche.

Bemerkung II. Ein Viertel ist der **vierte Theil** eines Ganzen; folglich werden vier Viertel zu einem Ganzen gehören; **ein** Sechstel ist der sechste Theil eines Ganzen, mithin machen sechs Sechstel ein Ganzes aus. Ebenso sind sieben Siebentel, acht Achtel, zwölf Zwölftel, zwanzig Zwanzigstel gleich einem Ganzen.

Wir haben mithin den Satz:

Ein Bruch, bei welchem Zähler und Nenner gleich sind, ist gleich 1 (gleich einem Ganzen).

Demgemäß ist:

$$\frac{2}{2} = 1,\quad \frac{3}{3} = 1,\quad \frac{10}{10} = 1,$$

$$\frac{a}{a} = 1,\quad \frac{b}{b} = 1.$$

Aufgaben III. Wie groß sind die Büche:

$$\frac{15}{15},\ \frac{23}{23},\ \frac{75}{75},\ \frac{x}{x},\ \frac{y}{y}?$$

Bemerkung III. Wie wir aus Bemerkung II wissen, sind die Brüche, bei welchen der Zähler ebenso groß ist wie der Nenner, einem Ganzen gleich. Wie verhält sich nun ein Bruch zu einem Ganzen, **bei welchen der Zähler kleiner ist als der Nenner?** Nehmen wir ein Beispiel! In $\frac{5}{8}$ ist der Zähler 5 kleiner als der Nenner 8. Acht Achtel gehören zu einem Ganzen; fünf Achtel sind weniger als acht Achtel, folglich sind fünf Achtel, (in Zeichen: $\frac{5}{8}$) **kleiner** als ein Ganzes. Ebenso sind auch zwei Drittel (in Zeichen: $\frac{2}{3}$) und sieben Neuntel (in Zeichen: $\frac{7}{9}$) **kleiner** als ein Ganzes, weil erst 3 Drittel bez. 9 Neuntel ein Ganzes ausmachen. Ueberhaupt haben wir den Satz:

Wenn bei einem Bruch der Zähler kleiner ist als der Nenner, ist der Bruch kleiner als 1 (kleiner als ein Ganzes).

Für **„kleiner als"** setzt man als mathematisches Zeichen ein $<$, d. h. einen Winkel, bei welchem der Scheitelpunkt der kleinern Größe zugekehrt ist.

Für: $\frac{5}{8}$ **kleiner als 1**

dürfen wir darum setzen:

$$\frac{5}{8} < 1.$$

Ebenso ist: $\frac{2}{3} < 1$, $\frac{7}{9} < 1$, $\frac{10}{13} < 1$ u. s. f.

Man hat für die **Brüche**, welche die Eigenschaft besitzen, daß ihr **Zähler kleiner ist als ihr Nenner**, einen besondern Namen*) eingeführt. Man nennt sie **ächte Brüche**.

$\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{24}{25}$ sind also ächte Brüche.

Wir haben den ganzen Paragraphen mit **„ächte Brüche"** überschrieben, weil wir uns in demselben meist mit ächten Brüchen beschäftigt haben.

§ 76. Die unächten Brüche und die gemischten Zahlen. Wenn bei einem Bruche der Zähler kleiner ist als der Nenner, so beträgt sein Werth weniger als 1. Haben Zähler und Nenner gleiche Größe, so ist der Bruch gleich 1. Wir haben nun noch den dritten Fall zu erwägen, der eintreten kann, und uns zu fragen, wie es mit den Brüchen steht, bei welchen **der Zähler größer ist als der Nenner,** wie bei $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{4}$ u. s. w. In $\frac{4}{3}$ ist der Zähler 4 größer als der Nenner 3, in $\frac{9}{5}$ ist der Zähler 9 größer als der Nenner 3 u. s. f.

Gehen wir auf das zuerst genannte Beispiel, auf $\frac{4}{3}$ (vier Drittel) näher ein! **Drei** Drittel machen schon ein Ganzes aus;

vier Drittel ($\frac{4}{3}$) sind also **größer als** ein Ganzes (als 1);

vier Drittel ($\frac{4}{3}$) sind gleich **einem Ganzen** (gleich 1) **und noch einem Drittel** (und noch $\frac{1}{3}$).

Wenn wir für **„größer als"** ein $>$ als mathematisches Zeichen einführen und für **„und"** ein Pluszeichen setzen, können wir unsere beiden Behauptungen in die Formeln kleiden:

$$\frac{4}{3} > 1, \quad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Untersuchen wir jetzt den Bruch $\frac{9}{5}$ (neun Fünftel)! **Fünf** Fünftel sind, wie wir wissen, gleich **einem** Ganzen.

Neun Fünftel sind also gleich **einem Ganzen und** dann noch **noch vier Fünfteln,** in Zeichen:

$$\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5};$$

mithin auch $\frac{9}{5} > 1$,

d. h. in Worten: $\frac{9}{5}$ sind größer als ein Ganzes.

Wenden wir uns zu dem dritten der oben aufgezählten Brüche zu $\frac{7}{2}$ (sieben Halbe). **Zwei** Halbe machen schon **ein** Ganzes aus.

Sieben Halbe werden also gleich **drei Ganzen und einem Halben** sein, in Zeichen:

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2},$$

folglich auch:

$$\frac{7}{2} > 1.$$

Behandeln wir in derselben Weise noch den Bruch $\frac{25}{4}$ (fünfundzwanzig Viertel)! **Vier** Viertel sind gleich **einem** Ganzen. In **fünfundzwanzig** Vierteln sind darum **sechs Ganze** enthalten **und** außerdem noch **ein Viertel,** in Zeichen, wir haben:

$$\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4},$$

mithin auch $\frac{25}{4} > 1$.

d. h. in Worten; fünfundzwanzig Viertel sind größer als 1.

---

*) Schon auf Seite 74, als wir die Planimetrie behandelten, haben wir die Zeichen: $>$ und $<$ besprochen, welche für „größer als" und „kleiner als" in Gebrauch sind. Wie wir dort sagten, stellen die beiden Zeichen: $>$ und $<$ einen Winkel dar, dessen Oeffnung immer der größern und dessen Scheitelpunkt der kleinern von den beiden verglichenen Größen zugekehrt ist. Wir wiederholen dies, weil wir die planimetrischen Briefe für die arithmetischen nicht voraussetzen.

Fassen wir jetzt zusammen, was uns die Betrachtung der vier Brüche: $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$ und $\frac{25}{4}$ gelehrt hat! Bei allen vier Brüchen ist **der Zähler größer als der Nenner;** wir konnten bei allen vieren aus diesem Umstande schließen, daß sie **größer sind als ein Ganzes** (als 1). Wenn wir diesen Schluß verallgemeinern, haben wir den Satz:

Wenn bei einem Bruch der Zähler größer ist als der Nenner, so ist der Bruch größer als 1 (größer als ein Ganzes).

Folglich ist auch:

$$\frac{19}{7} > 1, \quad \frac{5}{2} > 1, \quad \frac{13}{10} > 1 \text{ u. s. f.}$$

Brüche, deren Werth **weniger** beträgt **als 1,** deren **Zähler** also **kleiner** ist **als der Nenner,** werden dem vorigen Paragraphen gemäß **ächte Brüche** genannt. Ganz dementsprechend nennt man Brüche, welche die **gegentheilige** Eigenschaft haben, **„unächt"**.

Unter **unächten Brüchen** haben wir danach solche Brüche zu verstehen, deren Werth **mehr** beträgt **als 1,** deren **Zähler** also **größer** ist **als der Nenner.**

$\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{10}$ sind mithin unächte Brüche.

Aufgaben I. Der Schüler möge unter den Brüchen: $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{13}{19}$, $\frac{17}{4}$, $\frac{16}{13}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{2}$ die ächten und die unächten Brüche heraussuchen.

Doch knüpfen wir an die Betrachtung der vier unächten Brüche: $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$ und $\frac{25}{4}$ noch weitere Folgerungen. Wir hatten nicht blos erkannt, daß diese vier unächten Brüche größer sind als ein Ganzes; wir hatten auch gefunden, daß die Gleichungen bestehen:

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2},$$
$$\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}.$$

Die vier unächten Brüche: $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{4}$ können also dargestellt werden als eine Summe, deren einer Summand **eine ganze Zahl** und deren anderer Summand **ein ächter Bruch** ist. $\frac{25}{4}$ ist z. B. gleich einer Summe, deren einer Summand die ganze Zahl 6 und deren anderer Summand der ächte Bruch $\frac{1}{4}$ ist. Wenn man einen unächten Bruch einer Summe aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche gleichsetzen kann, so pflegt man eine bequemere Schreibweise zu wählen; man **läßt** dann das **Pluszeichen** bei der Summe gewöhnlich **fort.**

Für: $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ schreibt man $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$,
„ $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$ „ „ $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$,
„ $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$ „ „ $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$,
„ $\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}$ „ „ $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$.

Es bedeutet also:

$1\frac{1}{3}$ so viel wie $1 + \frac{1}{3}$,
$1\frac{4}{5}$ so viel wie $1 + \frac{4}{5}$,
$3\frac{1}{2}$ so viel wie $3 + \frac{1}{2}$,
$6\frac{1}{4}$ so viel wie $6 + \frac{1}{4}$.

Die Größe $1\frac{1}{2}$ ist **gemischt** aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch; man nennt sie darum eine **gemischte Zahl.**

Ebenso sind: $1\frac{4}{5}$, $3\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{8}{9}$, $8\frac{14}{15}$, $9\frac{20}{21}$, $13\frac{7}{8}$ gemischte Zahlen; und zwar erhalten wir, wenn wir $7\frac{8}{9}$, $8\frac{14}{15}$, $9\frac{20}{21}$ als Summe ausdrücken:

$$7\frac{8}{9} = 7 + \frac{8}{9}, \quad 8\frac{14}{15} = 8 + \frac{14}{15},$$
$$9\frac{20}{21} = 9 + \frac{20}{21}, \quad 13\frac{7}{8} = 13 + \frac{7}{8}.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge die gemischten Zahlen: $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{8}$, $7\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, $12\frac{1}{8}$ als Summe schreiben, indem er zwischen die ganze Zahl und den ächten Bruch ein Pluszeichen + setzt.

Bemerkung. Wie wir soeben erörtert haben, ist es nur Bequemlichkeit der Grund dafür, daß man das Pluszeichen zwischen der ganzen Zahl und dem ächten Bruche fortläßt, wenn man eine gemischte Zahl schreiben will. Ebenso bequem verfährt man, wenn man eine gemischte Zahl spricht. Will man $1\frac{1}{2}$ aussprechen, so sagt man nicht:

Eins **plus** ein Halb, oder Eins **und** ein Halb, sondern einfach:

ein . . . ein Halb.

Die gemischten Zahlen: $2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{6}$, $7\frac{3}{4}$ werden demnach der Reihe nach gesprochen:

zwei . . . drei Viertel, fünf . . . ein Sechstel, sieben . . . drei Viertel.

Aufgaben III. Der Schüler möge angeben, wie $5\frac{2}{3}$, $8\frac{7}{15}$, $12\frac{9}{10}$ gesprochen wird.

§ 76. Die Verwandlung eines unächten Bruches in eine gemischte Zahl. Wir haben zwar die unächten Brüche: $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$ und $\frac{25}{4}$ schon im vorigen Paragraphen in die gemischten Zahlen: $1\frac{1}{3}$, $1\frac{4}{5}$, $3\frac{1}{2}$ und $6\frac{1}{4}$ verwandelt, aber wir haben noch nicht genau das Verfahren formulirt, welches wir dabei beobachtet haben. Entwickeln wir dieses Verfahren an

dem neuesten Bruche: $\frac{25}{4}$, und fragen uns, **wie die gemischte Zahl $6\frac{1}{4}$ aus dem unächten Bruche $\frac{25}{4}$ entsteht?**

Wie wir bereits erörtert haben, machen 4 Viertel ein Ganzes aus; 4 Viertel sind in 25 Vierteln 6-mal enthalten; 1 Viertel bleibt übrig. Also um die **gemischte Zahl** $6\frac{1}{4}$ aus dem **unächten Bruche** $\frac{25}{4}$ zu entwickeln, werden wir mit dem Nenner 4 des Bruches $\frac{25}{4}$ in den Zähler 25 hineindividiren und schreiben:

4	25	**6**
	24	
	1 (Divisionsrest.)	

Die Zahl **6**, welche uns anzeigt, wie oft der Nenner 4 in den Zähler 25 aufgeht, deutet uns die Anzahl der Ganzen in der gesuchten gemischten Zahl: $6\frac{1}{4}$ an; und der Divisionsrest **1** wird Zähler des ächten Bruches $\frac{1}{4}$ der gemischten Zahl $6\frac{1}{4}$. Der Nenner dieses ächten Bruches $\frac{1}{4}$ ist derselbe wie bei dem unächten Bruche $\frac{25}{4}$, der in eine gemischte Zahl zu verwandeln ist.

Sollen wir den unächten Bruch $\frac{232}{9}$ in eine gemischte Zahl verwandeln, so werden wir mit 9 in 232 dividiren und schreiben:

9	232	**25**
	18	
	52	
	45	
	7 (Divisionsrest.)	

Es ist daher: $\frac{232}{9} = 25\frac{7}{9}$.

Soll der unächte Bruch: $\frac{1000}{23}$ in eine gemischte Zahl verwandeln, so werden wir schreiben:

23	1000	**43**
	92	
	80	
	69	
	11	

Mithin ist: $\frac{1000}{23} = 43\frac{11}{23}$

Aufgaben. Der Schüler möge die unächten Brüche: $\frac{700}{25}$, $\frac{533}{17}$, $\frac{999}{71}$, $\frac{33}{10}$ in gemischte Zahlen verwandeln.

Bemerkung I. Es wird durchaus nicht immer nöthig sein, daß wir uns erst mit einem langwierigen Divisionsexempel befassen, wenn wir die Verwandlung eines unächten Bruches in einen gemischten vornehmen wollen. Bei den ächten Brüchen, deren Zähler und Nenner keine großen Zahlen sind, werden wir vielmehr ohne Weiteres die gemischte Zahl finden, welche dem unächten Bruch gleich ist. Wir werden sofort sehen, daß $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$, $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{3}$.

Bemerkung II. Wenn bei einem Bruche der Nenner im Zähler aufgeht, ist der Bruch gleich einer **ganzen Zahl.**

Es ist $\frac{14}{7} = 2$, $\frac{21}{7} = 3$, $\frac{28}{7} = 4$.

Zur rechten Seite gelangen wir sofort, wenn wir bedenken, daß der Bruchstrich „dividirt durch" bedeutet; denn 14 dividirt durch 7 giebt 2, $\frac{21}{7}$ giebt 3, 28 dividirt durch 7 giebt 4.

B. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, gingen wir im ersten Abschnitt der **zweiunddreißigsten Lection** auf die Lehre von der Auflösung der Klammern ein. Zwar hatten wir die Auflösung der Klammern schon im letzten Abschnitt des vorigen Briefes behandelt, aber es schien uns angemessen, einige Punkte, die von uns nur kurz berührt waren, für sich allein genauer zu besprechen. Wir erörterten darum ausführlich, wie wir Klammern zu entfernen haben, vor welchen ein Plus- oder Minuszeichen vorausgeht, und zeigten dann noch einmal, wie bei eckigen Klammern die Glieder zu bestimmen sind, welche selbst oft runde Klammern als Factoren enthalten. Damit beendeten wir unsere Auseinandersetzungen über die Auflösung der Klammern und gingen dann in zwei Paragraphen auf das Heraussetzen gemeinschaftlicher Factoren ein. Wir erörterten, daß wir uns Klammerausdrücke schaffen können, wenn wir eine arithmetische Summe einklammern und die gemeinschaftlichen Factoren der Glieder vor oder hinter die Klammer als Factor setzen und erwähnten zugleich, daß das Heraussetzen der gemeinschaftlichen Factoren bei der arithmetischen Rechnung oft große Vortheile bringe. Besonders beim Addiren der Brüche werden wir uns davon überzeugen können.

In der **dreiunddreißigsten Lection** begannen wir dann die Brüche zu behandeln. Wir setzten noch einmal auseinander, wie wir durch die Division zu den Brüchen geführt werden, besprachen dann ausführlich die Bedeutung der ächten Brüche, der unächten Brüche, der gemischten Zahlen und zeigten schließlich, wie unächte Brüche in gemischte Zahlen verwandelt werden können. **Im nächsten Briefe, der $1\frac{1}{2}$ Bogen umfassen wird, werden wir die Bruchlehre beendigen.**

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie verhält sich ein ächter Bruch zu einem Ganzen?
2) Wie verhält sich ein unächter Bruch zu einem Ganzen?
3) Wann stellt ein Bruch eine ganze Zahl dar?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 34 und 35.
Arithmetik.

18. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als
Manuscript
gedruckt.

Ich arbeite — um zu leben,
Denn nichts ist dem Tode näher
Als Müßiggang.

Friedrich der Große.

Lection 34.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 32.

Abschnitt C. § 70. **Aufgaben I.** Es ist:

1) $+ (d - c) . 10 = + (10d - 10c)$
$= + 10d - 10c,$

2) $+ (3x + 2y - 5z) . 9 = + (27x + 18y - 45z)$
$= + 27x + 18y - 45z,$

3) $+ (27m - 35n + 22p - 16q) . 6x$
$= + (162mx - 210nx + 132px - 96qx)$
$= + 162mx - 210nx + 132px - 96qx,$

4) $- (a - b) . 12 = - (12a - 12b)$
$= - 12a + 12b,$

5) $- (3d + 2e - 5f) . 8 = - 24d - 16e + 40f,$

6) $- (21x - 22y + 6z) . x^2$
$= - (21x^3 - 22x^2y + 6x^2z)$
$= - 21x^3 + 22x^2y - 6x^2z,$

7) $- (10s^2 - 20t^4) . s^5 = - (10s^7 - 20s^5t^4)$
$= - 10s^7 + 20s^5t^4.$

Aufgaben II. Wir erhalten:

1) $+ (13xy - 15yz + 29xz)$
$= + 1 . (13xy - 15yz + 29xz)$
$= + 13xy - 15yz + 29xz,$

2) $- (18m^2 + 22n^2 - 14p^2 + 15r^2)$
$= - 1 . (18m^2 + 22n^2 - 14p^2 + 15r^2)$
$= - 18m^2 - 22n^2 + 14p^2 - 15r^2,$

3) $- (23t^2 - 24t^3 + 21t^4 + 33t^5)$
$= - 1 . (23t^2 - 24t^3 + 21t^4 + 33t^5)$
$= - 23t^2 + 24t^3 - 21t^4 - 33t^5,$

4) $- (27u^3v^2 + 29u^4v^3 - 21u^5v^4)$
$= - 1 . (27u^3v^2 + 29u^4v^3 - 21u^5v^4)$
$= - 27u^3v^2 - 29u^4v^3 + 21u^5v^4,$

5) $+ (18d^2e^3 - 17d^3e^4 + 19d^4e^5)$
$= + 1 . (18d^2e^3 - 17d^3e^4 + 19d^4e^5)$
$= + 18d^2e^3 - 17d^3e^4 + 19d^4e^5,$

6) $+ (7 - 8 + 16 - 13 + 12)$
$= + 1 . (7 - 8 + 16 - 13 + 12)$
$= + 7 - 8 + 16 - 13 + 12,$

7) $+ (5 - 6 + 12 - 13 + 16)$
$= + 1 . (5 - 6 + 12 - 13 + 16)$
$= + 5 - 6 + 12 - 13 + 16,$

8) $- (22 - 11 + 33 - 44 - 8)$
$= - 1 . (22 - 11 + 33 - 44 - 8)$
$= - 22 + 11 - 33 + 44 + 8,$

9) $- (7 + 5 + 3 + 2 + 9)$
$= - 1 . (7 + 5 + 3 + 2 + 9)$
$= - 7 - 5 - 3 - 2 - 9,$

10) $- (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)$
$= - 1 . (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)$
$= - 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$

§ 71. **Aufgaben I.** 1) In:

$- 3 [4 (c + d) - 5 (c^2 - d^2) + 17e]$

hat die eckige Klammer die drei Glieder:

$4 (c + d)$, $\quad - 5 (c^2 - d^2)$ und $+ 17e$,

2) in: $[5a^3 - (b^4 + 5c^5)\,b^3 + (d^6 - e^6)\,d^2]$ sind in der eckigen Klammer die drei Glieder:
$5a^3, \quad -(b^4 + 5c^5)\,b^3$ und $+(d^6 - e^6)\,d^2$,

3) in: $[4 + (3 - 6) . 5 - (9 - 12) . 8 + 13] . 6$ hat die eckige Klammer die Glieder:
$4, \quad + (3 - 6) . 5, \quad - (9 - 12) . 8$ und $+ 13$,

4) in: $[12 - (8 - 12) + (19 - 18) + 23] . 4$ enthält die eckige Klammer die Glieder:
$12, \quad - (8 - 12), \quad + (19 - 18)$ und $+ 23$.

Aufgaben II. Es ist:

1) $- 3 . [- u + 3 (v + w) - (x - y)]$
$= + 3u - 9 (v + w) + 3 (x - y)$
$= + 3u - 9v - 9w + 3x - 3y$,
oder $- 3 [- u + 3 (v + w) - (x - y)]$
$= - 3 [- u + 3v + 3w - x + y]$
$= + 2u - 9v - 9w + 3x - 3y$,

2) $- 3a [- b - (c - d) + 3 (e - f)]$
$= + 3ab + 3a (c - d) - 9a (e - f)$
$= + 3ab + 3ac - 3ad - 9ae + 9af$,
oder $- 3a [- b - (c - d) + 3 (e - f)]$
$= - 3a [- b - c + d + 3e - 3f]$
$= + 3ab + 3ad - 3ae - 9ae + 9af$.

§ 72. **Aufgaben.** Es ist:

1) $xy + xz = x (y + z)$,
2) $uv + uw = u (v + w)$,
3) $7 . 10 - 7 . 6 = 7 . (10 - 6)$,
4) $2 . 5 - 3 . 5 + 4 . 5 = (2 - 3 + 4) . 5$,
5) $3uv - 3uw + 3ux - 2uy$
$= 3u (v - w + x - y)$,
6) $7 . 8 . 9 - 7 . 8 . 10 + 7 . 8 . 12$
$= 7 . 8 (9 - 10 + 12)$.

§ 73. **Aufgaben I.** Wir erhalten:

1) $6c - 12d + 18e - 24f$
$= \mathbf{6c} - 2 . \mathbf{6d} + 3 . \mathbf{6e} - 4 . \mathbf{6f}$
$= 6 (c - 2d + 3e - 4f)$,

2) $8abd - 16abe + 24abf$
$= \mathbf{8abd} - 2 . \mathbf{8abe} + 3 . \mathbf{8abf}$
$= 8ab (d - 2e + 3f)$,

3) $11u^2v^3x^4 + 22u^2v^3y^4 - 33u^2v^3z^4$
$= \mathbf{11u^2v^3}x^4 + 2 . \mathbf{11u^2v^3}y^4 - 3 . \mathbf{11u^2v^3}z^4$
$= 11u^2v^3 (x^4 + 2y^4 - 3z^4)$.

Aufgaben II. Wir haben:

1) $5mn - 10mr + 15mp$
$= \mathbf{5mn} - 2 . \mathbf{5mr} + 3 . \mathbf{5mp}$
$= 5m (n - 2r + 3p)$,

2) $7uv - 14us + 21ut$
$= \mathbf{7uv} - 2 . \mathbf{7us} + 3 . \mathbf{7ut}$
$= 7u (v - 2s + 3t)$,

3) $a^2 + ab = a (a + b)$,

4) $a^2 - ab = a (a - b)$,

5) $a^4b^6 - 3a^3b^5 + 6a^2b^4$
$= a^2\mathbf{a^2b^4}b^2 - 3a\mathbf{a^2b^4}b + 6\mathbf{a^2b^4}$
$= a^2b^4 (a^2b^2 - 3ab + 6)$.

Aufgaben III. Es ist:

1) $xy + xz - uv = x (y + z) - uv$,

2) $5st + 8uv - 12uw = 5st + 2 . \mathbf{4u}v - 3 . \mathbf{4u}w$
$= 5st + 4u (2v - 3w)$,

3) $x^2 + xy + xy + y^2 = x (x + y) + y (x + y)$
$= (x + y) . (x + y)$
$= (x + y)^2$.

Section 33.

Abschnitt A. § 74. 1) Die Brüche: $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{12}{4}, \frac{40}{10}, \frac{60}{12}, \frac{c}{d}, \frac{x}{y}$ bedeuten der Reihe nach:

4 dividirt durch 2, 6 dividirt durch 3,
12 „ „ 4, 40 „ „ 10,
60 „ „ 12, c „ „ d,
x „ „ y.

2) Bei $\frac{4}{2}$ ist 4 der Zähler und 2 der Nenner,
„ $\frac{6}{3}$ „ 6 „ „ „ 3 „ „
„ $\frac{12}{4}$ „ 12 „ „ „ 4 „ „
„ $\frac{40}{10}$ „ 40 „ „ „ 10 „ „
„ $\frac{60}{12}$ „ 60 „ „ „ 12 „ „
„ $\frac{c}{d}$ „ c „ „ „ d „ „
„ $\frac{x}{y}$ „ x „ „ „ y „ „

3) Wir haben:
$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{12}{4} = 3, \quad \frac{40}{10} = 4, \quad \frac{60}{12} = 5.$

§ 75. **Aufgaben I.** Es bedeutet:

$\frac{1}{7}$ den 7ten Theil von 1, $\frac{1}{8}$ den 8ten Theil von 1,
$\frac{2}{7}$ „ 7ten „ „ 2, $\frac{5}{8}$ „ 8ten „ „ 5,
$\frac{4}{9}$ „ 9ten „ „ 4, $\frac{c}{a}$ „ aten „ „ c.

Aufgaben II.

$\frac{1}{2}$ Centim.[1])	bedeutet:	**ein**	Centim.	ist in	2	gleiche Theile zu theilen und davon	ist 1 Theil zu nehmen,
$\frac{5}{8}$ Liter	bedeuten:	**ein**	Liter	„ „	8	„ „ „ „ „ „	sind 5 Theile „ „
$\frac{12}{13}$ Gulden	bedeuten:	**ein**	Gulden	„ „	13	„ „ „ „ „ „	sind 12 Theile „ „
$\frac{1}{8}$ Centner	bedeutet:	**ein**	Centner	„ „	8	„ „ „ „ „ „	ist 1 Theil „ „
$\frac{3}{5}$ Mark	bedeuten:	**eine**	Mark	„ „	5	„ „ „ „ „ „	sind 3 Theile „ „
$\frac{2}{9}$ Pfund	bedeuten:	**ein**	Pfund	„ „	9	„ „ „ „ „ „	sind 2 Theile „ „
$\frac{19}{20}$ Morgen	bedeuten:	**ein**	Morgen	„ „	20	„ „ „ „ „ „	sind 19 Theile „ „
$\frac{1}{12}$ Liter	bedeutet:	**ein**	Liter	„ „	12	„ „ „ „ „ „	ist 1 Theil „ „
$\frac{3}{7}$ Centner	bedeuten:	**ein**	Centner	„ „	7	„ „ „ „ „ „	sind 3 Theile „ „
$\frac{5}{9}$ Meter	bedeuten:	**ein**	Meter	„ „	9	„ „ „ „ „ „	sind 5 Theile „ „
$\frac{1}{5}$ Schock	bedeutet:	**ein**	Schock	„ „	5	„ „ „ „ „ „	ist 1 Theil „ „

Aufgaben III. Es ist:

$\frac{15}{15} = 1, \quad \frac{23}{23} = 1, \quad \frac{75}{75} = 1, \quad \frac{x}{x} = 1, \quad \frac{y}{y} = 1.$

§ 76. **Aufgaben I.** $\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{13}{19}$ und $\frac{7}{9}$ sind ächte Brüche; $\frac{12}{5}, \frac{17}{4}, \frac{16}{13}, \frac{9}{2}$ sind unächte Brüche.

Aufgaben II. Es ist:

$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}, \quad 4\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4}, \quad 5\frac{1}{8} = 5 + \frac{1}{8},$

---

[1]) Centim. bedeutet Centimeter.

$7\frac{3}{4} = 7 + \frac{3}{4}$, $3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3}$, $12\frac{1}{8} = 12 + \frac{1}{8}$.

Aufgaben III. Die drei Brüche: $5\frac{2}{3}$, $8\frac{7}{13}$, $12\frac{9}{10}$ werden der Reihe nach gesprochen: fünf . . . zwei Drittel, acht . . . sieben Dreizehntel und zwölf . . . neun Zehntel.

§ 77. Aufgaben. Wie die Division ergiebt, ist: $\frac{700}{25} = 28$ (der Bruch $\frac{700}{25}$ ist also nicht gleich einer gemischten, sondern gleich einer ganzen Zahl), ferner $\frac{533}{17} = 31\frac{6}{17}$, $\frac{999}{71} = 14\frac{5}{71}$, $\frac{33}{10} = 3\frac{3}{10}$.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 33 gestellten Fragen.

1) Ein ächter Bruch ist immer kleiner als ein Ganzes. 2) Ein unächter Bruch ist immer größer als ein Ganzes. 3) Ein Bruch stellt eine ganze Zahl dar, wenn der Nenner in den Zähler aufgeht.

C. Fortsetzung der Lehre von den Brüchen.

§ 78. Die Divisionsexempel. In den beiden letzten Paragraphen des vorigen Briefes haben wir die ächten und die unächten Brüche kennen gelernt. Als „ächt" haben wir die Brüche bezeichnet, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, und „unächt" haben wir diejenigen Brüche genannt, deren Zähler den Nenner an Größe übertrifft. Wir haben auch untersucht, wie sich der Werth der ächten sowie der unächten Brüche zu einem Ganzen verhält, und ermittelt, daß ächte Brüche immer kleiner und unächte Brüche immer größer sind als ein Ganzes. Unächte Brüche können, wie wir gesehen haben, die allerverschiedensten Werthe annehmen, sie können einer **ganzen**, sie können aber auch einer **gemischten** Zahl gleich sein. Um einen unächten Bruch in eine ganze, bez. gemischte Zahl zu verwandeln, müssen wir den Nenner in den Zähler dividiren; geht der Nenner in den Zähler auf, so ist der unächte Bruch einer ganzen Zahl gleich; bleibt bei der Division ein Rest, so wird aus dem unächten Bruch eine gemischte Zahl.

So sind z. B. die unächten Brüche $\frac{6}{3}$ und $\frac{10998}{234}$ ganzen Zahlen gleich; und zwar ist

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ und } \frac{10998}{234} = 47,$$

denn 3 geht in 6 2-mal und 234 in 10998 47-mal auf.

Daß 3 in 6 2-mal enthalten ist, bemerken wir unmittelbar; und daß 234 in 10998 47-mal aufgeht, sagt uns das Divisionsexempel:

```
234 | 10998 | 47
       936
      ----
      1638
      1638
      ----
        —
```

Dagegen sind die unächten Brüche: $\frac{7}{3}$ und $\frac{11105}{234}$ gemischten Zahlen gleich, denn es ist:

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \text{ und } \frac{11105}{234} = 47\frac{107}{234}$$

Daß der Bruch $\frac{7}{3}$ gleich $2\frac{1}{3}$ ist, finden wir ohne weitere Rechnung; um zu ermitteln, daß $\frac{11105}{234}$ dieselbe Größe hat wie die gemischte Zahl $47\frac{107}{234}$ werden wir mit 234 in 11105 dividiren und schreiben:

```
234 | 11105 | 47
       936
      ----
      1745
      1638
      ----
       107
```

Bei dem letzten Divisionsexempel wollen wir stehen bleiben; es wird uns zu einer wichtigen Folgerung führen. Dasselbe zeigt uns, daß $\frac{11105}{234} = 47\frac{107}{234}$ ist.

Wenn wir bedenken, daß ein Bruchstrich „dividirt durch" bedeutet, können wir den Inhalt der vorstehenden Gleichung in folgende Worte kleiden:

Wenn wir 11105 durch 234 dividiren, ergiebt sich als **Resultat** der Division die **gemischte Zahl** $47\frac{107}{234}$.

Das **Resultat der Division** haben wir immer den **Quotienten** genannt. Wenn wir diesen Ausdruck beibehalten und auch die Bezeichnungen „Dividend" und „Divisor" einführen, können wir sagen:

Ist 11105 der Dividend, 234 der Divisor, so erhalten wir als **Quotienten** die **gemischte Zahl** $47\frac{107}{234}$.

Ueberhaupt wird der **Quotient** immer eine **gemischte** Zahl sein, wenn der Divisor nicht in dem Dividenden aufgeht, sondern ein **Divisionsrest** bleibt.

Wird 5525 durch 419 dividirt, so ist:

```
419 | 5525 | 13
      419
     ----
     1335
     1257
     ----
       78
```

Es ist dann: $\frac{5525}{419} = 13\frac{78}{419}$,

d. h. 5525 dividirt durch 419 giebt als Quotienten die gemischte Zahl: $13\frac{78}{419}$, und zwar erhalten wir den zweiten Bestandtheil der gemischten Zahl, den ächten Bruch: $\frac{78}{419}$, indem wir unter den Divisionsrest 78 den Divisor 419 als Nenner setzen.

Wenn wir 58481 durch 2284 dividiren, erhalten wir:

```
2284 | 58481 | 25
     |  4568 |
       12801
       11420
        1381
```

folglich ist: $\frac{58481}{2284} = 25\frac{1381}{2284}$

d. h. 58481 giebt durch 2284 dividirt als Quotienten die gemischte Zahl $25\frac{1381}{2284}$, wieder ergiebt sich der ächte Bruch $\frac{1381}{2284}$, indem wir unter den Divisionsrest 1381 den Divisor 2284 als Nenner setzen.

Wenn wir bei dem vorstehenden Divisionsexempel die gemischte Zahl: $25\frac{1381}{2284}$ den Quotienten nennen, befinden wir uns in Widerspruch mit der gewöhnlichen Bezeichnungsweise. Geht ein Divisionsexempel nicht auf, so pflegt man zwischen dem Dividenden, Divisor, Quotienten und Divisionsrest zu unterscheiden; im vorstehenden Exempel würde man 2284 den Divisor, 58481 den Dividenden, 25 den Quotienten und 1381 den Divisionsrest nennen. Unter dem Quotienten hat man also der meist üblichen Bezeichnungsweise gemäß nicht die gemischte Zahl $25\frac{1381}{2284}$ zu verstehen, sondern nur die ganze Zahl 25. Ebenso wäre beim vorletzten Exempel nicht $13\frac{78}{419}$, sondern nur 13 der Quotient. Gegen diese Bezeichnungsweise könnte man einwenden, daß die Größe, welche man Quotienten nennt, nicht dem Satze Genüge leisten:

Der Quotient multiplicirt mit dem Divisor muß gleich dem Dividenden sein.

Beim letzten Divisions-Exempel müßte nach diesem Satze:

$$25 . 2284 = 58481$$

sein, wenn wir nur 25 als Quotienten betrachten, es ist aber 25 . 2284 nicht gleich 58481 sondern gleich 57100, vielmehr müssen wir zu 25 . 2284 oder 57100 noch den Divisionsrest 1381 addiren, um den Dividenden 58481 zu erhalten.

Ueberhaupt, wenn bei einem Divisionsexempel ein Rest bleibt, und wir fassen als **Quotienten** nicht das eigentliche Resultat der Division auf, sondern die ganze **Zahl**, welche anzeigt, wie viel Male der Divisor im Dividenden enthalten ist, so

erhalten wir den Dividenden, wenn wir den Divisor mit dem Quotienten multipliciren und den Rest addiren.

§ 79. Die Verwandlung einer ganzen und einer gemischten Zahl in einen unächten Bruch. Wie wir wissen, ist:

$$\frac{15}{5} = 3.$$

Wenn uns die linke Seite dieser Gleichung bekannt ist, können wir zur rechten Seite leicht gelangen, indem wir 15 durch 5 dividiren. Es sei uns nun die Aufgabe gestellt, die linke Seite zu finden, wenn uns die rechte Seite gegeben ist, mit anderen Worten, es sei uns aufgetragen aus 3 Ganzen Fünftel zu machen. Um diese Aufgabe zu lösen, werden wir uns erinnern, daß 5 Fünftel **ein** Ganzes ausmachen; **drei** Ganze werden daher gleich **3**-mal 5 Fünfteln oder gleich 15 Fünfteln sein.

Wenn wir drei Ganze nicht in Fünftel, sondern in Siebentel verwandeln sollen, so werden wir in ähnlicher Weise erwägen, daß 7 Siebentel **einem** Ganzen gleich sind; **drei** Ganze müssen daher 3-mal 7 Siebenteln, oder 21 Siebenteln gleich sein. Es besteht mithin die Gleichung:

$$3 = \frac{21}{7}.$$

Sollen wir 8 Ganze zu Fünfundzwanzigsteln machen, so werden wir bedenken, daß 25 Fünfundzwanzigstel zu **einem** Ganzen gehören; 8 Ganze werden daher gleich 8-mal 25 Fünfundzwanzigsteln oder gleich 200 Fünfundzwanzigsteln sein; in Zeichen, wir werden haben:

$$8 = \frac{200}{25}$$

Ueberlegen wir uns, welche Folgerungen wir aus den drei soeben behandelten Beispielen ziehen können. Wir haben erst 3 Ganze in Fünftel, dann in Siebentel und darauf 8 Ganze in Fünfundzwanzigstel verwandelt. Den **Zähler** fanden wir immer, indem wir die **Anzahl der Ganzen** mit dem **Nenner** multiplicirten, welchen wir dem Bruche geben wollten.

Um 3 Ganze zu Fünfteln zu machen, multipliciren wir 3 mit 5; 3-mal 5 ist 15, 15 wird Zähler; 3 Ganze sind also gleich $\frac{15}{5}$. Um 3 Ganze zu Siebenteln zu machen, nehmen wir 3 7-mal; 3-mal 7 ist 21; 21 wird der Zähler; 3 Ganze sind daher so groß wie $\frac{21}{7}$,

Ueberhaupt können wir jede **ganze Zahl** in einen **Bruch** mit einem **beliebigen Nenner** verwandeln; und zwar erhalten wir immer den **Zähler** des

Bruches, wenn wir die **ganze Zahl** mit dem **Nenner** multipliciren.

Aufgaben. Der Schüler möge erst 4 Ganze, dann 8 Ganze, darauf 12 Ganze zu Sechsteln, Zehnteln, Zwanzigsteln und Fünfunddreißigsteln machen.

Gehen wir jetzt dazu über, **gemischte Zahlen in unächte Brüche zu verwandeln.** Es sei uns die Aufgabe gestellt, $5\frac{3}{4}$ zu Vierteln zu machen. Wie wir wissen, ist die gemischte Zahl $5\frac{3}{4}$ als eine Summe von **5 Ganzen und 3 Vierteln** aufzufassen; wir werden daher unsere Aufgabe lösen, indem wir erst 5 Ganze zu Vierteln machen und dann zu der Zahl der Viertel, welche wir auf diese Weise erhalten, noch **3 Viertel addiren.**

5 Ganze sind so groß wie 20 Viertel, zählen wir zu 20 Vierteln noch 3 Viertel hinzu, so erhalten wir 23 Viertel; folglich besteht die Gleichung:

$$5\tfrac{3}{4} = \tfrac{23}{4}.$$

Sollen wir $7\frac{5}{9}$ zu Neunteln machen, so werden wir bedenken, daß 7 Ganze gleich 63 Neunteln sind; zu diesen 63 Neunteln sind noch 5 Neuntel zu addiren; 63 Neuntel und 5 Neuntel geben 68 Neuntel; es ist mithin:

$$7\tfrac{5}{9} = \tfrac{68}{9}.$$

Um $45\frac{11}{20}$ in Zwanzigstel zu verwandeln, werden wir erst 45 Ganze zu Zwanzigsteln machen; 45 Ganze sind gleich $45 . 20$ also gleich 900 Zwanzigsteln. Werden zu 900 Zwanzigsteln noch 11 Zwanzigstel addirt, so ergeben sich 911 Zwanzigstel; daher ist:

$$45\tfrac{11}{20} = \tfrac{911}{20}.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge $6\frac{1}{3}$ in Drittel, $9\frac{3}{4}$ in Viertel, $11\frac{11}{12}$ in Zwölftel, $18\frac{2}{23}$ in dreiundzwanzigstel verwandeln.

B. Das Erweitern und Heben der Brüche.

§ 80. Das Erweitern der Brüche. In diesem Paragraphen wenden wir uns zu einem wichtigen Satze, welcher für die Lehre von der Addition und Subtraction der Brüche die Grundlage bildet. Um diesen Satz zu entwickeln, wollen wir die Anschauung zu Hilfe nehmen. In Figur 1 sieht der Schüler das Quadrat ABCD, welches durch zwei punktirte gerade Linien in 3 gleichgroße Rechtecke zerlegt ist; jedes von diesen Rechtecken stellt uns mithin den dritten Theil (in Zeichen: $\frac{1}{3}$) des Quadrates ABCD dar. In Figur 2 haben wir ein Quadrat $A_1B_1C_1D_1$, welches ebenso groß ist wie das Quadrat ABCD, uns also ABCD nur in anderer Lage zeigt. Wir haben aber $A_1B_1C_1D_1$ nicht in drei, sondern in sechs Rechtecke von gleicher Größe getheilt, so daß jedes dieser sechs Rechtecke den sechsten Theil (in Zeichen: $\frac{1}{6}$) des Ganzen repräsentirt.

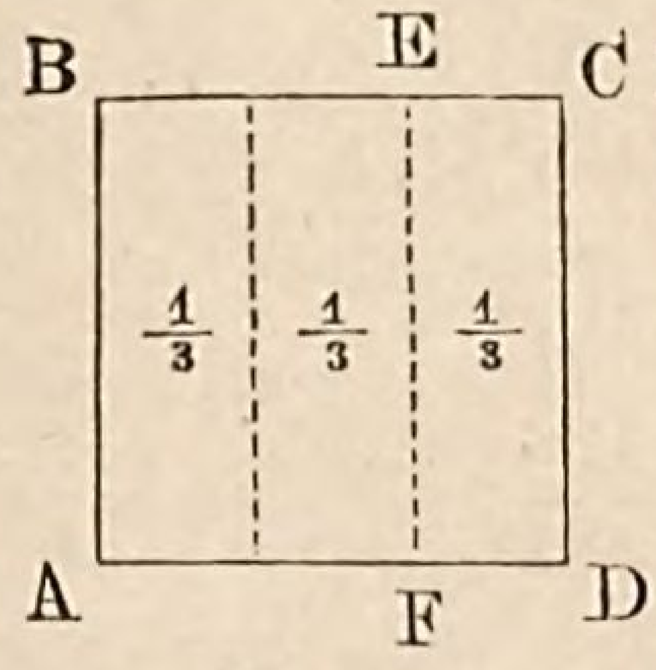


Fig. 1.

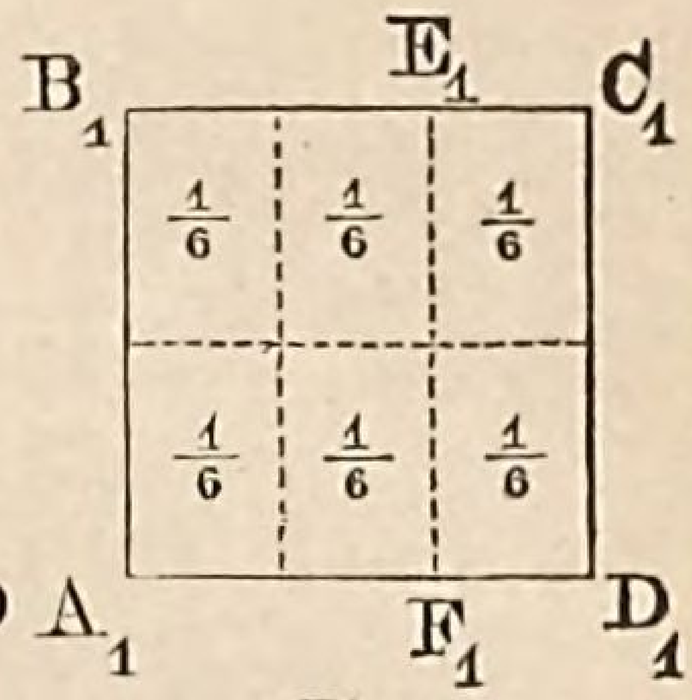


Fig. 2.

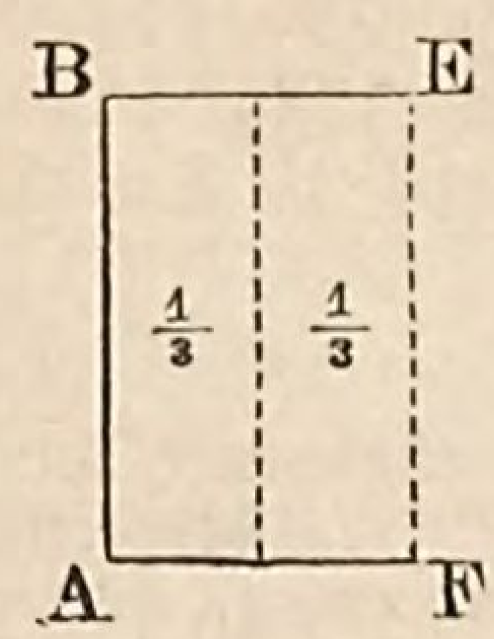


Fig. 3.

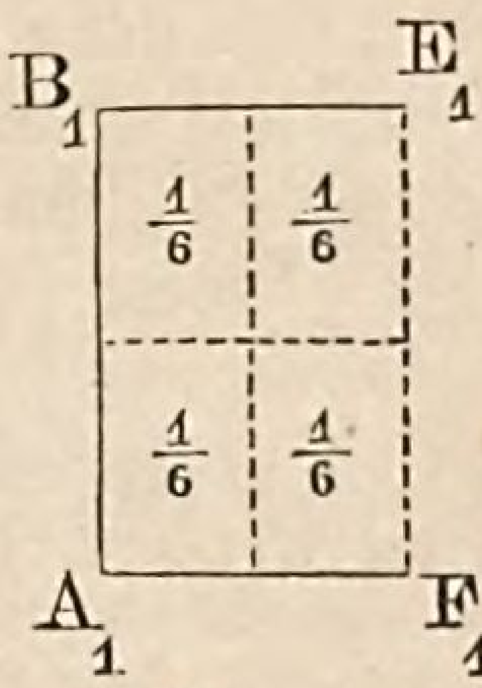


Fig. 4.

Von dem Quadrate ABCD haben wir das Viereck ABEF und von dem Quadrate $A_1B_1C_1D_1$ das Viereck $A_1B_1E_1F_1$ losgelöst (siehe Fig. 3 und 4); und zwar besteht ABEF aus 2 Dritteln (in Zeichen: $\frac{2}{3}$) und $A_1B_1E_1F_1$ aus 4 Sechsteln (in Zeichen: $\frac{4}{6}$) des ganzen Quadrates. Der erste Blick lehrt uns, daß die beiden Vierecke ABEF und $A_1B_1E_1F_1$ gleich groß sind; **zwei Drittel** haben daher dieselbe Größe wie **vier Sechstel**, in Zeichen, es ist:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Aus dieser Gleichung wollen wir wichtige Folgerungen ziehen!

Es ist: $4 = 2 . 2$ und $6 = 3 . 2$. Setzen wir in:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

für 4 die gleiche Größe: $2 . 2$ und für 6 die gleiche Größe: $3 . 2$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 . 2}{3 . 2}$$

Die rechte Sete dieser Gleichung geht aus der linken Seite hervor, wenn wir in $\frac{2}{3}$ sowohl den Zähler 2 wie den Nenner 3 mit 2 multipliciren. Die ganze letzte **Gleichung** sagt uns also:

der **Werth** des Bruches $\frac{2}{3}$ (bleibt **gleich**) ändert sich nicht, wenn wir Zähler und Nenner mit derselben Zahl 2 multipliciren!

Statt des Bruches: $\frac{2}{3}$ wollen wir einen andern Bruch, etwa: $\frac{3}{4}$ wählen und Zähler und Nenner nicht mit 2, sondern mit 5 multipliciren. Es wird dann aus:

$$\frac{3}{4}$$

der Bruch: $\frac{15}{20}$,

denn 3.5 giebt 15 und 4.5 giebt 20.

Auch in diesem Falle hat sich der Werth des Bruches nicht dadurch geändert, daß wir Zähler und Nenner mit 5, also mit derselben Zahl multiplicirt haben, denn $\frac{3}{4}$ ist ebenso groß wie $\frac{15}{20}$. In der That! Wenn wir ein Blatt Papier in vier Theile zerlegen und uns davon 3 davon nehmen, haben wir gerade soviel, als wenn wir dieses Blatt Papier in zwanzig Theile theilen und uns 15 davon nehmen.

Ueberhaupt können wir allgemein den Lehrsatz aufstellen:

Der Werth eines Bruches ändert sich nicht, wenn man zugleich Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt.

Wir haben also:

$$\frac{5}{6} = \frac{5.3}{6.3} = \frac{15}{18},$$
$$\frac{7}{9} = \frac{7.4}{9.4} = \frac{28}{36},$$
$$\frac{11}{12} = \frac{11.5}{12.5} = \frac{55}{60}.$$

Wenn in der eben angegebenen Weise Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplicirt wird, so sagt man: **der Bruch wird** mit der betreffenden Zahl **erweitert.**

Multipliciren wir z. B. bei dem Bruch: $\frac{5}{6}$ den Zähler 5 und den Nenner 6 mit 3, so erweitern wir den Bruch mit 3. Multipliciren wir bei $\frac{11}{12}$ Zähler und Nenner mit 5, so erweitern wir $\frac{11}{12}$ mit 5.

Wenn wir das Wort **„Erweitern"** einführen, können wir den letzten fettgedruckten Lehrsatz auch folgendermaßen aussprechen:

Durch Erweitern wird der Werth eines Bruches nicht geändert.

Nach diesem Satze ist:

$\frac{1}{5} = \frac{10}{50}$, $\frac{1}{5}$ ist mit 10 erweitert,
$\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$, $\frac{1}{6}$ ist mit 6 erweitert,
$\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$, $\frac{2}{3}$ ist mit 12 erweitert,
$\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$, $\frac{4}{5}$ ist mit 5 erweitert,
$\frac{3}{8} = \frac{39}{104}$, $\frac{3}{8}$ ist mit 13 erweitert.

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, $\frac{a}{b}$ ist mit c erweitert,

$\frac{a}{b} = \frac{aa}{ba} = \frac{a^2}{ab}$, $\frac{a}{b}$ ist mit a erweitert,

$\frac{x}{y} = \frac{xx}{yx} = \frac{x^2}{xy}$, $\frac{x}{y}$ ist mit x erweitert,

$\frac{a^4}{b^4} = \frac{a^4a^3}{b^4a^3} = \frac{a^7}{a^3b^4}$, $\frac{a^4}{b^4}$ ist mit a^3 erweitert,

$\frac{x^7}{y^7} = \frac{5x^7}{5y^7}$, $\frac{x^7}{y^7}$ ist mit 5 erweitert.

Aufgaben. Der Schüler möge: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{4}{7}$, d) $\frac{8}{9}$, e) $\frac{14}{15}$, f) $\frac{24}{25}$, g) $\frac{27}{40}$ erst mit 2, dann mit 8, darauf mit 13 und schließlich mit 15 erweitern.

§ 81. Die Bedeutung des Hebens der Brüche. Mit Hilfe der Anschauung haben wir im vorigen Paragraphen ermittelt, daß

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

ist. Wir haben darauf gefunden, daß wir den Bruch $\frac{4}{6}$ aus $\frac{2}{3}$ entwickeln können, indem wir $\frac{2}{3}$ mit 2 erweitern. Es wird sich jetzt die Frage erheben, wie wir zu verfahren haben, wenn uns der Bruch: $\frac{4}{6}$ gegeben ist und wir aus demselben den Bruch: $\frac{2}{3}$ herleiten sollen! Die Antwort ist einfach, aus

$$\frac{4}{6}$$

wird: $\frac{2}{3}$,

wenn wir in $\frac{4}{6}$ sowohl den Zähler 4 als auch den Nenner 6 durch 2 dividiren, denn 4 dividirt durch 2 giebt 2, und 6 dividirt durch 2 giebt 3.

Die **Gleichung**:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

sagt uns also:

Der **Werth** des Bruches $\frac{4}{6}$ (bleibt **gleich**) ändert sich **nicht**, wenn wir in $\frac{4}{6}$ sowohl den Zähler als auch den Nenner durch dieselbe Zahl 2 dividiren.

Wenn wir in dem Bruche: $\frac{15}{20}$ den Zähler sowohl wie den Nenner durch 5 theilen wird aus:

$$\frac{15}{20} \text{ der Bruch: } \frac{3}{4}.$$

Wie wir aus dem vorigen Paragraphen wissen, ist $\frac{3}{4}$ ebenso groß wie $\frac{15}{20}$; also auch hier hat sich der Werth des Bruches nicht dadurch geändert, daß wir Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl 5 theilten.

Wir haben überhaupt den Satz:

Der Werth eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt wird.

Nach diesem Satze ist:

$$\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{12}{20} = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5} \text{ u. s. f.}$$

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches durch ein und dieselbe Zahl dividirt wird, sagt man: der **Bruch** wird durch die betreffende Zahl **gehoben**. Theilen wir z. B. beim Bruch $\frac{9}{12}$ den Zähler 9 durch 3 und den Nenner 12 durch 3, so heben wir den Bruch $\frac{9}{12}$ durch 3. Wird beim Bruche $\frac{12}{20}$ der Zähler 12 und der Nenner 20 durch 4 dividirt, so wird der Bruch $\frac{12}{20}$ durch 4 gehoben.

Wenn wir den Ausdruck: heben einführen, können wir den oben behandelten Satz:

„Der Werth eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt wird"

anders aussprechen und sagen:

Der Werth eines Bruches wird durch das Heben nicht verändert.

Es ist demnach:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ ist durch 2 gehoben[1]),
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ ist durch 3 gehoben[2]),
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ ist durch 4 gehoben,
$\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$, $\frac{25}{30}$ ist durch 5 gehoben,
$\frac{40}{48} = \frac{5}{6}$, $\frac{40}{48}$ ist durch 8 gehoben,
$\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$, $\frac{48}{60}$ ist durch 12 gehoben.

$\frac{15a}{25b} = \frac{3a}{5b}$, $\frac{15a}{25b}$ ist durch 5 gehoben,[3])

$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, $\frac{ab}{ac}$ ist durch a gehoben,[4])

$\frac{26x^2y}{39x^2z} = \frac{2y}{3z}$, $\frac{26x^2y}{39x^2y}$ ist durch $13x^2$ gehoben[5]).

Aufgaben. Der Schüler möge

1) die Brüche: $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{10}{12}$ durch 2,
2) die Brüche: $\frac{6}{9}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{12}{21}$, $\frac{21}{33}$ durch 3,
3) die Brüche: $\frac{8}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{28}{32}$ durch 4,
4) die Brüche: $\frac{15}{20}$, $\frac{35}{40}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{10}{55}$ durch 5,
5) die Brüche: $\frac{12}{36}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{24}{84}$ durch 12

heben.

Bemerkung I. In elementaren Rechenbüchern wird für **„heben"** oft der Ausdruck **„verkleinern"** gebraucht. Allerdings wird beim „Heben" der Zähler und der Nenner gewöhnlich verkleinert, aber wenn man vom Verkleinern der Brüche spricht, kann beim Schüler leicht die **irrige** Ansicht entstehen, daß der **Werth** des Bruches **verkleinert** werde. Es wäre darum besser, wenn man allgemein den Namen **„Heben"** beibehielte.

Bemerkung II. Das **„Erweitern"** und das **„Heben"** der Brüche hat in vielen Punk-

---

1) D. h. bei $\frac{2}{4}$ ist sowohl der Zähler 2 wie der Nenner 4 durch 2 dividirt. 2) D. h. bei $\frac{3}{6}$ ist sowohl der Zähler 3 wie der Nenner 6 durch 3 divididirt. 3) D. h. es ist bei $\frac{15a}{25b}$ sowohl der Zähler 15a wie der Nenner 25b durch 5 getheilt. 15a getheilt durch 5 giebt 3a, denn um das Product 15a durch 5 zu theilen, brauchen wir gemäß § 33 nur den Factor 15 durch 5 zu dividiren. Aus demselben Grunde giebt 25b getheilt durch 5 als Quotienten 5b, denn nur 25 haben wir durch 5 zu dividiren. 4) D. h. sowohl der Zähler ab wie der Nenner ac ist durch a getheilt. Um ein Product durch einen seiner Factoren zu theilen, brauchen wir gemäß § 33 nur den betreffenden Factor aus dem Producte fortzulassen. Es giebt daher ab dividirt durch a als Quotienten (Resultat) b und ac dividirt durch a als Quotienten c. 5) Sowohl der Zähler $26x^2y$ als auch der Nenner $39x^2z$ ist durch $13x^2$ dividirt. Vergleiche über das Verfahren bei der Division § 34 Seite 203; x^2 ist einfach fortzulassen und 26 bez. 39 ist durch 13 dividirt.

ten so viel Aehnliches, daß es angemessen erscheint, die Definitionen und Sätze, welche wir über diese beiden Rechenoperationen gebracht haben, **einander gegenüberzustellen.** Es werden dann die gleichen und die verschiedenen Momente besser hervortreten.

Einen Bruch **erweitern** heißt: Zähler und Nenner mit derselben Größe **multipliciren.**	Einen Bruch **heben** heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Größe **dividiren.**
Einen Bruch mit a erweitern heißt: Zähler und Nenner mit a multipliciren.	Einen Bruch durch a heben heißt: Zähler und Nenner durch a dividiren.
Durch das **Erweitern** wird der Werth eines Bruches nicht verändert.	Durch das **Heben** wird der Werth eines Bruches nicht verändert.

§ 82. Weitere Bemerkungen über das das Heben der Brüche. Wie wir schon in der ersten Bemerkung zum vorigen Paragraphen erörterten, kann durch das Heben der Zähler und der Nenner verkleinert und damit der Bruch, ohne daß sein Werth sich ändert, vereinfacht werden. Heben wir z. B. $\frac{150}{300}$ durch 150, so wird aus $\frac{150}{300}$ der einfache Ausdruck: $\frac{1}{2}$. Indessen nicht immer wird durch das Heben eine Vereinfachung des Bruchausdrucks herbeigeführt.

Wenn wir z. B. den Bruch: $\frac{3}{4}$ durch 7 heben wollen, haben wir den Zähler 3 und den Nenner 4 durch 7 zu dividiren. Es ist mithin:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 : 7}{4 : 7}.$$

Wenn auf der rechten Seite dieser Gleichung im Zähler und im Nenner statt der beiden Punkte (:) auch der Bruchstrich gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 : 7}{4 : 7} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}.$$

So sind wir denn in diesem Falle zu einem ganz sonderbaren Bruche gelangt, zu einem Bruche nämlich, bei welchem der Zähler wie der Nenner einen ächten Bruch darstellt. Aehnlich verhält es sich, wenn wir den Bruch: $\frac{5}{6}$ durch die unbestimmte Zahl a heben; wir erhalten dann:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 : a}{6 : a} = \frac{\frac{5}{a}}{\frac{6}{a}}$$

In beiden Beispielen ist durch das Heben nicht eine Vereinfachung, sondern vielmehr eine recht sichtbare Verwicklung des Bruchausdrucks bewirkt worden. Eine **Vereinfachung** wird nur erzielt werden, wenn man einen Bruch durch eine **Zahl** hebt, welche sowohl in den Zähler wie in den Nenner aufgeht.

Nehmen wir z. B. den Bruch: $\frac{60}{72}$; in den Zähler 60 sowie in den Nenner 72 gehen die Zahlen 2, 3, 4, 6 und 12 auf; der Bruchausdruck $\frac{60}{72}$ wird darum eine einfachere Form annehmen, wenn wir ihn durch 2 oder durch 3 oder durch 4 oder durch 6 oder durch 12 heben; wir würden dann nämlich der Reihe nach erhalten:

$\frac{60}{72} = \frac{30}{36}$, $\frac{60}{72}$ ist durch 2 gehoben,
$\frac{60}{72} = \frac{20}{24}$, $\frac{60}{72}$ ist durch 3 gehoben,
$\frac{60}{72} = \frac{15}{18}$, $\frac{60}{72}$ ist durch 4 gehoben,
$\frac{60}{72} = \frac{10}{12}$, $\frac{60}{72}$ ist durch 6 gehoben,
$\frac{60}{72} = \frac{5}{6}$, $\frac{60}{72}$ ist durch 12 gehoben.

Dagegen wird der Bruchausdruck: $\frac{60}{72}$ complicirter werden, wenn wir $\frac{60}{72}$ durch irgend eine andere Zahl z. B. 13 heben, wir erhalten dann:

$$\frac{60}{72} = \frac{60 : 13}{72 : 13} = \frac{\frac{60}{13}}{\frac{72}{13}} = \frac{4\frac{8}{13}}{5\frac{7}{13}}.$$

Wenn es nun auch zuweilen bei der arithmetischen Rechnung von Vortheil ist, Brüchen eine complicirtere Gestalt zu geben, so wird es doch gewöhnlich zweckmäßig sein, Bruchausdrücke zu vereinfachen. Wir werden darum, wenn uns ein Bruch gegeben ist, untersuchen müssen, **welche Zahlen in den Zähler sowohl wie in den Nenner aufgehen,** denn, wie wir gesehen haben, wird der Bruch nur dadurch einfacher, daß wir ihn durch eine von diesen Zahlen heben; und zwar werden wir am zweckmäßigsten verfahren, wenn wir den Bruch durch die **größte** der Zahlen heben, welche in den Zähler und Nenner aufgehen, denn in diesem Falle wird der Bruch, welcher sich als Resultat des Hebens ergiebt, die **möglichst einfache** Form haben. Erhielten wir doch $\frac{20}{24}$, als wir $\frac{60}{72}$ durch **3,** dagegen $\frac{5}{6}$ als wir $\frac{60}{72}$ durch **12** hoben! Es wird sich nun die Frage erheben, auf welche

Weise wir die größte Zahl finden, die in den Zähler und Nenner zugleich aufgeht, oder anders ausgedrückt, in dem Zähler und in dem Nenner eine ganze Anzahl Male enthalten ist. Diese Frage wollen wir ausführlich beantworten und zu diesem Zwecke schon an dieser Stelle auf die **Zerlegung der Zahlen in Primfactoren** eingehen. Den ganzen folgenden Abschnitt wollen wir diesem Gegenstande widmen; scheinbar zusammenhangslos werden sich die nächsten Paragraphen an unsere jetzigen Erörterungen anschließen; erst am Ende des nächsten Abschnittes werden wir zeigen, in welchem Zusammenhange die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren zu dem Heben der Brüche steht.

C. Die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren.

§ 83. Die Bedeutung der Primfactoren. 6 ist gleich 2 mal 3, 10 ist gleich 2 mal 5, 840 ist gleich 30 mal 28, 2310 ist gleich 70 mal 33, in Zeichen, es bestehen die Gleichungen:

$$6 = 2 . 3, \qquad 10 = 2 . 5,$$
$$840 = 30 . 28, \quad 2310 = 70 . 33.$$

Die Zahlen 6, 10, 840 und 2310 lassen sich also als ein Product mehrerer Factoren darstellen, oder wie man gewöhnlich sagt, **in mehrere Factoren zerlegen.**

Betrachten wir in der Gleichung:

$$840 = 30 . 28$$

die rechte Seite, so finden wir, daß die beiden Factoren 30 und 28 noch weiter zerlegbar sind. Für 30 können wir 5 . 6 und für 28 können wir 4 . 7 setzen. Vertauschen wir in: 840 = 30 . 28 die 30 mit 5 . 6 und die 28 4 . 7, so erhalten wir:

$$840 = 5 . 6 . 4 . 7.$$

Jetzt haben wir 840 in die vier Factoren 5, 6, 4 und 7 aufgelöst; es sind aber unter diesen vier Factoren zwei, welche noch weiter zerlegt werden können.

Es ist nämlich: 4 = 2 . 2 und 6 = 2 . 3. Wenn wir für 4 und 6 die gleichen Werthe 2 . 2 und 2 . 3 einführen, ergiebt sich:

$$840 = 5 . 2 . 3 . 2 . 2 . 7,$$

und wenn wir die einzelnen Factoren nach ihrer Größe ordnen,

$$840 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7.$$

Unter den Factoren der rechten Seite befindet sich jetzt keine Zahl, welche in ein Product von anderen Zahlen aufgelöst werden könnte. Weder die 2, noch die 3, noch die 5, noch die 7 ist weiter zerlegbar.*)

Solche **Zahlen, welche nicht weiter in Factoren zerlegt** werden können, heißen **Primzahlen;** und wenn diese Zahlen Factoren eines Productes sind, werden sie **Primfactoren** genannt. Die Gleichung

$$840 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7$$

sagt uns also: die Zahl 840 kann einem Product gleich gesetzt werden, in dem die 2 dreimal, die 3, die 5 und die 7 einmal als Primfactor vertreten ist.

Man drückt sich in diesem Falle auch anders aus und sagt: drei Zweien, eine Drei, eine Fünf und eine Sieben **sind die Primfactoren der Zahl 840.**

Sehen wir uns jetzt die Gleichung:

$$2310 = 70 . 33$$

an! Auch hier können wir die beiden Factoren 70 und 33 der rechten Seite noch weiter zerlegen. Es ist 70 = 7 . 10 und 33 = 3 . 11. Setzen wir für 70 den gleichen Werth 7 . 10 und für 33 den gleichen Werth 3 . 11 in der letzten Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2310 = 7 . 10 . 3 . 11.$$

Für 10 können wir noch 2 . 5 setzen; es ergiebt sich dann:

$$2310 = 7 . 2 . 5 . 3 . 11,$$

oder wenn die Factoren der rechten Seite nach ihrer Größe geordnet werden:

$$2310 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11.$$

Die Zahlen: 2, 3, 5, 7 und 11 sind nicht weiter zerlegbar;

2, 3, 5, 7 und 11 sind daher die Primfactoren der Zahl 2310.

---

*) Zwar können wir die Zahlen: 2, 3, 5 und 7 auch als Producte darstellen, denn es ist:

2 = 1 . 2, 3 = 1 . 3, 5 = 1 . 5 und 7 = 7 . 7,

aber diese Producte sind alle derart, daß ihr einer Factor die 1 und ihr anderer Factor die Zahl ist, welche in Factoren zerlegt werden soll. Wenn Zahlen nur in Producte der eben beschriebenen Art aufgelöst werden können, so sagt man von ihnen, sie seien unzerlegbar, denn unter dem Zerlegen einer Zahl versteht man die Umwandlung der Zahl in ein Product von Factoren, die einen anderen Zahlenwerth haben, als die zu zerlegende Zahl selbst.

Ueberlegen wir uns jetzt, was wir aus den beiden letzten Beispielen gelernt haben! Wir sind auf Zahlen gestoßen, welche nicht zerlegt werden konnten, und haben diese Zahlen **Primzahlen** genannt; wir haben ferner gefunden, daß diesen Primzahlen andere gegenstehen, welche in ein Product von Primzahlen aufgelöst werden können.

Wir haben auch bemerkt, daß man Primzahlen, welche Factoren eines Products sind, als **Primfactoren** bezeichnet. Demnach giebt es zwei Arten von Zahlen,

1) **Primzahlen,**

2) **Zahlen, die in Primfactoren zerlegt werden können.**

Wir wollen untersuchen, welche von den Zahlen von 1 bis 100 zu den Primzahlen gehören und welche von ihnen sich in ein Product von Primzahlen auflösen lassen. Hinter die Primzahlen werden wir einfach ein p schreiben; die anderen Zahlen werden wir dem Producte ihrer Primfactoren gleich setzen.

Es ist:

1 p,	31 p,
2 p,	32 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2,
3 p,	33 = 3 . 11,
4 = 2 . 2,	34 = 2 . 17,
5 p,	35 = 5 . 7,
6 = 2 . 3,	36 = 2 . 2 . 3 . 3,
7 p,	37 p
8 = 2 . 2 . 2,	38 = 2 . 19,
9 = 3 . 3,	39 = 3 . 13,
10 = 2 . 5,	40 = 2 . 2 . 2 . 5,
11 p,	41 p
12 = 2 . 2 . 3,	42 = 2 . 3 . 7,
13 p,	43 p,
14 = 2 . 7,	44 = 2 . 2 . 11,
15 = 3 . 5,	45 = 3 . 3 . 5,
16 = 2 . 2 . 2 . 2,	46 = 2 . 23,
17 p,	47 p,
18 = 2 . 3 . 3,	48 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3,
19 p,	49 = 7 . 7,
20 = 2 . 2 . 5,	50 = 2 . 5 . 5,
21 = 3 . 7,	51 = 3 . 17,
22 = 2 . 11,	52 = 2 . 2 . 13,
23 p,	53 p,
24 = 2 . 2 . 2 . 3,	54 = 2 . 3 . 3 . 3,
25 = 5 . 5,	55 = 5 . 11,
26 = 2 . 13,	56 = 2 . 2 . 2 . 7,
27 = 3 . 3 . 3,	57 = 3 . 19,
28 = 2 . 2 . 7,	58 = 2 . 29,
29 p,	59 p,
30 = 2 . 3 . 5,	60 = 2 . 2 . 3 . 5,

61 p,	81 = 3 . 3 . 3 . 3,
62 = 2 . 31,	82 = 2 . 31,
63 = 3 . 3 . 7,	83 p,
64 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2,	84 = 2 . 2 . 3 . 7,
65 = 5 . 13,	85 = 5 . 17,
66 = 6 . 11,	86 = 2 . 43,
67 p,	87 = 3 . 29,
68 = 2 . 2 . 17,	88 = 2 . 2 . 2 . 11,
69 = 3 . 23,	89 p,
70 = 2 . 5 . 7,	90 = 2 . 3 . 3 . 5,
71 p,	91 = 7 . 13,
72 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3,	92 = 2 . 2 . 23,
73 p,	93 = 3 . 31,
74 = 2 . 37,	94 = 2 . 47,
75 = 3 . 5 . 5,	95 = 5 . 19,
76 = 2 . 2 . 19,	96 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3,
77 = 7 . 11,	97 p,
78 = 2 . 3 . 13,	98 = 2 . 7 . 7,
79 p,	99 = 3 . 3 . 11,
80 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5,	100 = 2 . 2 . 5 . 5.

Aufgaben. Der Schüler möge die Primfactoren der Zahlen 16, 24, 49, 56, 81 angeben.

Bemerkung. Es ist nicht schwer, unter den Zahlen von 1 bis 100 die Primzahlen herauszusuchen und die anderen in ihre Primfactoren zu zerlegen. Das Ein-mal-eins, das wir in der Elementarschule gelernt haben, kommt uns dabei trefflich zu Statten. Sollen wir z. B. 36 zerlegen, so werden wir daran denken, daß 36 = 6 . 6 ist. Für 6 können wir 2 . 3 schreiben, mithin ist

36 = 2 . 3 . 2 . 3 = 2 . 2 . 3 . 3.

Soll 42 zerlegt werden, so wissen wir, daß 42 = 6 . 7 ist. Wenn wir 6 mit 2 . 3 vertauschen, haben wir daher: 42 = 2 . 3 . 7. Dagegen ist die Zerlegung größerer Zahlen nicht leicht. Wir müssen an der Hand gewisser Regeln, die uns die folgenden Paragraphen bringen werden, untersuchen, welche Primzahlen in den zu zerlegenden Zahlen enthalten sind. Die ersten Primzahlen, welche wir bei der Zerlegung der Zahlen von 1 bis 100 kennen gelernt haben, sind, wenn wir von der 1 absehen, die Zahlen 2, 3, 5, 7 und 11.

Diese Primzahlen 2, 3, 5, 7 und 11 kommen bei vielen größeren Zahlen als Primfactoren vor, und es erhebt sich die Frage, ob es nicht gewisse Kennzeichen giebt, durch die man ohne große Mühe entscheiden kann, ob die 2, die 3, die 5, die 7, die 11 Primfactor

der Zahl ist, welche zerlegt werden soll. So ist z. B. 715 = 5.11.13. Kann man nun der 715 unmittelbar ansehen, daß in derselben die Primfactoren 5, 11 und 13 enthalten, oder kann man dies auf einfache Weise erschließen? In der That! es giebt gewisse Regeln, welche uns ermöglichen, sogleich gewisse Primfactoren, bei Zahlen, die wir zerlegen wollen, zu bestimmen. Besonders leicht läßt sich ermitteln, ob eine Zahl 2 oder 5 zu Primfactoren hat; wir wollen uns deswegen zunächst mit der 2 und 5 beschäftigen und zusehen, welche Beschaffenheit die Zahlen haben, bei denen 2 und 5 Primfactoren sind.

§ 84. Die Primfactoren 2 und 5. Die Zahlen pflegt man schon bei der elementaren Rechnung in **gerade** und **ungerade** eintheilen, und zwar nennt man **gerade Zahlen** diejenigen, deren letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Gerade Zahlen sind also z. B. 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 104, 216, 3098, 79356 u. s. w. Alle übrigen Zahlen sind ungerade.

Die letzte Ziffer der ungeraden Zahlen ist also eine 1, 3, 5, 7 oder 9. 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 29, 33, 45, 57, 169, 2341, 45673 sind z. B. ungerade Zahlen. **Die geraden Zahlen** haben nun die Eigenschaft, wenigstens **eine** 2 zum **Primfactor** zu haben. Der Schüler kann sich davon leicht überzeugen, wenn er sich unter den Zahlen von 1 bis 100, welche wir oben zerlegt haben, die geraden Zahlen heraussucht. Es ist z. B. 14 = **2**.7, 26 = **2**.13, 34 = **2**.17, 38 = **2**.19 u. s. f. Eine ungerade Zahl hat nie eine 2 zum Primfactor.

Wenden wir uns zur 5! Wenn wir die Zahlen von 1 bis 100 betrachten, welche im vorigen Paragraphen auf Seite 302 von uns zerlegt worden sind, so finden wir, daß bei allen Zahlen, welche 5 zum Primfactor haben, die **letzte Ziffer** eine 5 oder eine 0 ist. So ist z. B. 15 = **3**.**5**, 35 = **5**.7, 95 = **5**.19, 40 = 2.2.2.5, 70 = 2.5.7 u. s. f. In der That! Bei allen Zahlen, deren **letzte Ziffer** eine 5 oder eine 0 ist, muß 5 einer der **Primfactoren** sein.

So ist: 3665 = 5.733,
487560 = **5**.97512.

[1]) Die Zahlen 733 und 97512 haben wir nicht weiter zerlegt, weil es uns nur darauf ankam, zu zeigen, daß 5 Primfactor ist.

Bemerkung I. Wenn sich eine Zahl auf 0 endigt, so ist sie eine gerade Zahl; sie enthält mithin 2 als Primfactor. Zugleich muß sie aber auch den vorigen Erörterungen gemäß 5 zum Primfactor haben; von einer Zahl, deren letzte Ziffer eine 0 ist, können wir daher sogleich zwei Primfactoren (die 2 und 5) angeben. Es ist 70 = **2**.**5**.7, 110 = **2**.**5**.11, 230 = **2**.**5**.23, 11810 = **2**.**5**.1181.

Bemerkung II. Als wir die Zahlen von 1 bis 100 zerlegten, hat der Schüler gewiß bemerkt, daß einige von diesen Zahlen die 2 bez. die 5 mehrere Male als Primfactor enthalten.

So ist z. B. 20 = 2.2.5, 28 = 2.2.7, 50 = 2.5.5, 75 = 3.5.5, 100 = 2.2.5.5.

Es ist nun nicht schwer, betreffs dieser Zahlen einige Regeln aufzustellen. In einer Zahl wird die 2 zweimal als Primfactor vertreten sein, wenn diese Zahl **ein Vielfaches von 2.2 oder 4** ist. Bei ein- und zweistelligen Zahlen werden wir ohne Weiteres entscheiden können, ob sie zu den Vielfachen von 4 gehören.

Was die drei- und mehrstelligen Zahlen anbetrifft, so haben wir uns die Regel zu merken:

Drei- und mehrstellige Zahlen sind ein **Vielfaches von 4**, enthalten also die 2 zweimal als Factor, wenn die 4 in ihren beiden letzten Ziffern aufgeht.

Diesem Satze gemäß werden wir jetzt ohne Weiteres wissen, daß bei den Zahlen: 316, 424, 1832 die 2 zweimal als Primfactor vertreten ist, denn 4 geht in 16, 24 und 32 auf. In der That! es ist:

316 = **2**.**2**.79, 544 = **2**.**2**.136,
1832 = **2**.**2**.458!

Wir kommen jetzt zu den **Zahlen**, bei welchen die **5 zweimal als Primfactor** vorkommt. Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß alle diejenigen Zahlen 5.5 oder 25 als Factor enthalten, welche ein Vielfaches von 25 sind. Vielfache von 25 sind nun die Zahlen 50, 75, 100 und alle drei- und mehrstelligen Zahlen, deren letzte Ziffern 25, 50, 75 und 00 sind. So werden z. B. in 150, 175, 225, 1825, 1950, 2300 zwei 5 als Primfactoren vertreten sein. In der That! Es ist:

150 = **5**.**5**.6, 175 = **5**.**5**.7,
225 = **5**.**5**.9, 1825 = **5**.**5**.33,
1950 = **5**.**5**.40, 2300 = **5**.**5**.86.

Aufgaben. a) Der Schüler möge die beiden Zahlen nennen, welche gemäß Bemerk. I in den Zahlen 70, 120, 130, 2350 als Primfactoren enthalten sind.

b) Er möge gemäß Bemerk. II die Zahlen angeben, welche in 428, 925, 644, 1075 und 3800 zweimal als Primfactoren vorkommen.

§ 85. Die Entwicklung des Neunerrestes. Bevor wir erörtern, wie wir untersuchen können, ob zu einer Zahl 3 als Prim-

factor gehört, müssen wir auf die Entwicklung des **Neunerrestes**, d. h. des **Restes** eingehen, **welcher bei der Division einer Zahl durch 9 bleibt.** Wenn wir den Neunerrest der Zahl 87456 auf dem gewöhnlichen Wege ermitteln wollen, werden wir 87456 durch 9 dividiren und schreiben:

9 | 87456 | 9717
81
64
63
15
9
66
63
3

Als Divisionsrest bleibt 3; demnach ist **3** der **Neunerrest von 87456.**

Wir können aber auch einen andern, weniger bekannten Weg einschlagen, um zum Neunerrest von 87456 zu gelangen. Die Zahl 87456 hat die Ziffern: 8, 7, 4, 5 und 6. Diese Ziffern wollen wir zu einander addiren. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir 30, denn es ist: $8 + 7 = 15$; $15 + 4 = 19$; $19 + 5 = 24$; $24 + 6 = \mathbf{30}$.

Wenn wir bei dem Resultat: 30 auch noch die Ziffern 3 und 0 zusamenzählen, ergiebt sich **3**, d. h. **der Nenerrest der Zahl 87456.**

Wenn wir auf demselben Wege den Neunerrest von 24594 ermitteln wollen, werden wir zunächst die Ziffern 2, 4, 5, 9 und 3 zusammenzählen. Es ist:

$$2 + 4 + 5 + 9 + 3 = \mathbf{23}.$$

23 ist eine zweistellige Zahl; wenn wir bei derselben wieder die Summe der Ziffern 2 und 3 suchen, erhalten wir 5; **5** ist mithin **der Neunerrest der Zahl 24593.**

In der That! wenn wir 24593 durch 9 theilen, erhalten wir als Divisionsrest (als Neunerrest) 5, denn das Divisionsexempel nimmt folgende Form an:

9 | 24593 | 2732
18
65
63
29
27
23
18
5

Aufgaben I. Der Schüler möge den Neunerrest der Zahlen 23, 31, 43, 51, 74, 8632, 8259, 34567 erst durch Addition der Ziffern, dann durch Division mit 9 ermitteln.

Wir haben im Vorstehenden auseinandergesetzt, wie man verfährt, um den Neunerrest einer Zahl zu finden. Danach **addirt** man erst die **Ziffern** der Zahl, deren Neunerrest gesucht wird; und wenn sich bei der Addition als Summe eine **mehrstellige Zahl** ergiebt, werden bei dieser Summe wieder die Ziffern zusammengezählt, bis man eine **einstellige** Zahl erhält; die sich ergebende einstellige Zahl ist dann der **Neunerrest.**

Der Neunerrest ist in der praktischen Zahlentheorie von großer Bedeutung; wir werden darauf interessante und zweckmäßige Additions-, Subtractions-, Multiplications- und Divisionsproben aufbauen. Darum wollen wir ihm auch eine größere Aufmerksamkeit schenken, als gewöhnlich geschieht und noch einige wenig bekannte Erleichterungen bei der Auffindung des Neunerrestes angeben.

Es sind besonders **zwei Kunstgriffe,** welche bei der Auffindung des Neunerrestes zur Erleichterung der Rechnung dienen.

1) Wir brauchen nicht erst alle Ziffern der Zahl zu addiren (die ganze **Quersumme***) der Zahl zu berechnen), deren Neunerrest wir suchen, sondern wir können an die Stelle jeder **zweistelligen Zahl,** auf welche wir während der Zifferaddition stoßen, ihre **Quersumme** in die Rechnung einstellen, so daß wir immer mit einer einstelligen Zahl zu operiren haben. Nehmen wir ein Beispiel! Als wir den Neunerrest der Zahl 87456 zu ermitteln suchten, addirten wir alle Ziffern dieser Zahl und erhielten als Quersumme 30. Jetzt werden wir bei

87 456

*) Unter **der Quersumme einer Zahl** versteht man die Summe, welche sich durch die Addition der Ziffern der betreffenden Zahl ergiebt. Demnach ist

26 die Quersumme der Zahl 93763,

denn es ist:

$$9 + 3 + 7 + 6 + 3 = 28.$$

6 ist die Quersumme von 15, denn wir haben

$$1 + 5 = 6.$$

9 ist die Quersumme von 27, denn es ist

$$2 + 7 = 9.$$

3 ist die Quersumme von 111, denn wir erhalten

$$1 + 1 + 1 = 3.$$

zunächst 8 und 7, die beiden ersten Ziffern, zusammenzählen; 8 und 7 giebt 15; die dritte Ziffer 4 werden wir nun nicht zu 15, sondern zu 6, der Quersumme von 15, addiren. 4 und 6 giebt 10. Die vierte Ziffer 5 werden wir auch nicht mit 10, sondern mit der Quersumme von 10, mit 1 zusammenzählen. 5 und 1 giebt 6. Zur 6 ist noch die letzte Ziffer, ebenfalls eine 6 zu addiren. 6 und 6 giebt 12, von 12 ist die Quersumme **3**. 3 ist auch der Neunerrest der Zahl 87456. Das ganze Verfahren wird am besten durch das folgende Schema dargestellt, das der Schüler sicher verstehen wird, wenn er die darin vorkommenden Zahlen und Ziffern mit dem vorstehenden Wortlaut vergleicht:

8 7 4 5 6
15 10 6 12
6 1 **3**

Wenn wir demnach den Neunerrest von 24593 suchen sollen, werden wir schreiben:

2 4 5 9 3
6 11 11 **5**
2 2

d. h. es ist 2 und 4 gleich 6, 6 und 5 gleich 11; die Quersumme von 11 ist 2; 2 und 9 giebt 11; die Quersumme von 11 ist wieder 2; 2 und 3 giebt 5. 5 ist der **Neunerrest.**

Nehmen wir noch ein drittes Beispiel! Wenn wir den Neunerrest von 6 345 726 suchen sollen, werden wir schreiben:

6 3 4 5 7 2 6
9 13 9 16 9 15
4 7 **6**

6 ist mithin der Neunerrest der Zahl 6 345 726.

Wenden wir uns noch zu einigen kleineren Zahlenbeispielen:

1 9, 12, 17, 13, 25, 32,
10 3 8 4 7 5
1

mithin ist 1 der Neunerrest von 19, 3 der Neunerrest von 12, 8 der Neunerrest von 17, 4 der Neunerrest von 13, 7 der Neunerrest von 25, 5 der Neunerrest von 32. Die Zahlen 1, 3, 8, 4, 7, 5 bleiben auch als Divisionsreste, wenn wir 19, 12, 17, 13, 25, 32 durch 9 theilen, so wie wir in diesen Fällen sofort bemerken, ohne erst ein langwieriges Divisionsexempel hingeschrieben zu haben.

Aufgaben II. Der Schüler möge den Neunerrest von: 325, 728, 1354, 2981, 37652, 15, 35, 42, wie eben gezeigt, ermitteln.

2) Wir kommen jetzt zu dem zweiten Kunstgriff, den man bei der Bildung des Neunerrestes in Anwendung bringen kann. Wenn wir den Neunerrest der Zahl 93 finden sollen, werden wir jetzt schreiben:

9 3
12
3

D. h. wir zählen erst 9 und 3 zusammen, der Summe 12 nehmen wir die Quersumme; die Quersumme von 12 ist **3**. 3 ist mithin der Neunerrest von **93**.

Es ergiebt sich also derselbe Neunerrest, als wenn wir die **9** in 93 gar **nicht berücksichtigt** hätten. Sehen wir zu, ob diese Beobachtung auch in anderen Fällen zutrifft. Es sei uns die Aufgabe gestellt, den Neunerrest von 9349 zu berechnen. Wenn wir die 9 gerade so wie die anderen Ziffern behandeln, werden wir erst 9 mit 3 zusammenzählen u. s. f. und schreiben:

9 3 4 9
12 7 16
3 **7.**

Denselben Neunerrest 7 erhalten wir, wenn wir die beiden **9** gar **nicht in die Rechnung ziehen** und in **9**34**9** nur die 3 und 4 addiren; es ist dann:

9349
7

Aber **nicht blos** die **9** selbst, **sondern auch die Ziffern, deren Summe der 9 gleich ist,** können wir einfach **übergehen,** wenn wir den Neunerrest einer Zahl suchen. Nehmen wir ein Beispiel. Wir haben bereits den Neunerrest der Zahl: 6 345 726 ermittelt und gefunden, daß derselbe der 6 gleich ist. Zu **6** kommen wir sofort, wenn wir berücksichtigen, daß in:

$\overset{\frown}{63}\overset{\frown}{45}\overset{\frown}{72}\mathbf{6}$

die Zahlen, welche wir durch einen Bogen mit einander verbunden haben, zusammen 9 ausmachen*). Wenn wir nämlich diese Ziffern übergehen, so bleibt uns nur die fettgedruckte **6** als Neunerrest übrig.

Ebenso finden wir da sogleich, daß bei der Zahl:

$\overset{\frown}{54}3\overset{\frown}{72}\overset{\frown}{81}$
3

3 der Neunerrest ist, denn die Ziffern 5 und 4, 7 und 2, 8 und 1 machen zusammen 9 aus und dürfen übergangen werden.

*) Es ist $6+3=9$, $4+5=9$, $7+2=9$.

Es ist übrigens nicht nöthig, daß die Ziffern, welche zusammen 9 ergeben, dicht neben einanderstehen; auch wenn sie von einander getrennt sind, brauchen sie nicht berücksichtigt zu werden. So z. B. giebt bei der Zahl

3764359

3 und 6, sowie 4 und 5 zusammen 9. Es bleiben darum nur die Ziffern 7 und 3 zum Zusammenzählen übrig. 7 und 3 macht 10; die Quersumme von 10 ist 1; 1 ist daher der Neunerrest der Zahl 3764359.

Wenn wir den Neunerrest der Zahl: 34285 suchen, werden wir demnach schreiben:

3 4 2 8 5
5 13
4.

Der Neunerrest der Zahl: 34285 ist also **4.**

Aufgaben III. Der Schüler möge den Neunerrest der Zahlen: 97, 998, 9299, 36813, 8145634, 792554, 752364, 237458, 993461, 1234567 berechnen, indem er die 9, sowie die Ziffern, deren Summe 9 ausmacht, unberücksichtigt läßt.

Fassen wir jetzt die Regeln zusammen, die wir über die Entwicklung des Neunerrestes aufgestellt haben, so können wir sagen:

Um den **Neunerrest** einer Zahl zu finden, **addirt** man die **Ziffern** der Zahl; gelangt man dabei zu einer Zahl, welche **zweistellig** ist, so führt man an Stelle derselben ihre **Quersumme** in die Rechnung ein. Alle **9**, auf die man im Laufe der Rechnung stößt, sowie **alle Ziffern, deren Summe gleich 9 ist,** können unberücksichtigt bleiben.

In der Mathemathik giebt es keinen Königsweg!

Lection 35.

A. Anwendungen des Neunerrestes.

§ 86. Der Primfactor 3. Im letzten Paragraphen der vorigen Lection haben wir gezeigt, wie der Neunerrest einer Zahl auf eine einfache und bequeme Weise entwickelt werden kann. In diesem Abschnitt wollen wir erörtern, inwiefern die Kenntniß des Neunerrestes für die practische Rechnung wichtig und nützlich ist; und zwar wollen wir zunächst auseinandersetzen, wie wir durch Untersuchung des Neunerrestes einer Zahl ermitteln können, ob die **3** als **Primfactor** in der betreffenden Zahl enthalten ist. Gehen wir von einem bestimmten Beispiel aus und suchen wir den Neunerrest der Zahl: 117!

Die Addition der Ziffern 1, 1 und 7 ergiebt als Summe 9; und da wir die 9 immer unberücksichtigt lassen können, erhalten wir gar keinen Neunerrest[1]), mit anderen Worten, wenn 117 durch 9 getheilt wird, bleibt kein Divisionsrest übrig. 9 ist also in 117 eine **ganze Anzahl-Male** enthalten, oder anders gesagt, 117 ist ein **Vielfaches** von 9. In der That! es ist:

$$117 = 9 . 13;$$

d. h. 117 kann so in Factoren zerlegt werden, daß 9 der **eine Factor** ist. Ebenso wird es auch mit allen anderen Zahlen stehen, welche **keinen Neunerrest** haben, deren Neunerrest anders ausgedrückt 0 ist; immer werden wir diese Zahlen in ein Product von Factoren auflösen können, unter denen sich die 9 befindet. So z. B. ergiebt sich 0 als Neunerrest bei den Zahlen 288, 3582, 75771, denn wir haben:

2 8 8	3 5 8 2	7 5 7 7 1
10 9	8 16 9	12 10 8 9
1,	7,	3 1,

Alle diese Zahlen können daher derartig zerlegt werden, daß 9 ihr einer Factor ist. In der That! es ist: $288 = 9 . 32$, $3582 = 9 . 398$, $75771 = 9 . 8419$.

Nun ist: $9 = 3 . 3$; wenn also eine Zahl in ein Product aufgelöst werden kann, dessen

---

[1]) Wenn eine Zahl durch 9 dividirt wird, so muß der Divisionsrest (der Neunerrest) kleiner sein als 9. Stoßen wir bei der Ausführung der Division auf 9 als Rest, so dürfen wir daraus schließen, daß die 9 in der zu dividirenden Zahl einmal öfter aufgeht, als wir im Quotienten angenommen haben, und daß der wirkliche Divisionsrest 0 ist. Ebenso ist auch der eigentliche Neunerrest 0, **wenn wir bei der Zifferaddition 9 erhalten.** So ist der Neunerrest von 27 gleich 0, denn wenn wir 27 durch 9 theilen, bleibt kein Divisionsrest. Die Zifferaddition aber ergiebt 9.

einer Factor eine 9 ist, so kann sie auch derart zerlegt werden, daß sie zwei Dreien (**3.3**) als Primfactoren enthält. Weil 288 = 9.32 ist, muß auch: 288 = **3.3**.32 sein; ebenso werden wir haben:

3582 = 3.3.398, weil
3582 = 9.398 ist.

Wie wir wissen, kann jede Zahl, deren Neunerrest 0 ist, derart in Factoren aufgelöst werden, daß sie als einen **Factor** die Zahl 9 enthält; daher

können wir auch jede Zahl mit **dem Neunerrest 0** derart **zerlegen**, daß in ihr **zwei Dreien (3.3)** als **Primfactoren** enthalten sind.

Die Zahlen: 36, 45, 72, 135 haben, wie wir sofort bemerken, den Neunerrest 0[1]), daraus können wir sogleich schließen; daß diese Zahlen zwei Dreien (3.3) zu Primfactoren haben. In der That! es ist:

36 = **3.3**.4, 45 = **3.3**.5,
72 = **3.3**.8, 135 = **3.3**.15.

Es wird sich jetzt die Frage erheben, wie wir aus der Beschaffenheit des Neunerrestes folgern können, ob eine Zahl die **3 einmal** als **Primfactor** enthält. In der That! Eine leichte Ueberlegung wird uns zeigen, daß wir mit Hilfe des Neunerrestes diese Frage entscheiden können.

Wenn bei einem Divisionsexempel ein Rest bleibt, so erhalten wir gemäß Seite 296 den **Dividenden**, indem wir den **Divisor** mit dem **Quotienten multipliciren** und dazu den **Rest addiren.** Wird 2351 durch 9 dividirt, so ergiebt sich:

```
(Divisor) 9 | 2351 | 261 (Quotient)
              18
              ---
               55
               54
               ---
                11
                 9
                ---
                 2 (Rest).
```

Mithin ist nach dem eben eingeführten Satze:

2351 = **9.251 + 2.**

Doch sprechen wir allgemeiner, indem wir Buchstaben als unbestimmte Zahlengrößen anwenden, und den Dividenden mit d, den Quotienten mit q, den Divisionsrest mit r bezeichnen. Soll nun der Dividend durch 9 getheilt werden, so ist 9 der Divisor, und wir erhalten nach dem vorher angeführten Satze:

$$d = 9 . q + r.$$

Der Dividend d ist hiernach aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzt, dem Producte 9q und dem Neunerrest r. Sollen wir prüfen, ob 3 in der Zahl d eine ganze Anzahl=mal enthalten ist, so müssen wir zusehen,

ob 1) 9q
und 2) der Neunerrest r

den Factor 3 haben.

In 9q ist 3 nicht blos **einmal**, sondern sogar **zweimal** als Primfactor vertreten, denn 9 ist gleich 3.3.

Wie steht es nun mit dem Neunerrest r? r ist jedenfalls kleiner als 9; in r wird daher 3 nur dann eine ganze Anzahl Male enthalten sein, wenn r gleich 3 oder gleich 6 ist, denn unter allen Zahlen, welche kleiner sind als 9, sind 3 und 6 die einzigen, in welche die Zahl 3 aufgeht.

Wiederholen wir jetzt kurz, welche Erwägungen wir angestellt haben! Die ganz beliebig gewählte **Zahl** d hat, wie wir fanden, **nur dann 3 zum Primfactor,** wenn 9q und der Neunerrest r zugleich 3 als Primfactor enthalten. Bei 9q ist 3 immer Primfactor, bei r nur, wenn r der 3 oder der 6 gleich ist.

Wir können noch sogleich hinzufügen, daß d auch in diesem Falle 3 nur **einmal** als Primfactor enthält, denn wenn auch 3 in dem einen Bestandtheil von d in 9q zweimal als Factor vertreten ist, so kann 3 doch in dem andern Bestandtheil in r nur einmal als Factor vorkommen, weil r kleiner ist als 9 oder 3.3.

Wir haben daher:

3 ist einmal Primfactor einer Zahl, wenn deren Neunerrest 3 oder 6 beträgt.

Die Zahlen: 12, 21, 84, 75, 93, 102, 480 haben den Neunerrest 3; wir können daraus sogleich folgern, daß in diesen Zahlen

---

[1]) Die Zifferaddition ergiebt 9; der Neunerrest ist daher nach der vorigen Anmerkung 0.

[1]) Der Neunerrest r ist, wie wir wissen, gleichbedeutend mit dem Divisionsrest, welcher übrig bleibt, wenn wir die nicht näher bestimmte Zahl d durch 9 theilen. r muß demnach kleiner sein als 9, denn wenn r gleich 9 oder größer als 9 wäre, so würde ja 9 noch einmal in r aufgehen und in Folge dessen die Division fortgesetzt werden müssen.

die 3 **einmal** als Primfactor enthalten ist. In der That! es ist:

$$12 = 2.2.\mathbf{3},\quad 21 = \mathbf{3}.7,\quad 84 = 2.2.\mathbf{3}.7,$$
$$75 = \mathbf{3}.5.5,\quad 93 = \mathbf{3}.31,\quad 102 = 2.\mathbf{3}.17,$$
$$480 = 2.2.2.2.2.\mathbf{3}.5.$$

Die Zahlen 24, 42, 60, 78, 96, 105, 204, 303 haben den Neunerrest 6; sie enthalten daher alle einmal die 3 als Primfactor. In der That! es ist:

$$24 = 2.2.2.\mathbf{3},\qquad 42 = 2.\mathbf{3}.7,$$
$$60 = 2.2.\mathbf{3}.5,\qquad 78 = 2.\mathbf{3}.13,$$
$$96 = 2.2.2.2.2.\mathbf{3}$$ u. s. f.

Fassen wir den Inhalt des ganzen Paragraphen kurz zusammen! Erst haben wir gefunden, daß eine Zahl, deren Neunerrest 0 ist, derart zerlegt werden kann, daß 2 ihrer Primfactoren Dreien sind. Wir haben dann weiter bewiesen, daß bei einer Zahl die 3 nur einmal als Primfactor vorkommt, wenn ihr Neunerrest 3 oder 6 beträgt.

Mithin besteht der Satz:

Eine **Zahl** mit dem **Neunerrest 3** und **6** enthält die 3 **einmal**, eine **Zahl** mit dem **Neunerrest 0** enthält die **3 zweimal** als **Primfactor.**

Bemerkung I. Die Regeln, welche wir in § 84 entwickelt haben, und die Ergebnisse des letzten Paragraphen können uns über die Zusammensetzung der Zahlen aus Primfactoren schon mancherlei Aufschlüsse bieten. Wir können jetzt jeder Zahl sofort ansehen, ob die Größen, 2, 2.2, 5, 5.5 sich unter ihren Primfactoren befinden; wir können ferner durch Ermittelung des Neunerrestes feststellen, ob die Größen 3 bez. 3.3 zu den Primfactoren gehören. In vielen Fällen werden diese Hilfsmittel schon ausreichen, alle Primfactoren einer Zahl zu finden.

Betrachten wir z. B. die Zahl 450! Diese enthält als Primfactoren

a) die Zahl 2, weil 450 eine gerade Zahl ist,
b) zweimal die Zahl 5, weil die beiden letzten Ziffern 5 und 0 sind,
c) zweimal die Zahl 3, weil der Neunerrest von 450 gleich 0 ist.

Mit der 2, den beiden 5 und den beiden 3 ist auch die Zahl der Primfactoren erschöpft, denn es ist:

$$450 = 2.\mathbf{3}.3.5.5.$$

Nehmen wir als zweites Beispiel 180; darin sind Primfactor

1) zweimal die Zahl 2, weil 2 in der 80 aufgeht,
2) einmal die 5, weil die letzte Ziffer eine 0 ist,
3) zweimal die 3, weil der Neunerrest 9 beträgt.

Auch 180 hat keine anderen Primfactoren als zwei Zweien, zwei Dreien und eine Fünf, denn wir haben:

$$180 = 2.2.3.3.5.$$

§ 87. Die Neunerrestprobe bei der Multiplication und Division. Wiederholt haben wir schon auf eine für alle vier Species passende Probe hingewiesen, welche wir an die Behandlung des **Neunerrestes** anschließen wollten. Zu dieser Probe werden wir uns jetzt wenden, zuvor aber wollen wir einige Worte über ihre Vorzüge sagen. Während bei den gewöhnlichen Proben das Verfahren durchaus nicht leichter ist, als bei der Rechnung, deren Richtigkeit controlirt werden soll, bietet die **Neunerrestprobe** den großen Vortheil, daß man immer nur mit einer **einstelligen Zahl** operirt. Jede zweistellige Zahl, auf die man im Laufe der Rechnung stößt, kann sogleich in eine einstellige verwandelt werden, indem man ihre Quersumme bildet. Diesem Vortheile stehen freilich auch Nachtheile gegenüber, welche wir aber erst erörtern können, wenn dem Schüler die Probe selbst bekannt ist. Zunächst wollen wir zeigen, wie mit Hilfe des Neunerrestes die **Multiplicationsprobe** auszuführen ist.

Wenn wir 21 mit 11 multipliciren sollen, werden wir schreiben:

```
21 . 11
-------
 21
  21
-------
 231,
```

mithin ist: 21 . 11 = 231.

21 ist in diesem Falle der Multiplicand, 11 der Multiplicator und 231 das Product.

Von 21 ist der Neunerrest 3, von 11 ist der Neunerrest 2, und von 231 ist der Neunerrest 6.

Es ist: 3 . 2 = 6,

mithin ist der Neunerrest des Multiplicanden multiplicirt mit dem Neunerrest des Multiplicators gleich dem Neunerrest des Products.

Nehmen wir ein zweites Beispiel, und sehen wir zu, ob sich die eben gemachte Beobachtung in Betreff der Neunerreste bestätigt:

Wenn wir die Zahl 143 und 32 multipliciren sollen, werden wir schreiben:

```
143 . 32
--------
  286
 429
--------
 4576
```

d. h. es ist: 143 . 32 = 4576.

143 ist der Multiplicand, 32 der Multiplicator und 4576 das Product.

Von 143 ist der Neunerrest 8, von 32 ist der Neunerrest 5, und von 4576 ist der Neunerrest **4.**

Wir haben

$$8 . 5 = 40,$$

also in diesem Falle ist der Neunerrest des Multiplicanden multiplicirt mit dem Neunerreste des Multiplicators nicht gleich dem Neunerreste des Products; denn 40 ist nicht gleich 4.

Nehmen wir aber von 40 die **Quersumme**, so erhalten wir **4**, d. i. den **Neunerrest** des **Products**.

Wir können daher folgenden Satz aufstellen:

Wenn wir den Neunerrest des Multiplicanden mit dem Neunerrest des Multiplicators multipliciren und die Quersumme nehmen, sobald sich dabei eine zweistellige Zahl ergiebt, erhalten wir den Neunerrest des Products.

Dieser Satz kann als Grundlage für eine einfache Neunerrestprobe dienen. Wenn nämlich bei der Multiplication ein Fehler gemacht ist, so wird der obige Satz mit Ausnahme später zu besprechender Fälle **nicht** zutreffen; wir werden nicht den Neunerrest des Products erhalten, wenn wir die Neunerreste des Multiplicanden und Multiplicators multipliciren und dabei zweistellige Zahlen in einstellige verwandeln.

Es sei uns z. B. die Aufgabe gestellt, die Zahl 3452 mit 425 zu multipliciren. Um die Multiplication auszuführen, werden wir schreiben:

```
 3452 . 425
 ----------
    17260
     6704
   13808
 ----------
  1465100
```

Wenn das Exempel richtig gerechnet wäre, müßte demnach die Gleichung bestehen:

$$3452 . 425 = 1465100.$$

Der Neunerrest von 3452 ist 5,
„ „ „ 425 ist 2,
„ „ „ 1465100 ist 8.

5 mal 2 ist 10; die Quersumme von 10 ist **1**; **1** ist **nicht** gleich **8**. Mithin sind die beiden Zahlen 3452 und 425 nicht richtig mit einander multiplicirt. Der Fehler kann entweder in einer der drei Reihen

17260
6704
13808

gemacht sein, welche sich zwischen den beiden wagerechten Strichen des Multiplicationsexempels befinden, oder er ist durch die Addition erst entstanden. Suchen wir mit Hilfe der Neunerrestprobe diesen Fehler.

Die Reihe 17260 ist dadurch entstanden, daß 3452 mit 5 multiplicirt wurde, in Zeichen, es ist:

$$3452 . 5 = 17260.$$

Die Reihe 17260 stellt uns mithin das Product eines Multiplicationsexempels dar, in dem 3452 der Multiplicand und 5 der Multiplicator ist.

Wir können daher bei diesem Multiplicationsexempel unsere Probe in Anwendung bringen, d. h. den Neunerrest des Multiplicanden mit dem Neunerrest des Multiplicators multipliciren u. s. f.

Der Neunerrest von 3452 ist 5,
„ „ „ 5 „ 5[1]),
„ „ „ 17260 „ 7.

5 . 5 giebt 25, die Quersumme von 25 ist **7**; **7** ist auch der Neunerrest des Products. In der Reihe 17260 liegt der Fehler nicht.

Sehen wir uns die zweite Reihe 6704 an! Zu derselben sind wir gelangt, indem wir 3452 mit 2 multiplicirten. Es müßte demnach sein:

$$3452 . 2 = 6704.$$

Auch hier haben wir ein Multiplicationsexempel; wir können daher die Neunerrestprobe in Anwendung bringen.

Von 3452 ist der Neunerrest 5,
„ 2 „ „ „ 2[1]),
„ 6704 „ „ „ 8.

5 mal 2 ist 10; von 10 ist die Quersumme **1**; **1** ist **nicht** gleich **8** (dem Neunerreste des Products). Hier steckt also der Fehler! In der That! wenn wir nachrechnen, so finden wir, daß 3452 mal 2 nicht gleich 6704, sondern gleich 6904 ist.

Aufgaben I. Der Schüler möge sich selbst Multiplicationsbeispiele bilden und dann absichtlich gemachte Fehler vermittelst der Neunerrestprobe suchen.

Wir gehen jetzt zur **Divisionsprobe** über! Wenn die Zahl 374525 durch 327 dividirt werden soll, so werden wir schreiben:

```
327 | 374525 | 1145
       327
      ----
       475
       327
      ----
       1482
       1308
       ----
        1745
        1635
        ----
         110
```

Gemäß S. 296 ist 327 der Divisor, 374525 der Dividend, 1145 der Quotient und 110 der Divisionsrest.

Wenn wir den Quotienten mit dem Divisor multipliciren und den Divisionsrest dazu addiren, erhalten wir gemäß S. 296 den Dividenden;

mithin ist: $1145 . 327 + 110 = 374525.$

Auf der **linken** Seite dieser Gleichung wollen

---

[1]) Die Zahl 5, ebenso wie die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 haben eigentlich gar keinen Neunerrest. Da sie kleiner sind als 9, kann man mit 9 nicht in sie hineindividiren; es kann mithin auch kein Divisionsrest (kein Neunerrest) bleiben; um aber bei den Regeln, die wir über die Neunerrestrechnung aufgestellt haben, nicht immer auf die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Rücksicht nehmen zu müssen, sagen wir:
1 ist der Neunerrest von 1,
2 ist der Nenerrest von 2 u. s. f.

wir für den Quotienten 1145, für den Divisor 327 und für den Rest 110 die entsprechenden Neunerreste einführen.

2 ist der Neunerrest von 1145,
3 „ „ „ „ 327,
2 „ „ „ „ 110.

Aus: $1145 . 327 + 110$

wird daher durch Einführung der Neunerreste:

$$2 . 3 + 2.$$

Es ist $2 . 3 + 2 = 8.$

8 ist auch der Neunerrest des **Dividenden** 374525.

Wir können hier also die Beobachtung machen, daß der

Neunerrest des Quotienten mal den Neunerrest des Divisors gleich dem Neunerrest des Dividenden sei.

Sehen wir zu, ob sich diese Beobachtung auch bei anderen Divisionsexempeln bestätigt. Wenn wir 5879234 durch 3432 dividiren, schreiben wir:

```
3432 | 5879234 | 1713
       3432
       24472
       24024
        4483
        3432
        10514
        10296
          218
```

3432 ist der Divisor, 5879234 der Dividend, 1713 der Quotient und 218 der Divisionsrest.

Mithin ist[1]):

$$1713 . 3432 + 218 = 5879234.$$

Der Neunerrest von 1713 ist 3,
„ „ „ 3432 „ 3,
„ „ „ 218 „ 2,
„ „ „ 5879234 „ 2,

In diesem Falle haben wir nicht

$$3 . 3 + 2 = 2,$$

sondern $3 . 3 + 2 = 11.$

Hier trifft also unsere vorher gemachte Beobachtung nicht zu. Der Neunerrest 3 des Quotienten mal den Neunerrest 3 des Divisors plus dem Neunerrest 2 des Divisionsrestes ist nicht gleich dem Neunerrest 2 des Dividenden. $3 . 3 + 2$ ist vielmehr gleich 11. 11 ist indessen eine zweistellige Zahl; bei der Rechnung mit Neunerresten verwandeln wir jede zweistellige Zahl in eine einstellige, indem wir ihre Quersumme berechnen. Die Quersumme von 11 ist 2; 2 ist auch der **Neunerrest des Dividenden.**

Wir können daher den Satz aufstellen:

Wenn wir den Neunerrest des Quotienten mit dem Neunerrest des Divisors multipliciren, dazu den Neunerrest des Divisionsrestes addiren und dabei von jeder zweistelligen Zahl die Quersumme nehmen, erhalten wir den Neunerrest des Dividenden.

Auf diesen Satz gründet sich die **Divisionsprobe**. Wenn während der Division ein Fehler gemacht ist, so wird sich der Neunerrest des Dividenden nicht in der Weise ergeben, wie in dem Satze angegeben wird[2]); man wird darnach erkennen, daß die Rechnung nicht richtig ausgeführt ist. Nehmen wir ein Beispiel!

Um 3476563 durch 4216 zu dividiren, werden wir schreiben:

```
4216 | 3476563 | 824
       33738
        10376
         8432
         19443
         16844
          2599
```

Es muß sein:

$$824 . 4216 + 2599 = 3476562.$$

Der Neunerrest von 824 ist 5,
„ „ „ 4216 „ 4,
„ „ „ 2599 „ 7,
„ „ „ 3476563 „ 7.

Setzen wir in:

$$824 . 4216 + 2599$$

für die Zahlen 824, 4216 und 2599 die betreffenden Neunerreste ein, so erhalten wir:

$$5 . 4 + 7.$$

Es ist $5 . 4 + 7 = 27$; die Quersumme von 27 ist 9; 9 ist nicht gleich dem Neunerrest 7 des Dividenden 3476563. In der Rechnung steckt also ein Fehler.

Suchen wir diesen Fehler mit Hilfe unserer Neunerrestprobe.

Wir wollen zunächst zusehen, ob die Rechnung bis zu der Stelle richtig durchgeführt ist, an der die 3, die letzte Ziffer des Dividenden heruntergezogen wird. Wenn wir bei der Division bis zu dieser Stelle gelangt sind, ist von den Ziffern des Dividenden die 3 noch nicht in Betracht gekommen und im Quotienten haben wir erst die beiden Ziffern 8 und 1. Die Rechnung hat sich nun so gestaltet, als wenn wir das folgende Divisionsexempel hätten:

```
4216 | 347656 | 82
       33728
        10376
         8432
         1944
```

In diesem Divisionsexempel wäre dann 347656 der Dividend, 4216 der Divisor, 82 der Quotient und 1944 der Divisionsrest. Mithin muß sein:

$$82 . 4216 + 1944 = 347656,$$

[1]) Nach dem Satze: **Wenn wir den Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und den Divisionsrest addiren, ergiebt sich der Dividend.**

[2]) Mit Ausnahme einiger später zu berechnender Fälle.

Von den Zahlen: 82, 4216, 1944 und 347656 ist der Neunerrest der Reihe nach: 1, 4, 0, 4.

Führen wir in:

82 . 4216 + 1944

statt der Zahlen 82, 4216 und 1944 die entsprechenden Neunerreste ein, so erhalten wir:

1 . 4 + 0.

1 . 4 + 0 ist gleich 4. 4 ist auch der Neunerrest des Dividenden 347 656. Das Divisionsexempel ist also bis zu diesem Punkte richtig durchgeführt. Der Fehler muß in dem späteren Theile der Rechnung stecken! Und in der That! wenn wir nachrechnen, finden wir, daß die Reihe, welche durch Multiplication von 4216 mit 4 entstanden ist, nicht richtig gerechnet ist.

4216 multipltcirt mit 4 ist nicht gleich 16844, sondern gleich 16864. Jetzt verändert sich auch der Divisionsrest; aus 2599 wird 2579.

§ 88. **Die Additionsprobe.** Wenn wir die beiden Zahlen 354 und 472 addiren sollen, werden wir schreiben:

354
472
826

d. h. 354 plus 472 ist gleich 826, in Zeichen:

354 + 472 = 826.

Sehen wir zu, ob diese Gleichung auch bestehen bleibt, wenn wir für die Zahlen: 354, 472 und 826 die Neunerreste einführen.

Von 354 ist der Neunerrest 3,
„ 472 „ „ „ 4,
„ 826 „ „ „ 7.

3 + 4 giebt 7; 7 in der Neunerrest von 826; demnach ist:

der Neunerrest von 354 plus dem Neunerrest von 472 gleich dem Neunerrest von 826.

354 und 472 sind die Summanden, 826 ist die Summe. Also in unserm Falle

erhalten wir den Neunerrest der Summe, wenn wir die Neunerreste der Summanden zu einander addiren.

Untersuchen wir jetzt, ob diese Beobachtung auch in anderen Fällen zutrifft. Es sei uns die Aufgabe gestellt, die drei Zahlen: 34561, 57926 und 61340 zu addiren. Wir werden dann schreiben:

34566
57927
61340
153833

Die Zahlen 34566, 57927 und 61340 sind die Summanden; ihre Neunerreste sind der Reihe nach 6, 3, 5.

153833 ist die Summe, ihr Neunerrest ist 5. Addiren wir die Neunerreste der Summanden, so erhalten wir 14; 14 ist nicht gleich dem Neunerrest 5 der Summe. Wenn wir aber von 14 die Quersumme nehmen, erhalten wir 5, den Neunerrest der Summe. Wir erhalten daher den Satz:

Der Neunerrest der Summe ergiebt sich, wenn wir die Neunerreste der Summanden zu einander addiren und dabei jede zweistellige Zahl, auf die wir stoßen in eine einstellige verwundeln!

Wir könnten diesen Satz zur Grundlage der Neunerrestprobe für die Addition machen, aber wir werden noch einen einfacheren Satz finden, auf den wir die Probe besser gründen können. Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel! Es sei uns aufgetragen, die beiden Zahlen 67 und 28 zu addiren. Wir werden dann schreiben:

67
28
95.

67 und 28 sind Summanden und 95 ist die Summe. Die Summanden sind von der Summe durch einen wagerechten Strich getrennt.

Ueber dem wagerechten Strich stehen die Ziffern 6, 7, 2 und 8,

und unterhalb des wagerechten Striches haben wir die Ziffern 9 und 5.

Wir wollen nun mit den Ziffern oberhalb des wagerechtrn Striches gerade wie bei der Entwickelung des Neunerrestes verfahren, d. h. wir wollen die Ziffern 6, 7, 2, 8 in einer beliebigen Reihenfolge addiren. Für jede zweistellige Zahl, auf die wir stoßen, wollen wir die Quersumme einstellen u. s. f. Das Resultat, zu dem wir auf diese Weise gelangen, wollen wir den Summandenneunerrest nennen, weil ja die Ziffern der Summanden dem genannten Verfahren unterworfen werden. Da die Reihenfolge, in der wir die Summandenziffern addiren, beliebig ist, wollen wir eine bestimmte Reihenfolge festsetzen und sie zunächst in der Folge 6, 7, 8, 2 in die Rechnung hineinziehen. Wir werden dann erst 6 und 7 zusammenzählen, 6 und 7 giebt 13; von 13 ist die Quersumme 4; 4 und 8 giebt 12, von 12 ist die Quersumme 3; 3 nnd 2 giebt 5; 5 ist mithin der Summandenneunerrest.

Wenn wir die Ziffern der Summanden in anderer Ordnung, etwa in der Reihenfolge: 6, 2, 8, 7 der Rechnung unterwerfen, so erhalten wir, 6 und 2 ist gleich 8, 8 und 8 ist gleich 16, von 16 ist die Quersumme 7, 7 und 7 giebt 14; von 14 ist die Quersumme 5. Wir gelangen also zu demselben Summandenneunerrest 5, den wir vorher erhalten hatten.

Suchen wir jetzt den Neunerrest der Summe 95; in 95 dürfen wir 9 vernachlässigen, es bleibt nur 5 übrig. 5 ist mithin der Neunerrest der Summe 95; wir werden 5 den Summenneunerrest nennen.

Wir wissen jetzt, daß sowohl der Summanden- wie der Summenneunerrest 5 beträgt. Es ist also in diesem Falle

der Summenneunerrest dem Summandenneunerrest gleich.

Wenden wir uns zu einem zweiten Beispiele und sehen wir zu, ob sich unsere Beobachtung bestätigt. Wenn wir die drei Zahlen 26, 87 und 45 addiren sollen, werden wir schreiben:

26
87
45
158

Ueber dem wagerechten Strich sehen wir die

Ziffern: 2, 8, 4, 5, 7, 6. Aus diesen Ziffern müssen wir den Summandenneunerrest bilden. Wir wollen sie in der Reihenfolge in die Rechnung ziehen, welche wir soeben angegeben haben, also in der ersten senkrechten Reihe von oben nach unten und dann in der zweiten senkrechten Reihe von unten nach oben fortschreiten.

Wir werden dann erst 8 und 2 addiren; 8 und 2 giebt 10; von 10 ist die Quersumme 1; mit dieser 1 werden wir die 4, die letzte Ziffer der ersten senkrechten Reihe, zusammenzählen; 1 und 4 ist 5; zu dieser 5 addiren wir die 5, welche in der zweiten senkrechten Reihe als unterste Ziffer steht; 5 und 5 giebt 10; von 10 ist die Quersumme 1; 1 und 7 giebt 8; 8 und 6 giebt 14; von 14 ist die Quersumme 5; 5 ist also der Summandenneunerrest.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß auch die Summe den Neunerrest 5 hat.

Also wieder ist der Summandenneunerrest gleich dem Summenneunerrest.

B. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, setzten wir die Lehre von den Brüchen fort. Wir stellten zunächst dar, daß ein Divisionsexempel, welches bei der Rechnung einen Rest läßt, zum Resultat eine gemischte Zahl hat, und zeigten sodann, wie eine ganze Zahl und eine gemischte Zahl in einen Bruch verwandelt werden können. Im zweiten Abschnitt wandten wir uns zwei Operationen zu, die für die Behandlung der Brüche von weittragender Bedeutung sind, dem Erweitern und dem Heben. Wir erörterten, daß man einen Bruch {erweitert / hebt} indem man den Zähler und Nenner {mit derselben / durch dieselbe} Zahl {multiplicirt / dividirt}, und wir fanden, daß durch das Erweitern und Heben der Werth eines Bruches nicht geändert wird. Wir bemerkten, daß das Erweitern uns in den Stand setzt, Brüche zu addiren, während wir durch das Heben zu bequemeren Bruchausdrücken mit kleinerem Zähler und Nenner gelangen, wenn wir die Zahl, mit der wir heben, so wählen, daß sie in den Zähler und in den Nenner aufgeht. Es erwuchs uns daher die Aufgabe, zu zeigen, wie die Zahlen gefunden werden können, die im Zähler und Nenner zugleich eine ganze Anzahl-mal enthalten sind. Um eine bequeme und zugleich gründliche Methode anzugeben, gingen wir auf die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren ein. Ehe wir die Zahlenzerlegung für das Heben nutzbar machen können, mußten wir weit ausholen. Scheinbar zusammenhangslos mußten wir unsere Erörterungen an das Heben der Brüche anschließen, erst im nächsten Briefe können wir zeigen, weshalb das Heben der Brüche auf der Zerlegung der Zahlen beruht. Bei der Besprechung der Zahlenzerlegung setzten wir zunächst auseinander, welchen Sinn man mit den Worten Primfactor und Primzahl verbindet; wir fanden, daß die Zahlen entweder Primzahlen sind oder in Primzahlen zerlegt werden können. Für die Zahlen von 1 bis 100 führten wir die Auflösung in Primfactoren aus.

Wie sich die Zerlegung bei den übrigen Zahlen gestaltet, können wir erst lehren, wenn wir die Kennzeichen alle angeführt haben, die uns ermöglichen, bei einer Zahl sofort zu erkennen, ob eine der Primzahlen 2, 4, 5, 7, 11, zu ihren Primfactoren gehört. Zu diesem Behufe mußten wir die Primzahlen einzeln durchgehen; und zwar untersuchten wir zunächst die Primzahlen 2 und 5, weil für diese Zahlen die Regeln außerordentlich einfach und dem Schüler wahrscheinlich schon bekannt sind.

Um die Regeln über den Primfactor 3 aufzustellen, schlugen wir nicht den gewöhnlichen Weg ein, sondern wir lehrten erst eine leichte und bequeme Methode, den Neunerrest, d. h. den Divisionsrest zu ermitteln, welcher bleibt, wenn man eine Zahl durch 9 theilt.

Wir zeigten, daß wir nicht den Weg der Division einzuschlagen brauchen, um zur Kenntniß des Neunerrestes zu gelangen, daß es vielmehr einen andern Weg gebe, welcher uns bequemer zum Ziele führe. Wir verweilten längere Zeit bei der Entwicklung des Neunerrestes, weil derselbe bei der Rechnung vielfach verwendbar ist. Erstens können wir vermöge des Neunerrestes erkennen, ob eine Zahl die 3 ein-, bez. zweimal als Primfactor enthält, zweitens können wir den Neunerrest zur Grundlage einer einfachen Rechnungsprobe machen, welche wir mit Neunerrestprobe bezeichnet haben. Wir haben die Neunerrestprobe auf die Multiplication, Division und Addition ausgedehnt; im nächsten Briefe werden wir auch zeigen, wie die Richtigkeit der Subtractionen mit Hilfe der Neunerreste geprüft werden kann. Ja auch bei Potenzen und bei Wurzeln werden wir die Neunerrestprobe in Anwendung bringen! Doch davon erst im zweiten Cursus!

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie macht man die Divisionsprobe, wenn ein Divisionsrest bleibt?
2) Wie wird eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandelt?
3) Was bedeutet der Ausdruck: „Brüche erweitern"?
4) Was bedeutet der Ausdruck „Brüche heben"?
5) Wird der Werth eines Bruches durch Erweitern oder Heben verändert?
6) Weshalb darf für „Heben" nicht das Wort „verkleinern" gebraucht werden?
7) In welchem Falle wird durch das Heben ein Bruchausdruck einfacher, in welchem Falle complicirter?
8) Was versteht man unter einer Primzahl?
9) Welche Primzahlen befinden sich unter den Zahlen von 1 bis 100?
10) Wann enthält eine Zahl die 2, wann die 5 als Primfactor?
11) Wann ist die Zahl 2 zweimal, wann die 5 zweimal als Primfactor in einer Zahl enthalten?
12) Wann ist sowohl 2 wie 5 Primfactor einer Zahl?
13) Wie wird der Neunerrest einer Zahl entwickelt?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 36 und 37.
Arithmetik.

19. Brief

Als
Manuscript
gedruckt.

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Της ἀρετης προπαροιθεν θεοι ἱδρωτα ἐθηκαν.

Die Götter haben die Arbeit zum Vorhof der Tüchtigkeit gemacht. Hesiod.

Lection 36.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 34.

Abschnitt C. § 79. **Aufgaben I.** 4 Ganze sind gleich 24 Sechsteln, 40 Zehnteln, 80 Zwanzigsteln und 140 Fünfunddreißigsteln, in Zeichen, wir haben:

$4 = \frac{24}{6}$, $4 = \frac{40}{10}$, $4 = \frac{80}{20}$, $4 = \frac{140}{35}$;

8 Ganze sind gleich 48 Sechsteln, 80 Zehnteln, 160 Zwanzigsteln und 280 Fünfunddreißigsteln, in Zeichen, es ist:

$8 = \frac{48}{6}$, $8 = \frac{80}{10}$, $8 = \frac{160}{20}$, $8 = \frac{280}{35}$;

12 Ganze sind gleich 72 Sechsteln, 120 Zehnteln, 240 Zwanzigsteln und 420 Fünfunddreißigsteln, in Zeichen, wir haben:

$12 = \frac{72}{6}$, $12 = \frac{120}{10}$, $12 = \frac{240}{20}$, $12 = \frac{420}{35}$.

Aufgaben II. Wir erhalten:

$6\frac{1}{3} = \frac{19}{3}$, $9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$, $11\frac{11}{12} = \frac{143}{12}$, $18\frac{23}{24} = \frac{455}{24}$.

Abschnitt D. § 80. **Aufgaben.** Wir erhalten:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, b) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, c) $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$, d) $\frac{8}{9} = \frac{16}{18}$, e) $\frac{14}{15} = \frac{28}{30}$, f) $\frac{24}{25} = \frac{48}{50}$, g) $\frac{27}{40} = \frac{54}{80}$,

wenn wir die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{27}{40}$ mit 2 erweitern.

Es ergiebt sich ferner:

a) $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, b) $\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$, c) $\frac{4}{7} = \frac{32}{56}$, d) $\frac{8}{9} = \frac{64}{72}$, e) $\frac{14}{15} = \frac{112}{120}$, f) $\frac{24}{25} = \frac{192}{200}$, g) $\frac{27}{40} = \frac{236}{320}$,

wenn die Brüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{27}{40}$ mit 8 erweitert werden.

Wir erhalten drittens:

a) $\frac{1}{2} = \frac{13}{26}$, b) $\frac{2}{5} = \frac{26}{65}$, c) $\frac{4}{7} = \frac{52}{91}$, d) $\frac{8}{9} = \frac{104}{117}$, e) $\frac{14}{15} = \frac{182}{195}$, f) $\frac{24}{25} = \frac{312}{325}$, g) $\frac{27}{40} = \frac{351}{520}$.

wenn wir die Brüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{27}{40}$ mit 13 erweitern.

Es ist viertens:

a) $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$, b) $\frac{2}{5} = \frac{30}{75}$, c) $\frac{4}{7} = \frac{60}{105}$, d) $\frac{8}{9} = \frac{120}{135}$, e) $\frac{14}{15} = \frac{210}{225}$, f) $\frac{24}{25} = \frac{360}{375}$, g) $\frac{27}{40} = \frac{405}{600}$,

wenn die Brüche: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{27}{40}$ mit 15 erweitert werden.

§ 81. **Aufgaben.** Es ist:

1) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$,
2) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$, $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$, $\frac{21}{33} = \frac{7}{11}$,
3) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$, $\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$,
4) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$, $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$, $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$,
5) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$, $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$.

§ 83. **Aufgaben.** Die Zahl 16 hat die Primfactoren 2, 2, 2, 2; die Zahl 24 hat die Primfactoren 2, 2. 2, 3; die Zahl 49 hat die Primfactoren 7, 7; die Zahl 56 hat die Primfactoren 2, 2, 2, 7; die Zahl 81 hat die Primfactoren 3, 3, 3, 3.

Abschnitt E. § 84. **Aufgaben.** a) In 70, 120, 130, 2350 sind die Zahlen 2 und 5 als Primfactoren enthalten, weil die letzte Ziffer eine 0 ist.

b) In 428 und 644 sind zwei Zweien Primfactoren, weil 4 in 28 und 44 aufgeht; in 925, 1075 und 3800 sind zwei Fünfen als Primfactoren enthalten, weil die letzten Ziffern 25, 75 und 00 sind.

§ 85. **Aufgaben.** Von 23 ist der Neunerrest **5**, denn 2 und 3 ist gleich 5; von 31 ist der Neunerrest **4**, denn 3 und 1 ist gleich 4, von 43 ist der Neunerrest **7**, denn 4 und 3 giebt 7, von 51 ist der Neunerrest **6**, denn 5 unb 1 ist gleich 6.

Dieselben Neunerreste erhalten wir auch, wenn wir 23, 31, 43 und 51 durch 9 dividiren, denn es ergiebt sich:

9 | 23 | 2,
18
5

9 | 31 | 3
27
4

9 | 43 | 4,
36
7

9 | 51 | 3
45
6

Von 74 ist der Neunerrest **2**, denn wir erhalten; $7 + 4 = 11$; $1 + 1 = \mathbf{2}$.

Von 8632 ist der Neunerrest **1**, denn wir haben: $8 + 6 + 3 + 2 = 19$; $1 + 9 = 10$; $1 + 0 = \mathbf{1}$.

Die Zahlen 2 und 1 erhalten wir als Divisionsreste, wenn wir 74 und 8632 durch 9 dividiren, denn es ist:

9 | 74 | 8,
72
2

9 | 8632 | 959.
81
53
45
82
81
1

Von 8259 ist der Neunerrest **6**, denn wir erhalten: $8 + 2 + 5 + 9 = 24$; $2 + 4 = \mathbf{6}$.

Von 34567 ist der Neunerrest **7**, denn es ist: $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$; $2 + 5 = \mathbf{7}$.

Werden die Zahlen 8259 und 34567 durch 9 dividirt, so ergeben sich als Divisionsreste ebenfalls die Zahlen 6 und 7. Wir erhalten nämlich:

9 | 8259 | 917,
81
15
9
69
63
6

9 | 34567 | 384.
27
75
72
36
36
7

Wir haben bei der Lösung dieser Aufgaben die Neunerreste in der umständlichen Weise aufgesucht, die wir zu Begknn des § 85 gelehrt haben. Die später besprochenen Kunstgriffe haben wir noch nicht in Anwendung gebracht.

Aufgaben II. Wir erhalten:

32 5, 7 2 8, 1 3 5 4, 2 9 8 1, 3 7 6 5 2,
5 10 9 17 4 9 13 11 10 **2** 10 7 12 **5**
1 **8** **4** 2 1 1 3

15, 35, 42,
6 **8** **6**

mithin sind die Neunerreste der Zahlen 325, 728, 1354, 2981, 37652, 15, 35, 42 der Reihe nach: 1, 8, 4, 2, 5, 6, 8. 6.

Wir haben bei der Lösung dieser Aufgaben noch nicht berücksichtigt, daß wir jede 9 und alle Ziffern, die zusammen 9 betragen, übergehen können.

Aufgaben III. Wir erhalteu:

97, 998, 9299:
7 **8** **2**

die 9 dürfen wir vernachlässigen; es bleibt dann bei 97 nur **7**, bei 998 nur **8**, bei 9299 nur **2** als Neunerrest übrig.

Es ergiebt sich ferner:

36 81 3, 81 45 63 4, 792 5 54,
3 **4** **5**

Der Neunerrest von 36813 ist also gleich 3, der Neunerrest von 8145634 ist gleich 4 und der Neunerrest von 782554 ist gleich 5. Die Ziffern, welche durch einen Bogen mit einander verbunden sind, machen zusammen 9 aus und brauchen darum nicht b.rücksichtigt zu wrrden.

Wenn wir den Neunerrest von 752364 suchen, erhalten wir:

752 36 4;

der Neunerrest von 752365 ist mithin 0, denn zu jeder Ziffer findet sich eine andere, die mit ihr zusammen 9 beträgt; es kommt daher keine der Ziffern in Betracht.

Wir erhalten ferner:

237 45 8, 99 346 1, 1 2 3 45 6 7;
11 **5** **1**
2

2 ist der Neunerrest von 237458, 5 ist der Neunerrest von 993461 und 1 ist der Neunerrest von 1234567. Von 2**3**745**8** ist nur 3 und 8, bei 992**461** ist nur 4 und 1 zu addiren. Bei **1**234567 bleibt nur **1** übrig.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 35 gestellten Fragen.

1) Man multiplicirt den Divisor mit dem Quotienten, addirt dazu den Divisionsrest und erhält dann den Dividenden. 2) Siehe Seite 298. 3) „Einen Bruch erweitern" heißt: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciren. 4) „Einen Bruch heben" heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiren. 5) Durch das Erweitern und Heben wird der Werth eines Bruches nicht geändert. 6) Wenn man für „heben" das Wort „verkleinern" gebraucht, kann leicht die irrige Ansicht erzeugt werden, daß durch das Heben der Werth des Bruches kleiner werde. 7) Durch das Heben wird ein Bruchausdruck nur einfacher, wenn der Zähler und Nenner durch eine Zahl dividirt wird, welche sowohl in den Zähler wie in den Nenner aufgeht. Complicirter wird ein Bruchausdruck durch das Heben, wenn er durch eine Zahl gehoben wird, die in dem Zähler und Nenner nicht aufgeht. 8) Unter einer Primzahl versteht man

eine Zahl, die nur in ein Product zerlegt werden kann, dessen einer Factor die 1 und dessen anderer Factor die zu zerlegende Zahl selbst ist. 9) Unter den Zahlen von 1 bis 100 befinden sich die Primzahlen: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. 10) 2 ist Primfactor bei allen geraden Zahlen; 5 ist Primfactor bei allen Zahlen, deren letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist. 11) 2 ist zweimal Primfactor bei allen Zahlen, bei denen 4 in die beiden letzten Ziffern aufgeht. 5 ist zweimal Primfactor bei allen Zahlen, deren letzte Ziffern 25, 50, 75, 00 sind. 12) 2 und 5 sind zugleich Primfactoren toren einer Zahl, deren letzte Ziffer eine 0 ist. 13) Siehe Seite 306.

C. Fortsetzung der Neunerrestprobe.

§ 89. Fortsetzung der Additionsprobe. Unsere Erörterungen über die Verwendung des Neunerrestes zu einer Multiplications- und Divisionsprobe hatten wir beendet. Wir fanden, daß man (einige später zu besprechende Fälle ausgenommen) bei einem Multiplications- und Divisionsexempel vermittelst der Neunerrestprobe nicht blos die Richtigkeit der Rechnung prüfen, sondern bei einem unrichtig gerechneten Exempel auch feststellen könne, an welcher Stelle sich der Fehler befinde. Auch auf die Addition wurde die Neunerrestprobe von uns ausgedehnt, und zwar gelangten wir bei unseren Betrachtungen erst zu dem Satze, daß sich der Neunerrest einer Summe ergebe, wenn man die Neunerreste der Summanden addire und dabei für jede zweistellige Zahl die Quersumme in die Rechnung einführe. Auf diesen Satz hätten wir die Additionsprobe gründen können; wir zogen es aber vor, uns noch eine einfachere Grundlage zu suchen.

Wir betrachteten zu diesem Zwecke gesondert die Ziffern der Summanden, welche über dem wagerechten Additionsstrich stehen, und die Ziffern der der Summe, welche sich unter dem Additionsstrich befinden. Die Ziffern der Summanden addirten wir und stellten für jede zweistellige Zahl, zu der wir kamen, die Quersumme in die Rechnung ein; das Resultat, welches wir dabei erhielten, nannten wir den **Summandenneunerrest.** Wir fanden, daß die Reihenfolge, in der wir die Summandenziffern in die Rechnung hineinzogen, von keiner Bedeutung ist auf den Ausfall des Summandenneunerrestes. Wir konnten von einem Summanden zum andern überspringen, konnten bei der Rechnung nach senkrechten Reihen fortschreiten, immer blieb der Summandenneunerrest derselbe. Dem **Summandenneunerrest** stellten wir den **Summenneunerrest** gegenüber; und wir beobachteten an an zwei Beispielen, daß **der Summandenneunerrest dem Summenneunerrest gleich sei.** Wir wollen jetzt die Richtigkeit unserer Beobachtung noch an einem dritten Beispiel prüfen, aber insofern einen Schritt weiter gehen, als wir bei der Entwicklung des Summandenneunerrestes, gerade wie sonst bei der Rechnung mit Neunerresten, alle 9 vernachlässigen und ebenso die Zahlen, deren Summe 9 ausmacht.

Wenn wir die Zahlen: 24567, 49368, 53441 und 66527 zu einander addiren, so werden wir schreiben:

```
  2 4 5 6 7
  4 9 3 6 8
  5 3 4 4 1
  6 6 5 2 7
-----------
1 9 3 9 0 3
```

Berechnen wir zunächst den Summandenneunerrest! Die Zahlen, welche wir übergehen können, weil sie zusammen 9 betragen, haben wir durch Klammern mit einander verbunden. In der ersten wagerechten Reihe können wir 4 und 5, in der zweiten 3 und 6, in der vierten 2 und 7 außer Betracht lassen; in der ersten senkrechten Reihe kann 4 und 5, in der zweiten 3 und 6, in der dritten 4 und 5 und in der fünften 8 und 1 unberücksichtigt bleiben. Die übrigen Ziffern wollen wir derart in die Rechnung hineinziehen, daß wir uns zunächst die erste, dann die zweite, darauf die dritte, dann die vierte und schließlich die fünfte senkrechte Reihe vornehmen. In der ersten dieser Reihen haben wir die 2 und 6, in der vierten die 6 und 4 und in der fünften die 7 der bekannten Rechenoperationen zu unterwerfen. In der zweiten und dritten Reihe kommt keine der Ziffern in Betracht.

2 und 6 giebt 8; 8 und 6 giebt 14; von 14 ist die Quersumme 5; 5 und 4 ist 9, 9 kann fortgelassen werden; folglich bleibt 7 als **Summandenneunerrest** übrig.

7 ist auch der **Neunerrest der Summe** 193903, denn 1 und 3 und 3 giebt 7.

Wieder ist

der **Summandenneunerrest** gleich dem **Summenneunerrest.**

Wenn die Addition nicht richtig ausgeführt ist, so wird sich (mit Ausnahme weniger Fälle) der Fehler dadurch kundgeben, daß der Summandenneunerrest mit dem Summenneunerrest nicht übereinstimmt. Wenden wir uns zu einem einfachen Beispiel! Nehmen wir an, wir hätten das Additionsexempel:

$$\begin{array}{r} 99 \\ 92 \\ \hline 193 \end{array}$$

Der Summandenneunerrest ist 2, der Summenneunerrest 4. Wir können daraus schließen, daß in der Rechnung ein Fehler steckt! In der That! Wenn wir nachrechnen, finden wir, daß 99 und 92 nicht gleich 193 sondern gleich 191 ist.

Wir können die Neunerrestprobe auch in Anwendung bringen, wenn wir Mark und Pfennige zusammenzählen. Bei dem Exempel

Mk.	Pf.
153	14
45	17
264	25
462	56

ist z. B. sowohl der Summanden- wie der Summenneunerrest 5; und zwar haben wir den Summandenneunerrest von allen Ziffern oberhalb des Additionsstriches und den Summenneunerrest von allen Ziffern unterhalb desselben zu nehmen, gleichviel ob diese Ziffern die Mark oder die Pfennige bezeichnen.

§ 90. Die Subtractionsprobe. Es sei uns die Aufgabe gestellt, die Zahl 211 von 997 zu subtrahiren. Wir werden dann schreiben:

$$\begin{array}{r} 997 \\ 211 \\ \hline 786 \end{array}$$

997 ist der Minuend, 211 der Subtrahend und 786 die Differenz.

Gemäß § 19 erhalten wir

den Minuenden, wenn wir die Differenz und den Subtrahenden addiren.

Daher ist: $786 + 211 = 997$.

Von 786 ist der Neunerrest 3,
„ 211 „ „ „ 4,
„ 997 „ „ „ 7.

Führen wir in der Gleichung:

$$786 + 211 = 997$$

für 786, 211 und 997 die Neunerreste ein, so erhalten wir:

$$3 + 4 = 7,$$

d. h. wir erhalten

den Neunerrest des Minuenden, wenn wir den Neunerrest der Differenz und den Neunerrest des Subtrahenden addiren.

Wenden wir uns zu einem zweiten Beispiele! Wenn wir 8457 von 9733 subtrahiren, werden wir schreiben:

$$\begin{array}{r} 9733 \\ 8457 \\ \hline 1276 \end{array}$$

9733 ist der Minuend, 8457 der Subtrahend und 1276 die Differenz.

Von 9733 ist der Neunerrest 4,
„ 8457 „ „ „ 6,
„ 1276 „ „ „ 7.

In diesem Falle erhalten wir nicht den Neunerrest des Minuenden, wenn wir die Neunerreste der Differenz und des Subtrahenden addiren, denn $6 + 7$ ist nicht gleich 4, sondern gleich 13. Wenn wir aber von 13 die Quersumme nehmen, ergiebt sich 4, d. i. der Neunerrest des Minuenden.

Es besteht daher folgender Satz:

Wir erhalten den Neunerrest des Minuenden, wenn wir die Neunerreste des Subtrahenden und der Differenz addiren und für jede zweistellige Zahl, auf die wir dabei treffen, die Quersumme einführen.

Auf diesem Satz beruht die Neunerrestprobe für die Subtraction. Wenn die Subtraction nicht richtig ausgeführt ist, so wird, wenn wir von bestimmten später zu behandelnden Fällen absehen, unser Satz nicht zutreffen. Nehmen wir ein Beispiel; prüfen wir, ob das Subtractionsexempel:

$$\begin{array}{rl} 7354 & \text{(Minuend)} \\ 2468 & \text{(Subtrahend)} \\ \hline 4881 & \text{(Differenz)} \end{array}$$

richtig gerechnet ist

Von 7354 ist der Neunerrest 1,
„ 2468 „ „ „ 2,
„ 4881 „ „ „ 3.

$3 + 2$ ist gleich 5 aber nicht gleich 1; die Probe stimmt nicht, wie man sich auszudrücken pflegt; das Subtractionsexempel ist daher falsch gerechnet. In der That! Wenn wir nachrechnen, so finden wir, daß die Differenz nicht 4881 sondern 4886 heißen muß.

§ 91. Vortheile und Nachtheile der Neunerrestprobe. Wir haben jetzt die Neunerrestprobe auf alle vier Species ausgedehnt; sie hat sich bei der Multiplication, Division, Addition und Subtraction in gleicher Weise bewährt. Wir werden auch im zweiten Cursus finden, daß sie beim Potenziren, Radiciren und im beschränkten Maaße beim Logarithmiren in Anwendung gebracht werden kann.

Jedem, der die Neunerrestprobe kennt, leuchtet ein, daß große Vortheile mit derselben verbunden sind. Nicht mit schwer zu behandelnden Zahlen haben zu operiren, sondern immer sind die **Zahlen**, mit denen wir zu rechnen haben, **einstellig**. Nehmen wir doch von jeder zweistelligen Zahl sofort die Quersumme! Alle Neunen und ferner alle Ziffern, die zusammen 9 ausmachen, können übergangen werden, so daß häufig nur ein kleiner Theil aller Ziffern berücksichtigt zu werden braucht.

Das sind große Vortheile; aber diesen großen Vortheilen stehen auch Nachtheile gegenüber. Es kann nämlich vorkommen, daß die Neunerrestprobe stimmt und daß das Exempel dennoch falsch gerechnet ist. Z. B. wird man durch die Neunerrestprobe den Fehler nicht herausfinden können, wenn für die 9 eine 0, oder für die 0 eine 9 gesetzt ist. Man wird ferner den Fehler nicht entdecken, wenn etwa an Stelle einer 6 eine 3, und zugleich an Stelle der 3 eine 6 steht, überhaupt wenn zwei Ziffern mit einander vertauscht sind. 4356 hat denselben Neunerrest wie 4653. Indessen, in der **Praxis bewährt sich die Neunerrestprobe.**

Die Fehler, welche man gewöhnlich macht, werden durch die Neunerrestprobe gefunden. Ein Rechnungsrevisor darf sich allerdings dieser Probe zur Controle der Bücher nicht bedienen, denn es wird einem gewitzten Buchhalter nicht schwer fallen, die Bücher so zu fälschen, daß man durch die Neunerrestprobe nicht auf die Fälschung geführt wird.

D. Der Primfactor 11 und die Zusammenfassung der Regeln über Primfactoren.

§ 92. Der Primfactor 11. In den letzten Abschnitten haben wir ausführlich den Neunerrest und seine Anwendung besprochen. Auch für die Zerlegung der Zahlen im Primfactoren haben wir aus der Betrachtung des Neunerrestes Vortheil geschöpft. Wenn uns der Neunerrest einer Zahl bekannt ist, können wir sofort entscheiden, ob die 3 zu den Primfactoren der Zahl gehört. In § 84 haben wir außerdem Regeln über die Primzahlen 2 und 5 aufgestellt. Der Schüler wird jetzt erwarten, daß wir uns zur 7 wenden. Aller-

dings könnten wir eine Regel aufstellen, welche uns zu prüfen gestattet, ob eine Zahl die 7 als Primfactor enthält, aber diese Regel ist so complicirt, daß sie selbst der Mathematiker sich immer von Neuem entwickelt. Wir wollen darum die 7 übergehen und sogleich die Primzahl 11 behandeln.

Betrachten wir zunächst nur dreistellige Zahlen. Es bestehen die Gleichungen:

$$132 = \mathbf{11} . 12, \quad 253 = \mathbf{11} . 23,$$
$$572 = \mathbf{11} . 52, \quad 583 = \mathbf{11} . 53.$$

Die vier Zahlen: 132, 253, 572 und 583 enthalten also als Primfactor die 11. Sehen wir uns diese vier Zahlen genauer an, so finden wir, daß bei denselben immer die Summe der beiden äußeren Zahlen gleich der mittleren Zahl ist.

Bei 132 ist: $1 + 2 = 3$,
Bei 253 ist: $2 + 3 = 5$,
Bei 572 ist: $5 + 2 = 7$,
Bei 583 ist: $5 + 3 = 8$.

In der That! Eine **dreistellige** Zahl hat immer den **Primfactor 11**, wenn bei ihr die **beiden äußeren** Ziffern **zusammen** gleich der mittleren sind.

Bei den Zahlen:

198, 473, 286,

ist $1 + 8 = 9$, $4 + 3 = 7$, $2 + 6 = 8$.

Bei den Zahlen:

352, 451, 693,

ist $3 + 2 = 5$, $4 + 1 = 5$, $6 + 3 = 9$.

Mithin gehört zu 198, 143, 286 sowohl wie zu 352, 451, 693 die 11 als Primfactor und zwar ist:

$$198 = \mathbf{11} . 18, \quad 473 = \mathbf{11} . 43,$$
$$286 = \mathbf{11} . 26, \quad 352 = \mathbf{11} . 32,$$
$$451 = \mathbf{11} . 41, \quad 693 = \mathbf{11} . 63.$$

Die soeben behandelte Regel ist interessant und einfach; aber sie betrifft nur wenige Zahlen. Wir können mit Hilfe derselben nicht einmal alle dreistelligen Zahlen auffinden, deren Primfactor 11 ist, denn es giebt dreistellige Zahlen, die 11 als Primfactor enthalten, ohne daß bei ihnen die Summe der äußeren Ziffern gleich der mittleren Ziffer ist. Z. B. ist $748 = \mathbf{11} . 68$, und doch ist $7 + 8$ nicht gleich 4. Es wird sich jetzt die Frage erheben, ob es nicht eine Regel giebt, die uns bei allen Zahlen, mögen sie nun zweistellig, dreistellig, vierstellig oder fünfstellig sein u. s. f., erkennen läßt, **ob 11 als Primfactor zu der betreffenden Zahl gehört oder nicht.** In der That! es giebt zwei solche Regeln, von denen wir die erste sogleich besprechen wollen.

Es besteht die Gleichung:

$$9\,381\,746 = \mathbf{11} . 852\,886.$$

In der Zahl 9 381 746 ist 11 mithin als Primfactor enthalten.

Sehen wir uns jetzt in der Zahl

9 381 746

die Bedeutung der einzelnen Ziffern an, indem wir von hinten nach vorn, also von der 6 zur 9 fortschreiten.

Die Ziffer 6 bezeichnet die Zahl der Einer,
„ „ 2 „ „ „ „ Zehner,
„ „ 7 „ „ „ „ Hunderter,
„ „ 1 „ „ „ „ Tausender,
„ „ 8 „ „ „ „ Zehntausender,
„ „ 3 „ „ „ „ Hunderttausender,
„ „ 9 „ „ „ „ Millioner[1]).

[1]) Die 12 haben wir nicht weiter zerlegt, weil wir nur zeigen wollen, daß **11** Primfactor von 132 ist. Auch künftig werden wir nicht alle Primfactoren angeben, wenn es uns nur darauf ankommt, auf einen Primfactor hinzuweisen. Wir werden vielmehr wie im obigen Falle die betreffende Zahl in ein Product von 2 Factoren auflösen.

[1]) Wir wollen hier kurz auf die Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. eingehen, aus denen mehrziffrige Zahlen zusammengesetzt sind. Betrachten wir die Zahl 243!

243 ist soviel wie 200 und 40 und 3;

in Zeichen:

$$243 = 200 + 40 + 3 = 2 . 100 + 4 . 10 + 3.$$

Ebenso ist;

$$567 = 5 . 100 + 6 . 10 + 7,$$
$$963 = 9 . 100 + 6 . 10 + 3.$$

Ferner haben wir:

$$2345 = 2 . 1000 + 3 . 100 + 4 . 10 + 5,$$
$$86534 = 8 \cdot 10000 + 6 . 1000 + 5 . 100 + 3 . 10 + 4.$$

Den beiden letzten Gleichungen wollen wir noch eine andere Gestalt geben.

Es ist:
$$100 = 10 . 10 = 10^2,$$
$$1000 = 10 . 10 . 10 = 10^3,$$
$$10000 = 10 . 10 . 10 . 10 = 10^4,$$
$$100\,000 = 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 10^5,$$
$$1\,000\,000 = 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 10^6.$$

Wenn wir noch bedenken, daß wir für 10 auch 10^1 setzen können, so erhalten wir:

$$2345 = 2 . 10^3 + 3 . 10^2 + 4 . 10^1 + 5,$$
$$89534 = 8 . 10^4 + 9 . 10^3 + 5 . 10^2 + 3 . 10^1 + 4.$$

Ferner ist:

$$\left(\begin{array}{l}9381746 = 9 . 10^6 + 3 . 10^5 + 8 . 10^4 + 1 . 10^3 \\ \qquad + 7 . 10^2 + 4 . 10^1 + 6\end{array}\right)$$

Demnach läßt sich jede mehrziffrige Zahl als

Wir wollen nun in

9 381 746

erst die Ziffern zusammenzählen, welche die Einer, Hunderter, Zehntausender, Millioner bezeichnen,

und dann die Ziffern addiren, welche die Anzahl der Zehner, der Tausender, der Hunderttausender angeben.

Die Ziffern der ersten Art sind: 6, 7, 8 und 9; die Ziffern der zweiten Art sind 4, 1 und 3.

Die Ziffern 6, 7, 8, 9 sind in

9381746

fettgedruckt.

Wenn wir 6, 7, 8 und 9 zusammenzählen, erhalten wir als **Summe 30**, in Zeichen, es ist:

$$6 + 7 + 8 + 9 = \mathbf{30}.$$

Addiren wir die Ziffern 4, 1 und 3, so ergiebt sich als **Summe 8**, denn es ist:

$$4 + 1 + 3 = 8.$$

Wenn wir die **kleinere Summe 8 von der größern 30 subtrahiren** erhalten wir als **Differenz 22**; denn es ist:

$$30 - 8 = 22.$$

22 ist ein **Vielfaches von 11**, denn 22 ist gleich 2 . 11.

Hierdurch werden wir auf die gesuchte Regel geführt. Dieselbe heißt:

Wenn wir ermitteln wollen, ob **11 Primfactor** einer Zahl ist, so addiren wir die **Einer, Hunderter, Zehntausender** u. s. f. einerseits und die **Zehner, Tausender, Hunderttausender** u. s. f. andererseits. Hierdurch erhalten wir **zwei Summen**, von denen wir die **Differenz** bilden. Ist diese Differenz ein **Vielfaches von 11**, oder **11** selbst oder **0**, so ist 11 als Primfactor in der betreffenden Zahl enthalten.

Entscheiden wir nach dieser Regel, ob 11 zu den Primfactoren der Zahl:

98765403

gehört. Wir werden zu diesem Zwecke erst die fettgedruckten Ziffern 3, 4, 6, 8 und dann die anderen Ziffern 0, 5, 7, 9 addiren. Es ist:

$$3 + 4 + 6 + 8 = 21 \text{ und}$$
$$0 + 5 + 7 + 9 = 21.$$

Beide Summen betragen 21; ihre Differenz ist gleich 0, denn wir haben:

$$21 - 21 = 0.$$

Mithin ist die Bedingung, welche unsere Regel stellt, erfüllt. Die Zahl 98 765 403 hat den Primfactor 11. In der That, es ist:

98 764 404 = 11 . 8 978 673.

Prüfen wir, ob die 11 Primfactor der Zahl

257609 ist.

Wenn wir die fettgedrückten Zahlen 9, 6, 5 zusammenzählen, ergiebt sich **20.**

Werden die Zahlen 0, 7 und 2 addirt, so erhalten wir als Summe **9**. 20 weniger 9 ist gleich **11**; 11 ist mithin die Differenz der beiden Summen. Nach unserer Regel hat daher die Zahl

257 609

den Primfactor 11; in der That! Es ist:

257 609 = 11 . 23 419.

Wir wollen drittens noch zusehen, ob 11 in der Zahl

346 859

als Primfactor enthalten ist. Die Summe der fettgedruckten Ziffern ist 21; die Summe der anderen Ziffern ist 14. 21 weniger 14 ist gleich **7**. Die Differenz 7 der beiden Ziffersummen ist in diesem Falle also weder gleich 0, noch gleich 11, noch gleich einem Vielfachen von 11.

Die Zahl 346 859 hat daher nicht den Primfactor 11.

Es ist bereits von uns erwähnt worden, daß man noch nach einer zweiten Methode

---

eine Summe darstellen; in dieser Summe ist die eine Summand gleich der letzten Ziffer der mehrziffrigen Zahl; die übrigen Summanden sind ein Product aus zwei Factoren; und zwar ist beim vorletzten Summanden der eine Factor die vorletzte Ziffer der mehrziffrigen Zahl und der andere Factor die erste Potenz von 10; beim drittletzten Summanden ist der eine Factor die drittletzte Ziffer der mehrziffrigen Zahl und der andere Factor die zweite Potenz von 10; beim viertletzten Summanden ist der eine Factor die viertletzte Ziffer der mehrziffrigen Zahl und der andere Factor die dritte Potenz von 10 u. s. f. Die zweite Potenz von 10 ist gleich 100, die dritte Potenz gleich 1000 u. s. f.

Bei einer **mehrziffrigen Zahl** bezeichnet also die **letzte** Ziffer die Anzahl der **Einer**, die **vorletzte** Ziffer die Anzahl der **Zehner**, die **drittletzte** Ziffer die Anzahl der **Hunderter**, die **viertletzte** Ziffer die Anzahl der **Tausender** 2c., welche als Summanden in der mehrziffrigen Zahl enthalten sind.

untersuchen kann, ob 11 zu den Primfactoren einer Zahl gehört; auch diese zweite, weniger bekannte Methode wollen wir kurz besprechen und dabei von der Gleichung:

$$123\,453 = \mathbf{11} \,.\, 11\,223$$

ausgehen. Diese Gleichung sagt uns, daß 11 einer der Primfactoren der Zahl 123 453 ist. Wir wollen zunächst, von der letzten Ziffer 3 ausgehend, durch einen senkrechten Strich je zwei Ziffern abtrennen, also zwischen die 5 und 4, und die 3 und 2 einen senkrechten Strich setzen. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir:

12 | 34 | 53.

Hierauf wollen wir die durch die senkrechten Striche von einander abgesonderten Theile der Zahl

12 | 34 | 53

zu einander addiren und schreiben:

$$\begin{array}{r} 53 \\ 34 \\ 12 \\ \hline 99 \end{array}$$

Die **Summe** von 53, 34 und 12 ist also 99, und zwar ist 99 ein **Vielfaches von 11.**

Sehen wir jetzt zu, ob wir auch bei anderen Zahlen, welche die 11 zum Primfactor haben, zu einem ähnlichen Resultate gelangen.

Es besteht die Gleichung:

$$2134 = \mathbf{11} \,.\, 194.$$

11 ist also ein Primfactor der Zahl 2134. Zwischen die 3 und 1 wollen wir ganz dem frühern Verfahren gemäß einen senkrechten Strich setzen; es ergiebt sich dann:

21 | 34.

Hierauf wollen wir 34 und 21 zusammenzählen und schreiben:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 21 \\ \hline 55 \end{array}$$

d. h. 55 ist die **Summe** der Zahlen 34 und 21; und zwar ist, wie wir sofort bemerken, 55 gleichfalls ein **Vielfaches von 11.**

Wenden wir uns noch zu einem dritten Beispiel! Es ist:

$$24\,783 = \mathbf{11} \,.\, 2253.$$

In 24 783 ist also 11 als Primfactor enthalten. Wenn wir durch senkrechte Striche die 8 von der 7 und die 4 von der 2 abtrennen, haben wir:

2 | 47 | 83.

Zählen wir jetzt 83, 47 und 2 zusammen, so erhalten wir als Summe 132; denn es ist:

$$\begin{array}{r} 83 \\ 47 \\ 2 \\ \hline 132 \end{array}$$

Der Geübte wird sogleich erkennen, daß die Summe 132 ein Vielfaches von 11 ist; da aber 132 eine dreistellige Zahl ist, können wir unser Verfahren noch weiter fortsetzen und auch 3 und 1 durch einen Strich trennen; wir haben dann:

1 | 32.

Addiren wir jetzt 32 und 1, so ergiebt sich 33; und daß 33 ein Vielfaches von 11 ist, bemerken wir sofort.

Unsere Beobachtungen können wir in folgenden Satz kleiden:

> Hat eine Zahl die **11** zum **Primfactor**, so ergiebt sich **11** oder ein **Vielfaches von 11,** wenn man von den Einern ausgehend hinter je zwei Ziffern einen Strich setzt, die so entstandenen Theilzahlen addirt und in dieser Weise fortfährt, bis man zu einer zweistelligen Zahl gelangt.

Wenn sich bei der Addition der Theilzahlen ein solches Vielfache von 11 nicht ergiebt, können wir daraus schließen, daß 11 nicht Primfactor ist.

Wenn wir z. B. bei

3 | 42

42 und 3 addiren, erhalten wir als Summe 45; 11 gehört also nicht zu den Primfactoren der Zahl 342, denn 45 ist kein Vielfaches von 11. In der That! es ist:

$$342 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 19.$$

2, 3, 3 und 19 sind daher die Primfactoren der Zahl 342, 11 ist nicht darunter.

§ 93. Zusammenfassung der Sätze über die Primfactoren. Die Sätze, welche wir über die Primfactoren aufgestellt haben, sind in verschiedenen Paragraphen zerstreut und durch längere Auseinandersetzungen über die Bildung des Neunerrestes und die Neu=

nerrestprobe unterbrochen. Es wird daher zweckmäßig sein, wenn wir diese Sätze zusammenfassen und übersichtlich ordnen. Wir haben folgende Sätze besprochen:

1) Jede **gerade Zahl** enthält den Primfactor **2**.

Die **2** ist **zweimal** Primfactor einer geraden Zahl, wenn die **4** in die **beiden letzten Ziffern** derselben **aufgeht**.

2) Jede Zahl, deren **letzte Ziffer** eine **5** oder **0** ist, enthält **5** als Primfactor.

5 ist **zweimal** Primfactor einer Zahl, die sich auf **25**, **50**, **75** oder **00** endigt.

In einer Zahl ist sowohl **5** wie **2** als Primfactor enthalten, wenn ihre **letzte Ziffer** eine **0** ist.

3) Eine Zahl mit dem **Neunerrest 3** oder **6** enthält die **3 einmal**, eine Zahl mit dem **Neunerrest 0** enthält die **3 zweimal** als Primfactor.

Wenn wir ermitteln wollen, ob **11 Primfactor** einer Zahl ist, können wir zwei Wege einschlagen. Wir können

1) Die **Einer, Hunderter, Zehntausender** u. s. f. einerseits und die **Zehner, Tausender, Hunderttausender** u. s. f. andererseits **addiren**. Dadurch erhalten wir **zwei Summen**, von denen wir die **Differenz** bilden. Ist diese Differenz ein **Vielfaches von 11**, oder **11** selbst oder **0**, so ist **11** als **Primfactor** in der betreffenden Zahl enthalten.

Wir können

2) von der letzten Ziffer der zu untersuchenden Zahl ausgehend je **zwei Ziffern abtrennen**, und die dadurch entstandenen **Theilzahlen zusammenzählen**. Ergiebt sich dabei eine mehr als zweistellige Zahl, so wiederholen wir das ebengenannte Verfahren, bis wir zu einer zweistelligen Zahl gelangen. Ist nun das schließliche Resultat **11** selbst oder ein **Vielfaches von 11**, so ist 11 einer der Primfactoren der untersuchten Zahl.

Wir können noch hinzufügen, daß

alle **dreiziffrigen** Zahlen, bei denen die **Summe der äußeren Zahlen** gleich der mittleren ist, die **11** als **Primfactor** enthalten.

Aufgaben. Der Schüler möge den vorigen Sätzen gemäß entscheiden

1) welche der Zahlen 7, 9, 10, 13, 18, 112, 114, 826, 972, 519 die 2 einmal bez. zweimal als Primfactor enthalten;

2) bei welchen von den Zahlen 13, 15, 27, 25, 37, 45, 329, 475, 1050, 3900 die 5 einmal, bez. zweimal zu den Primfactoren gehört;

3) bei welchen von den Zahlen 21, 37, 42, 53, 64, 126, 375, 945, 222, 13455 die 3 einmal bez. zweimal Primfactor ist,

4) welche der Zahlen 572, 682, 198, 3476, 5808, 190718, 98765, 8173, 90208173 die 11 als Primfactor enthalten, und zwar möge er hierbei alle vorher genannten Methoden in Anwendung bringen.

§ 94. Anwendungen der Sätze des vorigen Paragraphen. Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, wie man mit Hilfe der vorigen Sätze die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren bewerkstelligen kann. Sehen wir uns erst die Zahl 198 an! Dieselbe hat zum Primfactor

a) die 2 einmal als gerade Zahl,

b) die 3 zweimal, weil der Neunerrest 0 beträgt,

c) die 11 einmal, weil $8 + 1 = 9$ [1]) ist.

Mit 2, 3 . 3 und 11 sind die Primfactoren der Zahl 198 erschöpft, denn wir haben:

$$198 = 2 . 3 . 3 . 11.$$

Zerlegen wir jetzt die Zahl 1650, der eine Primfactor ist 2, weil 1650 eine gerade Zahl ist; ein zweiter Primfactor ist 3, denn der Neunerrest von 1650 beträgt 3; ferner ist 5 zweimal in 1650 als Primfactor enthalten, denn 1650 endigt sich auf 50; als fünften Primfactor haben wir, wie aus der Anmerkung hervorgeht[2]), 11 aufzustellen. Damit haben wir wieder alle Primfactoren der Zahl 1650 gefunden, denn wir haben:

$$1650 = 2 . 3 . 5 . 5 . 11.$$

Behandeln wir jetzt ein drittes Beispiel, welches uns noch einen Schritt weiter fördern wird. Es sei uns die Aufgabe gestellt, die Zahl 2310 zu zerlegen. Weil die letzte Ziffer eine 0 ist, muß sowohl 2 wie 5 Primfactor sein; ferner muß 3 zu den Primfactoren gehören, denn der Neunerrest von 2310 ist 6. Wie in der Anmerkung gezeigt wird[3]), ist auch 11 einer der Primfactoren.

Mit 2, 3, 5, 11 ist aber die Reihe der Primfactoren noch nicht erschöpft, denn 2310 ist nicht gleich 2 . 3 . 5 . 11; vielmehr ist 2 . 3 . 5 . 11 erst gleich 330.

Es muß also 2 . 3 . 5 . 11 oder 330 noch mit einem Factor multiplicirt werden, wenn sich 2310 ergeben soll. Um diesen Factor zu finden, werden wir zusehen, wie oft 330 in 2310 enthalten ist, d. h. wir werden mit 330 in 2310 dividiren. Die Division ergiebt, daß 330 in 2370 **7** mal aufgeht; folglich ist

---

[1]) D. h. in 198 ist die Summe der beiden äußeren Ziffern 1 und 8 gleich der mittlern 9.
[2]) Machen wir in 1650 zwischen 5 und 5 einen senkrechten Strich, so erhalten wir: 16 | 50. Addiren wir nun 50 und 16, so ergiebt sich 66, d. i. ein **Vielfaches von 11**. [3]) Sondern wir in 2310 die 23 und die 10 durch einen senkrechten Strich von einander ab, so ergiebt sich 23 | 10. Zählen wir 23 und 10 zusammen, so erhalten wir 33, d. i. ein **Vielfaches von 11**.

$$2310 = 330 . 7$$
$$= 2 . 3 . 5 . 11 . 7$$
$$= 2 . 3 . 5 . 7 . 11.$$

Gehen wir zu einem ähnlichen Beispiele über! Nehmen wir an, es solle 6840 zerlegt werden. Die beiden letzten Ziffern dieser Zahl sind 40; in 40 geht 4 auf, folglich ist die 2 zweimal Primfactor von 6840; ferner endigt 6840 auf 0, daher ist auch 5 Primfactor; der Neunerrest von 6840 ist 0; daher kommt auch die 3 zweimal als Primfactor vor. Doch mit 2, 2, 3, 3, 5 sind die Primfactoren der Zahl 6840 noch nicht erschöpft, denn 2 . 2 . 3 . 3 . 5 ist gleich 180 und nicht gleich 6840; wenn wir 6840 erhalten sollen, muß vielmehr 180 noch mit einem Factor multiplicirt werden, der sich ergiebt, wenn wir 6840 durch 180 dividiren. Die Division zeigt, daß 180 in 6840 38-mal enthalten ist. Wir haben daher:

$$6840 = 180 . 38$$
$$= 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 38.$$

38 können wir noch weiter zerlegen, es ist: 38 = 2. 19; mithin ist:

$$6840 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 2 . 19$$
$$= 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 19.$$

Aufgaben. Der Schüler möge in der soeben angegebenen Weise die Zahlen: 585, 350, 510, 2024, 2475, 17 325, 71 775 zerlegen.

Ohne Fleiß, kein Preis!

Lection 37.

A. Die Divisoren der Zahlen und das Heben.

§ 95. Die Divisoren der Zahlen. Die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren führt uns zu der wichtigen Lehre von den **Divisoren der Zahlen.** Ein bestimmtes Beispiel soll uns den Begriff der „Divisoren" sogleich erläutern. Von 15 sind **Divisoren** die Zahlen, welche in 15 **bei der Division aufgehen,** oder anders ausgedrückt, eine **ganze Anzahl Male** in 15 enthalten sind. Divisoren von 15 sind also die Zahlen 3, 5 und 15 selbst, 3 geht 5-mal, 5 geht 3-mal und 15 geht 1-mal in 15 auf.

Von 28 sind die Zahlen 2, 4, 7, 14 und 28 die Divisoren, denn 2 geht in 28 14-mal, 4 geht 7-mal, 7 geht 4-mal, 14 geht 2-mal und 28 geht 1-mal auf. Wie wir noch später des Weiteren entwickeln werden, ist die Feststellung der Divisoren für die Vereinfachung der Bruchausdrücke durch das Heben von großer Bedeutung. Es wird sich daher die Frage erheben, ob wir nicht nach einer bestimmten Methode die Divisoren aufsuchen können. In der That! Wir werden sehen, daß sich die Divisoren leicht ergeben, wenn wir eine Zahl zerlegt haben.

Betrachten wir die Zahl 30! 30 hat die Primfactoren 2, 3 und 5. Dividiren wir 30 der Reihe nach durch einen dieser Primfactoren, so ergiebt sich:

$$\frac{30}{2}, \quad \frac{30}{3}, \quad \frac{30}{5}.$$

Wenn wir in diesen Divisionsausdrücken für 30 das gleichwerthige Product: 2 . 3 . 5 einsetzen und dann an den auf Seite 202 behandelten Satz denken:

Wir brauchen, um ein **Product** durch **einen** der **Factoren** zu **dividiren,** nur den betreffenden **Factor** aus dem Producte **fort**zulassen,

so können wir schreiben

$$\frac{30}{2} = \frac{2 . 3 . 5}{2} = 3 . 5,$$

$$\frac{30}{3} = \frac{2 . 3 . 5}{3} = 2 . 5,$$

$$\frac{30}{5} = \frac{2 . 3 . 5}{5} = 2 . 3.$$

3 . 5, 2 . 5, 2 . 3 sind ganze Zahlen; die Primfactoren 2, 3 und 5 sind also eine **ganze Anzahl Male** in 30 enthalten, oder mit anderen Worten, die **Primfactoren** 2, 3 und 5 sind **Divisoren** der Zahl 30.

Gehen wir zu einem andern Beispiel über. Die Zahl 1155 hat die Primfactoren: 3, 5, 7, 11. Wenn wir 1155 nach einander durch 3, 5, 7, 11 dividiren und für 1155 das Product 3 . 5 . 7 . 11 einführen, erhalten wir:

$$\frac{1155}{3} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{3} = 5 . 7 . 11,$$

$$\frac{1155}{5} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{5} = 3 . 7 . 11,$$

$$\frac{1155}{7} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{7} = 3 . 5 . 11,$$

$$\frac{1155}{11} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{11} = 3 . 5 . 7.$$

5 . 7 . 11, ebenso 3 . 7 . 11, 3 . 5 . 11, 3 . 5 . 7 stellen ganze Zahlen dar; die vorstehenden Divisionsexempel sagen uns also wieder, daß die **Primfactoren** 3, 5, 7, 11 in 1155 **aufgehen,** oder anders ausgedrückt, daß 3, 5, 7, 11 **Divisoren** der Zahl 1155 sind.

Wir wollen bei unserm Beispiele noch längere Zeit verweilen und jetzt 1155 nicht nicht durch einen Primfactor, sondern durch ein Product mehrerer Primfactoren, etwa durch 3 . 5, 5 . 7 und 5 . 7 . 11 dividiren, oder anders ausgedrückt, wir wollen der Reihe nach die Ausdrücke

$$\frac{1155}{3 . 5}, \quad \frac{1155}{5 . 7}, \quad \frac{1155}{5 . 7 . 11}$$

berechnen.

Wenn wir 1155 mit dem gleichwerthigen Product 3 . 5 . 7 . 11 vertauschen und den Satz berücksichtigen, daß wir

> um ein Product durch **mehrere** seiner **Factoren** zu **dividiren,** die mit einander multiplicirt sind, diese **Factoren** aus dem Product einfach **fort**lassen können,

so werden wir schreiben:

$$\frac{1155}{3 . 5} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{3 . 5} = 7 . 11,$$

$$\frac{1155}{5 . 7} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{5 . 7} = 3 . 11,$$

$$\frac{1155}{5 . 7 . 11} = \frac{3 . 5 . 7 . 11}{5 . 7 . 11} = 3.$$

7 . 11, 3 . 11 und 3 sind gleich **ganzen Zahlen**; d. h. **die Producte** 3 . 5, 5 . 7, 5 . 7 . 11 **der Primfactoren** sind in 1155 eine **ganze Anzahl Male** enthalten, mit anderen Worten die Producte 3 . 5, 5 . 7, 5 . 7 . 11 oder die gleichwerthigen Zahlen 15, 35, 385[1]) sind **Divisoren** der Zahl 1155.

Fassen wir jetzt zusammen, was dieser Paragraph uns bisher gebracht hat! Wir haben zwei Zahlen (erst 30 und dann 1155) durch jeden ihrer **Primfactoren** dividirt und gefunden, daß die Primfactoren **Divisoren** der betreffenden Zahlen waren, d. h. in die betreffenden Zahlen aufgingen. Wir haben ferner die Zahl 1155 durch **Producte** ihrer **Primfactoren** getheilt und dabei erfahren, daß auch die Producte der Primfactoren **Divisoren** der Zahl 1155 waren. In der That! es besteht der Satz:

> **Divisoren** einer Zahl sind 1) die **Primfactoren,** 2) alle **Producte,** die man **aus den Primfactoren** bilden kann.

Es ist: 165 = 3 . 5 . 11, d. h. 3, 5 und 11 sind die Primfactoren von 165.

Nach dem vorigen Satze sind daher Divisoren der Zahl 165

1) die Primfactoren: 3, 5, 11,

2) die Producte: 3 . 5, 3 . 11, 5 . 11, 3 . 5 . 11, bez. die Zahlen: 15, 33, 55, 165[1]).

In der That! der Schüler kann sich durch Division leicht überzeugen, daß ebensowohl 3, 5, 11 wie 15, 33, 55 und 165 in 165 aufgeht[2]).

Wir haben ferner: 345 = 3 . 5 . 23; mithin sind Divisoren der Zahl 345

1) die Primfactoren: 3, 5 und 23,

2) die Producte: 3 . 5, 3 . 23, 5 . 23, 3 . 5 . 23, bez. die Zahlen: 15, 69, 115, 345.

Nehmen wir noch ein drittes Beispiel! Wir haben: 468 = 2 . 2 . 3 . 3 . 13, folglich sind Divisoren der Zahl 468,

1) die Primfactoren: 2, 3, 13,

2) die Producte: 2 . 2, 3 . 3, 2 . 3, 2 . 13, 3 . 13, 2 . 2 . 3, 2 . 3 . 3, 2 . 2 . 13, 2 . 3 . 13, 3 . 3 . 13 u. s. f. bez. die Zahlen: 4, 9, 6, 26, 39, 12, 18, 52, 78, 117 u. s. f.

Aufgaben. Wenn wir die Zahlen 102, 154, 910, 2205, 2871 zerlegen, erhalten wir:

102 = 2 . 3 . 17,
154 = 2 . 7 . 11,
910 = 2 . 5 . 7 . 13,
2205 = 3 . 3 . 5 . 7 . 7,
2871 = 3 . 3 . 11 . 29.

Der Schüler möge nun in der oben erörterten Weise die Divisoren der Zahlen: 102, 154, 910, 2205, 2871 angeben.

§ 96. Die gemeinschaftlichen Divisoren des Zählers und Nenners.

In § 82 haben wir auseinandergesetzt, daß durch das Heben ein Bruchausdruck eine einfachere Gestalt nur annimmt, wenn wir Zähler und Nenner durch eine Zahl dividiren, die sowohl in den Zähler wie in den Nenner aufgeht. Diesen Gedanken können wir noch in eine andere Form kleiden, wenn wir das Wort „Divisor" einführen. Wir können dann sagen:

---

[1]) Es ist:
3 . 5 = 15, 5 . 7 = 35, 5 . 7 . 11 = 385.

[1]) Es ist 15 = 3 . 5, 33 = 3 . 11, 55 = 5 . 11, 165 = 3 . 5 . 11. [2]) 15 geht 11-mal, 33 geht 5-mal, 55 geht 3-mal, 165 geht 1-mal in 165 auf.

ein **Bruch** wird **vereinfacht,** wenn wir ihn durch eine Zahl heben, die zugleich Divisor des Zählers und des Nenners, oder anders gesagt, **gemeinschaftlicher Divisor des Zählers und des Nenners ist.**

Sehen wir uns den Bruch $\frac{143}{165}$ an! Wir erkennen sofort, daß 11 zu den Primfactoren des Zählers und des Nenners gehört*). 11 ist daher nach dem vorigen Paragraphen Divisor des Zählers und zugleich Divisor des Nenners, oder anders ausgedrückt, gemeinschaftlicher Divisor des Zählers und des Nenners. Wenn wir $\frac{143}{165}$ durch 11 heben, wird der Bruchausdruck daher einfacher. In der That! Theilen wir 143 durch 11, so ergiebt sich 13; wird 165 durch 11 dividirt, so erhalten wir 15; mithin ist:

$$\frac{143}{165} = \frac{13}{15}.$$

Nehmen wir ein zweites Beispiel! In $\frac{105}{195}$ ist 5 Primfactor im Zähler sowohl wie im Nenner**); daher ist 5 auch gemeinschaftlicher Divisor des Zählers und des Nenners. Wenn wir $\frac{105}{195}$ durch 5 heben, ergiebt sich:

$$\frac{105}{195} = \frac{21}{39},$$

der Bruchausdruck wird, wie wir sehen, durch das Heben mit dem gemeinschaftlichen Divisor 5 einfacher.

Bei $\frac{105}{195}$ gehört auch 3 zu den Primfactoren***) des Zählers und des Nenners; daher ist auch 3 gemeinschaftlicher Divisor. Wird $\frac{105}{195}$ durch 3 gehoben, so vereinfacht sich mithin der Bruchausdruck gleichfalls, denn es ist:

$$\frac{105}{195} = \frac{35}{65}.$$

Wir können den Bruch $\frac{105}{195}$ noch mehr vereinfachen. Wenn wir die Zahlen 105 und 195 in die Primfactoren zerlegen und schreiben:

$$\frac{205}{195} = \frac{3.5.7}{3.5.13},$$

so finden wir, daß auch 3.5 oder 15 gemeinschaftlicher Divisor ist. Heben wir $\frac{105}{195}$ durch 15, so erhalten wir:

$$\frac{105}{195} = \frac{7}{13},$$

d. h. es ergiebt sich durch das Heben mit 15 ein Bruchausdruck, der viel einfacher ist, als die Bruchausdrücke, die wir durch Heben durch 3 und 5 gewonnen hatten.

Ueberhaupt wird der **Bruchausdruck** um so **einfacher,** je **größer** der **gemeinsame Divisor** ist, durch den er gehoben wird. Es wird daher am **vortheilhaftesten** sein, wenn wir durch den **größten gemeinsamen Divisor** heben.

Den größten gemeinsamen Divisor können wir leicht finden, wenn wir den Zähler sowohl wie den Nenner in Primfactoren zerlegen. So ist z. B.

$$\frac{3125}{3795} = \frac{3.5.11.19}{3.5.11.23}.$$

Es sind darum sowohl die Zahlen 3, 5, 11, als auch die Producte 3.5, 5.11 u. s. w. gemeinschaftliche Divisoren, der größte gemeinschaftliche Divisor ist aber 3.5.11 oder 165. Wenn wir $\frac{3165}{3795}$ durch 165 heben, haben wir:

$$\frac{3165}{3795} = \frac{19}{23}.$$

Wie in diesem Falle erhalten wir immer den **größten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und des Nenners,** wenn wir die Primfactoren, die dem Zähler und Nenner gemeinsam sind, mit einander multipliciren.

So ist:

$$\frac{1092}{1365} = \frac{2.2.3.7.13}{3.5.7.13}.$$

Der größte gemeinschaftliche Divisor des Zählers und Nenners ist daher 3.7.13 bez. 213. Heben wir $\frac{1092}{1365}$ durch 3.7.13, so erhalten wir:

$$\frac{1092}{1365} = \frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}.$$

Dieses Beispiel ist für uns noch sehr lehrreich. Wenn wir

$$\frac{2.2.3.7.13}{3.5.7.13}$$

durch 3.7.13, den größten gemeinschaftlichen Divisor, heben, werden wir im Zähler und

---

*) Die Summe der äußeren Ziffer ist gleich der mittleren Ziffer. **) 5 ist im Zähler 105 und im Nenner 155 die letzte Ziffer. ***) Der Neunerrest des Zählers 105 ist 6 und der Neunerrest des Nenners 195 ist 6.

Nenner einfach 3.7.13 fortlassen, denn um ein Product durch mehrere seiner Factoren zu dividiren, die mit einander multiplicirt sind, brauchen wir gemäß S. 203 nur die betreffenden Factoren aus dem betreffenden Producte fortzulassen. Auch in

anderen Fällen werden wir, wenn Zähler und Nenner in Primfactoren zerlegt sind, den ganzen **Bruch** durch den **größten gemeinschaftlichen Divisor heben,** indem wir im Zähler und im Nenner die **gemeinsamen Primfactoren fortlassen.**

Es ist:

$$\frac{30}{105} = \frac{2.3.5}{3.5.7}.$$

Wenn wir 3.5 auf der rechten Seite im Zähler und Nenner entfernen und schreiben:

$$\frac{30}{105} = \frac{2}{7},$$

so haben wir $\frac{30}{105}$ durch den größten gemeinschaftlichen Divisor 3.5 gehoben.

Aufgaben. Der Schüler möge die Brüche: $\frac{20}{30}$, $\frac{70}{130}$, $\frac{140}{315}$, $\frac{770}{693}$, $\frac{260}{621}$, $\frac{24}{40}$, $\frac{45}{126}$ heben, nachdem er Zähler und Nenner in Primfactoren zerlegt hat.

§ 97. Der größte gemeinschaftliche Divisor des Zählers und Nenners. Wir haben zwar schon gezeigt, wie man durch Zerlegung in Primfactoren den größten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners bestimmen kann; wir wollen aber noch auf einen zweiten Weg hinweisen, den man gewöhnlich einschlägt.

Wenn man den gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen ermitteln will, **dividirt** man **die kleinere Zahl in die größere,** und wenn ein Divisionsrest bleibt, so wird **mit** diesem **Divisionsrest in den vorausgehenden Divisor dividirt,** und so verfährt man weiter, bis die **Division aufgeht.** Der **letzte Divisor** ist dann der gesuchte **größte gemeinschaftliche Divisor** (größte gemeinschaftliche Theiler) der beiden Zahlen.

Nehmen wir ein Beispiel! Es sei uns aufgetragen, den Bruch $\frac{65}{1134}$ zu heben. Wir werden dann den größten gemeinschaftlichen Divisor von 65 und 1134 aufsuchen und zu diesem Zweck mit 65 in 1134 dividiren und schreiben:

```
65 | 1134 | 17
      65
     ----
     484
     455
     ----
      26
```

Mit dem Divisionsrest 26 müssen wir dann in den Divisor 65 dividiren, bis wir wieder auf einen Divisionsrest treffen. Wir erhalten dann:

```
65 | 1131 | 17
      65
     ----
     481
     455
     ----
      26 | 65 | 2
           52
          ----
           13
```

13 bleibt jetzt als Divisionsrest; wenn wir noch mit 13 in 26 dividiren, erhalten wir:

```
65 | 1131 |17
      65
     ----
     481
     455
     ----
      26 | 65 | 2
           22
          ----
           13 | 26 | 2
                26
               ----
                —
```

Die Division geht jetzt auf; 13 ist der letzte Divisor, mithin auch der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 65 und 1131. Wenn wir $\frac{65}{1131}$ durch 13 heben, erhalten wir:

$$\frac{65}{1131} = \frac{5}{87}.$$

Suchen wir jetzt auf dem soeben angegebenen Wege den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Zahlen 13 und 19, um den Bruch $\frac{13}{19}$ zu heben.

Wir werden dann schreiben:

```
13 | 19 | 1
     13
    ----
      6 | 13 | 2
          12
         ----
           1 | 6 | 3
               6
              ---
               —
```

Der letzte Divisor ist 1; 1 ist also der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 13 und 19. Wenn wir $\frac{13}{16}$ durch 1 heben, erhalten wir wir wieder $\frac{13}{16}$, denn 13 dividirt durch 1 giebt 13, und 16 dividirt durch 1 giebt 16; die Form des Bruches hat sich also durch das Heben durch 1 gar nicht geändert.

Aufgaben. Der Schüler möge die Brüche: $\frac{24}{84}$, $\frac{93}{108}$, $\frac{29}{157}$, $\frac{10}{156}$ durch den größten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners heben; und zwar möge er den größten gemeinschaftlichen Divisor auf dem in unserm Paragraphen bezeichneten Wege suchen.

B. Addition und Subtraction der Brüche.

§ 98. Addition der Brüche mit gleichen Nennern. Nachdem wir die Lehre vom Heben erledigt haben, wollen wir die **Addition der Brüche** behandeln, und zwar wollen wir uns zunächst mit **Brüchen** beschäftigen, **die gleichen Nenner haben.** Wiederholt sind von uns

schon solche Brüche addirt worden; in § 79 fanden wir z. B., daß 20 Viertel und 3 Viertel gleich 23 Vierteln und daß 63 Neuntel und 5 Neuntel gleich 68 Neunteln sind. Wenn wir jetzt auf die Addition der Brüche mit gleichen Nennern eingehen, so geschieht es, um uns die Regel zum Bewußtsein zu bringen, nach der wir schon früher unbewußt verfahren sind.

Kehren wir zu den beiden angeführten Beispielen zurück! 20 Viertel und 3 Viertel geben 23 Viertel; in Zeichen, wir haben:

$$\frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4};$$

63 Neuntel und 5 Neuntel geben 68 Neuntel; es besteht mithin die Gleichung:

$$\frac{63}{9} + \frac{5}{9} = \frac{63 + 5}{9} = \frac{68}{9}.$$

Ebenso werden wir haben:

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1 + 5}{12} = \frac{6}{12},$$

$$\frac{2}{13} + \frac{4}{13} + \frac{5}{13} = \frac{2 + 4 + 5}{13} = \frac{11}{14},$$

$$\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} = \frac{2 + 4 + 8}{15} = \frac{14}{15},$$

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + b + c}{d}.$$

Sehen wir uns die letzte Gleichung an! Die linke Seite fordert uns auf, drei Brüche mit dem gleichen Nenner d zu addiren; die rechte Seite sagt uns, daß wir diese Addition ausführen können, indem wir die Zähler a, b, c der drei Brüche addiren und der Summe $a + b + c$ den gemeinsamen Nenner d geben.

Allgemein besteht der Satz:

Um Brüche mit **gleichen Nennern** zu **addiren, können** wir die **Zähler addiren** und der **Summe der Zähler** den **gemeinsamen Nenner** geben.

Aufgaben. Der Schüler möge 1) $\frac{1}{7}$ und $\frac{3}{7}$,
2) $\frac{1}{8}$ und $\frac{3}{8}$, 3) $\frac{1}{15}$ und $\frac{7}{15}$,
4) $\frac{3}{19}$, $\frac{4}{19}$, $\frac{5}{19}$ und $\frac{7}{19}$,
5) $\frac{3}{16}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$ und $\frac{13}{16}$,
6) $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$ und $\frac{5}{a}$, 7) $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ und $\frac{c}{m}$
addiren.

§ 99. Die Addition der Brüche mit ungleichen Nennern.

Wie uns der vorige Paragraph gelehrt hat, können wir Brüche mit gleichen Nennern ohne besondere Schwierigkeit addiren. Wir werden uns jetzt die Aufgabe zu stellen haben, auch bei **Brüchen mit ungleichen Nennern** die **Addition** vorzunehmen, also etwa Brüche wie $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ zusammenzuzählen. Diese Aufgabe können wir leicht lösen, wenn es uns gelingt, **die Brüche mit ungleichen Nennern in Brüche mit gleichen Nennern zu verwandeln;** denn wenn wir diese Verwandlung ausgeführt haben, können wir nach den Regeln verfahren, welche wir im vorigen Paragraphen für die Addition der Brüche mit gleichen Nennern aufgestellt haben.

In der That! Wenn wir an den Satz denken, daß durch **Erweitern der Werth eines Bruches nicht geändert wird***), können wir die Umwandlung der Brüche mit ungleichen Nennern in Brüche mit gleichen Nennern vornehmen.

Wenden wir uns zu einem bestimmten Beispiele! Es sei uns aufgetragen, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ zu addiren, oder anders ausgedrückt:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

zu berechnen.

Erweitern wir $\frac{1}{2}$ mit 2, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Wenn wir nun $\frac{1}{2}$ mit dem gleichwerthigen Bruch $\frac{2}{4}$ vertauschen, so wird aus $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{4}.$$

Bei diesem Ausdruck haben wir zwei Brüche mit gleichen Nennern; nach dem vorigen Paragraph können solche Brüche addirt werden; und zwar erhalten wir:

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2 + 3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Im Ganzen ist also:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2 + 3}{4} = \frac{4}{5}$$

d. h. wenn wir $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ addiren, erhalten wir als Summe $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$**).

Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über und versuchen wir die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{15}$ zu addiren. Zunächst werden wir $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{15}$ durch Erweitern auf gleichen Nenner bringen. Es ergiebt sich:

---

*) Siehe Seite 298. Wenn $\frac{5}{4}$ in eine gemischte Zahl verwandelt wird, ergiebt sich $1\frac{1}{4}$.

$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$, $\frac{3}{10}$ ist mit 3 erweitert,
$\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$, $\frac{1}{6}$ ist mit 5 erweitert,
$\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$, $\frac{2}{15}$ ist mit 2 erweitert.

Folglich ist:

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} + \frac{4}{30}$$
$$= \frac{9 + 5 + 4}{30} = \frac{18}{30}.$$

Jetzt haben wir die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{15}$ addirt, ihre Summe beträgt $\frac{18}{30}$ oder $\frac{3}{5}$*).

Addiren wir noch drittens die drei Brüche: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{21}$. Wenn wir $\frac{2}{3}$ mit 7 und $\frac{5}{7}$ mit 3 erweitern, erhalten wir:

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} \text{ und } \frac{5}{7} = \frac{15}{21}.$$

Mithin ist:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{11}{21} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} + \frac{11}{31}$$
$$= \frac{14 + 15 + 11}{21}$$
$$= \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}.$$

d. h. die Summe der drei Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{21}$ beträgt $\frac{40}{21}$ oder $1\frac{19}{21}$.

§ 100. Der Generalnenner. Betrachten wir das letzte Beispiel genauer! Der Zweck der Rechenoperationen, die wir vorgenommen haben, ist vollkommen durchsichtig. Wir haben $\frac{2}{3}$ mit 7 und $\frac{5}{7}$ mit 3 erweitern müssen, um die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{21}$ auf den gleichen Nenner 21 zu bringen. Der Schüler wird aber fragen, auf welche Weise wir erfahren, daß wir $\frac{2}{3}$ gerade mit 7 und $\frac{5}{7}$ gerade mit **3** zu erweitern haben, um den Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{21}$ einen gleichen Nenner zu geben. In der That! Die Frage ist berechtigt, und die Antwort ist in unserm Falle nicht schwer. Stellen wir die drei zu addirenden Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{21}$ neben einander und zerlegen wir dabei 21 in 3 . 7, so erhalten wir:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{11}{3.7}.$$

Hier erkennen wir sofort, daß alle drei Brüche den **gleichen Nenner 3 . 7** erhalten, wenn wir in $\frac{2}{3}$ den Nenner 3 mit 7 und in $\frac{5}{7}$ den Nenner 7 mit 3 multipliciren.

Weil sich aber der Werth der Brüche ändern würde, wenn wir die Nenner einseitig multiplicirten, müssen wir auch die Zähler multipliciren, d. h. wir müssen $\frac{2}{3}$ mit 7, und $\frac{5}{7}$ mit 3 **erweitern.** Aus:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{11}{3.7}$$

wird dann

$$\frac{2.7}{3.7}, \quad \frac{3.5}{3.7}, \quad \frac{11}{3.7}$$

$$\text{oder: } \frac{14}{21}, \quad \frac{15}{21}, \quad \frac{11}{21}.$$

Diese drei Brüche haben wir bereits addirt.

Nehmen wir ein weiteres Beispiel! Suchen wir $\frac{3}{22} + \frac{5}{33} + \frac{7}{66}$ zu berechnen. Wenn wir wieder die Nenner der drei Brüche: $\frac{3}{22}$, $\frac{5}{33}$, $\frac{7}{66}$ zerlegen, so erhalten wir:

$$\frac{3}{2.11}, \quad \frac{5}{3.11}, \quad \frac{7}{2.3.11}.$$

Die drei Brüche werden, ohne ihren Werth zu ändern, den **gemeinsamen Nenner** 2 . 3 . 11 annehmen, wenn wir den ersten Bruch mit 3 und den zweiten Bruch mit 2 erweitern. Wir erhalten dann der Reihe nach:

$$\frac{3.3}{2.3.11}, \quad \frac{2.5}{2.3.11}, \quad \frac{7}{2.3.11},$$

oder wenn die durch die Malzeichen angedeuteten Multiplicationen ausgeführt werden,

$$\frac{9}{66}, \quad \frac{10}{68}, \quad \frac{7}{66}.$$

Wir können mithin schreiben:

$$\frac{3}{22} + \frac{5}{33} + \frac{7}{66} = \frac{9}{66} + \frac{10}{66} + \frac{7}{66}$$
$$= \frac{9 + 10 + 7}{66} = \frac{26}{66}.$$

Die Addition der drei Brüche $\frac{3}{22}$, $\frac{5}{33}$ und $\frac{7}{66}$ ist jetzt vollzogen; als Summe hat sich der Bruch $\frac{26}{66}$ ergeben.

Die beiden soeben behandelten Beispiele hatten nur den Zweck, den Schüler in den allgemeinen Grundgedanken der Methode einzuweihen, die man beim Addiren der Brüche mit ungleichen Nennern befolgt. Wir wollen jetzt tiefer auf die Theorie der Addition eingehen, müssen aber zuvor eine kurze Bemerkung machen.

Um Brüche mit ungleichen Nennern zu addiren, formten wir sie durch Erweitern

*) Heben wir $\frac{18}{30}$ durch 6; so erhalten wir: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

derart um, daß sie einen **gemeinsamen Nenner** annahmen. Dieser gemeinsame Nenner wird gewöhnlich mit dem Worte **Generalnenner** bezeichnet. Im letzten Falle stimmte der Generalnenner mit dem Nenner des Bruches $\frac{7}{66}$ überein; wir werden aber sehen, daß er nicht immer so leicht gefunden wird, vielmehr werden wir zeigen, daß in den meisten Fällen der Generalnenner nach einer besondern Regel aufgesucht werden müsse.

Die folgenden Beispiele sollen uns darüber belehren! Es sei uns aufgetragen, die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{14}$ und $\frac{8}{35}$ zu addiren. Wie vorher werden wir die Nenner dieser Brüche zerlegen und dadurch der Reihe nach erhalten:

$$\frac{3}{2.5}, \quad \frac{2}{2.7}, \quad \frac{8}{5.7}.$$

Hier können wir weder 2.5, noch 2.7, noch 5.7 zum gemeinschaftlichen Nenner (zum Generalnenner) machen; denn mit welchen ganzen Zahlen wir auch die drei oben genannten Brüche erweitern mögen, wir werden nicht erreichen, daß sie alle einen der drei Nenner 2.5, 2.7, 5.7 haben.

Sehen wir uns dagegen das Product: 2.5.7 an! In demselben ist **jeder Primfactor einmal vertreten, welchen wir in den Nennern** (2.5, 2.7, 5.7) **der zu addirenden Brüche bemerken.** Wie eine leichte Ueberlegung zeigt, können wir durch Erweitern die drei Brüche:

$$\frac{3}{2.5}, \quad \frac{2}{2.7}, \quad \frac{8}{5.7}$$

ohne Schwierigkeit so umformen, daß das Product 2.5.7 **Generalnenner** (gemeinschaftlicher Nenner) wird. Um dies zu bewirken, brauchen wir blos den ersten Bruch mit 7, den zweiten Bruch mit 5, den dritten Bruch mit 2, also jeden der Brüche mit demjenigen Primfactor des Generalnenners 2.5.7 zu erweitern, welcher in dem Nenner des betreffenden Bruches nicht enthalten ist.

Wir erhalten:

$\frac{3}{2.5} = \frac{3.7}{2.5.7}$, $\frac{3}{2.5}$ ist mit 7 erweitert,

$\frac{2}{2.7} = \frac{2.5}{2.5.7}$, $\frac{2}{2.7}$ ist mit 5 erweitert,

$\frac{8}{5.7} = \frac{8.2}{2.5.7}$, $\frac{8}{5.7}$ ist mit 2 erweitert.

Daher können wir schreiben:

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{14} + \frac{2}{35} = \frac{3}{2.5} + \frac{2}{2.7} + \frac{8}{5.7}$$
$$= \frac{3.7}{2.5.7} + \frac{2.5}{2.5.7} + \frac{8.2}{2.5.7}$$
$$= \frac{3.7 + 2.5 + 8.2}{2.5.7}$$
$$= \frac{21 + 10 + 16}{70} = \frac{47}{70}$$

Die drei Brüche $\frac{3}{10}$. $\frac{2}{14}$ und $\frac{2}{35}$ sind zusammen also ebenso groß wie $\frac{47}{70}$.

Wenden wir uns zu einem andern Beispiele, das uns noch weiter führen soll! Versuchen wir die Brüche: $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{300}$ und $\frac{19}{330}$ zu addiren oder $\frac{3}{40} + \frac{17}{300} + \frac{19}{330}$ zu berechnen. Um die drei Brüche auf gleiche Nenner zu bringen, oder anders gesagt, gleichnamig zu machen, werden wir die Nenner zerlegen; es werden dann aus: $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{300}$ und $\frac{19}{330}$ die Bruchausdrücke:

$$\frac{3}{2.2.2.5}, \quad \frac{17}{2.2.3.5.5}, \quad \frac{19}{2.3.5.11}.$$

Suchen wir jetzt den Generalnenner, welchen wir den drei Brüchen zu geben haben. Wie wir aus dem vorhergehenden Beispiele wissen, stellt der Generalnenner ein Product dar, welches derartig aus den Primfactoren der drei Nenner (2.2.2.5, 2.2.3.5.5, 2.3.5.11) zusammengesetzt ist, daß alle Primfactoren der Nenner in ihm vertreten sind, daß wir, mit anderen Worten, jeden der Nenner

2.2.2.5,
2.2.3.5.5,
2.3.5.11

aus ihm herausnehmen können.

Ein solches Product werden wir erhalten, wenn wir die Nenner mit einander multipliciren und schreiben:

2.2.2.5.2.2.3.5.5.2.3.5.11.

Aus diesem Producte läßt sich leicht jeder der Nenner 2.2.2.5, 2.2.3.5.5, 2.3.5.11 aussondern; aber der Generalnenner würde eine zu große Zahl werden. Wir werden daher, wenn möglich, einen kleinern Generalnenner suchen; und in der That! Wir kommen zu einem Generalnenner, der allen Forderungen genügt, wenn

wir ein Product bilden, in das wir die 3 und 11, die in keinem der Nenner:

2 . 2 . 2 . 5,
2 . 2 . 3 . 5 . 5,
2 . 3 . 5 . 11

öfter als **einmal** vorkommt, nur **einmal** einstellen. Die 5 dagegen müssen wir zweimal und die 2 dreimal zum Factor machen, weil die 5 in dem zweiten Nenner zweimal und die 2 in dem ersten Nenner sogar dreimal als Primfactor vertreten ist. Wir werden dann das Product

2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 11

als **Generalnenner** erhalten.

In diesem Producte ist jeder der drei Nenner

2 . 2 . 2 . 5,
2 . 2 . 3 . 5 . 5,
2 . 3 . 5 . 11

enthalten. Wenn wir den ersten Nenner aussondern, bleibt 3 . 5 . 11 übrig; wird der zweite Nenner ausgesondert, so bleibt noch 2 . 11, und wird der dritte Nenner entfernt, so bleibt 2 . 2 . 5 übrig.

Verständlicher können wir die Ableitung des Generalnenners aus den zerlegten Nennern der zu addirenden Brüche noch darstellen, wenn wir für

2 . 2 . 2 . 5, 2 . 2 . 3 . 5 . 5, 2 . 3 . 5 . 11
$2^3 . 5$, $2^2 . 3 . 5^2$, 2 . 3 . 5 . 11

und für den Generalnenner

2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 11
$2^3 . 3 . 5^2 . 11$

schreiben. Wie wir dann unmittelbar sehen, erhalten wir den **Generalnenner,** indem wir die Nenner der zu addirenden Brüche in **Primfactoren** zerlegen und aus diesen Primfactoren ein Product bilden, in das nur die **höchste Potenz jedes Primfactors** eingestellt wird, während die **niedrigeren Potenzen übergangen** werden.

Im nächsten Brief werden wir unser Beispiel zu Ende führen.

C. Recapitulation.

Nachdem wir in den ersten beiden Abschnitten der **sechsunddreißigsten Lection** die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, setzten wir unsere Erörterungen über die Verwendung des Neunerrestes bei der Addition fort und gelangten zu dem Satze, daß der Summandenneunerrest dem Summenneunerrest gleich sei. Auf diesen Satz gründeten wir die Additionsprobe und gingen dann zu der Subtractionsprobe über, die wir auf dem Satze aufbauten, daß die Summe der Differenz und des Subtrahenden gleich dem Minuenden sei. Nachdem wir noch die Vortheile und Nachtheile der für alle vier Species geltenden Neunerrestprobe geschildert und ihre Bedeutung für die practische Rechnung gewürdigt hatten, wandten wir uns wieder der Lehre von den Primfactoren zu und zeigten, auf welche Weise untersucht werden könne, ob die 11 zu den Primfactoren einer Zahl gehört. Erst gaben wir eine leichte Methode an, die sich nur auf dreistellige Zahlen erstreckt, und dann besprachen wir zwei Methoden, welche von allen Zahlen gelten. Wir faßten darauf alle Regeln zusammen, welche wir über die Primfactoren aufgestellt hatten, und fügten dieser Zusammenstellung Anwendungen der Regeln und Aufgaben bei.

Unsere Auseinandersetzungen über die Zerlegung der Zahlen waren damit zum Abschluß gebracht; und wir konnten im ersten Abschnitt der **siebenunddreißigsten Lection** dazu übergehen, die Resultate unserer Erörterungen zur Aufstellung der sogenannten Divisoren benutzen. Besonders interessirten uns die gemeinschaftlichen Divisoren des Zählers und des Nenners, weil wir fanden, daß Bruchausdrücke nur vereinfacht werden, wenn wir durch gemeinschaftliche Divisoren des Zählers und Nenners heben. Die Form des Bruches vereinfacht sich am meisten, wenn wir zum Heben den größten gemeinschaftlichen Divisor anwenden. Diesen größten gemeinschaftlichen Divisor können wir leicht feststellen, wenn Zähler und Nenner in Primfactoren zerlegt sind; wir behandelten aber auch noch eine zweite Methode, die zwar umständlicher ist, aber sicher zum Ziele führt. Im zweiten Abschnitt der siebenunddreißigsten Lection wandten wir uns dann der Addition der Brüche zu und zwar konnten wir Brüche mit gleichen Nennern ohne Schwierigkeit addiren, während bei Brüchen mit ungleichen Nennern die Addition nur ausgeführt werden kann, wenn sie durch Erweitern auf gleichen Nenner gebracht sind.

D. Wiederholungsfragen.

1) Auf welchem Satz beruht die Additionsprobe, auf welchem Satz die Subtractionsprobe?
2) Bei welchen dreistelligen Zahlen kann man sofort erkennen, daß 11 zu den Primfactoren gehört?
3) Wie bestimmt man die Divisoren einer Zahl?
4) Wodurch muß man einen Bruch heben, wenn er die einfachste Form annehmen soll?
5) Wie addirt man Brüche mit gleichen Nennern?
6) Was versteht man unter dem Generalnenner?
7) Wie muß der Neunerrest einer Zahl beschaffen sein, wenn sie die 3 einmal als Primfactor enthalten soll?
8) Auf welchen Satz gründet sich die Neunerrestprobe bei der Multiplication?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus. Lection 38 und 39. Arithmetik.	Als Manuscript gedruckt.

20. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Das Beste jedes Buches ist nicht der Gedanke, den es enthält, sondern der, den es in uns erweckt.

Lection 38.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 36.

Abschnitt D. § 93. **Aufgaben.** 1) Die 2 kommt unter den Primfactoren der Zahlen 10, 18, 114 und 826 einmal, unter den Primfactoren der Zahlen 112 und 972 dagegen zweimal vor. Die Zahlen 7, 9, 13 und 519 enthalten 2 als Primfactor überhaupt nicht.

2) 5 gehört zu den Primfactoren der Zahlen 15 und 45 einmal, zu den Primfactoren der Zahlen 25, 475, 1050 und 3900 dagegen zweimal; die Zahlen 13, 27, 37, 329 enthalten die 5 nicht als Primfactor.

3) 3 ist unter den Primfactoren der Zahlen 21, 42, 375 und 222 einmal, unter den Primfactoren der Zahlen 126, 945, 13455 zweimal vertreten; die Zahlen 37, 53 und 64 haben 3 überhaupt nicht als Primfactor.

4) Die Zahlen 572, 682 und 198 haben den Primfactor 11, weil die Summe der äußern Zahlen gleich der mittleren Zahl ist. Wenn wir die beiden anderen Methoden zur Auffindung des Primfactors 11 in Anwendung bringen, finden wir, daß zu den Primfactoren der Zahlen 3476, 5808, 190718, 8173, 90208173 die 11 gehört. Dagegen ist 11 in 98765 als Primfactor nicht enthalten.

§ 95. **Aufgaben.** Der Neunerrest der Zahl 585 ist 0; daher ist 3 zweimal als Primfactor in 585 enthalten; die letzte Ziffer der Zahl 585 ist 5, folglich gehört auch 5 zu den Primfactoren. Mit 3, 3, 5 ist die Zahl der Primtactoren noch nicht erschöpft; denn 3 . 3 . 5 ist gleich 45, und 45 müssen wir noch mit 13 multipliciren, um 585 zu erhalten; zur 13 kommen wir, indem wir mit 45 in 585 dividiren. Es ist daher:

$$585 = 45 . 13$$
$$= 3 . 3 . 5 . 13.$$

350 ist eine gerade Zahl; einer ihrer Primfactoren ist daher 2; die beiden letzten Ziffern von 350 sind 50, folglich kommt die 5 unter den Primfactoren zweimal vor. 2 . 5 . 5 ist erst 50; Wenn aus 50 die Zahl 350 werden soll, muß 50 mit 7 multiplicirt werden; und zwar ergiebt sich 7, wenn wir 350 durch 50 dividiren. Wir haben mithin:

$$350 = 2 . 5 . 5 . 7.$$

Bei den Zahlen 510, 2024, 2475, 17325, 71775 wollen wir sogleich die Primfactoren angeben und nicht erst ausführlich besprechen, wie wir zu den Primfactoren gelangen. Es ist:

$$510 = 2 . 3 . 5 . 17, \quad 2024 = 2 . 2 . 2 . 11 . 23$$
$$2475 = 3 . 3 . 5 . 5 . 11, \; 17325 = 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 11,$$
$$71775 = 3 . 3 . 5 . 5 . 5 . 109.$$

Lection 37.

Abschnitt A. § 95. **Aufgaben.** Die Divisoren der Zahl 102 sind

1) die Primfactoren: 2, 3, 17,

2) die Producte: 2 . 3, 2 . 17, 3 . 17, 2 . 3 . 17,
bez. die Zahlen: 6, 34, 51, 102.

Die Divisoren der Zahl 154 sind
1) die Primfactoren: 2, 7, 11,
2) die Producte: 2 . 7, 2 . 11, 7 . 11, 2 . 7 . 11,
bez. die Zahlen: 14. 22, 77, 154.

Die Divisoren der Zahl 910 sind
1) die Primfactoren: 2, 5, 7, 13,
2) die Producte: 2 . 5, 2 . 7, 2 . 13, 5 . 7, 5 . 13, 7 . 13, 2 . 5 . 7, 2 . 5 . 13, 5 . 7 . 13, 2 . 5 . 7 . 13,
bez. die Zahlen: 10, 14, 26, 35, 65, 91, 70, 130, 455, 910.

Die Divisoren der Zahl 2205 sind
1) die Primfactoren: 3, 5, 7,
2) die Producte: 3 . 3*), 3 . 5, 3 . 7, 7 . 7, 3 . 3 . 5, 3 . 3 . 7 u. s. f.,
bez. die Zahlen: 9, 15, 21, 49, 45, 63 u. s. f.

Die Divisoren der Zahl 2871 sind
1) die Primfactoren 3, 11, 29,
2) die Producte: 3 . 3**), 3 . 11, 3 . 29, 11 . 29, 3 . 3 . 11, 3 . 3 . 29, 3 . 11 . 29, 3 . 3 . 11 . 29,
bez. die Zahlen 9, 33, 87, 319, 99, 261, 957, 2871.

§ 96. **Aufgaben.** Es ist:

$$\frac{20}{30} = \frac{2.2.5}{2.3.5} = \frac{2}{3}, \quad \frac{70}{130} = \frac{2.5.7}{2.5.13} = \frac{7}{13},$$

$$\frac{140}{315} = \frac{2.2.5.7}{3.3.5.7} = \frac{2.2}{3.3} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{770}{693} = \frac{2.5.7.11}{3.3.7.11} = \frac{2.5}{3.3} = \frac{10}{9} = 1\tfrac{1}{9},$$

$\frac{260}{621} = \frac{2.2.5.13}{3.3.3.23}$; dieser Bruch läßt sich durch Heben nicht weiter vereinfachen, weil Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Primfactor haben.

Wir haben ferner:

$$\frac{24}{40} = \frac{2.2.2.3}{2.2.2.5} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{45}{126} = \frac{3.3.5}{2.3.3.7} = \frac{5}{2.7} = \frac{5}{14}.$$

§ 97. **Aufgaben.** Wir erhalten:

```
24 | 84 | 3
     72
     ---
     12 | 24 | 2
          24
          ---
           —
```

```
93 | 108 | 1
      93
     ---
     15 | 93 | 6
          90
          ---
           3 | 15 | 5
               15
               ---
                —
```

```
29 | 157 | 5
     145
     ---
      12 | 29 | 2
           24
           ---
            5 | 12 | 2
                10
                ---
                 2 | 5 | 2
                     4
                     ---
                     1 | 2 | 2
                         2
                         ---
                          —
```

```
10 | 156 | 15
      10
     ---
      56
      50
     ---
       6 | 10 | 1
            6
           ---
           4 | 6 | 1
               4
               ---
               2 | 4 | 2
                   4
                   ---
                    —
```

Mithin werden wir den Bruch $\frac{24}{84}$ durch 12, den Bruch $\frac{93}{108}$ durch 3, den Bruch $\frac{29}{157}$ durch 1, den Bruch $\frac{10}{156}$ durch 2 heben. Wir erhalten dann:

$$\frac{24}{84} = \frac{3}{7}, \quad \frac{93}{108} = \frac{31}{36}, \quad \frac{29}{157} = \frac{29}{157}, \quad \frac{10}{156} = \frac{5}{78}.$$

Der Bruch $\frac{29}{157}$ hat dadurch, daß wir ihn durch 1 hoben, seine Form nicht geändert.

Abschnitt B. § 98. **Aufgaben.** Es ist:

1) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1+3}{7} = \frac{4}{7}$,

2) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1+3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

3) $\frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$,

4) $\frac{3}{19} + \frac{4}{19} + \frac{5}{19} + \frac{7}{19} = \frac{3+4+5+7}{16} = \frac{19}{19} = 1$,

5) $\frac{3}{16} + \frac{7}{16} + \frac{9}{16} + \frac{13}{16} + \frac{3+7+9+13}{16} = \frac{32}{16} = 2$,

6) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{5}{a} = \frac{1+2+5}{a} = \frac{8}{a}$,

7) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 37 gestellten Fragen.

1) Die Additionsprobe beruht auf dem Satz, daß der Summandenneunerrest gleich dem Summenneunerrest ist. Die Grundlage für die Subtractionsprobe bildet der Satz:

> Wir erhalten den Neunerrest des Minuenden, wenn wir die Neunerreste des Subtrahenden und der Differenz addiren und für jede zweistellige Zahl, auf die wir dabei treffen, die Quersumme einführen.

2) Wenn bei einer dreistelligen Zahl die Summe der beiden äußeren Zahlen gleich der mittleren Zahl ist, enthält sie als Primfactor die 11. 3) Divisoren einer Zahl sind: 1) die Primfactoren, 2) die Producte, welche aus Primfactoren gebildet werden können. 4) Wenn ein Bruch die möglichst einfache Form annehmen soll, muß man ihn durch den größten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und des Nenners heben. 5) Brüche mit gleichen Nennern kann man addiren, indem man die Zähler addirt und der Summe der Zähler den gemeinsamen Nenner der zu addirenden Brüche giebt. 6) Siehe Seite 328. 7) Der Neunerrest einer Zahl muß 3

---

*) Die 3 ist zweimal als Primfactor in 2205 enthalten.
**) Auch in 2871 ist die 3 zweimal als Primfactor enthalten.

oder 6 sein, wenn in ihr die 3 einmal als Primfactor vorkommt. 8) Die Neunerrestprobe für die Multiplication gründet sich auf folgenden in § 87 besprochenen Satz:

Wenn wir den Neunerrest des Multiplicanden mit dem Neunerrest des Multiplicators multipliciren und dabei immer die Quersumme nehmen, sobald wir auf eine zweistellige Zahl stoßen, erhalten wir den Neunerrest des Products.

C. Fortsetzung der Lehre vom Addiren der Brüche.

§ 101. Fortsetzung des § 100. Im letzten Paragraphen des vorigen Briefes haben wir uns die Aufgabe gestellt, die drei Brüche:

$$\tfrac{3}{40},\ \tfrac{17}{300} \text{ und } \tfrac{19}{330}$$

zu addiren. Um die Addition auszuführen, haben wir die Nenner 40, 300 und 330 der zu addirenden Brüche in ihre Primfactoren zerlegt und auf diese Weise die drei Brüche:

$$\frac{3}{2.2.2.5},\quad \frac{17}{2.2.3.5.5},\quad \frac{19}{2.3.5.11}$$

erhalten. Aus den Primfactoren der zerlegten Nenner bildeten wir den Generalnenner

$$2.2.2.3.5.5.11$$

d. h. den gemeinschaftlichen Nenner, welchen wir den drei zu addirenden Brüchen geben wollen. Um jetzt die drei Brüche auf diesen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen, müssen wir

$$\frac{3}{2.2.2.5} \text{ mit } 3.5.11,$$

$$\frac{17}{2.2.3.5.5} \text{ mit } 2.11,$$

$$\frac{19}{2.3.5.11} \text{ mit } 2.2.5$$

erweitern, d. h. es muß, wie wir bereits auf Seite 327 bemerkten,

jeder der zu addirenden Brüche mit dem Producte aus **denjenigen Primfactoren** des Generalnenners **erweitert** werden, welche in dem **Nenner** des betreffenden Bruches **nicht** enthalten sind.

Wenn wir das Erweitern bei den drei obengenannten Brüchen ausführen, erhalten wir:

$$\frac{3}{2.2.2.5} = \frac{3.3.5.11}{2.2.2.5.3.5.11} = \frac{3.3.5.11}{2.2.2.3.5.5.11} = \frac{495}{6600},$$

$$\frac{17}{2.2.3.5.5} = \frac{17.2.11}{2.2.3.5.5.2.11} = \frac{2.11.17}{2.2.2.3.5.5.11} = \frac{374}{6600},$$

$$\frac{19}{2.3.5.11} = \frac{19.2.2.5}{2.3.5.11.2.2.5} = \frac{2.2.5.19}{2.2.2.3.5.5.11} = \frac{380}{6600}.$$

Mithin ergiebt sich:

$$\frac{3}{40} + \frac{17}{300} + \frac{19}{330} = \frac{3}{2.2.2.5} + \frac{17}{2.2.3.5.5} + \frac{19}{2.3.5.11}$$

$$= \frac{3.3.5.11}{2.2.2.3.5.5.11} + \frac{2.11.17}{2.2.2.3.5.5.11} + \frac{2.2.5.19}{2.2.2.3.5.5.11}$$

$$= \frac{495}{6600} + \frac{374}{6600} + \frac{380}{6600} = \frac{495 + 374 + 380}{6600} = \frac{1249}{6600}.$$

Wenden wir uns noch zu einem andern Beispiele! Addiren wir die drei Brüche:

$$\tfrac{5}{14},\ \tfrac{11}{126} \text{ und } \tfrac{13}{147}.$$

Wenn wir die Nenner 14, 126 und 147 in die Primfactoren zerlegen, ergiebt sich:

$$\frac{5}{2.7},\quad \frac{11}{2.3.3.7},\quad \frac{13}{3.7.7}.$$

Aus den Primfactoren der Nenner

$$2.7,\quad 2.3.3.7,\quad 3.7.7;$$

oder anders geschrieben

$$2.7,\quad 2.3^2.7,\quad 3.7^2$$

haben wir den Generalnenner zu bilden. Im Ganzen sind in den drei Nennern die Primfactoren 2, 3 und 7 vertreten, und zwar 2 immer in der ersten Potenz, 3 und 7 theils in der ersten, theils in der zweiten Potenz. In das Product, welches den Generalnenner repräsentirt, stellen wir nun jeden Primfactor einmal ein und zwar in der höchsten Potenz, in der er vorkommt. Der Generalnenner ist daher:

$$2.3^2.7^2$$

oder anders geschrieben

$$2.3.3.7.7.$$

Wenn wir die drei Brüche

$$\frac{5}{2\,.\,7},\quad \frac{11}{2\,.\,3\,.\,3\,.\,7},\quad \frac{13}{3\,.\,7\,.\,7}$$

auf den gemeinsamen Nenner

$$2\,.\,3\,.\,3\,.\,7\,.\,7$$

bringen wollen, müssen wir den ersten Bruch mit $3\,.\,3\,.\,7$, den zweiten mit 7, den dritten mit $2\,.\,3$ erweitern. Es ergiebt sich dann:

$$\frac{5}{2\,.\,7} = \frac{5\,.\,3\,.\,3\,.\,7}{2\,.\,3\,.\,3\,.\,7\,.\,7} = \frac{315}{882},$$

$$\frac{11}{2\,.\,3\,.\,3\,.\,7} = \frac{11\,.\,7}{2\,.\,3\,.\,3\,.\,7\,.\,7} = \frac{77}{882},$$

$$\frac{13}{3\,.\,7\,.\,7} = \frac{13\,.\,2\,.\,3}{2\,.\,3\,.\,3\,.\,7\,.\,7} = \frac{78}{882}.$$

Folglich ist:

$$\frac{5}{14} + \frac{11}{126} + \frac{13}{147} = \frac{315}{882} + \frac{77}{882} + \frac{78}{882}$$
$$= \frac{315 + 77 + 78}{882}$$
$$= \frac{470}{882} = \frac{235}{441}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) die Brüche: $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{18}$ und $\frac{35}{36}$,
2) die Brüche: $\frac{7}{22}$, $\frac{17}{44}$ und $\frac{23}{121}$,
3) die Brüche: $\frac{8}{77}$, $\frac{5}{21}$ und $\frac{17}{147}$ addiren.

Bemerkung. Brüche, welche **gleiche Nenner** haben, nennt man **gleichnamig.** Von Brüchen, die durch Erweitern so umgeformt werden, daß sie gleiche Nenner annehmen, sagt man daher: sie werden **gleichnamig gemacht.** So haben wir z. B. in unserm Paragraphen die drei Brüche

$$\frac{5}{14},\quad \frac{11}{126},\quad \frac{13}{147}$$

gleichnamig gemacht, indem wir ihnen die Form gaben:

$$\frac{315}{882},\quad \frac{152}{882},\quad \frac{78}{882}.$$

§ 102. Die Addition der Brüche, deren Nenner Buchstaben sind.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, die drei Brüche:

$$\frac{3}{ab},\quad \frac{5}{a^2 - ab},\quad \frac{6}{ab - b^2}$$

zu addiren. Wir können diese Brüche umgestalten, wenn wir im Nenner des zweiten Bruches a und im Nenner des drittes Bruches b als Factor heraussetzen. Wir erhalten dann:

$$\frac{3}{ab},\quad \frac{5}{a\,(a - b)},\quad \frac{6}{b\,(a - b)}$$

Wie wir bemerken, besteht der Nenner des ersten Bruches aus den Factoren a und b, der Nenner des zweiten Bruches aus den Factoren a und a — b, der Nenner des dritten Bruches aus den Factoren b und a — b. Im Ganzen kommen also in den Nennern die drei Factoren: a, b und a — b vor. Aus diesen Faetoren werden wir uns den Generalnenner, d. h. den Nenner bilden, welchen wir den drei zu addirenden Brüchen geben wollen. Weil höhere Potenzen in unserm Falle nicht vorhanden sind, werden wir zum Generalnenner gelangen, wenn wir die drei Factoren a, b, a — b mit einander multipliciren. Wenn wir dies ausführen, ergiebt sich:

$$a\,.\,b\,.\,(a - b)$$

als **Generalnenner.**

Um die drei Brüche

$$\frac{3}{ab},\quad \frac{5}{a\,(a - b)},\quad \frac{6}{b\,(a - b)},$$

auf den gemeinschaftlichen Nenner $ab\,(a - b)$ zu bringen, müssen wir den ersten Bruch mit $a - b$, den zweiten Bruch mit b und den dritten Bruch mit a erweitern. Wir erhalten dann:

$$\frac{3}{ab} = \frac{3\,(a - b)}{ab\,(a - b)},$$

$$\frac{5}{a\,(a - b)} = \frac{5b}{ab\,(a - b)},$$

$$\frac{6}{b\,(a - b)} = \frac{6a}{ab\,(a - b)}.$$

Folglich ist:

$$\frac{3}{ab} + \frac{5}{a^2 - ab} + \frac{6}{ab - b^2} = \frac{3}{ab} + \frac{5}{a\,(a - b)} + \frac{6}{b\,(a - b)}$$
$$= \frac{3\,(a - b)}{ab\,(a - b)} + \frac{5b}{ab\,(a - b)} + \frac{6a}{ab\,(a - b)}$$
$$= \frac{3\,(a - b) + 5b + 6a}{ab\,(a - b)}{}^{*)} = \frac{3a - 3b + 5b + 6a}{ab\,(a - b)}$$
$$= \frac{9a + 2b}{ab\,(a - b)}.$$

---

*) Denn Brüche mit gleichen Nennern können wir addiren, indem wir die Zähler addiren und der Summe der Zähler den gemeinsamen Nenner geben.

Jetzt sind die drei Brüche

$$\frac{3}{ab}, \quad \frac{5}{a^2 - ab}, \quad \frac{6}{ab - b^2}$$

addirt; als Summe haben wir $\frac{9a + 2b}{ab(a - b)}$ erhalten.

Wenden wir uns zu einem zweiten Beispiele! Es sei uns aufgetragen, die Brüche

$$\frac{2}{a}, \quad \frac{3}{a^3 + a^2b}, \quad \frac{4}{a^2 + 2ab + b^2}$$

zu addiren. Die Nenner des dritten und zweiten Bruches wollen wir umformen; es ist

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

gemäß Seite 253, ferner:

$$a^3 + a^2b = a^2a + a^2b = a^2(a + b).$$

Für die obigen drei Brüche können wir daher schreiben:

$$\frac{2}{a}, \quad \frac{3}{a^2(a + b)}, \quad \frac{4}{(a + b)^2}$$

Diese Brüche müssen wir gleichnamig machen, d. h. auf einen gemeinsamen Nenner (den Generalnenner) bringen, wenn wir sie addiren wollen. Bei der Bildung der Generalnenner kommen die Factoren a, a^2. $a + b$ und $(a + b)^2$ in Betracht. Wie wir ausführlich erörtert haben, brauchen wir nur die höchste Potenz einer jeden Größe als Factor in den Generalnenner einzustellen, die niedrigeren Potenzen dürfen übergangen werden. Der Genneralnenner ist daher:

$$a^2(a + b)^2$$

oder in anderen Formen:

$$a \,.\, a(a + b)^2, \quad a^2(a + b)(a + b).$$

Um nun den drei Brüchen

$$\frac{2}{a}, \quad \frac{3}{a^2(a + b)}, \quad \frac{4}{(a + b)^2}$$

den Generalnenner als gemeinsamen Nenner zu geben, müssen wir den ersten Bruch mit $a(a + b)^2$ *), den zweiten Bruch mit $a + b$ **), den dritten Bruch mit a^2 ***) erweitern. Wenn wir dies ausführen, erhalten wir:

$$\frac{2}{a} = \frac{2 \,.\, a(a + b)^2}{a \,.\, a(a + b)^2} = \frac{2a(a + b)^2}{a^2(a + b)^2}$$

$$\frac{3}{a^2(a + b)} = \frac{3(a + b)}{a^2(a + b)(a + b)} = \frac{3(a + b)}{a^2(a + b)^2},$$

$$\frac{4}{(a + b)^2} = \frac{4a^2}{(a + b)^2 \,.\, a^2} = \frac{4a^2}{a^2(a + b)^2}.$$

Mithin können wir schreiben:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{a^3 + a^2b} + \frac{4}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2(a + b)} + \frac{4}{(a + b)^2}$$

$$= \frac{2a(a + b)^2}{a^2(a + b)^2} + \frac{3(a + b)}{a^2(a + b)^2} + \frac{4a^2}{a^2(a + b)^2}$$

$$= \frac{2a(a + b)^2 + 3(a + b) + 4a^2}{a^2(a + b)^2}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) die Brüche:

$$\frac{1}{mn}, \quad \frac{2}{m(m + n)}, \quad \frac{3}{n(m + n)},$$

2) die Brüche:

$$\frac{7}{m}, \quad \frac{8}{m^3 + m^2n}. \quad \frac{10}{m^2 + 2mn + n^2}$$

addiren.

§ 103. Die Subtraction der Brüche mit gleichen Nennern. 6 Siebentel weniger 4 Siebentel giebt 2 Siebentel; 5 Achtel weniger 2 Achtel giebt 3 Achtel, in Zeichen, wir haben:

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{6 - 4}{7} = \frac{2}{7},$$

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5 - 2}{8} = \frac{3}{8}.$$

Ebenso wird sein:

$$\frac{9}{13} - \frac{4}{13} = \frac{9 - 4}{13} = \frac{5}{13},$$

$$\frac{8}{15} - \frac{7}{15} = \frac{8 - 7}{15} = \frac{1}{15},$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

Betrachten wir das letzte Beispiel genauer! Wir haben den Bruch $\frac{b}{c}$ von $\frac{a}{c}$ subtrahirt, beide Brüche haben gleiche Nenner; die Subtraction wurde von uns ausgeführt, indem

*) Aus der zweiten Form des Generalnenners ersichtlich. **) Aus der dritten Form des Generalnenners ersichtlich. ***) Aus der ersten Form des Generalnenners ersichtlich.

wir den Zähler b vom Zähler a subtrahirten und der Differenz a — b den gemeinsamen Nenner c gaben.

Allgemein besteht der Satz:

Um zwei Brüche mit **gleichen Nennern** von einander zu **subtrahiren**, können wir die Zähler subtrahiren und der **Differenz der Zähler** den **gemeinsamen Nenner** geben.

Aufgaben. Der Schüler möge:

1) $\frac{s}{m}$ von $\frac{t}{m}$ 2) $\frac{2}{9}$ von $\frac{8}{9}$, 3) $\frac{4}{13}$ von $\frac{12}{13}$, subtrahiren.

§ 104. Die Subtraction der Brüche mit ungleichen Nennern. Wenn wir Brüche mit ungleichen Nennern von einander subtrahiren wollen, müssen wir durch Erweitern ihre Form so umgestalten, daß sie gleiche Nenner annehmen; wir müssen die Brüche mit ungleichen Nennern, um mathematisch zu sprechen, gleichnamig machen oder auf gleiche Nenner bringen. Zu diesem Zwecke werden wir gerade wie bei der Addition zunächst den Generalnenner suchen, um vermittelst desselben die Zahl zu finden, mit der wir die zu vermindernden und die abzuziehenden Brüche zu erweitern haben.

Nehmen wir ein Beispiel! Es sei uns aufgetragen, $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ zu subtrahiren, oder anders ausgedrückt:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$$

zu berechnen.

Wenn wir die Nenner 6 und 4 in ihre Primfactoren zerlegen, so wird aus dem obigen Subtractionsausdruck:

$$\frac{5}{2.3} - \frac{3}{2.2} \text{ oder } \frac{5}{2.3} - \frac{3}{2^2}.$$

Für die Bildung des Generalnenners kommen die Größen 2, 3 und 2^2 in Betracht. Die 2 werden wir übergehen, weil die höhere Potenz 2^2 in den Generalnenner eingestellt werden muß. Der Generalnenner wird daher

$$2^2.3 \text{ oder } 2.2.3.$$

Erweitern wir nun $\frac{5}{2.3}$ mit 2 und $\frac{3}{2^2}$ mit 3, so erhalten wir:

$$\frac{5}{2.3} = \frac{5.2}{2.3.2} = \frac{5.2}{2^2.3} = \frac{10}{12},$$

$$\frac{3}{2^2} = \frac{3.3}{2^2.3} = \frac{9}{12}.$$

Folglich ist:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5}{2.3} - \frac{3}{2^2} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12}$$
$$= \frac{10-9}{12} = \frac{1}{12}.$$

Gehen wir zu einem zweiten Beispiele über! Es sei uns aufgetragen, von $\frac{1}{a-b}$ den Bruch $\frac{a}{a^2-b^2}$ abzuziehen, oder anders ausgedrückt:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{a}{a^2-b^2}$$

zu berechnen. Den Nenner $a^2 - b^2$ können wir gemäß S. 254 in Factoren zerlegen; wir können dafür $(a-b).(a+b)$ setzen. Aus dem obigen Subtractionsausdruck wird dann:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{a}{(a-b).(a+b)}$$

Wie wir sofort bemerken, ist der Generalnenner $(a-b).(a+b)$; er stimmt mit dem Nenner des zweiten Bruches überein. Um auch den ersten Bruch auf diesen Nenner zu bringen, müssen wir denselben mit $a+b$ erweitern. Unser Subtractionsausdruck nimmt dann folgende Form an:

$$\frac{a+b}{(a-b).(a+b)} - \frac{a}{(a-b).(a+b)}.$$

Jetzt sind die beiden Brüche gleichnamig; wir können daher die Subtraction ausführen, indem wir den Zähler des zweiten Bruches vom Zähler des ersten Bruches abziehen und der Differenz den gemeinsamen Nenner geben.

Es besteht mithin die Gleichung:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{a}{(a-b).(a+b)}$$
$$= \frac{a+b}{(a-b).(a+b)} - \frac{a}{(a-b).(a+b)}$$
$$= \frac{a+b-a}{(a-b).(a+b)} = \frac{b}{(a-b).(a+b)}$$
$$= \frac{b}{a^2-b^2}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge $\frac{9}{10}$ von 1) $\frac{5}{6}$ von $\frac{8}{9}$ und 2) $\frac{1}{a^2b}$ von $\frac{3}{ab^2}$ abziehen.

D. Die Multiplication und Division der Brüche.

§ 105. Die Multiplication der Brüche mit ganzen Zahlen. Wenn wir 3 Siebentel **verdoppeln** d. i. **zweimal** nehmen, so ergeben sich 6 Siebentel, in Zeichen, es ist:

$$\tfrac{3}{7} \times 2 = \tfrac{6}{7}\,*).$$

Vervierfachen wir 2 Fünfzehntel, d. i. nehmen wir 2 Fünfzehntel **viermal**, so erhalten wir 8 Fünfzehntel, in Zeichen, wir haben:

$$\tfrac{2}{15} \times 4 = \tfrac{8}{15}.$$

Wenn wir für 6 den gleichen Werth 3.2 und für 8 den gleichen Werth 2.4 einführen, so nehmen die beiden obigen Gleichungen folgende Form an:

$$\frac{3}{7} \times 2 = \frac{3.2}{7}$$

$$\text{und } \frac{2}{15} \times 4 = \frac{2.4}{15}.$$

Betrachten wir die letzte Gleichung genauer! Die linke Seite derselben fordert uns auf, den Bruch $\tfrac{2}{15}$ mit der ganzen Zahl 4 zu multipliciren. Die rechte Seite sagt uns, daß wir diese Multiplication ausführen können, indem wir den Zähler 2 des Bruches mit 4 multipliciren. Zu einem ähnlichen Resultat führt uns die Betrachtung der vorletzten Gleichung. Wir haben überhaupt den Satz:

Einen **Bruch** können wir mit einer **ganzen Zahl multipliciren,** indem wir den **Zähler** mit der **ganzen Zahl multipliciren.**

Demgemäß ist.

$$\frac{1}{7} \times 3 = \frac{1 \times 3}{7} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7},$$

$$\frac{5}{9} \times 7 = \frac{5 \times 7}{9} = \frac{35}{9} = 3\tfrac{8}{9},$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}, \quad \frac{m}{n} \times p = \frac{mp}{n}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge $\tfrac{2}{3}$ mit 7, $\tfrac{5}{6}$ mit 13, $\dfrac{q}{r}$ mit p multipliciren.

106. Die Multiplication der Brüche mit Brüchen. Die Hälfte eines Viertels ist ein Achtel; wenn wir von **drei Vierteln** die **Hälfte** nehmen, so erhalten wir daher **drei Achtel.** Anstatt nun zu sagen: „wir nehmen von drei Vierteln die Hälfte", können wir uns auch eines andern Ausdrucks bedienen und sprechen: wir nehmen drei Viertel ein halb mal oder wir multipliciren $\tfrac{3}{4}$ mit $\tfrac{1}{2}$. Drei Viertel multiplicirt mit ein Halb ist daher gleich drei Achteln, in Zeichen, wir haben:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Setzen wir in $\tfrac{3}{8}$ für 3 die Größe 3×1 und für 8 die Größe 4×2, so erhalten wir:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2}.$$

Ueberlegen wir uns, was wir aus der letzten Gleichung folgern können. Die linke Seite trägt uns auf, die beiden Brüche $\tfrac{3}{4}$ und $\tfrac{1}{2}$ mit einander zu multipliciren. Durch die rechte Seite der Gleichung erfahren wir, daß wir diese Multiplication ausführen können, indem wir den Zähler 3 mit dem Zähler 1 und den Nenner 4 mit dem Nenner 2 multipliciren. Allgemein haben wir den Satz:

Zwei Brüche können wir mit einander **multipliciren,** indem wir **Zähler** mit **Zähler** und **Nenner** mit **Nenner** multipliciren.

Demgemäß ist:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21},$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20},$$

$$\frac{3}{13} \times \frac{7}{11} = \frac{3 \times 7}{13 \times 11} = \frac{21}{143},$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge

1) $\tfrac{3}{4}$ mit $\tfrac{5}{6}$, 2) $\tfrac{6}{7}$ mit $\tfrac{10}{11}$, 3) $\tfrac{4}{5}$ mit $\tfrac{3}{5}$,
4) $\tfrac{5}{17}$ mit $\tfrac{3}{4}$, 5) $\tfrac{3}{9}$ mit $\tfrac{2}{11}$, 6) $\tfrac{1}{5}$ mit $\tfrac{11}{12}$,

---

*) Um anzudeuten, daß ein Bruch mit einer Größe multiplicirt werden soll, muß das Multiplicationszeichen so gesetzt werden, daß es vom Bruchstrich durchschnitten wird. Aus rein technischen Gründen wenden wir in diesem und in dem folgenden Paragraphen häufig das liegende Kreuz (×) statt des Punktes als Multiplicationszeichen an.

7) $\frac{m}{n}$ mit $\frac{p}{q}$, 8) $\frac{r}{s}$ mit $\frac{m}{n}$ multipliciren.

§ 107. Die Multiplication der gemischten Zahlen. Die Multiplication der gemischten Zahlen können wir leicht mit Hilfe der in den beiden letzten Paragraphen aufgestellten Regeln ausführen, wenn wir an die Ausführungen des § 76 denken. Nach diesem Paragraphen stellt jede gemischte Zahl eine Summe dar, deren einer Summand eine ganze Zahl und deren zweiter Summand ein ächter Bruch ist. So ist z. B.

$$4\tfrac{1}{3} = 4 + \tfrac{1}{3}.$$

Sollen wir demnach $4\frac{1}{3}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliciren, so können wir die Gleichung aufstellen:

$$4\tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{5} = (4 + \tfrac{1}{3}) \times \tfrac{2}{5}$$

Die rechte Seite können wir leicht berechnen; wir brauchen nur die Klammer aufzulösen, indem wir erst 4 und dann $\frac{1}{3}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliciren. Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\begin{aligned} 4\tfrac{1}{3} = (4 + \tfrac{1}{3}) \times \tfrac{2}{5} &= 4 \times \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{5} \\ &= \frac{4 \times 2}{5} + \frac{1 \times 2}{3 \times 5} \\ &= \tfrac{8}{5} + \tfrac{2}{15} = \tfrac{26}{15}. \end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$\begin{aligned} 5\tfrac{2}{9} \times \tfrac{7}{13} = (5 + \tfrac{2}{9}) \times \tfrac{7}{13} &= 5 \times \tfrac{7}{13} + \tfrac{2}{9} \times \tfrac{7}{13} \\ &= \frac{5 \times 7}{13} + \frac{2 \times 7}{9 \times 13} \\ &= \tfrac{35}{13} + \tfrac{14}{91} = \tfrac{259}{91}. \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt an, es sei uns aufgetragen, die beiden gemischten Brüche $4\frac{2}{3}$ und $7\frac{4}{5}$ mit einander zu multipliciren, oder anders gesagt:

$$4\tfrac{2}{3} \times 7\tfrac{4}{5}$$

zu berechnen! Wenn wir $4 + \frac{2}{3}$ für $4\frac{2}{3}$ und $7 + \frac{4}{5}$ für $7\frac{4}{5}$ schreiben, wird aus dem obigen Ausdruck

$$(4 + \tfrac{2}{3}) \times (7 + \tfrac{4}{5}).$$

$4 + \frac{2}{3}$ und $7 + \frac{4}{5}$ sind zwei Polynome, die wir nach der in § 63 aufgestellten Regel zu multipliciren haben, d. h. wir müssen $4 + \frac{2}{3}$ erst mit 7 und dann mit $+ \frac{4}{5}$ multipliciren. Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(4 + \tfrac{2}{3}) \times (7 + \tfrac{4}{5}) \\ &= 4 \times 7 + \tfrac{2}{3} \times 7 + 4 \times \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{4}{5} \\ &= 4 \times 7 + \frac{2 \times 7}{3} + \frac{4 \times 4}{5} + \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \\ &= 28 + \tfrac{14}{3} + \tfrac{16}{5} + \tfrac{8}{5} = 36\tfrac{6}{15}. \end{aligned}$$

Einfacher können wir gemischte Zahlen multipliciren, wenn wir sie erst in unächte Brüche verwandeln und dann nach den Regeln der beiden letzten Paragraphen verfahren, so ist z. B. $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ und $7\frac{4}{5} = \frac{39}{5}$; folglich:

$$4\tfrac{2}{3} \times 7\tfrac{4}{5} = \tfrac{14}{3} \times \tfrac{39}{5} = \frac{14 \times 39}{3 \times 5} \text{ u. s. f.}$$

§ 108. Die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl. Wenn wir $\frac{4}{5}$ durch 2 theilen, erhalten wir $\frac{2}{5}$; in Zeichen, wir haben:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5} = \frac{4:2}{5}.$$

Ebenso wird sein:

$$\frac{8}{5} : 2 = \frac{8:2}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{15}{19} : 5 = \frac{15:5}{19} = \frac{3}{19},$$

$$\frac{14}{28} : 7 = \frac{14:7}{23} = \frac{2}{23},$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b},$$

$$\frac{24}{29} : 6 = \frac{24:6}{29} = \frac{4}{29}.$$

Sehen wir uns die letzte Gleichung an. Die linke Seite derselben fordert uns auf, den Bruch $\frac{24}{29}$ durch die ganze Zahl 6 zu dividiren. Aus der rechten Seite erkennen wir, daß wir die Division ausführen können, indem wir den Zähler 24 des Bruches durch 6 theilen.

Allgemein gilt der Satz:

Einen **Bruch** können wir durch eine **ganze Zahl dividiren,** indem wir den **Zähler** durch die **ganze Zahl** theilen.

Dieser Satz entspricht dem Lehrsatze, welchen wir in § 105 über die Multiplication der Brüche aufgestellt haben. Es ist aber nicht in allen Fällen zweckmäßig, nach ihm zu verfahren, wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilt werden soll.

Es sei uns zum Beispiel die Aufgabe gestellt, $\frac{2}{3}$ durch 5 zu dividiren; nach dem vorigen Satze werden wir dann schreiben:

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2:5}{3} = \frac{\frac{2}{5}}{3}.$$

Wir sind hierbei zu keinem bequemen und verständlichen Ausdruck gelangt, der letzte Bruchausdruck ist vielmehr ebenso umständlich wie der erste.

Wir müssen daher einen andern Weg einschlagen, wenn wir $\frac{2}{3}$ durch 5 dividiren wollen. Untersuchen wir den Ausdruck $\frac{2}{3} : 5$ genauer! Derselbe sagt uns, daß wir zwei

Drittel in fünf gleiche Theile zerlegen und die Größe eines dieser gleichen Theile angeben sollen. Wenn wir ein Drittel in fünf gleiche Theile theilen, so erhalten wir den fünfzehnten Theil eines Ganzen. Zwei Drittel getheilt durch 5 werden daher gleich zwei Fünfzehnteln sein, in Zeichen, wir haben:

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15} = \frac{2}{3 \,.\, 5}.$$

Wenn wir bedenken, daß auf der linken Seite der Gleichung der ganze Bruch durch 5 dividirt und auf der rechten Seite dafür der Nenner 3 mit 5 multiplicirt ist, so können wir den Satz aufstellen:

Ein **Bruch** kann durch eine **ganze Zahl dividirt** werden, indem der **Nenner** des Bruches mit der **ganzen Zahl multiplicirt** wird.

Diesem Satze gemäß ist:

$$\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7 \,.\, 3} = \frac{4}{21},$$

$$\frac{3}{5} : 8 = \frac{3}{5 \,.\, 8} = \frac{3}{40},$$

$$\frac{2}{7} : 5 = \frac{2}{5 \,.\, 7} = \frac{2}{35},$$

$$\frac{m}{n} : r = \frac{m}{n \,.\, r} = \frac{m}{nr}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge $\frac{27}{25}$ durch 9, $\frac{26}{7}$ durch 13, $\frac{56}{43}$ durch 7 theilen, indem er den ersten von uns in diesem Paragraphen aufgestellten Satz in Anwendung bringt; er möge ferner $\frac{7}{8}$ durch 2, $\frac{3}{9}$ durch 5, $\frac{7}{16}$ durch 3 dividiren, indem er nach dem letzten Satze die Division ausführt.

§ 109. Die Division zweier Brüche durch einander.

Es sei uns aufgetragen, den Bruch $\frac{2}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ zu dividiren, oder anders ausgedrückt:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$$

zu berechnen Wir haben hier einen Bruchausdruck von eigenthümlicher Form vor uns; in demselben ist sowohl der Zähler $\frac{2}{5}$ wie der Nenner $\frac{3}{7}$ ein Bruch. Es ist aber nicht schwer, den ganzen Bruchausdruck auf eine ganz einfache Gestalt zu bringen, wenn wir ihn mit 5.7 erweitern; wir erhalten dann:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{5} \times 5 \,.\, 7}{\frac{3}{7} \times 5 \,.\, 7}$$

Erwägen wir, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl gemäß § 105 multiplicirt, so können wir für die rechte Seite schreiben:

$$\frac{\frac{2 \,.\, 5 \,.\, 7}{5}}{\frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7}{7}}$$

Nun ist:

$$\frac{2 \,.\, 5 \,.\, 7}{5} = 2 \,.\, 7 \text{ und } \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7}{7} = 3 \,.\, 5^{*}).$$

Mithin besteht die Gleichung:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{5} \times 5 \,.\, 7}{\frac{3}{7} \times 5 \,.\, 7} = \frac{\frac{2 \,.\, 5 \,.\, 7}{5}}{\frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7}{7}} = \frac{2 \,.\, 7}{3 \,.\, 5}.$$

Wenn wir ferner bedenken, daß $\frac{2 \,.\, 7}{3 \,.\, 5}$ gleichen Werth hat, wie $\frac{2}{5} \times \frac{7}{5}$**), so können wir die Gleichung aufstellen:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3}.$$

Auf der linken Seite sehen wir den Bruch $\frac{3}{7}$, auf der rechten Seite den Bruch $\frac{7}{3}$. Aus $\frac{3}{7}$ geht $\frac{7}{3}$ hervor, wenn der Nenner 7 zum Zähler und der Zähler 3 zum Nenner gemacht wird; der Bruch $\frac{3}{7}$ wird, wie man sich ausdrückt, **umgekehrt**, soll daraus $\frac{7}{3}$ werden. Wenn wir uns des Wortes **„umkehren"** bedienen, so geben folgende Worte den Inhalt der letzten Gleichung wieder:

Den Bruch $\frac{2}{5}$ können wir durch $\frac{3}{7}$ dividiren, indem wir den Divisor (Nenner) $\frac{3}{7}$ umkehren und dann mit dem umgekehrten Nenner $\frac{7}{3}$ den Bruch $\frac{2}{5}$ multipliciren.

Allgemein haben wir den Satz:

Zwei Brüche dividirt man durch einander, indem man mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

---

*) Nach dem Satze: Um ein Product durch einen seiner Factoren zu dividiren, brauchen wir nur den betreffenden Factor aus dem Producte fortzulassen.

**) Denn es ist: $\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \,.\, 7}{5 \,.\, 3} = \frac{2 \,.\, 7}{3 \,.\, 5}.$

Demnach ist:

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{4}{7} : \frac{1}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7},$$

ferner:

$$\frac{\frac{8}{9}}{\frac{5}{7}} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 5} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45},$$

oder in anderer Form:

$$\frac{8}{9} : \frac{5}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 5} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45},$$

und:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge $\frac{5}{6}$ durch $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$ durch $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{10}$ durch $\frac{7}{13}$, $\frac{m}{n}$ durch $\frac{n}{q}$ dividiren.

§ 110. Die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch. Eine ganze Zahl können wir leicht durch einen Bruch dividiren, wenn wir bedenken, daß wir jede ganze Zahl in einen Bruch verwandeln können. So ist z. B.

2 gerade so viel wie $\frac{2}{1}$,
3 " " " " $\frac{3}{1}$,
7 " " " " $\frac{7}{1}$.

Mithin ist:

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3}{}^{*)} = \frac{2 \times 4}{1 \times 3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3},$$

also: $\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2\frac{2}{3}$, oder in anderer Form

$$2 : \frac{3}{4} = 2\frac{2}{3},$$

das heißt in Worten: 2 getheilt durch $\frac{3}{4}$ ist gleich $2\frac{2}{3}$.

Ebenso ist:

$$\frac{7}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{8}{9}} = \frac{7}{1} \times \frac{9}{8} = \frac{7 \times 9}{1 \times 8} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8},$$

*) Nach dem Satze: Zwei Brüche können wir durch einander dividiren, indem wir mit dem umgekehrten Divisor multipliciren.

ferner:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

E. Die Regeldetriexempel.

§ 111. Die Brüche, deren Zähler und Nenner Producte mehrerer Factoren sind. Wir wollen uns jetzt noch zu Brüchen wenden, zu denen wir bei den sogenannten Regeldetriexempeln geführt werden, zu Brüchen nämlich, deren Zähler und Nenner aus mehreren Factoren zusammengesetzt sind. Ein solcher Bruch ist z. B.

$$\frac{22 \cdot 14}{33 \cdot 35}$$

Diesen Bruch können wie ebenso wie andere weniger complicirtere Bruchausdrücke durch Heben vereinfachen, doch haben wir dabei einige Regeln zu beachten. Um ihn z. B. durch 11 zu heben, müssen wir sowohl den Zähler 22 . 14 als auch den Nenner 33 . 35 durch 11 dividiren. Nach § 33 dividirt man ein Product, das aus mehreren Factoren besteht, indem man **einen** Factor des Products dividirt. Wenn wir daher

$$\frac{22 \cdot 14}{33 \cdot 35}$$

durch 11 heben wollen, so werden wir am besten im Zähler die 22 und im Nenner die 33 durch 11 theilen*). Führen wir dies aus, so tritt an die Stelle der 22 eine 2**) und an die Stelle der 33 eine 3, was wir dadurch andeuten wollen, daß wir über die 22 eine kleine 2 und unter die 33 eine kleine 3 setzen. Es ergiebt sich dann:

$$\frac{\overset{2}{22} \cdot 14}{\underset{3}{33} \cdot 35}$$

Man sagt in diesem Falle auch, man habe 33 gegen 22 durch 11 gehoben.

Heben wir den Bruch dann noch weiter durch 7, so werden wir im Zähler die 14 und im Nenner die 35 durch 7***) dividiren, oder anders gesagt, 14 gegen 35 durch 7

*) Denn 11 geht in 22 und in 33 auf. **) Denn 22 getheilt durch 11 giebt 2 und 33 getheilt durch 11 giebt 3. ***) Denn 7 geht in 14 und in 35 auf.

heben; 14 dividirt durch 7 giebt 2 und 35 dividirt durch 7 giebt 5. An die Stelle der 14 kommt daher eine 2 und an die Stelle der 35 eine 5; wir haben daher:

$$\frac{\overset{2}{22}.\overset{2}{14}}{\underset{3}{33}.\underset{5}{35}}$$

Folglich ist:

$$\frac{22.14}{33.35}=\frac{2.2}{3.5}=\frac{4}{15}.$$

Betrachten wir jetzt den Bruch:

$$\frac{21.44.25}{33.35.20}.$$

Wir bemerken sofort, daß wir in demselben bequem 44 gegen 33 durch 11, 21 gegen 35 durch 7 und 25 gegen 20 durch 5 heben können.

44 getheilt durch 11 giebt 4,
33 " " 11 " 3,
21 " " 7 " 3,
35 " " 7 " 5,
25 " " 5 " 5,
20 " " 5 " 4.

An die Stelle der 44, 33, 21, 35, 25, 20 treten daher der Reihe nach die Zahlen: 4, 3, 3, 5, 5, 4. Der vorige Bruch nimmt daher folgende Gestalt an:

$$\frac{3.4.5}{3.5.4}.$$

Bei diesem Bruche können wir noch die 3 des Zählers gegen die 3 des Nenners durch 3, die 4 des Zählers gegen die 4 des Nenners durch 4, die 5 des Zählers gegen die 5 des Nenners durch 5 heben. Führen wir dies aus, so erhalten wir

$$\frac{1.1.1}{1.1.1}=\frac{1}{1}=1.$$

Durch Heben finden wir also, daß der Bruch

$$\frac{21.44.25}{33.35.20}$$

einem Ganzen gleich ist.

§ 112. Die Regeldetriexempel. Auf die Regeldetriexempel werden wir nicht näher eingehen, weil sie bei der elementaren Rechnung genügend geübt werden. Wir wollen nur an einem Beispiele das Princip erörtern, auf welchem sie beruhen.

Nehmen wir an, wir wüßten, daß 21 Arbeiter in 5 Tagen 213 Mark verdienen, und wir wollten berechnen, wie viel Mark 14 Arbeiter in 10 Tagen erhalten.

Wir werden dann folgendermaßen schließen:

Wie wir wissen, verdienen
21 Arbeiter in 5 Tagen 213 Mark.

1 Arbeiter wird in derselben Zeit (in 5 Tagen) nur den 21sten Theil vom Lohne der 21 Arbeiter verdienen; es wird also

1 Arbeiter an 5 Tagen $\frac{213}{21}$ Mark

haben. Ist dieser eine Arbeiter nicht 5 Tage, sondern 1 Tag thätig, so wird er blos den 5ten Theil seines 5tägigen Lohnes fordern dürfen. Wir müssen daher seinen 5tägigen Lohn durch 5 dividiren, um den 1tägigen Lohn zu erhalten. Um den Bruch $\frac{213}{21}$ durch 5 zu dividiren, werden wir gemäß § 108 den Nenner 21 mit 5 multipliciren; es ergeben sich dadurch als 1tägiger Lohn:

$$\frac{213}{21.5}\text{ Mark},$$

d. h. 1 Arbeiter verdient an 1 Tage $\frac{213}{21.5}$ Mark.

14 Arbeiter erhalten an 1 Tage den 14fachen Lohn. Es geben

$\frac{213}{21.5}$ Mark mit 14 multiplicirt $\frac{213.14}{21.5}$ *) Mark,

d. h. 14 Arbeiter verdienen 1 Tage $\frac{213.14}{21.5}$ Mark.

In 10 Tagen verdienen sie 10-mal soviel, d. h. $\frac{213.14.10}{21.5}$ Mark.

Die ganze Rechnung wird anschaulicher, wenn wir schreiben:

21 Arbeiter haben an 5 Tagen 213 Mark,
1 " hat " 5 Tagen $\frac{213}{21}$ Mark,
1 " hat " 1 Tage $\frac{213}{21.5}$ Mark,
14 " haben " 1 Tage $\frac{213.14}{21.5}$ Mark,
14 " haben " 10 Tagen $\frac{213.14.10}{21.5}$ Mark.

Bei dem Bruche $\frac{213.14.10}{21.5}$ können wir 14 gegen 21 durch 7 und 10 gegen 5 durch 5 heben, führen wir dies aus, so ergiebt sich:

$$\frac{213.14.10}{21.5}=\frac{213.2.2}{3.1}=\frac{71.2.2}{1.1}\text{**)}$$
$$=284\text{ Mark.}$$

---

*) Denn wir können einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren, indem wir den Zähler multipliciren. **) Es kann noch 213 gegen 3 gehoben werden.

Was man vor der Minute ausgeschlagen,
Bringt keine Ewigkeit zurück.

Lection 39.

A. Die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

§ 113. Die unbekannten Größen. Die Gleichungen sind für uns sehr bekannte mathematische Ausdrücke. Schon im sechsten Paragraphen des ersten Briefes haben wir den Begriff der Gleichung definirt, bei derselben die rechte und linke Seite unterschieden und festgestellt, daß man die beiden Seiten mit einander vertauschen könne. Seitdem hat jede Seite, ja jede Spalte unserer Briefe Gleichungen gebracht. Schritten wir doch meist fort in der mathematischen Erkenntniß, indem wir bereits gefundene Gleichungen nach bekannten Gesetzen umformten und dadurch zu neuen Gleichungen gelangten, deren Sinn und Inhalt wir in Lehrsätzen aussprachen. Wenn wir uns jetzt wieder den Gleichungen zuwenden, so geschieht es nicht, um unsere früheren Erörterungen zu wiederholen, sondern um Gleichungen ganz eigenthümlicher Art zu behandeln, Gleichungen nämlich, welche eine **unbekannte Größe** enthalten. Wenden wir uns zu einem Beispiele! Es sei uns aufgetragen:

eine Zahl zu suchen, welche mit 7 zusammen 15 giebt.

Bezeichnen wir, wie es gewöhnlich geschieht, die gesuchte Zahl mit x, so muß

x und 7 gleich 15

sein; in mathematischen Zeichen, wir müssen haben:

$$x + 7 = 15.$$

x ist eine uns noch **unbekannte Größe**, welche wir erst suchen sollen. Der Ausdruck: $x + 7 = 15$ stellt uns also eine Gleichung mit einer **unbekannten Größe** dar. Wenn es gelingt, den **Werth** von der Größe x zu **bestimmen**, so sagt man: die **Gleichung** ist **aufgelöst**. Die Auflösung der Gleichungen stützt sich auf die Grundsätze:

1) **Jede Größe ist sich selbst gleich.**
2) **Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind.**
3) **Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.**
4) **Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.**
5) **Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.**
6) **Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.**

Wir haben diese Grundsätze im Abschnitt C der ersten Lection ausführlich besprochen und auch noch einmal in § 11 des ersten arithmetischen Briefes zusammengefaßt. Da wir wir von diesen Grundsätzen ausgedehnten Gebrauch machen werden, bitten wir den Schüler, eine Repetition der genannten Abschnitte nicht zu versäumen.

§ 114. Die Auflösung der Gleichungen. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Gleichung:

$$x + 7 = 15$$

aufzulösen, oder anders ausgedrückt, den Werth der unbekannten Zahl x zu berechnen.

Nach dem Grundsatz: Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches, dürfen wir schreiben:

$$\begin{aligned} x + 7 &= 15 \\ 7 &= \ \ 7 \\ \hline (^{*}\ x + 7 - 7 &= 15 - 7^{**}), \end{aligned}$$

folglich:

$$x^{***}) = 15 - 7 = 8.$$

8 ist also der gesuchte Werth der Zahl x.

Wenden wir uns zu einer zweiten Aufgabe! Es sei uns aufgetragen:

eine Zahl zu suchen, die um 7 vermindert, gleich 3 ist.

Wenn wir die gesuchte, uns vorläufig noch unbekannte Zahl wieder x nennen, so muß

x weniger 7 gleich 3

---

*) Der Strich bedeutet folglich. **) Dem Satze: Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches, können wir daher für unsern speciellen Fall auch die Fassung geben: **Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn von beiden Seiten dieselbe Größe subtrahirt wird.** ***) Denn es ist $+ 7 - 7 = 0$.

sein; in mathematischen Zeichen, wir müssen haben:

$$x - 7 = 3.$$

Ermitteln wir jetzt den Werth der Zahl x! Nach dem Grundsatze: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, können wir schreiben:

$$\begin{array}{r} x - 7 = 3 \\ 7 = 7 \\ \hline x - 7 + 7 = 3 + 7 \end{array}$$ *)

mithin ist:

$$x = 3 + 7 = 10.$$

10 in also der Werth der gesuchten Zahl x. In der That! 10 um 3 vermindert ist gleich 7.

§ 115. Die Versetzung der Glieder einer Gleichung von einer Seite auf die andere. Das zweite Beispiel, welches wir im vorigen Paragraphen behandelt haben, wollen wir genauer betrachten. Die Aufgabe:

eine Zahl zu suchen, welche um 7 vermindert gleich 3 ist,

lieferte uns unmittelbar die Gleichung

$$\text{I.}\quad x - 7 = 3.$$

Indem wir zur linken und zur rechten Seite 7 addirten, konnten wir daraus die Gleichung:

$$\text{II.}\quad x = 3 + 7$$

ableiten. Bei der Gleichung I ist auf der linken Seite — 7 eins der Glieder; die Gleichung II geht aus der ersten hervor, wenn in Gleichung I das **Glied** — 7 **mit umgekehrtem Vorzeichen** von der **linken** Seite auf die **rechte** Seite gesetzt wird. Eine ähnliche Beobachtung können wir auch bei der Gleichung

$$x + 7 = 15$$

machen, welche wir im vorigen Paragraphen zuerst aufgelöst haben. Aus derselben leiteten wir die Gleichung

$$x = 15 - 7$$

her, indem wir auf beiden Seiten 7 subtrahirten. Auch hier entsteht die zweite Gleichung aus der ersten, wenn in der ersten Gleichung das eine **Glied** + 7 von der **rechten** Seite **mit umgekehrtem** Vorzeichen auf die **linke** gebracht wird. In der That!

Es ist gestattet, jedes Glied einer Gleichung mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite zu versetzen.

Haben wir z. B. die Gleichung:

$$x + 8 - 7 = 23,$$

so können wir + 8 als — 8 und — 7 als + 7 auf die rechte Seite bringen und schreiben:

$$x = 23 - 8 + 7 = 22.$$

Aehnlich können wir in

$$8 = x - 3 + 2$$

die — 3 als + 3 und die + 2 als — 2 von der rechten Seite auf die linke schaffen und auf diese Weise erhalten:

$$8 + 3 - 2 = x,$$
$$\text{d. h. } 9 = x,$$
$$\text{oder } x = 9.$$

Schaffen wir bei der Gleichung:

$$12 - x = 5$$

— x als + x oder x*) von der linken Seite auf die rechte und 5 als — 5**) von der rechten Seite auf die linke, so ergiebt sich:

$$12 - 5 = x,$$
$$\text{d. h. } 7 = x,$$
$$\text{oder } x = 7.$$

Bei den eben behandelten Gleichungen führt uns also schon der Satz von der Versetzung der Glieder zur Feststellung des Werthes der gesuchten Zahl x. Aber nicht immer läßt sich x so leicht berechnen, wir werden in den nächsten Paragraphen vielmehr sehen, daß oft die mannichfaltigsten arithmetischen Operationen nöthig sind, um den Werth von x zu ermitteln.

§ 116. Verschiedene Fälle von Gleichungen. Wir wollen jetzt an mehreren Beispielen zeigen, wie wir zu verfahren haben, um die verschiedenartigsten Gleichungen aufzulösen.

---

*) Den Satz: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, können wir mithin für unsern Fall formuliren: **Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn zu beiden Seiten dieselbe Größe addirt wird.**

*) Denn bei einer positiven Größe, die am Anfang einer arithmetischen Summe steht, können wir das Vorzeichen fortlassen.

**) Denn eine absolute Größe wird ebenso behandelt wie eine positive Größe. Wenn die absolute Größe ihr Vorzeichen umkehren soll, so wird sie daher negativ.

Beispiel I. Von welcher Zahl ist das Achtfache vermindert um 6 gleich 10?

Bezeichnen wir die Zahl, deren Werth wir bestimmen sollen, mit x, so ist 8x das Achtfache von x. Vermindern wir 8x um 6, so haben wir: 8x — 6; 8x — 6 muß gleich 10 sein, folglich können wir die Gleichung aufstellen:

$$8x - 6 = 10.$$

Schaffen wir — 6 mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite, so ergiebt sich:

$$8x = 10 + 6,$$
$$\text{oder } 8x = 16.$$

x hat jetzt noch den Coefficienten 8 (d. h. x ist mit 8 multiplicirt). Von diesem Coefficienten müssen wir x befreien; und zwar können wir dies auf folgende Weise bewerkstelligen.

Nach dem Grundsatz: Gleiches dividirt durch Gleiches giebt Gleiches, ist:

$$8x = 16$$
$$\text{ferner } 8 = 8^{*)}$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$

8x dividirt durch 8 giebt x*), 16 dividirt durch 8 giebt 2; mithin haben wir:

$$x = 2.$$

Der Werth von x ist jetzt ermittelt; oder mit anderen Worten, die Gleichung

$$8x - 6 = 10$$

ist aufgelöst.

Beispiel. II. Von welcher Zahl beträgt das Fünffache, vermehrt um 7, soviel wie 42?

Lösung. Die zu suchende Zahl wollen wir wieder mit x bezeichnen; das Fünffache derselben ist dann 5x. Vermehren wir 5x um 7, so erhalten wir 5x + 7; 5x + 7 muß gleich 42 sein; folglich besteht die Gleichung:

$$5x + 7 = 42.$$

Schaffen wir + 7 auf die linke Seite, so erhalten wir

$$5x = 42 - 7$$
$$\text{oder } 5x = 35.$$

x hat noch den Coefficienten 5, der entfernt werden muß, indem wir beide Seiten der Gleichung durch 5 dividiren; es ergiebt sich dann:

$$\frac{5x}{5} = \frac{35}{5}$$
$$\text{oder } x = 7.$$

Die beiden in diesem Paragraphen aufgelösten Gleichungen haben etwas Gemeinsames; bei beiden kommt x nur in einem Gliede vor, bei beiden ist ferner x mit einem Coefficienten behaftet. Um den Werth der Unbekannten x zu ermitteln, haben wir darum auch bei den beiden Gleichungen ein ähnliches Verfahren eingeschlagen. Zunächst haben wir die Glieder der Gleichung derart geordnet, daß die Unbekannte mit ihrem Coefficienten auf die linke Seite und die bekannten Größen auf die rechte Seite traten; beide Seiten der auf diese Weise entstandenen Gleichungen **dividirten** wir dann durch den **Coefficienten** von x und erhielten so auf beiden Seiten die Unbekannte x als einziges Glied.

Aufgaben I. Der Schüler möge durch Gleichungen berechnen:

1) bei welcher Zahl das Dreizehnfache, um 1 vermindert, gleich 90 ist,

2) bei welcher Zahl das Fünffache, um 50 vermehrt gleich 150 ist.

Beispiel III. Die Zahl soll ermittelt werden, bei welcher der sechste Theil vermindert um 5 gleich 7 ist.

Die gesuchte Zahl bezeichnen wir wieder mit x, der sechste Theil derselben ist dann $\frac{x}{6}$; vermindern wir $\frac{x}{6}$ um 5, so ergiebt sich $\frac{x}{6} - 5$; $\frac{x}{6} - 5$ muß gleich 7 sein; es besteht daher die Gleichung:

$$\frac{x}{6} - 5 = 7,$$

---

*) Den Satz: Gleiches dividirt durch Gleiches giebt Gleiches, können wir demnach in Bezug auf unsern Fall folgendermaßen aussprechen: **Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn ihre beiden Seiten durch dieselbe Größe dividirt werden.**

*) Denn es ist:

$$\frac{8x}{8} = \frac{8.x}{8} = x$$

nach dem Satze: Um ein **Product** durch **einen seiner Factoren** zu **dividiren**, brauchen wir nur den betreffenden **Factor** aus dem Product fortzulassen.

Versetzen wir — 5 mit umgekehrtem Vorzeichen auf die rechte Seite, so ergiebt sich:

$$\frac{x}{6} = 7 + 5 = 12,$$

also:

$$\frac{x}{6} = 12.$$

Beide Seiten dieser Gleichung wollen wir mit derselben Größe, mit 6 multipliciren. Nach dem Grundsatz: Gleiches mit Gleichem (Demselben) multiplicirt, giebt Gleiches, besteht dann die Gleichung:

$$\frac{x}{6} \times 6 = 12 \times 6 = 72^{*)}.$$

Für die linke Seite können wir x setzen, denn es ist:

$$\frac{x}{6} \times 6 = \frac{x \,.\, 6}{6} = x.$$

Mithin haben wir:

$$x = 72.$$

In der That! 72 ist die gesuchte Zahl, denn, wenn wir 72 durch 6 theilen, erhalten wir 12; vermindern wir 12 um 5, so ergiebt sich 7.

Beispiel IV. Es soll eine Zahl gesucht werden, deren siebenter Theil, vermehrt um 12, gleich 15 ist.

Lösung. Die gesuchte Zahl möge x sein; ihr siebenter Theil ist dann $\frac{x}{7}$; $\frac{x}{7}$ vermehrt um 12 giebt $\frac{x}{7} + 12$; $\frac{x}{7} + 12$ muß gleich 15 sein; mithin haben wir

$$\frac{x}{7} + 12 = 15.$$

Wird + 12 mit umgekehrtem Vorzeichen auf die rechte Seite gebracht, so ergiebt sich:

$$\frac{x}{7} = 15 - 12,$$

oder $\frac{x}{7} = 3$

*) In Bezug auf unsern Fall können wir den Satz: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches, folgendermaßen fassen: **Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn man ihre beiden Seiten mit derselben Zahl multiplicirt.**

Multipliciren wir jetzt beide Seiten dieser Gleichung mit 7, so erhalten wir:

$$\frac{x}{7} \times 7 = 3 \times 7 = 71.$$

Für die linke Seite dürfen wir x schreiben, denn es ist:

$$\frac{x}{7} \times 7 = \frac{x \,.\, 7}{7} = x.$$

Mithin ist $x = 21$.

21 ist also der Werth der gesuchten Größe x; In der That! der siebente Theil von 21 ist 3; wird 3 um 12 vermehrt, so ergiebt sich 15.

Die beiden Gleichungen, zu welchen wir durch Beispiel III und IV geführt wurden, haben wieder etwas Gemeinsames. Sowohl bei $\frac{x}{3} - 5 = 7$ wie bei $\frac{x}{7} + 12 = 15$ ist x Zähler eines Bruches und kommt nur in einem Gliede der Gleichung vor. Um die Gleichungen aufzulösen, haben wir in beiden Fällen erst das Glied, welches x enthält, auf eine Seite gebracht und dann die beiden Seiten der so entstehenden Gleichung mit dem **Nenner** des Bruches **multiplicirt**, in dem x vorkommt.

Aufgaben II. Der Schüler möge

1) die Zahl angeben, deren dritter Theil verringert um 15 gleich 75 ist;

er möge

2) die Zahl nennen, bei welcher der achte Theil vermehrt um 36 gleich 40 ist.

Beispiel V. Es existirt eine Zahl, die mit 8 multiplicirt und durch 7 dividirt gleich 16 ist. Welches ist diese Zahl?

Lösung. Wir nennen die gesuchte Zahl wieder x; wird x mit 8 multiplicirt und durch 7 dividirt, so ergiebt sich $\frac{8x}{7}$; $\frac{8x}{7}$ muß gleich 16 sein, wir haben daher die Gleichung:

$$\frac{8x}{7} = 16.$$

Multipliciren wir die beiden Seiten dieser Gleichung mit 7, so erhalten wir

$$8x = 16 \,.\, 7$$

oder $8x = 112$.

Werden darauf beide Seiten der Gleichung durch 8 dividirt, so ergiebt sich:

$$\frac{8x}{8} = \frac{112}{8},$$

oder $x = 14$.

14 ist mithin der Werth der unbekannten Größe x.

Aufgaben III. Der Schüler möge bei den drei Gleichungen:

$$1)\ \frac{4x}{5} = 24,\quad 2)\ \frac{6x}{7} = 18,\quad 3)\ \frac{15x}{7} = 15$$

den Werth der Unbekannten x berechnen.

Beispiel VI. Das Fünffache einer gewissen Zahl vermindert um das Dreifache derselben ist gleich 20. Wie groß ist die betreffende Zahl?

Lösung. Bezeichnen wir die gesuchte Zahl wieder mit x, so ist das Fünffache derselben: 5x, und das Dreifache: 3x. 5x — 3x muß gleich 20 sein, Wir haben daher:

$$5x - 3x = 20,$$
$$\text{oder } 2x = 20$$
$$\text{und } x = \tfrac{20}{2} = 10.$$

Aufgaben IV. Der Schüler möge die beiden Gleichungen:

$$1)\ 7x - 2x = 15,\quad 2)\ 38x - 8x = 90$$

auflösen.

Beispiel VII. Wenn zu einer gewissen Zahl 28 addirt wird, so ergiebt sich das Fünffache derselben. Wie groß ist die Zahl?

Lösung. Die zu bestimmende Zahl sei x; addiren wir zu x die Zahl 28, so erhalten wir x + 28; x + 28 soll ebenso groß sein wie 5x. Wir haben daher die Gleichung:

$$5x = x + 28.$$

Wenn wir das x der rechten Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die linke Seite, schaffen, so ergiebt sich:

$$5x - x = 28,$$
$$\text{oder } 4x = 28.$$

Dividiren wir beide Seiten durch 4, den Coefficienten vrn x, so erhalten wir:

$$\frac{4x}{4} = \frac{28}{4};\ \text{also } x = 7.$$

Beispiel VIII. Es soll eine Zahl gefunden werden, von der das a-fache, vermindert um das b-fache, gleich c ist.

Lösung. Nennen wir die gesuchte Zahl x, so ist das a-fache derselben ax, das b-fache derselben bx; ax — bx muß gleich c sein. Es besteht daher die Gleichung:

$$ax - bx = c.$$

Setzen wir x als Factor heraus, so ergiebt sich:

$$x\,(a - b) = c.$$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch a — b, so erhalten wir:

$$\frac{x(a-b)^{*)}}{a-b} = \frac{c}{a-b},$$
$$\text{oder } x = \frac{c}{a-b}.$$

Aufgaben V. Der Schüler möge bei den Gleichungen $mx - nx = r$ und $dx - ex = n$ die Unbekannte x berechnen.

Beispiel X. Bei einer gewissen Zahl ist die Summe des achten und neunten Theils gleich 17. Wie groß ist diese Zahl?

Lösung. Nennen wir die gesuchte Zahl x, der achte Theil derselben ist dann $\frac{x}{8}$, der neunte Theil $\frac{x}{9}$; wenn wir die Summe des achten und neunten Theils bilden, so erhalten wir daher $\frac{x}{8} + \frac{x}{9}$; diese Summe muß gleich 17 sein, d. h. es besteht die Gleichung:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{9} = 17.$$

Diese Gleichung können wir auf verschiedene Weise auflösen. Zunächst wollen wir die 8 und die 9 ganz in der Weise, welche wir früher angegeben, aus den Nennern entfernen, indem wir erst beide Seiten der Gleichung mit 8 und dann mit 9 multipliciren. Multipliciren wir mit 8, so erhalten wir:

$$x + \frac{8 \cdot x}{9} = 8 \cdot 17.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung mit 9 multiplicirt, so ergiebt sich:

$$9x + 8x = 8 \cdot 9 \cdot 17$$
$$\text{oder } 17x = 8 \cdot 9 \cdot 17.$$

Dividiren wir jetzt beide Seiten der letzten Gleichung durch 17, so haben wir:

$$x = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{17} = 8 \cdot 9 = 72.$$

---

*) x (a — b) ist ein Product, bestehend aus den beiden Factoren x und a — b, Wollen wir x (a — b) durch a — b dividiren, so brauchen wir daher nur a — b fortzulassen.

Zu demselben Werthe von x gelangen wir, wenn wir die Gleichung

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{9} = 17$$

anders behandeln. Für x können wir setzen x . 1; daher können wir schreiben:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{9} = \frac{x.1}{8} + \frac{x.1}{9}$$

$$= x\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) = 17.$$

Wenn wir die beiden Brüche $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ addiren, erhalten wir als Summe $\frac{17}{72}$; vertauschen wir nun $\frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ mit dem gleichwerthigen Bruche $\frac{17}{72}$, so ergiebt sich:

$$x.\frac{17}{72} = \frac{x.17}{72} = 17.$$

Werden nun beide Seiten der Gleichung:

$$\frac{x.17}{72} = 17$$

mit 72 multiplicirt und durch 17 dividirt, so wird

$$x = \frac{17.72}{17} = \mathbf{72}.$$

Beispiel XI. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Gleichung

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{18} = 10$$

aufzulösen.

Lösung. Diese Gleichung ist der vorigen ganz ähnlich und kann daher auch in ähnlicher Weise aufgelöst werden; d. h. wir können, wenn wir das zuletzt besprochene Verfahren befolgen wollen, x auf der linken Seite heraussetzen, dann die Brüche $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{18}$ addiren u. s. f.; wir können aber auch die Nenner 12 und 18 fortschaffen, indem wir beide Seiten der Gleichung erst mit 12 und dann mit 18 multipliciren. Das Fortschaffen der Nenner können wir uns erleichtern, wenn wir beide Seiten mit einem Product multipliciren, welches aus den Nennern 12 und 18 in derselben Weise gebildet wird, wie wir vorher bei der Addition der Brüche den Generalnenner gebildet haben.

Es ist:

$$12 = 2.2.3 = 2^2.3,$$
$$18 = 2.3.3 = 2.3^2.$$

Der Generalnenner ist daher gleich $2^2.3^2$; wird

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{18} = 10$$

mit $2^2.3^2$ multiplicirt, so ergiebt sich:

$$\frac{x.2^2.3^2}{12} + \frac{x.2^2.3^2}{18} = 10.2^2.3^2;$$

Dafür dürfen wir schreiben:

$$\frac{x.2.2.3.3}{2.2.3} + \frac{x.2.2.3.3}{2.3.3} = 10.4.9$$
$$= 360.$$

$$\text{daher } x.3 + x.2 = 360,$$
$$\text{oder: } 3x + 2x = 360.$$

Folglich ist:

$$5x = 360$$

$$\text{und } x = \frac{360}{5} = \mathbf{72}.$$

Aufgaben VI. Der Schüler möge die Gleichungen:

$$\frac{x}{21} + \frac{x}{9} = 10 \quad \text{und} \quad \frac{x}{15} + \frac{x}{25} = 1$$

in der eben besprochenen Weise auflösen.

Beispiel XII. Wenn man von einer gewissen Zahl 17 abzieht, und die Differenz mit 5 multiplicirt, erhält man gerade soviel, als wenn man von der betreffenden Zahl 15 abzieht und die Differenz mit 3 multiplicirt. Wie groß ist diese Zahl?

Lösung. Wenn wir die gesuchte Zahl mit x bezeichnen und von derselben 17 subtrahiren, ergiebt sich als Differenz x — 17; multipliciren wir x — 17 mit 5, so erhalten wir 5 (x — 17).

Wird von x dagegen die Zahl 15 abgezogen, so ergiebt sich als Differenz (x — 15); x — 15 mal 3 ist gleich 3 (x — 15).

Der Aufgabe gemäß muß

$$5(x - 17) = 3(x - 15)$$

sein. Lösen wir die Klammern auf, so ist:

$$5.x - 5.17 = 3.x - 3.15,$$
$$\text{oder } 5x - 85 = 3x - 45.$$

Bringen wir mit umgekehrtem Vorzeichen — 85 auf die rechte und 3x auf die linke Seite, so wird aus der vorstehenden Gleichung:

$$5x - 3x = 85 - 45,$$
$$\text{oder } 2x = 40,$$
$$\text{folglich } x = \tfrac{40}{2} = \mathbf{20}.$$

20 ist also die gesuchte Zahl. In der That! Wenn wir 17 von 20 abziehen, ist die Differenz 3; 3 mit 5 multiplicirt giebt **15.**

15 erhalten wir auch, wenn 15 von 20 abgezogen und die Differenz 5 mit 3 multiplicirt wird.

Beispiel XIII. Es sei

$$a (x - b) = m (x - n)$$

x soll berechnet werden.

Lösung. Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung

$$a (x - b) = m (x - n)$$

die Klammern auflösen, erhalten wir:

$$ax - ab = mx - mn$$

Wird mit umgekehrtem Vorzeichen — ab auf die rechte und mx auf die linke Seite geschafft, so haben wir:

$$ax - mx = ab - mn.$$

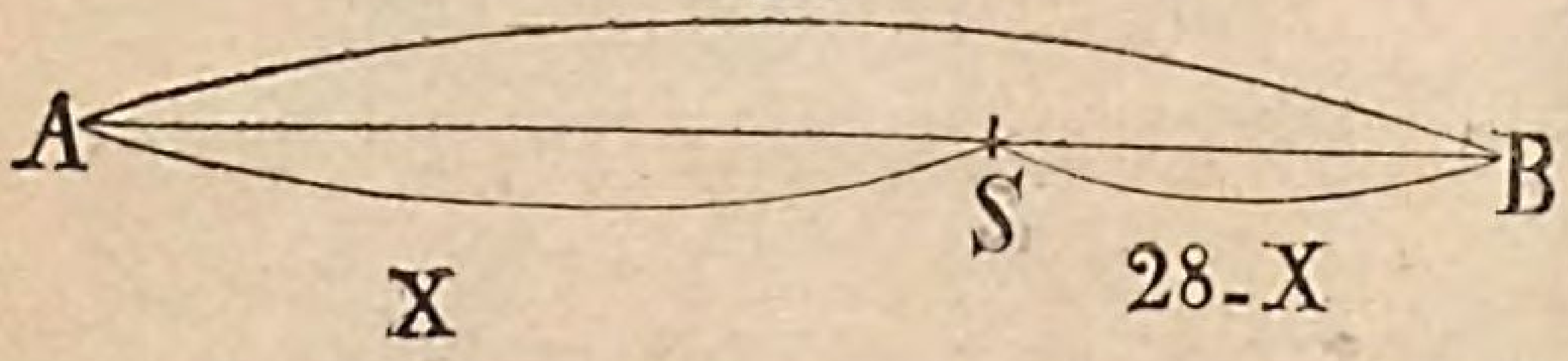
Setzen wir auf der linken Seite x als Factor heraus, so ergiebt sich:

$$x (a - m)^{*)} = ab - mn,$$

$$\text{daher } x = \frac{ab - mn}{a - m}.$$

Beispiel XIV. Zwei Bekannte, welche 28 Meilen von einander entfernt wohnen, reisen zu gleicher Zeit ab, um sich unterwegs zu treffen. Der eine möge täglich 4, der andere 3 Meilen machen, in welcher Entfernung von ihren Wohnorten kommen sie zusammen?

Lösung. Der Eine, welcher 4 Meilen an einem Tage reist, möge in A, der Zweite, welcher nur 3 Meilen täglich macht, möge in B wohnen. In dem Punkte S, dessen Entfernung von A und B wir feststellen wollen, mögen sie sich treffen.



Die **Anzahl der Meilen,** welche die Entfernung der Punkte S und A angiebt, wollen wir mit x bezeichnen; S ist dann von B 28 — x Meilen entfernt. Mithin hat

derjenige, welcher von A abreist x Meilen
" " " B " 28 — x Meilen

zu gehen. Da die beiden Bekannten zu gleicher Zeit abreisen, brauchen sie gleichviel Tage bis zu ihrer Zusammenkunft. Bestimmen wir die Anzahl der Tage!

Der von A Ausgehende macht

4 Meilen in 1 Tage
1 Meile in $\frac{1}{4}$ Tage
x Meilen in $\frac{x}{4}$ Tagen.

Der von B Ausgehende macht

3 Meilen in 1 Tage
1 Meile in $\frac{1}{3}$ Tage
28 — x Meilen in $\frac{28 - x}{3}$ Tagen.

Da sie gleichlange reisen, müssen $\frac{x}{3}$ Tage gleich $\frac{28 - x}{3}$ Tagen sein; es muß mithin die Gleichung bestehen:

$$\frac{x}{4} = \frac{28 - x}{3}$$

Multipliciren wir beide Seiten erst mit 3 und dann mit 4, so wird

$$3x = 4 (28 - x),$$

und wenn wir die Klammer der rechten Seite auflösen

$$3x = 112 - 4x.$$

Bringen wir — 4x mit umgekehrtem Vorzeichen von der rechten Seite auf die linke, so erhalten wir:

$$3x + 4x = 112,$$
$$\text{oder } 7x = 112,$$

$$\text{mithin ist: } x = \frac{112}{7} = 16.$$

S ist also von A 16 und von B 28 — 16 d. i. 12 Meilen entfernt. Da der von A Abreisende 4 Meilen, der von B Abreisende 3 Meilen an einem Tage geht, brauchen beide 4 Tage, bis sie sich treffen.

Beispiel XV. Als der berühmte Mathematiker Pythagoras von Polykrates gefragt wurde, wie groß die Zahl seiner Schüler sei, soll er folgende Antwort gegeben haben:

---

*) a — m ist der Coefficient von x; um x von demselben zu befreien, müssen wir die ganze Gleichung durch a — m dividiren.

Die Hälfte meiner Schüler treibt die treffliche Mathematik, der vierte Theil sucht die ewigen Gesetze der Natur zu belauschen, ein Siebentel übt sich im Stillschweigen; dazu kommen dann noch drei Frauen, unter denen Theano hervorragt. Jetzt berechne selbst, Polykrates, wie groß die Zahl meiner Schüler ist.

Lösung. Beantworten wir dem trefflichen Pythagoras die Frage! Die Zahl seiner Schüler wollen wir x nennen. Dann studiren

$\frac{x}{2}$ die Mathematik,

$\frac{x}{4}$ die Naturwissenschaften,

$\frac{x}{7}$ üben sich im Stillschweigen; dazu sind noch 3 Frauen zu rechnen.

Die Zahl seiner Schüler können wir daher erhalten, wenn wir $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{7}$ und 3 addiren; die Zahl der Schüler ist aber auch gleich x; wir können daher die Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x.$$

Aus dieser Gleichung haben wir den Werth von x zu bestimmen. Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit 4 . 7 oder 2 . 2 . 7, so ergiebt sich:

$$\frac{2.2.7x}{2} + \frac{4.7x}{4} + \frac{4.7x}{7} + 3.4.7 = 4.7x.$$

Dafür können wir schreiben:

$$2.7x + 7x + 4x + 3.4.7 = 4.7x$$

oder $14x + 7x + 4x + 84 = 28x$,

Schaffen wir die x der linken Seite mit umgekehrtem Vorzeichen auf die rechte, so erhalten wir:

$$84 = 28x - 14x - 7x - 4x = 3x,$$

oder anders geschrieben:

$$3x = 84$$
$$x = \frac{84}{3} = 28.$$

Pythagoras hatte also 28 Schüler; von diesen 28 Schülern studirten 14 die Mathematik, 7 die Naturwissenschaften, 4 schwiegen; dazu kommen noch 3 Frauen.

B. Auflösungen der Aufgaben der Lectionen 38 und 39.

Lection 38.

Abschnitt C. § 101. **Aufgaben.** 1) Generalnenner: $2^2 . 3^2 = 2.2.3.3$.

$$\frac{7}{12} + \frac{13}{18} + \frac{35}{36} = \frac{7}{2.2.3} + \frac{13}{2.3.3} + \frac{35}{2.2.3.3}$$
$$= \frac{7.3}{2.2.3.3} + \frac{13.2}{2.2.3.3} + \frac{35}{2.2.3.3}$$
$$= \frac{7.3 + 13.2 + 35}{2.2.3.3}$$
$$= \frac{82}{36} = \frac{41}{18} = 2\tfrac{5}{18}.$$

2) Generalnenner: $2^2 . 11^2 = 2.2.11.11$.

$$\frac{7}{22} + \frac{17}{44} + \frac{23}{121}$$
$$= \frac{7}{2.11} + \frac{17}{2.2.11} + \frac{23}{11.11}$$
$$= \frac{7.2.11}{2.2.11.11} + \frac{17.11}{2.2.11.11} + \frac{23.2.2}{2.2.11.11}$$
$$= \frac{7.2.11 + 17.11 + 23.2.2}{2.2.11.11} = \frac{433}{484},$$

3) Generalnenner: $3 . 7^2 . 11 = 3.7.7.11$.

$$\frac{8}{77} + \frac{5}{21} + \frac{17}{147}$$
$$= \frac{8}{7.11} + \frac{5}{3.7} + \frac{17}{3.7.7}$$
$$= \frac{3.7.8}{3.7.7.11} + \frac{5.7.11}{3.7.7.11} + \frac{17.11}{3.7.7.11}$$
$$= \frac{3.7.8 + 5.7.11 + 17.11}{3.7.7.11} = \frac{720}{1617}.$$

§ 102. **Aufgaben.** 1) Generalnenner: $mn(m+n)$.

$$\frac{1}{mn} + \frac{2}{m(m+n)} + \frac{3}{n(m+n)}$$
$$= \frac{m+n}{mn(m+n)} + \frac{2n}{mn(m+n)} + \frac{3m}{mn(m+n)}$$
$$= \frac{m+n+2n+3m}{mn(m+n)} = \frac{4m+3n}{mn(m+n)},$$

2) Generalnenner:
$m^2(m+n)^2 = mm(m+n).(m+n)$.

$$\frac{7}{m} + \frac{8}{m^3 + m^2 n} + \frac{10}{m^2 + 2mn + n^2}$$
$$= \frac{7}{m} + \frac{8}{m^2(m+n)} + \frac{10}{(m+n)^2}$$
$$= \frac{7.m(m+n)^2}{m^2(m+n)^2} + \frac{8(m+n)}{m^2(m+n)^2} + \frac{10.m^2}{m^2(m+n)^2}$$
$$= \frac{7m(m+n)^2 + 8(m+n) + 10m^2}{m^2(m+n)^2}.$$

§ 103. **Aufgaben.** 1) $\frac{t}{m} - \frac{s}{m} = \frac{t-s}{m}$,
2) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, 3) $\frac{12}{13} - \frac{4}{13} = \frac{8}{13}$.

§ 104. **Aufgaben.** 1) Generalnenner:

$2 . 3^2 = 2 . 3 . 3.$

$$\frac{8}{9} - \frac{5}{6} = \frac{8}{3 . 3} - \frac{5}{2 . 3} = \frac{8 . 2}{2 . 3 . 3} - \frac{5 . 3}{2 . 3 . 3} = \frac{8 . 2 - 5 . 3}{2 . 3 . 3} = \frac{1}{18}.$$

2) Generalnenner: $a^2b^2 = aabb$.

$$\frac{3}{ab^2} - \frac{1}{a^2b} = \frac{3}{abb} - \frac{1}{aab} = \frac{3a}{aabb} - \frac{b}{aabb} = \frac{3a - b}{a^2b^2}.$$

§ 103. **Aufgaben.** 1) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$,
2) $\frac{6}{7} \times \frac{10}{11} = \frac{60}{77}$, 3) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$,
4) $\frac{5}{17} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{68}$, 5) $\frac{3}{9} \times \frac{2}{11} = \frac{6}{99}$,
6) $\frac{1}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{60}$, 7) $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$,
8) $\frac{r}{s} \times \frac{m}{n} = \frac{rm}{sn}$.

§ 108. **Aufgaben.** $\frac{27}{25} : 9 = \frac{27 : 9}{25} = \frac{3}{25}$,
$\frac{26}{7} : 13 = \frac{26 : 13}{7} = \frac{2}{7}$,
$\frac{56}{43} : 7 = \frac{56 : 7}{43} = \frac{8}{43}$, $\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{8 . 2} = \frac{7}{16}$,
$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 . 5} = \frac{3}{20}$, $\frac{7}{16} : 3 = \frac{7}{16 . 3} = \frac{7}{48}$.

§ 109. **Aufgaben.** $\frac{5}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{12}$,
$\frac{7}{8} : \frac{1}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{1} = \frac{21}{8}$, $\frac{9}{10} : \frac{7}{13} = \frac{9}{10} \times \frac{13}{7} = \frac{117}{70}$,
$\frac{m}{n} : \frac{n}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{n} = \frac{mq}{n^2}$.

Section 39.

Abschnitt A. § 116. **Aufgaben I.** 1) Die gesuchte Zahl heiße x; es besteht dann die Gleichung: $13x - 1 = 90$. Wird -1 mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite gebracht, so wird

$13x = 90 + 1 = 91$; mithin $x = \frac{91}{13} = 7$.

2) Die gesuchte Zahl heiße wieder x; der Aufgabe gemäß besteht dann die Gleichung:

$5x + 50 = 150$; folglich auch
$5x = 150 - 50 = 100$, und $x = \frac{100}{5} = 20$.

Aufgaben II. 1) Die unbekannte Zahl sei x, dann ist der Aufgabe gemäß: $\frac{x}{3} - 15 = 75$, folglich auch: $x - 15 . 3 = 75 . 3$, und:
$x = 75 . 3 + 15 . 3 = (75 + 15) . 3 = 90 . 3 = 270$.

2) Ist die unbekannte Zahl x, so haben wir:
$\frac{x}{8} + 36 = 40$, mithin $x + 36 . 8 = 40 . 8$, und
$x = 40 . 8 - 36 . 8 = (40 - 36) . 8 = 8 . 4 = 32$.

Aufgaben III. 1) Aus $\frac{4x}{5} = 24$ folgt:

$4x = 24 . 5 = 120$, $x = \frac{120}{4} = 30$.

2) Aus $\frac{6x}{7} = 18$ folgt $6x = 18 . 7$;
$x = \frac{18 . 7}{6} = \frac{18}{6} . 7 = 3 . 7 = 21$.

3) Aus $\frac{15x}{7} = 15$ folgt $x = 7$.

Aufgaben IV. Wir haben:
1) $7x - 2x = 15$, d. i. $5x = 15$;
$x = \frac{15}{5} = 3$.
2) $38x - 8x = 90$, d. i. $30x = 90$;
$x = \frac{90}{30} = 3$.

Aufgaben V. Aus:
$mx - nx = r$ wird $x(m - n) = r$;
daher $x = \frac{r}{m - n}$.

Aus: $dx - ex = n$ wird $x(d - e) = n$,
mithin: $x = \frac{n}{d - e}$.

Aufgaben VI. 1) Wenn wir die Nenner der ersten Gleich. in Primfactoren zerlegen, erhalten wir:

$$\frac{x}{3 . 7} + \frac{x}{3 . 3} = 10.$$

Der aus den Nennern 3 . 7 und 3 . 3 gebildete Generalnenner ist $3^2 . 7 = 3 . 3 . 7$. Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit 3 . 3 . 7, so wird

$$\frac{x . 3 . 3 . 7}{3 . 7} + \frac{x . 3 . 3 . 7}{3 . 3} = 10 . 3 . 3 . 7,$$

also: $x . 3 + x . 7 = 10 . 3 . 3 . 7$,
$x(3 + 7) = x . 10 = 10 . 3 . 3 . 7$
$= \frac{10 . 3 . 3 . 7}{10} = 3 . 3 . 7$
$= 63$.

2) Werden die Nenner 15 und 25 zerlegt, so ergiebt sich:

$$\frac{x}{3 . 5} - \frac{x}{5 . 5} = 2.$$

Der Generalnenner ist: $3 . 5^2 = 3 . 5 . 5$. Multipliciren wir beide Seiten der Gl. mit 3 . 5 . 5, so wird

$$\frac{x . 3 . 5 . 5}{3 . 5} - \frac{x . 3 . 5 . 5}{5 . 5} = 2 . 3 . 5 . 5,$$

oder $x . 5 - x . 3 = 2 . 3 . 5 . 5$,
$x(5 - 3) = 2 . 3 . 5 . 5$,
$x . 2 = 2 . 3 . 5 . 5$,
$x = \frac{2 . 3 . 5 . 5}{2} = 3 . 5 . 5$
$= 75$.

Mit diesem Briefe beendigen wir den ersten Theil der Arithmetik; es folgen noch im ersten Cursus 5 geometrische Briefe. Der zweite Cursus wird 15 Briefe enthalten.

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 40 und 41.
Planimetrie.

21. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als Manuscript gedruckt.

Zweiter Theil der Planimetrie.

In den ersten neun Briefen, welche uns mit den Anfängen der Planimetrie bekannt machten, haben wir wenig Stoff behandeln können.

Wir mußten den Schüler erst in die Methoden einführen, welche in der Mathematik gebräuchlich sind; wir mußten z. B. das Beweisverfahren ausführlich erläutern, das bei den Lehrsätzen der elementaren Planimetrie gewöhnlich in Anwendung gebracht wird. Wir mußten ebenso ausführlich auf die Lösung planimetrischer Constructionsaufgaben eingehen und die einzelnen Theile, welche bei der Darstellung der Lösung zu unterscheiden sind, einer genauen Betrachtung unterwerfen. Daher sind wir in den ersten neun Briefen nur bis zur Lehre vom Parallelogramm und vom Trapez vorgedrungen; in den folgenden fünf Briefen haben wir uns

1) **mit dem Kreise,**
2) **mit dem Flächeninhalt geradliniger planimetrischer Figuren,**
3) **mit der Aehnlichkeit der Dreiecke**

zu beschäftigen. Allgemeine Betrachtungen über diese drei Abschnitte schon hier anzustellen, würde unzweckmäßig sein; wir wollen nur bemerken, daß wir bei der Erörterung des Flächeninhalts der planimetrischen Figuren auch auf den berühmten „Pythagoräischen Lehrsatz“ stoßen werden, den wir in der historischen Einleitung des ersten Briefes bereits erwähnt haben. Wir wenden uns jetzt sofort zur

Lehre vom Kreise.

Keinem Sterblichen ist ohne Anstrengung etwas gegeben. (Horaz.)

Lection 40.

A. Der Kreis und die Kreisstücke.

§ 1. Definition des Kreises. Der Kreismittelpunkt und die Radien. Concentrische Kreise. Was wir unter dem Kreise, dem Kreismittelpunkte, den Radien u. s. w. zu verstehen haben, ist von uns schon ausführlich im ersten Briefe erörtert worden. Der Vollständigkeit halber wollen wir aber die Definitionen und Sätze, welche wir in § 27, 28, 29 und 30 des ersten Briefes gebracht haben, kurz wiederholen.

Definition I. Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind.

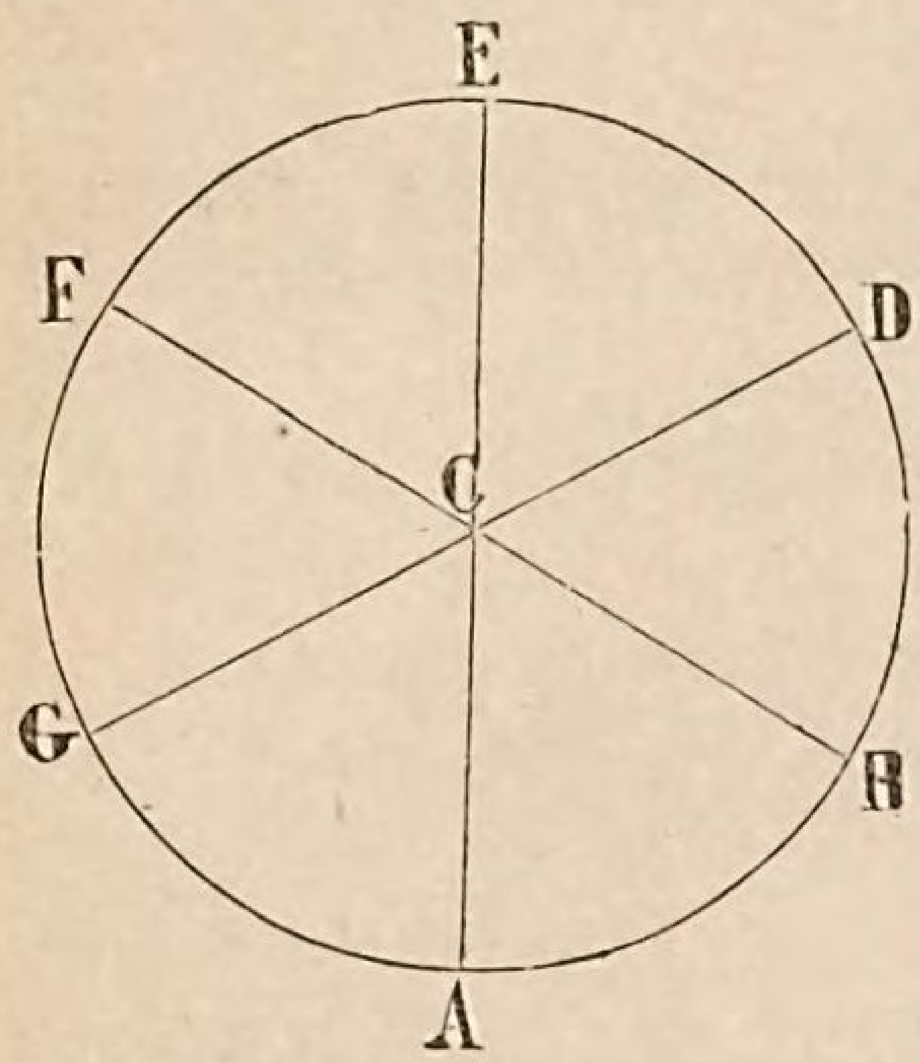


Fig. 1.

Den festen Punkt nennt man den **Mittelpunkt** oder das **Centrum;** man bezeichnet ihn gewöhnlich mit **M** (von Mittelpunkt) oder **C** (von Centrum).

Die geraden Linien, welche den Mittelpunkt mit den Kreispunkten verbinden, heißen **Radien oder Halbmesser.**

C ist in Fig. 1 der Mittelpunkt oder das Centrum; CA, CB, CD, CE, CF und CG sind Radien.

Lehrsatz I. Die Radien eines Kreises sind einander gleich.

Nach diesem Satz ist in Fig. 1:

CA = CB = CD = CE = CF = CG.

Definition II. Kreise heißen **concentrisch,** wenn sie **denselben Mittelpunkt** (dasselbe Centrum), aber **verschiedene Radien** haben.

Die drei Kreise, welche wir in Fig. 2 sehen, sind concentrisch; sie haben einen gemeinsamen Mittelpunkt C, aber verschiedene Radien (r_1, r_2 und r_3).

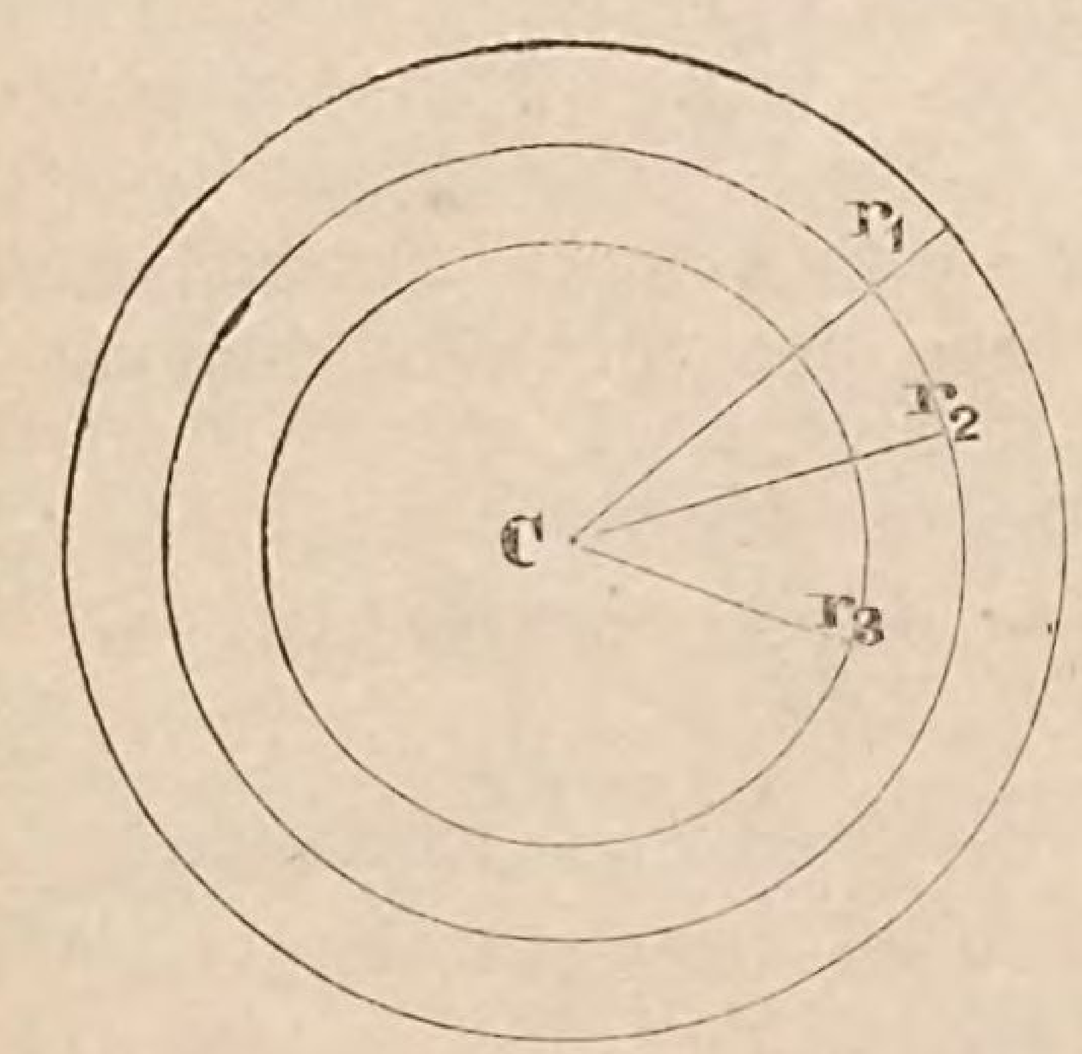


Fig. 2.

§ 2. Der Kreisbogen und die Sehnen.

Man nennt **Theile des Kreises** (der Kreislinie) **Kreisbogen.**

In Fig. 3 ist GH einer der Kreisbogen; derselbe ist der größern Deutlichkeit wegen in Fig. 4 noch einmal dargestellt und zwar getrennt von den anderen Theilen des Kreises. EF und ST sind sind gleichfalls Kreisbogen des Kreises um C. (Fig. 3.)

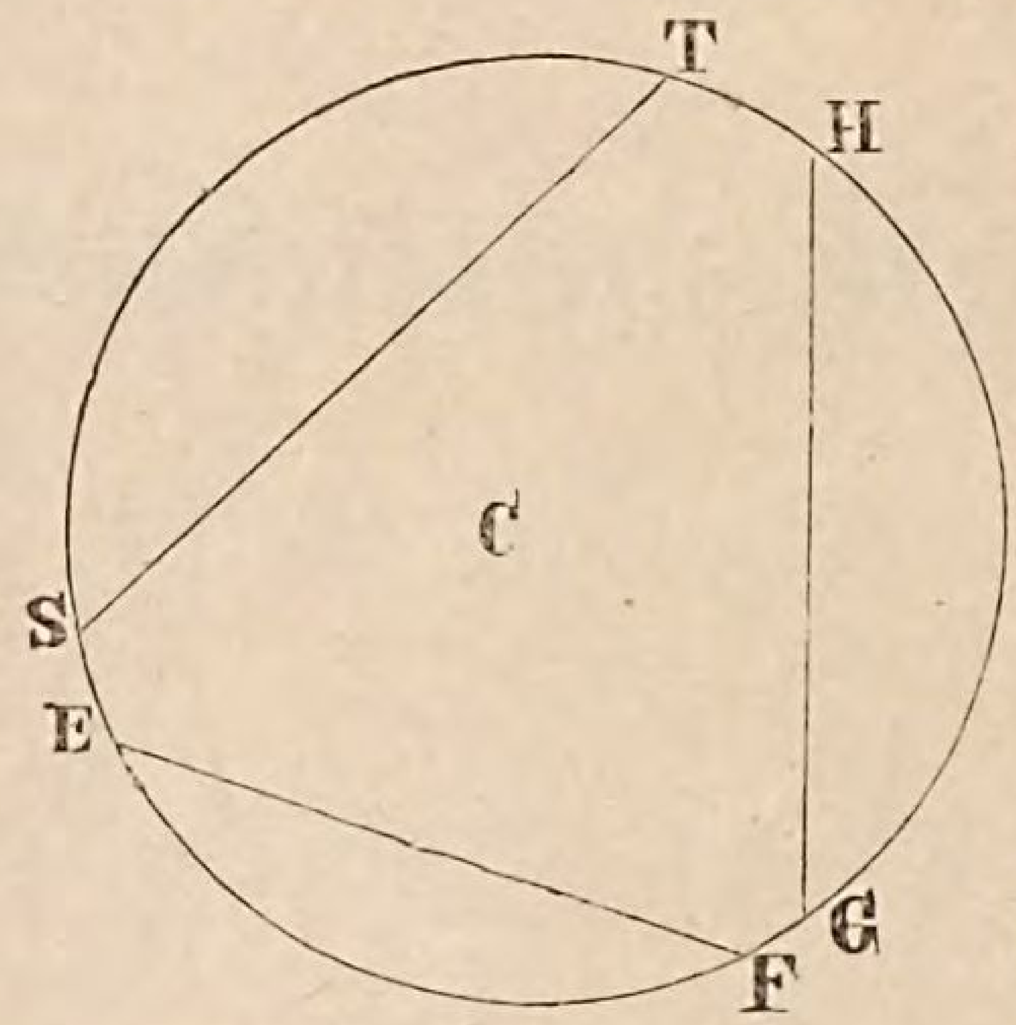


Fig. 3.

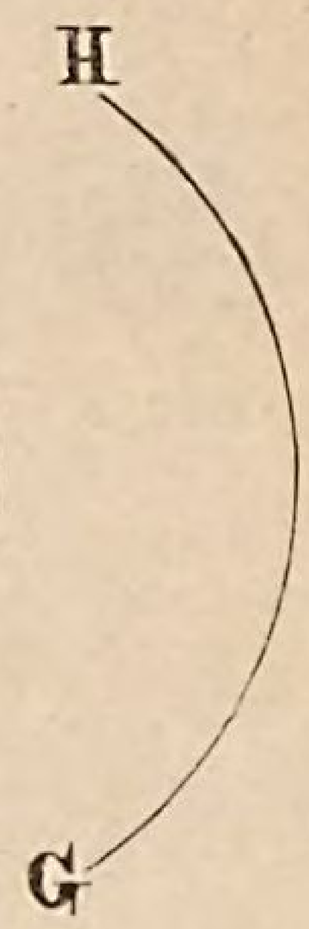


Fig. 4.

Gerade Linien, welche **zwei Kreispunkte** mit einander **verbinden,** heißen **Sehnen.**

In Fig. 3 sind z. B. die Geraden EF, GH und ST Sehnen.

Mit denselben Buchstaben sind vorher auch die Kreisbogen benannt worden, welche den Sehnen entsprechen. Um die hierdurch entstehende Zweideutigkeit zu vermeiden, setzt man über zwei Buchstaben, einen geraden Strich, wenn sie eine Sehne, und einen kleinen Bogen, wenn sie einen Kreisbogen bezeichnen sollen. In Fig. 3 bedeuten demnach:

$\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{ST}$ Sehnen, und

$\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{GH}$, $\overset{\frown}{ST}$ die entsprechenden Kreisbogen.

Sehnen, welche durch den **Mittelpunkt** eines Kreises **hindurchgehen,** werden **Durchmesser** genannt.

In Fig. 1 sind z. B. die Sehnen AE, BF und DG Durchmesser.

Ueber den Durchmesser haben wir folgende beiden Sätze aufgestellt:

Lehrsatz II. Ein **Durchmesser** ist **doppelt so groß** wie ein **Radius.**

und

Lehrsatz III. Durch den **Durchmesser** wird der **Kreis** in **zwei gleiche** Bogen getheilt, die man **Halbkreise** nennt.

Nach Lehrsatz II sind demnach die Durchmesser AE, BF, DG (Fig. 1) doppelt so groß wie die Radien AC, BC, DC, EC, FC, GC; und nach Lehrsatz III wird der ganze Kreis durch die Durchmesser AD, BF und DG im Halbkreise zerlegt.

§ 3. Die Secanten.

Gerade Linien, welche den **Kreis durchschneiden,** werden **Secanten** genannt.

In Fig. 5 sind die Geraden MN, AD und ST

Secanten; zu jeder Secante gehört, wie wir sehen, eine Sehne; zur Secante MN die Sehne OP, zur Secante AD die Sehne AB und zur Secante ST die Sehne UV.

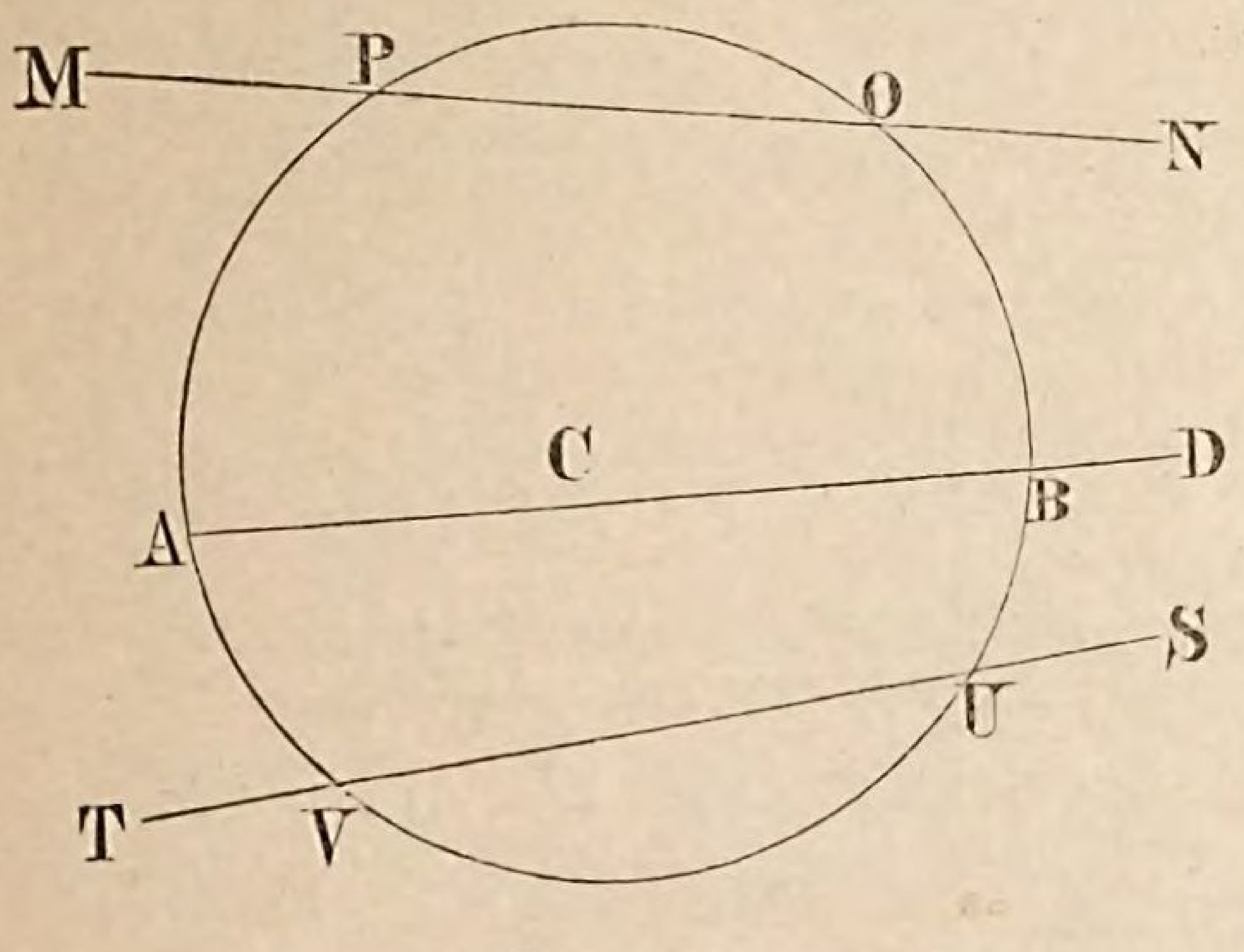


Fig. 5.

§ 4. Die Centriwinkel und die Peripheriewinkel. **Ein Winkel,** dessen **Scheitelpunkt** zugleich **Centrum** (Mittelpunkt) **eines Kreises** ist, wird **Centriwinkel** genannt.

So ist z. B. Winkel ECF sowohl in Fig. 6 wie in Fig. 7 ein Centriwinkel. In Fig. 1 bemerken wir 6 Centriwinkel, nämlich: ACB, BCD, DCE, ECF, FCG und GCA.

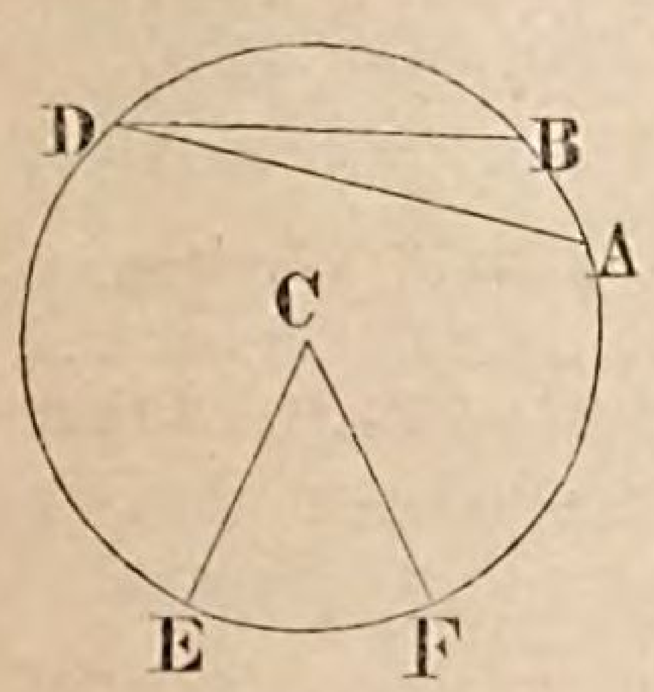


Fig. 6.

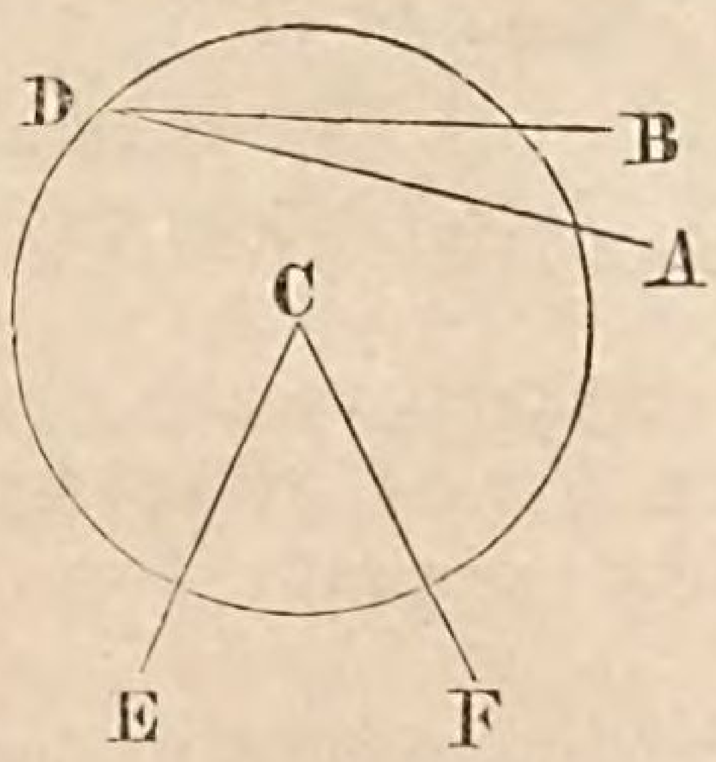


Fig. 7.

Ein Winkel, dessen **Scheitelpunkt** in der **Kreislinie** liegt, heißt ein **Peripheriewinkel.**

In Fig. 6 und in Fig. 7 ist z. B. der Winkel ADB ein Peripheriewinkel.

§ 5. Die Beziehungen zwischen den Kreisbogen, Centriwinkeln und Sehnen. Indem wir den Uhrzeiger bei seiner Bewegung beobachteten und den Winkel, den er mit seiner ursprünglichen Stellung macht, mit dem durchlaufenen Wege verglichen, gelangten wir zu einer Beziehung, die zwischen den Kreisbogen und den Centriwinkeln besteht. Wir fanden nämlich, daß

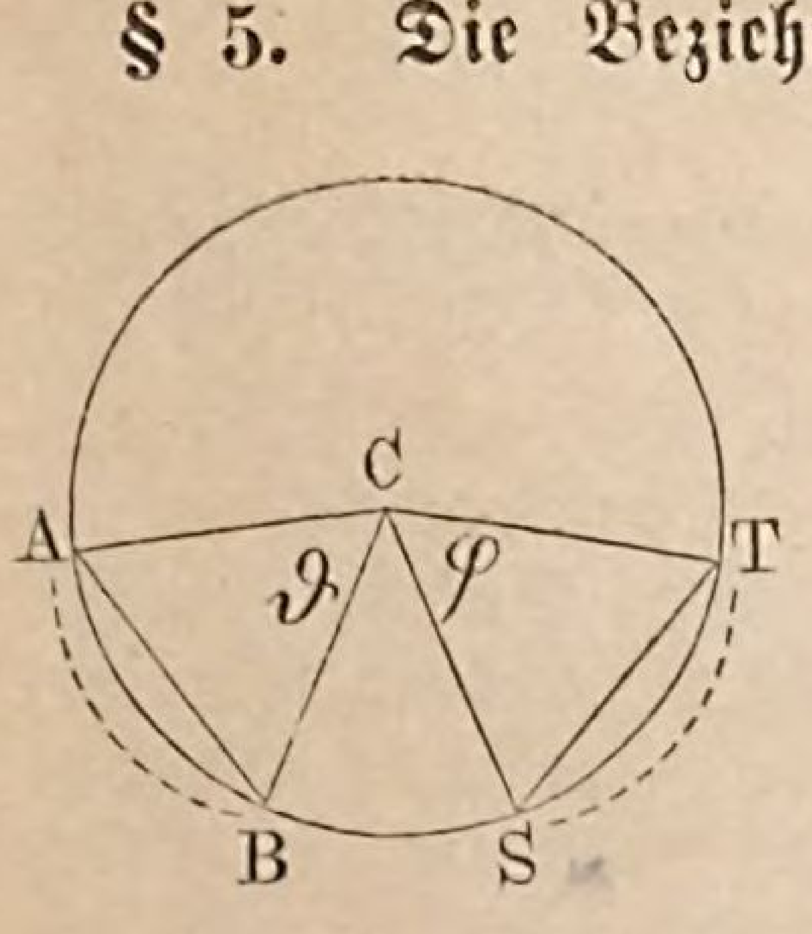


Fig. 8.

zu **gleichen Kreisbogen** auch **gleiche Centriwinkel** gehören.

Diesen Satz können wir noch erweitern, wenn wir auch die Sehnen in ihn hineinziehen. Wir wollen

voraussetzen, daß in Fig. 8 die beiden Kreisbogen AB und ST einander gleich seien, in Zeichen, daß die Gleichung besteht:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ST}.$$

Aus dem soeben angeführten Satze können wir dann schließen, daß auch die Centriwinkel ϑ und φ gleiche Größen haben, in Zeichen, daß

$$\vartheta = \varphi$$

ist. Wir wissen ferner, daß Radien ein und desselben Kreises gleich groß sind und können daher die Gleichungen aufstellen:

$$AC = SC \text{ und } BC = TC.$$

Diese drei Gleichungen sagen uns, daß die beiden Dreiecke ACB und SCF in zwei Seiten übereinstimmen und in dem Winkel, welcher von den beiden Seiten eingeschlossen wird. Nach dem ersten Congruenzsatze haben wir daher:

$$\triangle\, ACB \cong \triangle\, SCT.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; es ist $\vartheta = \varphi$, mithin auch:

$$\overline{AB} = \overline{ST}.$$

Fassen wir kurz unsere Betrachtungen zusammen. Wir sind von der Bedingung

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ST}$$

ausgegangen und haben gefunden, daß

$$\overline{AB} = \overline{ST}$$

ist. $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{ST}$ sind Kreisbogen, $\overline{AB}$ und $\overline{ST}$ sind die zugehörigen Sehnen. Wir sind also zu dem Satze geführt worden:

Zu **gleichen Kreisbogen** gehören auch **gleiche Sehnen.**

Wenn wir zu diesem Satze noch die Beziehungen hinzufügen, welche nach unseren obigen Erörterungen zwischen den Centriwinkeln und Kreisbogen bestehen, können wir sagen:

Zu **gleichen Kreisbogen** gehören **gleiche Centriwinkel** und **gleiche Sehnen,**
oder wenn wir die Kreisbogen, Centriwinkel und Sehnen in anderer Ordnung nennen:

Zu **gleichen Centriwinkeln** gehören **gleiche Kreisbogen** und **gleiche Sehnen**

und

Zu **gleichen Sehnen** gehören **gleiche Centriwinkel** und **gleiche Kreisbogen.**

Ist z. B. in Fig. 9

$$\alpha = \beta,$$

so muß auch:

$$\widehat{CD} = \widehat{EF}$$

und $\overline{CD} = \overline{EF}$ sein.

Ist in Fig. 10

$$\overline{PR} = \overline{UV},$$

so müssen wir auch haben:

$$\widehat{PR} = \widehat{UV}$$

und $\sigma = \tau$.

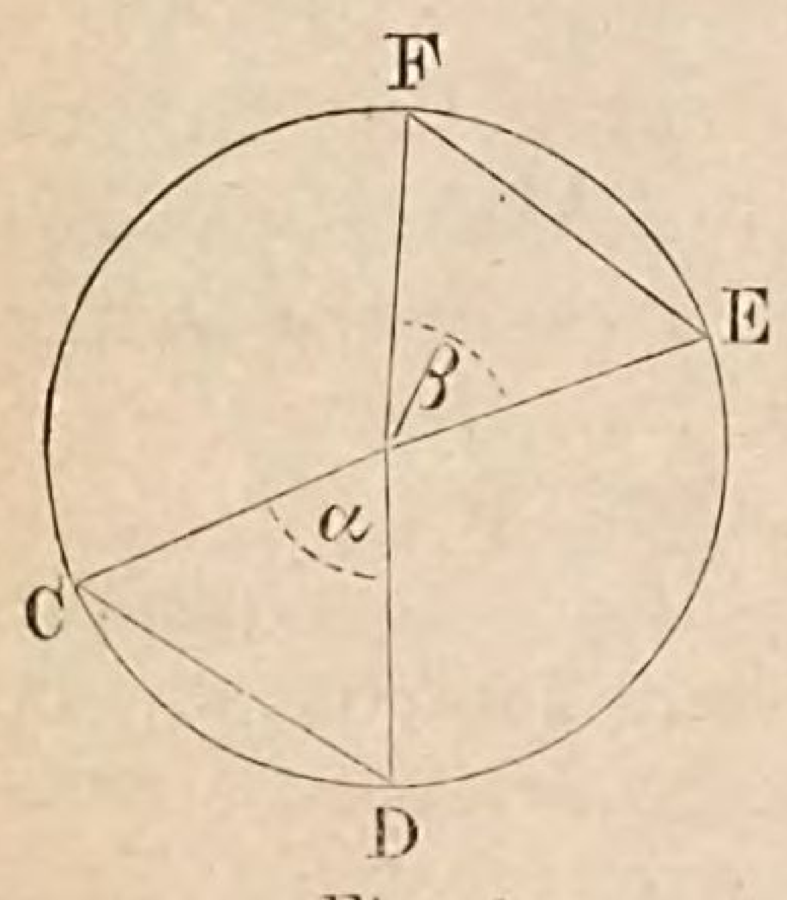


Fig. 9.

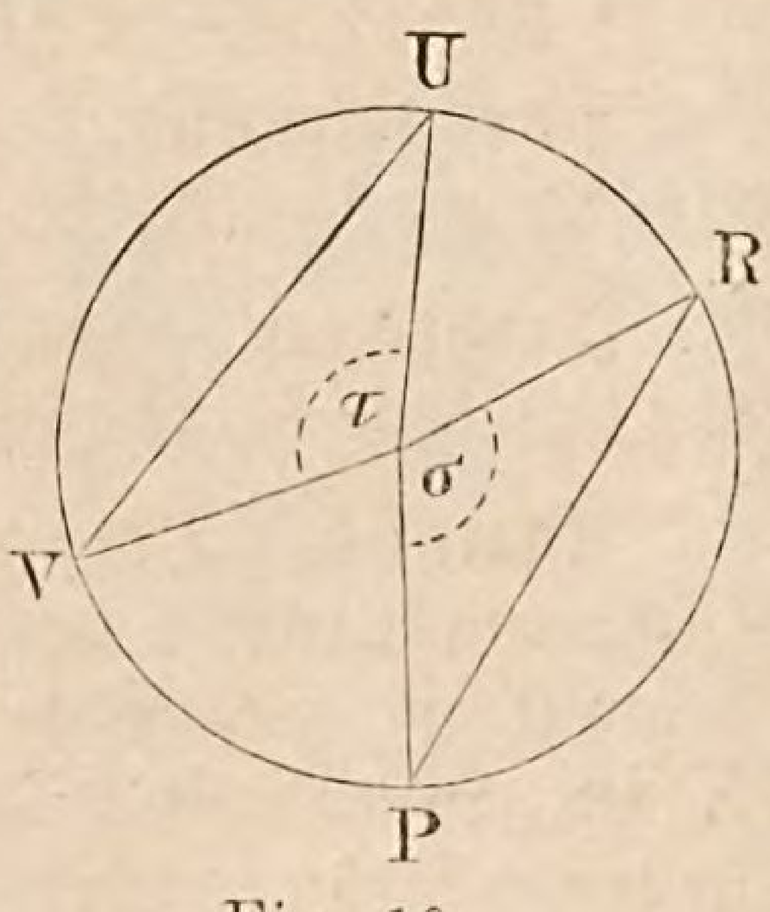


Fig. 10.

Aufgaben. Nehmen wir an, wir hätten ermittelt, daß in Fig. 1 $\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DE}$ sei, was können wir daraus schließen?

B. Sätze über Sehnen, Centri- und Peripheriewinkel.

§ 6. **Die Sehnen und der Kreismittelpunkt.** In Fig. 11 ist C das Centrum des Kreises und AB eine der Sehnen. Die Sehne AB haben wir halbirt, und zwar ist M der Mittelpunkt derselben. M ist dann mit C durch die Gerade MC verbunden worden, wodurch die beiden Winkel AMC und BMC entstehen. Wenn wir diese beiden Winkel mit dem Transporteur messen, so finden wir, daß jeder derselben einen Rechten beträgt, oder anders ausgedrückt, daß wir haben:

$$CM \perp AB\,^{*)}$$

Diesen mathematischen Ausdruck können wir in die Worte kleiden:

Die Gerade CM, welche das Centrum C des Kreises mit dem Mittelpunkt M der Sehne AB verbindet, steht auf der Sehne AB senkrecht.

Wenn wir diesen Satz verallgemeinern, erhalten wir den

Lehrsatz IV. Jede **Gerade,** welche bei einem Kreise das **Centrum** mit dem **Mittelpunkte einer Sehne** verbindet, steht auf der Sehne **senkrecht.**

Wir wollen diesen Lehrsatz jetzt nach der in der Planimetrie üblichen Methode an Fig. 11 beweisen.

Voraussetzung. In Fig. 11 ist C das Centrum des Kreises und M der Mittelpunkt der Sehne AB.

Behauptung. $CM \perp AB$.

Beweis. Um den Beweis zu führen, wollen wir die beiden Endpunkte A und B der Sehne AB mit dem Centrum C durch punktirte gerade Linien verbinden. Dadurch entsteht

das Dreieck ABC;

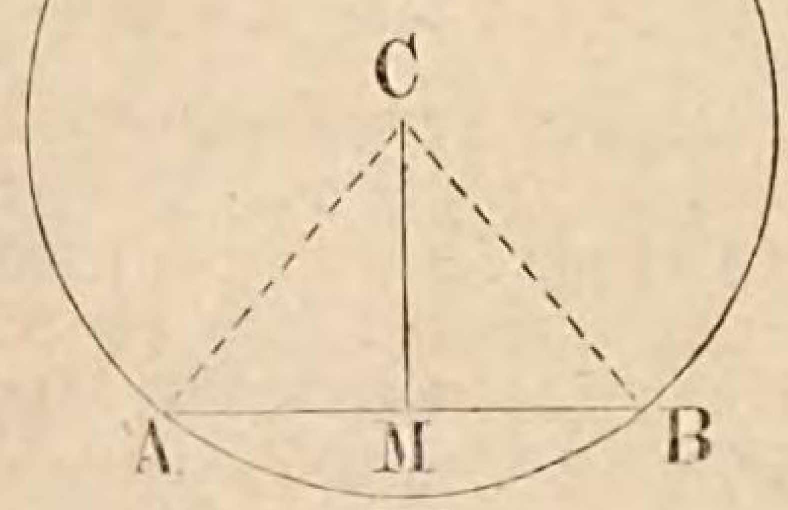


Fig. 11.

in demselben sind, wie wir sofort bemerken, die beiden Seiten AC und BC als Radien ein und desselben Kreises gleich groß; das Dreieck ABC ist also gleichschenklig; und zwar ist in demselben

C die Spitze,
AB die Basis,
M der Mittelpunkt der Basis
und CM die gerade Linie, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Basis verbindet.

In einem gleichschenkligen Dreieck steht (siehe S. 160 Lehrs. XIII) die Gerade, welche von der Spitze nach der Mitte der Basis gezogen ist, auf der Basis senkrecht; mithin ist:

$CM \perp AB$, was behauptet war.

Der letzte Satz wird uns sogleich weiter führen! Er setzt uns in den Stand, einen Beweis zu liefern für den

Lehrsatz V. Die **Senkrechte,** welche im **Mittelpunkte einer Sehne** erreichtet wird, **trifft das Centrum** des Kreises.

Voraussetzung. In Fig. 12 ist C das

*) ⊥ bedeutet: senkrecht auf, siehe S. 52.

Centrum des Kreises und M ist der Mittelpunkt der Sehne AB.

Behauptung. Die im Mittelpunkt M der Sehne AB errichtete Senkrechte geht durch das Centrum C.

Für diese Behauptung wollen wir einen **indirecten Beweis** liefern, d. h. wir wollen annehmen, daß die Behauptung falsch sei, und wollen zeigen, daß diese Annahme keine Berechtigung hat, weil sie uns zu einem Widerspruch führt.

Stellen wir uns vor, die Senkrechte, die wir auf AB in M errichten, träfe nicht C, wie behauptet wird, sondern verliefe in anderer Richtung, etwa in der Richtung der Geraden MD. Wenn wir dann die Gerade MC ziehen, so steht auch MC nach dem Lehrsatz III auf AB senkrecht, denn MC verbindet ja das Centrum C mit dem Mittelpunkte M der Sehne AB. Wir hätten mithin auf AB im Punkte C zwei verschiedene Senkrechte,

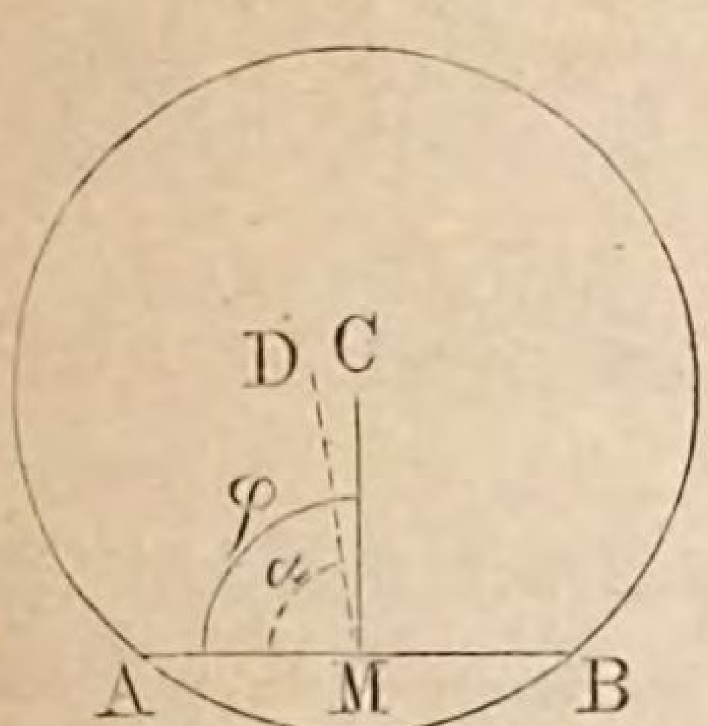


Fig. 12.

nämlich: 1) MD und 2) MC,

d. h. anders ausgedrückt:

sowohl Winkel φ wie Winkel α wären Rechte.

Nun ist φ, wie wir sogleich bemerken, größer als α; also ein Rechter würde größer sein, als ein anderer Rechter. Darin liegt ein Widerspruch. Mithin ist die Annahme nicht gestattet, daß die auf AB in M errichtete Senkrechte C nicht trifft; diese Senkrechte muß vielmehr durch C gehen, wie behauptet war.

§ 7. Die Auffindung des Kreismittelpunktes.

Auf dem im letzten Paragraphen behandelten Satze, beruht die Lösung der

Aufgabe. Es sei ein **Kreis** gegeben; der **Mittelpunkt** desselben soll **gesucht** werden.

Voraussetzung. Wir haben in Fig. 13 einen Kreis.

Forderung. Der Mittelpunkt C dieses Kreises soll gesucht werden.

Analysis. Den Mittelpunkt werden wir am besten als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen. Wie wir aus dem letzten Lehrsatz des vorigen Paragraphen wissen, muß das Kreiscentrum in allen Geraden liegen, welche auf den Sehnen im Mittelpunkt senkrecht stehen. Alle diese Geraden sind mithin geometrische Oerter des Kreiscentrums. Zwei derselben brauchen wir nur zur Construction; wir können sie uns beliebig auswählen.

Construction. Wir ziehen uns zwei beliebige Sehnen AB und DE und halbiren dann AB, und DE. M sei der Mittelpunkt von AB und M' sei der Mittelpunkt von DE. Darauf errichten wir auf AB in M und auf DE in M' Senkrechte, die sich in C schneiden.

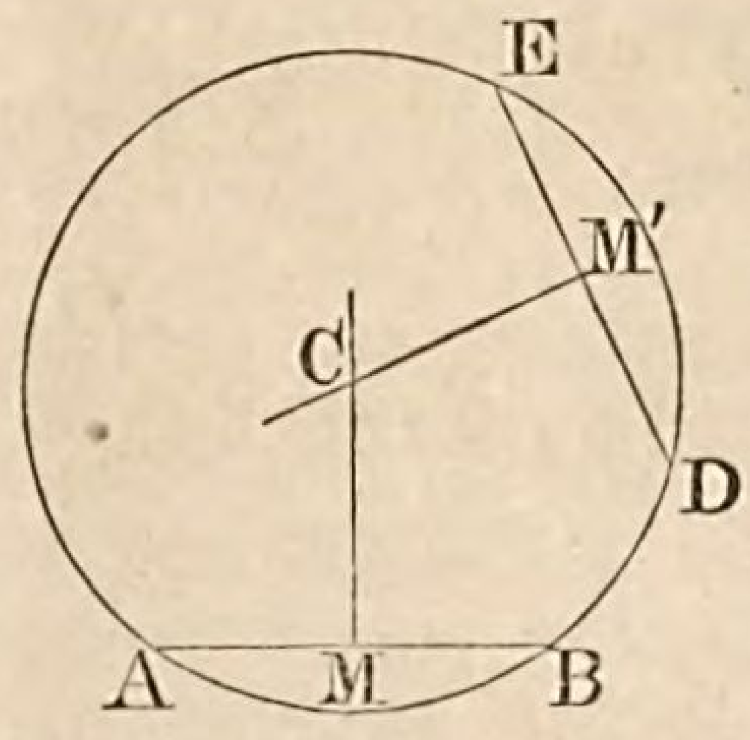


Fig. 13.

Behauptung. C ist der gesuchte Kreismittelpunkt.

Der **Beweis** liegt in der Analysis.

§ 8. Der einem Dreieck umgeschriebene Kreis.

Ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen können wir verfahren, wenn wir die Lösung geben sollen von der

Aufgabe. Es soll ein **Kreis** durch **drei gegebene Punkte** gelegt werden.

Voraussetzung. Gegeben sind die dre Punkte A, B und C (Fig. 14).

Forderung. Es soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Punkte A, B und C sind.

Analysis. Der gesuchte Kreis läßt sich leicht construiren, wenn uns sein Mittelpunkt bekannt ist; und den Mittelpunkt können wir finden, wenn wir folgende Ueberlegungen anstellen. Nehmen wir an, der punktirte Kreis sei der gesuchte. Wenn wir dann die Punkte A und B, ferner B und C durch gerade Linien verbinden, haben wir die Sehnen AB und BC. Diese beiden Sehnen wollen wir halbiren und auf denselben in ihren Mittelpunkten S und S' Senkrechte errichten. Nach Lehrs. V müssen diese beiden Senkrechten das Kreiscentrum treffen; sie sind also die beiden geometrischen Oerter, deren Durchschnittspunkt das Kreiscentrum M ist.

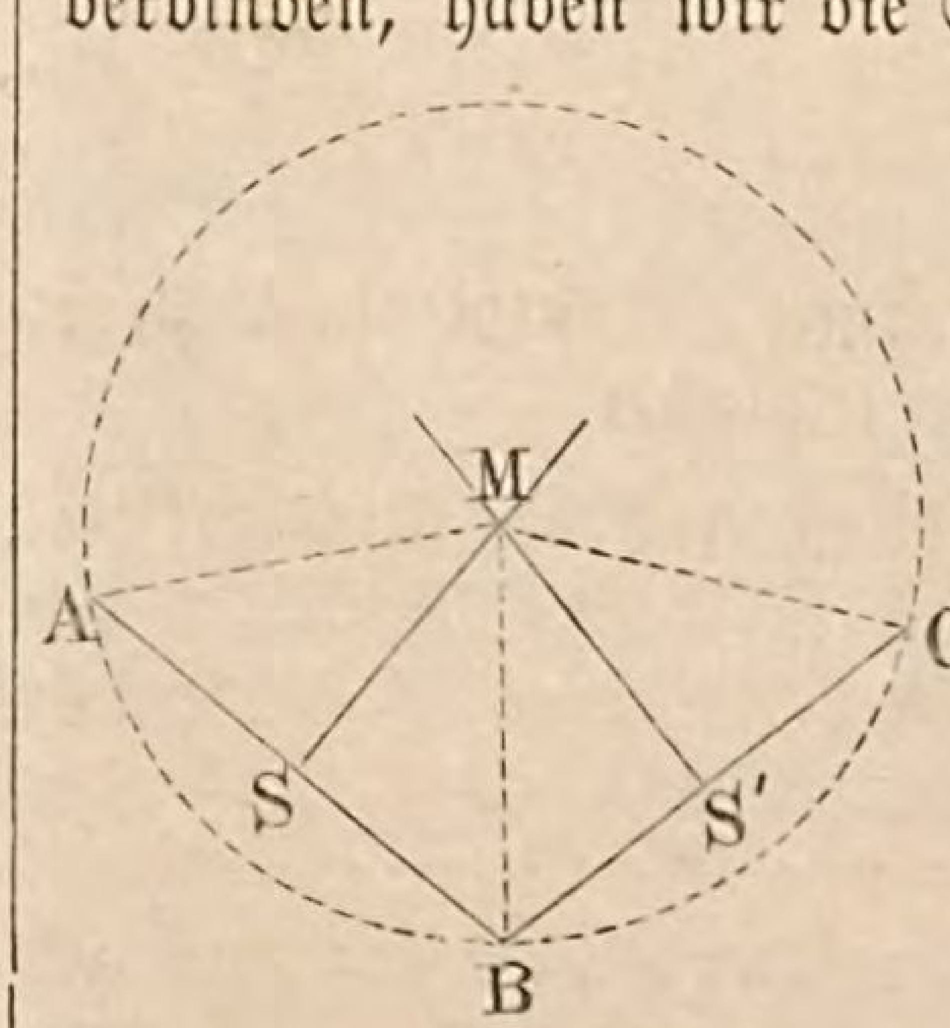


Fig. 14.

Construction. Wir ziehen die beiden Ge-

raden AB und BC, halbiren AB und BC u. s. f. und bestimmen überhaupt auf dem schon in der Analysis angegebenen Wege den Kreismittelpunkt M. Darauf schlagen wir um M mit MA einen Kreis und stellen die

Behauptung auf, daß der Kreis mit dem Radius MA auch durch die beiden Punkte B und C geht, oder anders ausgedrückt, daß MA = MB = MC ist.

Beweis. Gemäß S. 140 ist SM bez. S'M der geometrische Ort für alle gleichschenkligen Dreiecke, welche auf der Basis AB bez. BC errichtet werden können. Demnach ist sowohl Dreieck AMB wie Dreieck BMC gleichschenklig, d. h. es ist im Dreieck AMB

$$MA = MB$$

und in dem Dreieck BMC

$$MB = MC.$$

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen in eine zusammenfassen, so können wir schreiben:

MA = MB = MC, was behauptet war.

Bemerkung I. Wenn die drei gegebenen Punkte A, B und C in einer geraden Linie liegen, läßt sich kein Kreis durch sie hindurchlegen; bei der Construction zeigt sich dies dadurch, daß die Senkrechten, welche in den Mitten der beiden Geraden AB und BC errichtet werden, sich nicht schneiden, sondern parallel laufen.

Bemerkung II. Wenn die drei gegebenen Punkte Ecken eines Dreiecks sind, so können wir den Wortlaut der Aufgabe verändern und dafür sagen:

Es soll ein **Kreis** beschrieben werden, der durch die **drei Ecken eines Dreiecks** hindurchgeht.

§ 9. Der Centriwinkel und der Peripheriewinkel. In Fig. 15 ist φ ein Centriwinkel und α ein Peripheriewinkel. Beide Winkel stehen über **demselben Bogen** AB*). Wenn wir mit dem Transporteur die beiden Winkel φ und α ausmessen, so finden wir, daß

$$\varphi = 88^0$$
$$\text{und } \alpha = 44^0$$

ist. Der Centriwinkel φ ist also doppelt so groß wie der Peripheriewinkel α. Wenn diese Beobachtung verallgemeinert wird, ergiebt sich der

Lehrsatz VI. Der Centriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Beweisen wir diesen Lehrsatz nach der gewöhnlichen Methode.

Voraussetzung. Uns ist ein Kreis gegeben, in demselben ein Bogen AB und über diesem Bogen der Centriwinkel AMB und der Peripheriewinkel ACB (Fig. 15, 16, 17).

Behauptung. Der Centriwinkel AMB ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel ACB, in Zeichen, es ist:

$$AMB = 2ACB.$$

Um den

Beweis zu führen, wollen wir drei Fälle unterscheiden. Der Scheitelpunkt M des Centriwinkels AMB (d. i. der Mittelpunkt M des Kreises) kann nämlich

1) auf einem Schenkel des Peripheriewinkels ACB,
2) zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ACB,
3) außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels ACB

liegen. Der erste Fall trifft zu bei Fig. 15*), der zweite Fall bei Fig. 16**) und der dritte Fall bei Fig. 17***).

Fall I. In dem Dreieck AMC in Fig. 15 sind die beiden Seiten AM und CM als Radien ein und desselben Kreises einander gleich. Das Dreieck AMC ist daher gleichschenklig, und zwar ist die Seite AC die Basis und die Winkel α und α' sind Basiswinkel. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke sind gleich groß; es besteht daher die Gleichung:

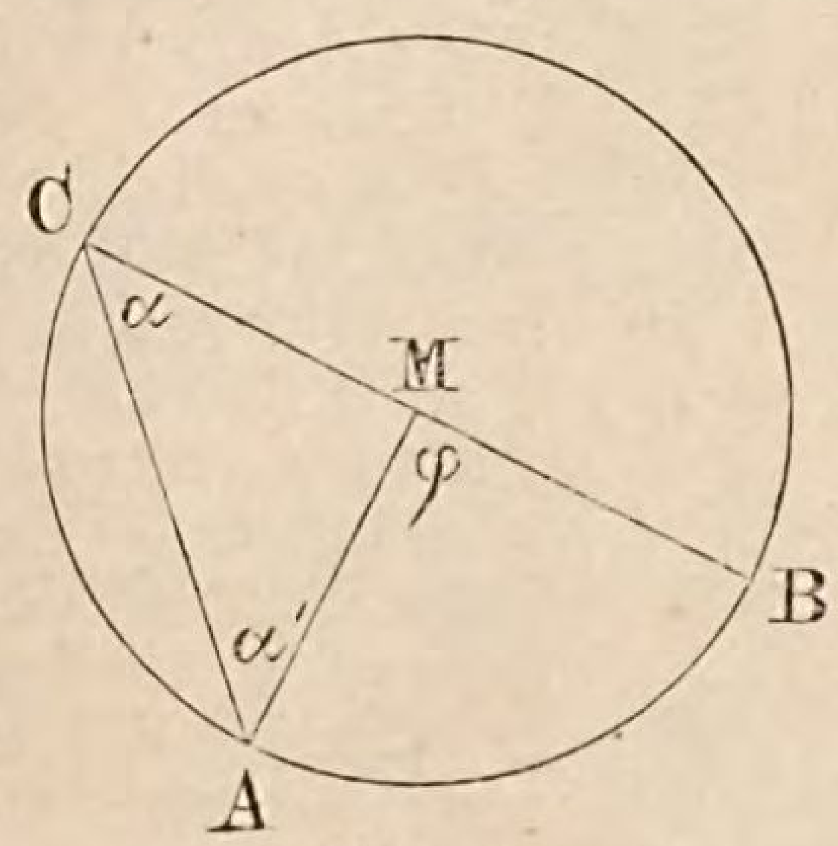


Fig. 15.

$$\alpha = \alpha'.$$

Betrachten wir jetzt den Winkel φ. Derselbe ist Außenwinkel des Drei-

*) Man sagt auch: der **Centriwinkel** α und der **Peripheriewinkel** φ schließen **denselben Bogen** AB zwischen ihren Schenkeln ein, oder der Peripheriewinkel α ist dem Centriwinkel φ zugehörig.

*) In Fig. 15 liegt der Kreismittelpunkt M auf dem Schenkel AC des Peripheriewinkels ACB. **) In Fig. 16 liegt M zwischen den Schenkeln AC und BC des Peripheriewinkels ACB. ***) In Fig. 17 liegt M ganz außerhalb der beiden Schenkel AC und BC des Peripheriewinkels ACB.

ecks AMC; er ist daher gleich der Summe der beiden Winkel α und α', die nicht seine Nebenwinkel sind, in Zeichen, wir haben die Gleichung:

$$\varphi = \alpha + \alpha'.$$

Setzen wir für α' den gleichen Winkel α ein, so erhalten wir:

$$\varphi = \alpha + \alpha$$
$$\text{d. i. } \varphi = 2\alpha,$$

oder wenn die Winkel φ und α mit drei Buchstaben bezeichnet werden:

AMB = 2ACB, was behauptet war.

Fall II kann auf Fall I zurückgeführt werden, wenn in Fig. 16 die beiden Punkte C und M durch die gerade Linie CM verbunden werden, welche den Kreis in D durchschneiden möge.

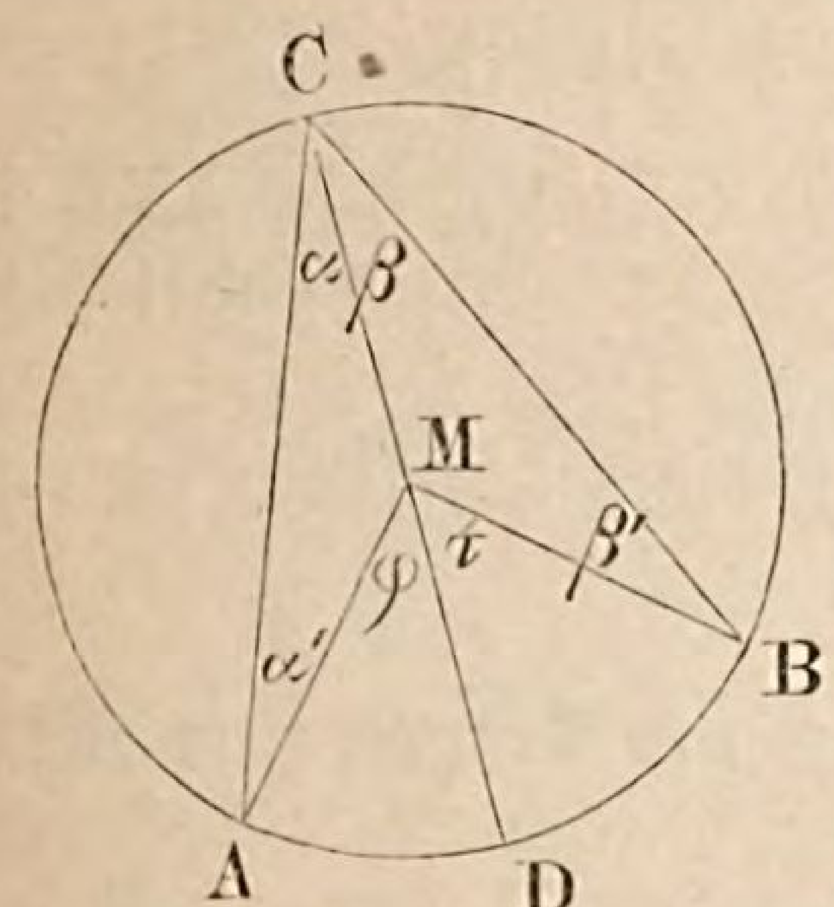


Fig. 16.

Es ist dann dem vorigen Falle gemäß:

$$^{*)}\ \varphi = 2\alpha$$
$$\tau = 2\beta$$
$$^{**)}\ \varphi + \tau = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta).$$

Die beiden Winkel φ und τ machen zusammen den Winkel AMB aus; und die Winkel α und β sind zusammen gleich dem Winkel ACB, in Zeichen, es ist:

$$\varphi + \tau = \text{AMB},$$
$$\alpha + \beta = \text{ACB}.$$

Setzen wir in der Gleichung

$$\varphi + \tau = 2(\alpha + \beta)$$

für $\varphi + \tau$ und $\alpha + \beta$ die gleichen Werthe AMB und ACB ein, so ergiebt sich:

AMB = 2ACB, was behauptet war.

Fall III können wir gleichfalls auf Fall I zurückführen, wenn wir in Figur 17 die Gerade CM ziehen, welche den Kreis in D treffen möge. Der Scheitelpunkt M des Centriwinkels AMD liegt dann auf dem Schenkel CD des zugehörigen Peripheriewinkels ACD, ebenso liegt der Scheitelpunkt M des Centriwinkels BMD auf dem Schenkel CD des zugehörigen Peripheriewinkels BCD. Wir haben also dem ersten Falle gemäß:

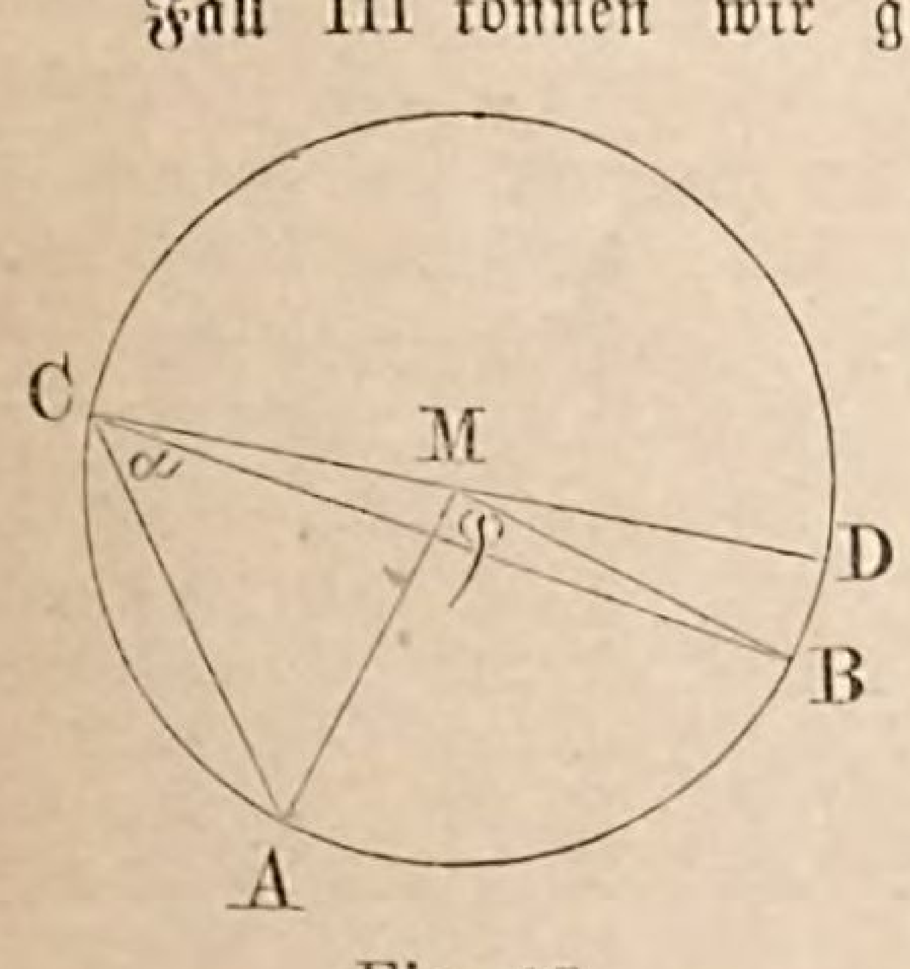


Fig. 17.

*) Der Scheitelpunkt M des Centriwinkels φ liegt auf dem Schenkel CD des Peripheriewinkels α; ebenso liegt der Scheitelpunkt M des Centriwinkels τ auf dem Schenkel CD des Peripheriewinkels β wir haben hier also den Fall I vor uns. **) Denn Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

$$\text{AMD} = 2\text{ACD}$$
$$\text{und BMD} = 2\text{BCD}$$
$$\text{AMD} - \text{BMD} = 2\text{ACD} - 2\text{BCD}^{*)}$$
$$\text{oder AMD} - \text{BMD} = 2(\text{ACD} - \text{BCD})$$

d. i. AMB = ACB†), was beh. war.

§ 10. Die Peripheriewinkel über gleichen Bogen. Wenn ein Centriwinkel doppelt so groß ist, wie ein Peripheriewinkel, so ist der Peripheriewinkel halb so groß wie der Centriwinkel. Wir können deshalb dem in unserm Paragraphen behandelten Lehrsatze auch folgende Fassung geben.

Der **Peripheriewinkel** ist **halb so groß** wie der **Centriwinkel**, welcher mit ihm über **demselben Bogen** steht.

In Fig. 18 stehen die Peripheriewinkel α, β und γ über demselben Bogen ST wie der Centriwinkel φ. Demnach ist:

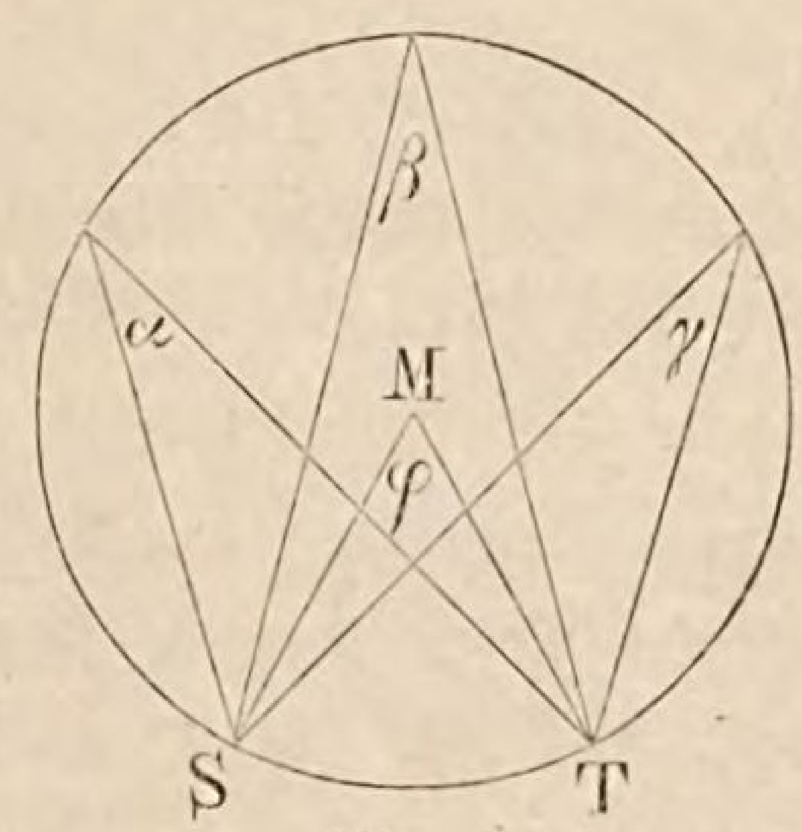


Fig. 18.

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}\varphi;$$

also auch

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

d. h. die Peripheriewinkel α, β und γ, deren Schenkel denselben Bogen ST einschließen, haben gleiche Größe.

Ueberhaupt gilt der

Lehrsatz VII. Peripheriewinkel über **demselben Bogen** sind einander **gleich**,

denn solche Peripheriewinkel sind immer gleich der Hälfte ein und desselben Centriwinkels.

Den letzten Satz können wir, wie wir jetzt beweisen wollen, umformen. Wir können nämlich für „über **demselben Bogen**" die Worte „über **gleichen Bogen**" setzen. Es ergiebt sich dann der

Lehrsatz VIII. Peripheriewinkel über **gleichen Bogen** sind einander **gleich**.

*) Denn Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

†) Es ist AMD − BMD = AMB, denn wenn wir von dem Winkel AMD den Winkel BMD fortnehmen (subtrahiren), bleibt der Winkel AMB übrig. Es ist ferner ACD − BCD = ACB, denn wir erhalten den Winkel ACB, wenn wir BCD von ACD fortnehmen (subtrahiren).

Voraussetzung. In Fig. 19 ist $\widehat{ST} = \widehat{S'T'}$.
Behauptung. $\alpha = \alpha'$.

Beweis. Zu gleichen Bogen gehören gleiche Centriwinkel. Nach der Voraussetzung sind die beiden Bogen ST und S'T' einander gleich; zu $\widehat{ST}$ gehört der Centriwinkel φ und zu $\widehat{S'T'}$ der Centri-der Centriwinkel φ'; es ist also:

$$\varphi = \varphi'$$

daher auch: $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$.

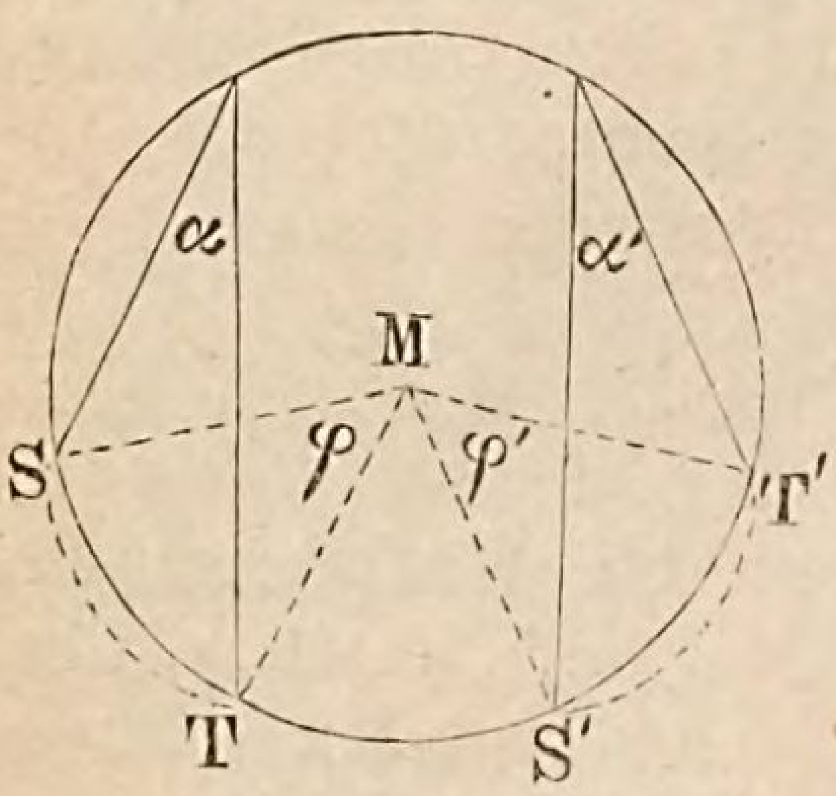


Fig. 19.

Der Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Centriwinkel, mithin haben wir:

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi$$
und $\alpha' = \frac{1}{2}\varphi'$.

Setzen wir in der Gleichung:

$$\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$$

für $\frac{1}{2}\varphi$ den gleichen Werth α und für $\frac{1}{2}\varphi'$ den gleichen Werth α' ein, so ergiebt sich:

$\alpha = \alpha'$, was behauptet war.

§ 11. Die Peripheriewinkel im Halbkreise.

Die Centriwinkel können die verschiedenste Größe annehmen; vergleichen wir in in Figur 20 die Centriwinkel. Der Centriwinkel ACB beträgt 90 Grad; der Centriwinkel A_1CB_1 130 Grad, der Centriwinkel A_2CB_2 bildet sogar einen gestreckten Winkel, d. h. er ist gleich 2 Rechten oder gleich 180 Grad. Der Peripheriewinkel ist, wie wir wissen, gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels; deswegen müssen

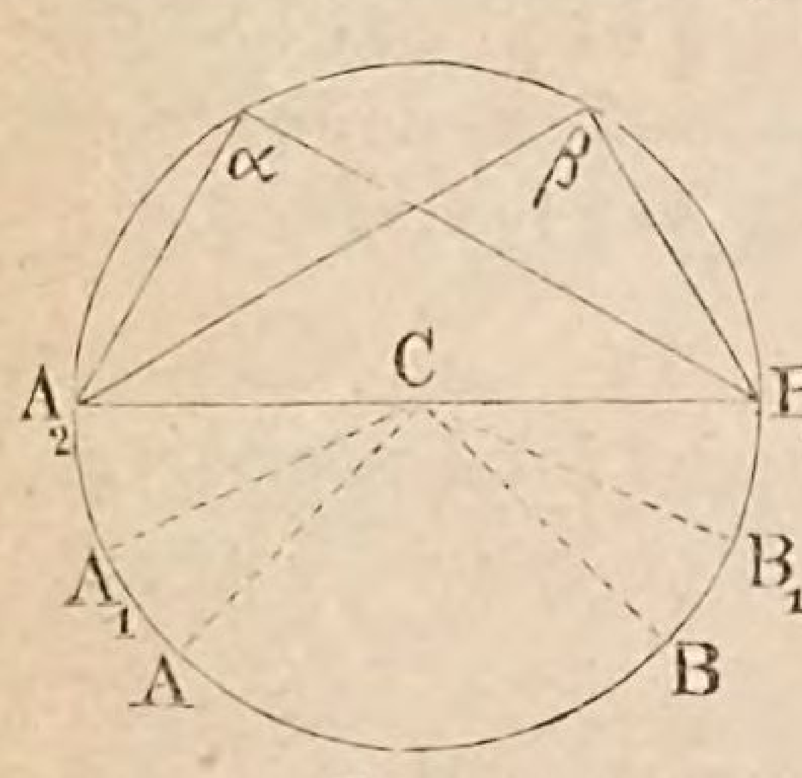


Fig. 20.

die Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ 45 Grad
" " " $\widehat{A_1B_1}$ 65 "
" " " $\widehat{A_2B_2}$ 90 "
oder 1 Rechten
betragen.

Besonders interessiren uns die Peripheriewinkel über dem Bogen A_2B_2; α und β sind z. B. solche Winkel, sie stehen über einem Halbkreis und liegen ganz in einem Halbkreis. Wie wir gefunden haben betragen sie einen Rechten, weil ihr Centriwinkel A_2CB_2 einen Gestreckten bildet.

Wenn wir die gesperrt gedruckten Wörter zusammenfassen, haben wir den

Lehrsatz IX. Peripheriewinkel in einem Halbkreise betragen einen Rechten.

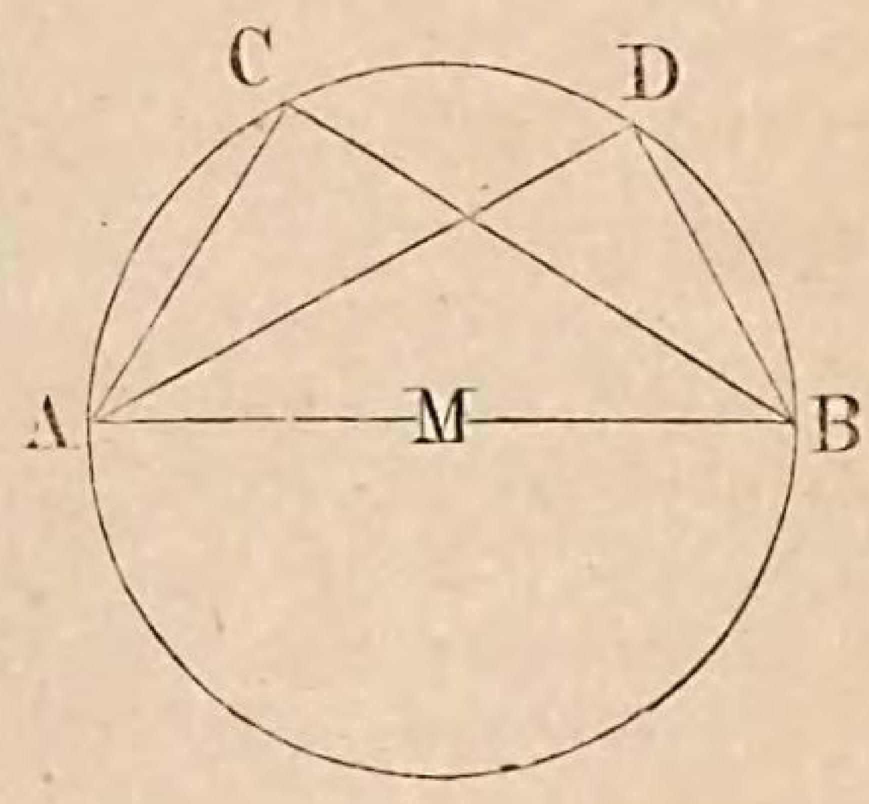


Fig. 21.

Die Winkel ACB und ADB in Fig. 21 liegen in einem Halbkreise; nach dem letzten Satze sind sie daher einem Rechten gleich. In der That! sie sind als Peripheriewinkel gleich der Hälfte ihres Centriwinkels AMB; AMB ist als gestreckter Winkel gleich zwei Rechten; die Winkel ACB und ADB müssen demnach einen Rechten betragen.

§ 12. Aufgaben und Fragen zum ganzen Abschnitt.

a) Der Schüler möge in Fig. 22
1) die Radien, 2) die Sehnen, 3) die Secante, 4) den Centriwinkel, 5) die Peripheriewinkel nennen.

Er möge ferner:

b) in Fig. 23 die Durchmesser angeben,

c) in Fig. 22 die Gleichungen zwischen dem Centriwinkel und dem Peripheriewinkel aufstellen,

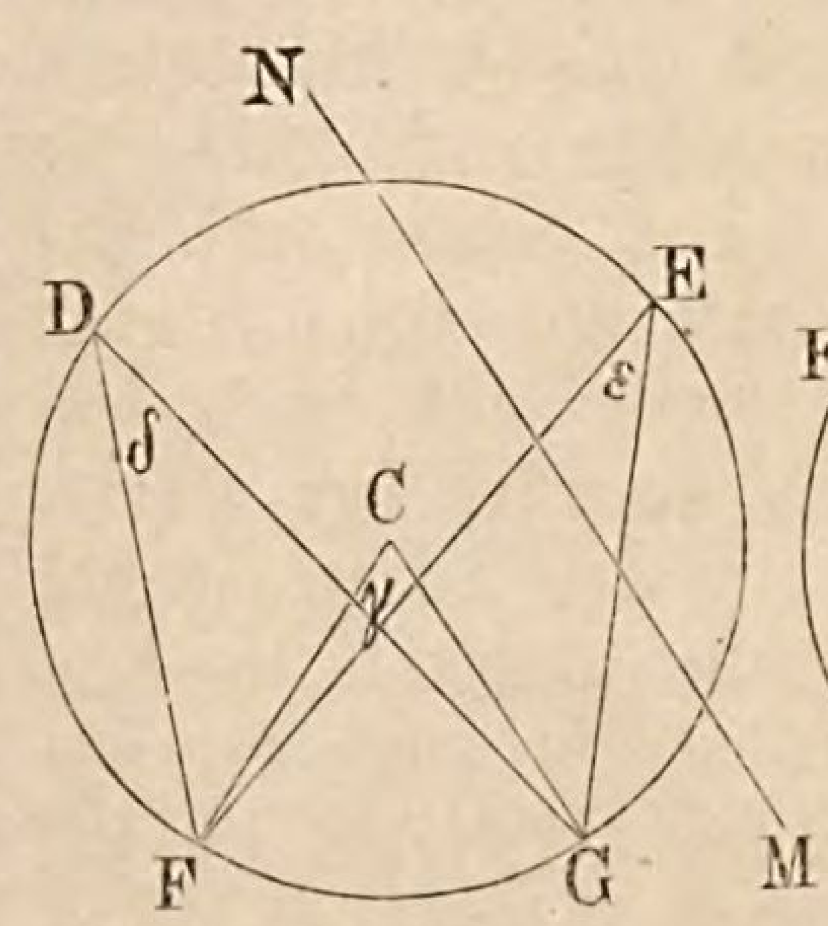


Fig. 22.

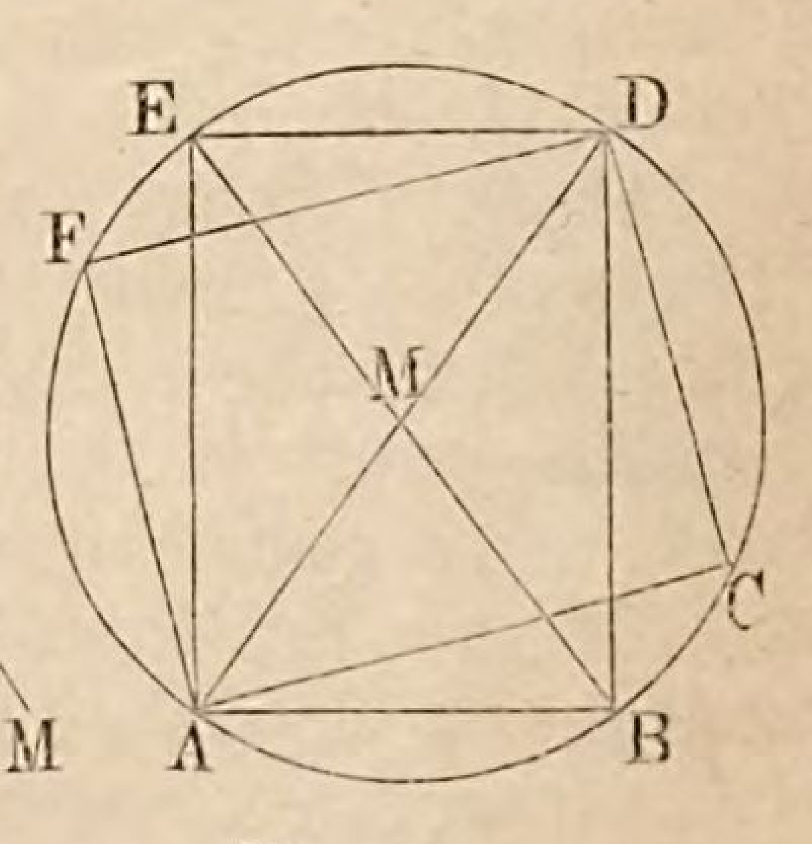


Fig. 23.

d) in Fig. 22 die Peripheriewinkel bezeichnen, welche einander gleich sind und den Grund der Gleichheit anführen,

e) in Fig. 23 die Winkel nennen, die als Peripheriewinkel im Halbkreise einen Rechten betragen.

Wer erst sein Tagewerk gethan hat, kann dann ruhn,
Befördere dich geschwind, dein Tagewerk zu thun.

Lection 41.

A. Die Definition und Construction der Tangenten.

§ 13. Die Definition der Tangenten. Die Secante AD durchschneidet den Kreis um M in den Punkten B und C. Wenn wir AD an dem obern Ende D anfassen und um B als festen Punkt in der Richtung des Uhrzeigers drehen, so werden sich die beiden Punkte, in denen der Kreis von der Secante

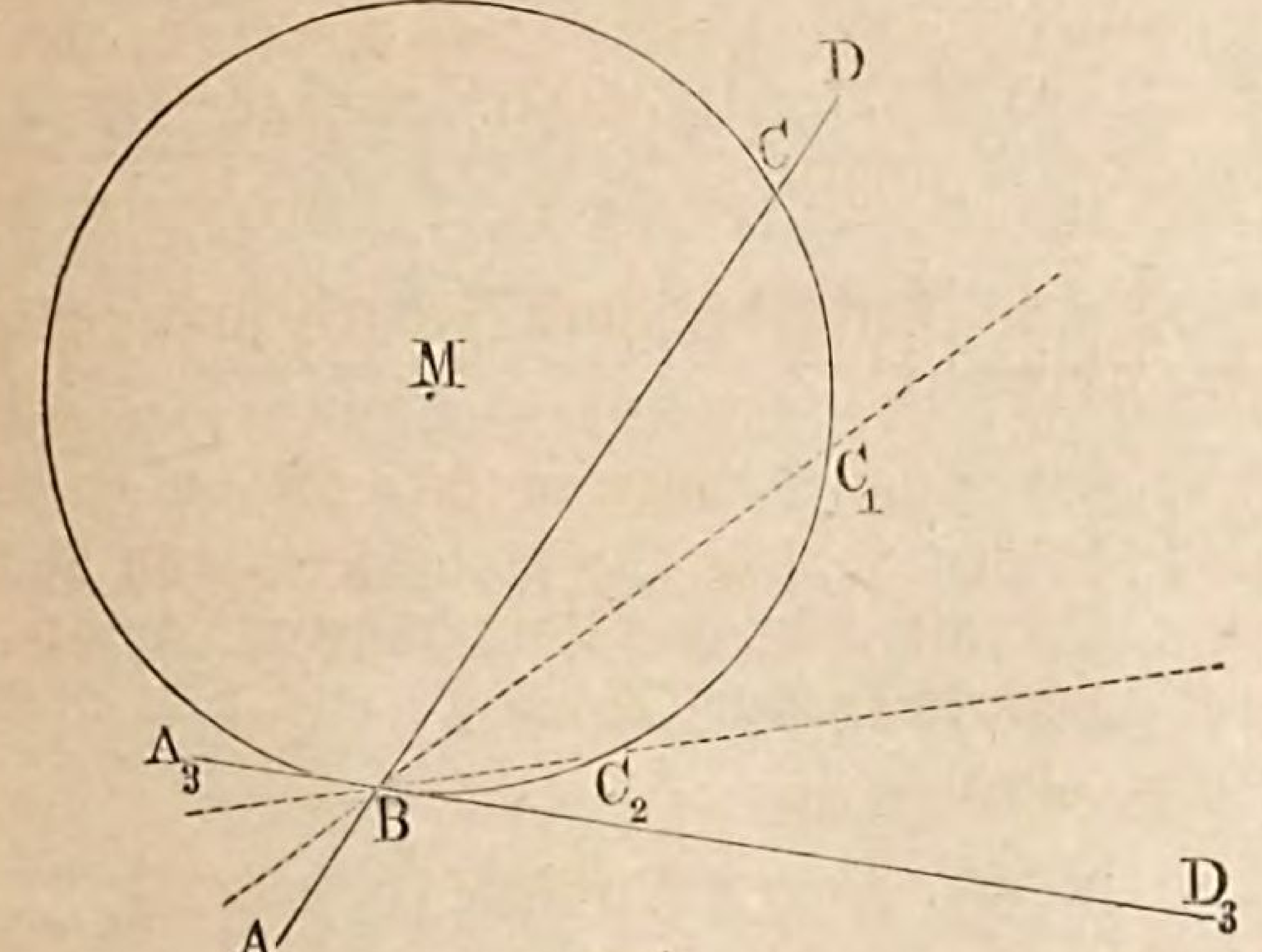


Fig. 1.

geschnitten wird, immer mehr einander nähern; nach einander wird C_1 und C_2 der zweite Schnittpunkt werden, bis endlich die beiden Schnittpunkte zusammenfallen und AD die Lage A_3D_3 annimmt. Der **Kreis und die Gerade** A_3D_3 **haben** dann **nur einen Punkt mit einander gemein;** man sagt in diesem Falle: die Gerade A_3D_3 **berührt den Kreis,** oder die Gerade A_3D_3 ist eine **Tangente** des Kreises, und zwar heißt der Punkt B, in dem die Tangente den Kreis berührt, der **Berührungspunkt.** Bezeichnen wir die beiden Punkte, in denen eine Secante den Kreis durchschneidet, mit dem Worte „Schnittpunkte“, so können wir

die **Tangente** als eine **Secante** definiren, welche um einen Schnittpunkt so lange gedreht ist, bis die **beiden Schnittpunkte in einen zusammenfallen.**

In der That! Diese Definition giebt man in der höhern Mathematik von einer Tangente; Leibniz ist durch sie zu der Differentialrechnung geführt worden, deren unschätzbare Wichtigkeit für die Mathematik wir in der historischen Einleitung besprochen haben.

Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz liefert wieder den Beweis, daß sich aus einem einfachen, klar gefaßten Grundgedanken die wichtigsten Folgerungen ergeben können.

In der elementaren Geometrie wählt man aus methodischen Gründen für die Definition der Tangente einen andern Ausgangspunkt. Wenn wir in Fig. 1 den Radius MB ziehen, so entstehen die Winkel MBA_3 und MBD_3. Dieselben sind, wie die Messung mit dem Transporteur ergiebt, einem Rechten gleich. Die Tangente A_3D_3 bildet also mit dem Radius MB rechte Winkel, sie steht, anders ausgedrückt, auf dem Radius senkrecht. Diese in den gesperrten Worten zum klaren Ausdruck gelangende Eigenschaft der Tangente benutzt man, um den Begriff der Tangente zu bestimmen. Man giebt nämlich die

Definition I. Eine **Tangente** ist eine gerade Linie, welche **auf dem Radius** in seinem **Endpunkte senkrecht** steht.

In Fig. 2 steht

AP	senkrecht	auf	dem	Endpunkte	A	des	Radius	MA
BR	„	„	„	„	B	„	„	MB
CS	„	„	„	„	C	„	„	MC
TU	„	„	„	„	D	„	„	MD

Mithin sind die Geraden AP, BR, CS und TU Tangenten des Kreises um M.

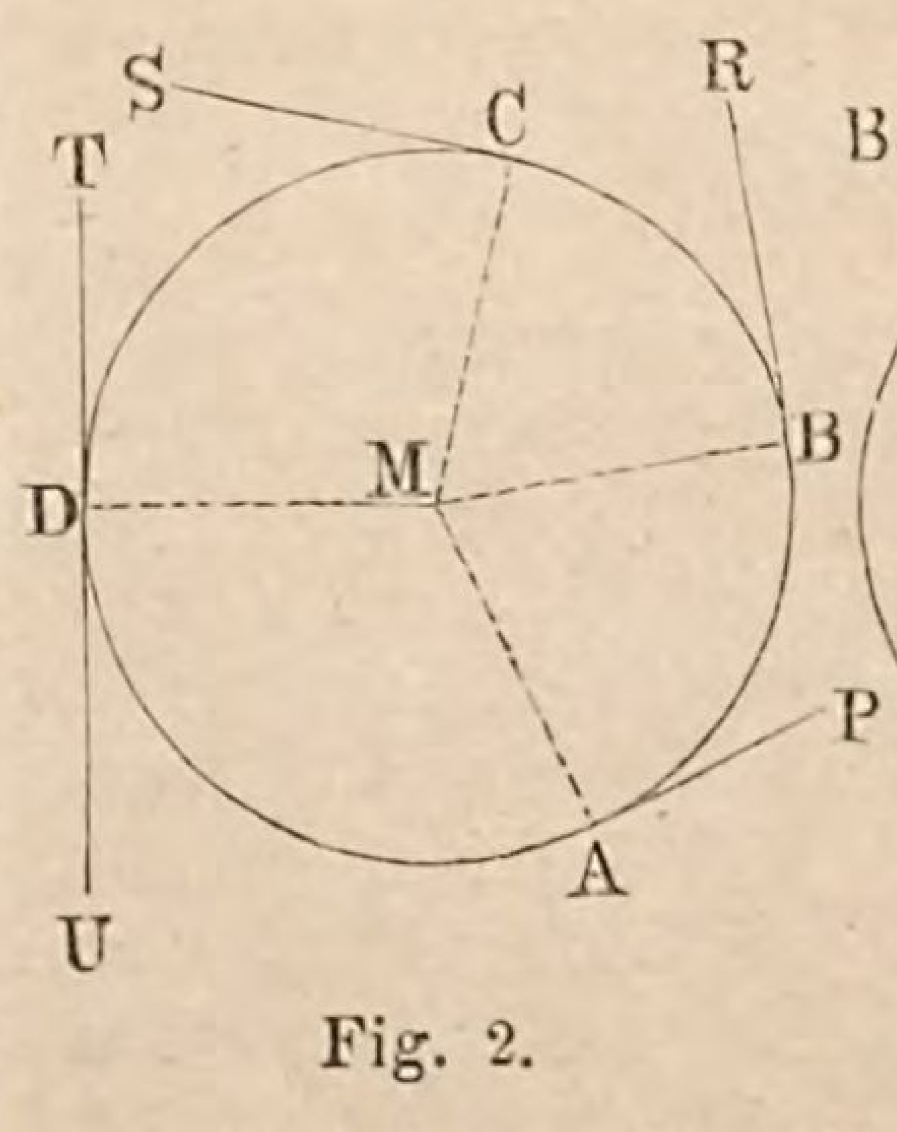


Fig. 2.

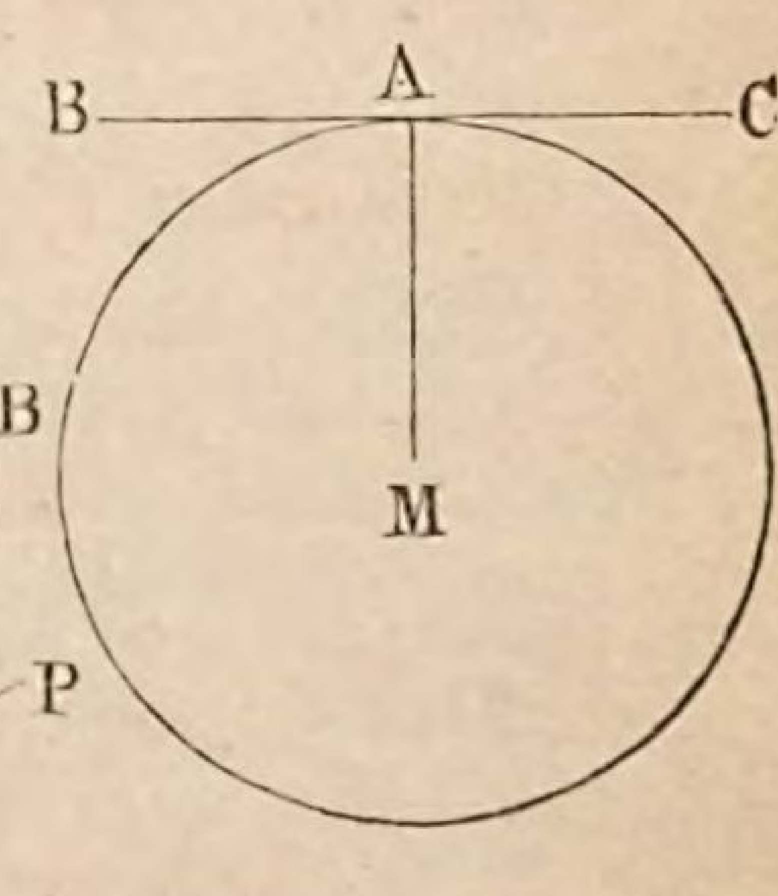


Fig. 3.

§ 14. Die Construction der Tangenten. Wenn wir eine Tangente construiren wollen,

so kann uns entweder ein **Punkt im Kreise** gegeben sein, durch den die Tangente gezogen werden soll, oder es kann uns aufgetragen werden, durch einen **Punkt außerhalb des Kreises** eine Tangente an den Kreis zu legen. Es ergeben sich für uns also zwei Aufgaben, die wir nach einander behandeln werden.

Aufgabe I. Durch einen **Kreispunkt** soll eine **Tangente** gezogen werden.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 3 ein Kreis um M gegeben, und im Kreise ein Punkt A.

Forderung. Durch den Punkt A soll eine Tangente gezogen werden.

Die **Construction** ist leicht. Wir brauchen nur den Radius MA zu ziehen und auf MA in A eine Senkrechte BAC zu errichten; nach Definition I ist diese Senkrechte dann die gesuchte Tangente.

Aufgabe II. Durch einen **Punkt außerhalb eines Kreises** soll eine **Tangente** an den Kreis gelegt werden.

Voraussetzung. In Fig. 4 ist uns ein Kreis um M und außerhalb desselben ein Punkt S gegeben.

Forderung. Durch S soll eine gerade Linie so gezogen werden, daß sie Tangente des Kreises um M wird.

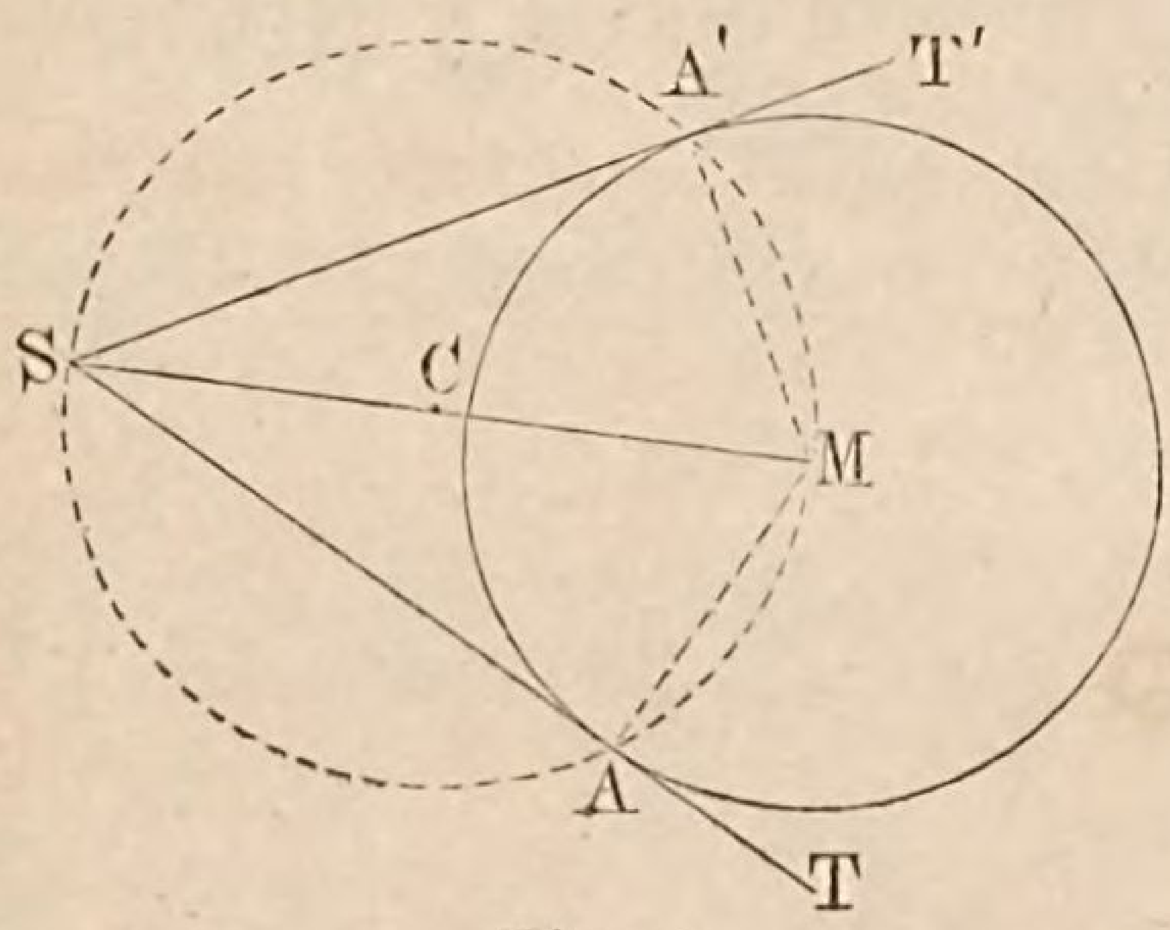


Fig. 4.

Analysis. Wir wollen annehmen, die Gerade ST sei die gewünschte Tangente, sie berühre den Kreis in dem Punkte A. Ziehen wir dann den Radius MA, so muß MAS ein rechter Winkel sein, weil die Tangente auf dem zugehörigen Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht. Wird noch S und M geradlinig verbunden, so haben wir das rechtwinklige Dreieck MAS. Fragen wir uns, wie wir dieses rechtwinklige Dreieck construiren können. Die Hypotenuse SM können wir leicht finden; wir brauchen nur die beiden gegebenen Punkte S und M durch eine gerade Linie mit einander zu verbinden. Die Spitze A werden wir als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter darstellen. Der eine geometrische Ort ist der Kreis um M, denn A muß in diesem Kreise liegen; den zweiten geometrischen Ort finden wir, wenn wir bedenken, daß die Peripheriewinkel in einem Halbkreise Rechte sind. Die Spitze A des rechtwinkligen Dreiecks ACM wird diesem Satze gemäß in dem Halbkreise liegen, der über der Hypotenuse MS als Durchmesser errichtet ist. Dieser Halbkreis ist daher der zweite geometrische Ort zur Bestimmung der Spitze A.

Haben wir den Punkt A, so brauchen wir nur AS zu ziehen und AS über A hinaus zu verlängern, um die gesuchte Tangente ST zu erhalten.

Construction. Wir ziehen die Gerade MS und beschreiben über MS als Durchmesser einen Kreis, indem wir MS halbiren und um den Mittelpunkt C einen Kreis mit der Hälfte von MS schlagen. Dieser Kreis möge den gegebenen Kreis um M in den beiden Punkten A und A' schneiden. Wir verbinden dann den Punkt S mit A und A' durch gerade Linien, verlängern SA über A bis T und SA' über A' hinaus bis T'.

Behauptung. Die beiden Geraden ST und ST' sind Tangenten des Kreises um M; sowohl ST wie ST' geht durch den außerhalb des Kreises gegebenen Punkt S.

Beweis. MS ist ein Durchmesser des punktirten Kreises. Die beiden Winkel MAS und MA'S sind daher Peripheriewinkel im Halbkreise und als solche einem Rechten gleich. Daher steht

SA auf dem Endpunkte A des Radius MA
und SA' „ „ „ A' „ „ MA'

senkrecht. Nach der Definition, welche wir in § 13 gegeben haben, sind daher die beiden Geraden SA und SA' Tangenten, ebenso auch die Verlängerungen ST und ST' von SA und SA'. Nach der Construction geht sowohl ST wie ST' durch den außerhalb des Kreises um M gegebenen Punkt S.

Bemerkung. Die Construction zeigt uns, daß von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben gelegt werden können.

B. Das Tangenten- und das Sehnenviereck.

§ 15. Das Tangentenviereck. In Fig. 5 sehen wir vier Tangenten, welche den Kreis um M in den vier Punkten A, B, C und D berühren. Dadurch, daß sich zwei anstoßende Tangenten schneiden, entsteht das Viereck STUV,

welches man **Tangentenviereck** nennt, weil es von Tangenten gebildet wird. Wenn wir die Seiten ST, TU, UV, VS des Tangentenvierecks STUV messen, so finden wir, daß

die Summe der Gegenseiten ST und UV gerade so groß ist, wie
die Summe der Gegenseiten TU und VS.

In der That! es besteht der

Lehrsatz I. **In einem Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten gleich.**

Voraussetzung. In Fig. 5 sind die Vierecksseiten ST, TU, UV, VS Tangenten des Kreises um M.

Behauptung. ST + UV = TU + VS.

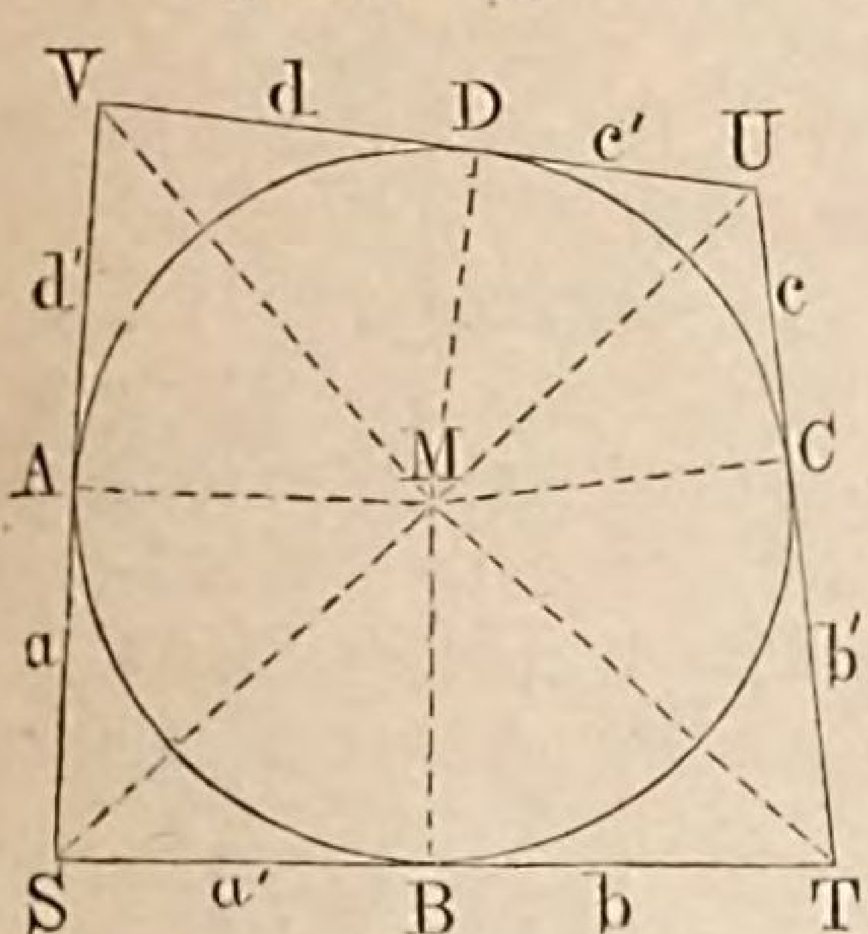


Fig. 5.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst den Kreismittelpunkt M mit den Ecken S, T, U, V und mit den Berührungspunkten A, B, C und D durch gerade Linien verbinden.

Von den acht Dreiecken, welche dadurch entstehen, wollen wir

1) Dreieck AMS mit Dreieck BMS,
2) „ BMT „ „ CMT,
3) „ CMU „ „ DMU,
4) „ DMV „ „ AMV

vergleichen.

Wir sehen zunächst, daß alle acht genannten Dreiecke rechtwinklig sind, weil ja die nach den Berührungspunkten A, B, C, D gezogenen Radien auf den Tangenten ST, TU, UV, VS senkrecht stehen. Wie wir in § 108 des siebenten Briefes gefunden haben, sind

Zwei rechtwinklige Dreiecke congruent, wenn sie in der Hypotenuse und in einer der Katheten übereinstimmen.

Nach diesem Satze ist:

a) △ AMS ≅ △ BMS,

denn wir haben:

*) SM = SM
**) AM = BM (als Radien).

In congruenten Dreiecken sind die Seiten gleich, welche bei der Deckung übereinanderfallen; folglich ist:

I. a = a'.

---

*) SM ist die gemeinschaftliche Hypotenuse der beiden rechtwinkligen Dreiecke AMS und BMS. **) AM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks AMS, und BM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks BMS.

Nach dem oben angeführten Satze ist ferner:

b) △ BMT ≅ △ CMT,

denn es bestehen die Gleichungen:

*) TM = TM
und **) BM = CM (als Radien).

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke BMT und CMT folgt:

II. b' = b.

Dem oben erwähnten Satz gemäß ist ferner

c) △ CMU ≅ △ DMU,

denn wir haben:

***) UM = UM,
†) CM = DM (als Radien).

Aus der Congruenz der Dreiecke CMU und DMU ergiebt sich, daß auch die beiden Seiten c und c' gleich sind, in Zeichen, daß

III. c = c' ist.

Schließlich haben wir:

d) △ DMV ≅ △ AMV,

denn es bestehen die Gleichungen:

††) VM = VM
†††) DM = AM (als Radien).

Aus der Congruenz der Dreiecke DMV und AMV folgt, daß auch:

IV. d' = d

ist. Die Gleichungen I, II, III, IV wollen wir unter einander stellen und hierauf erst die linken, dann die rechten Seiten addiren. Nach dem Grundsatz:

Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches,

erhalten wir dann:

a = a'
b' = b
c = c'
d' = d

a + b' + c + d' = a' + b + c' + d

oder:

a + d' + b' + c = a' + b + c' + d.

---

*) TM ist die gemeinschaftliche Hypotenuse der beiden rechtwinkligen Dreiecke BMT und CMT. **) BM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks BMT, und CM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks CMT. ***) UM ist die gemeinschaftliche Hypotenuse der beiden rechtwinkligen Dreiecke CMU und DMU. †) CM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks CMU, und DM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks DMU. ††) VM ist die gemeinschaftliche Hypotenuse der rechtwinklichen Dreiecke DMV und AMV. †††) DM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks DMV und AM ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks AMV.

Aus der Figur 5 ersehen wir, daß

$$a + d' = SV, \quad b' + c = TU,$$
$$a' + b = ST, \quad c' + d = UV$$

ist. Setzen wir in der Gleichung:

$$a + d' + b' + c = a' + b + c' + d$$

SV, TU, ST, UV für die gleichwerthigen Summen ein, so ergiebt sich:

$$SV + TU = ST + UV,$$

oder in anderer Form:

$$ST + UV = TU + VS,$$ was behauptet war.

§ 16. Das Sehnenviereck. In Fig. 6 ist das Viereck ABCD in den Kreis eingezeichnet; die vier Seiten dieses Vierecks sind, wie wir bemerken, zugleich Kreissehnen, man nennt aus diesem Grunde ABCD ein **Sehnenviereck.** Wenn wir in diesem Sehnenviereck die vier Winkel A, B, C und D mit dem Transporteur messen, finden wir, daß

$$\angle A = 76^0, \quad \angle C = 104^0,$$
$$\angle B = 95^0, \quad \angle D = 85^0$$

ist. Addiren wir die gegenüberliegenden Winkel A und C und ebenso B und D, so erhalten wir;

$$\angle A + \angle C = 76^0 + 104^0 = 180^0 = 2R,$$
$$\angle B + \angle D = 85^0 + \ 95^0 = 180^0 = 2R.$$

Die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel in dem Sehnenviereck ABCD beträgt demnach zwei Rechte, Wenn wir unsere Beobachtung verallgemeinern, ergiebt sich der

Lehrsatz II. In jedem **Sehnenviereck** ist die **Summe** zweier **gegenüberliegenden Winkel** gleich **zwei Rechten.**

Voraussetzung. In Fig. 6 ist ABCD ein Sehnenviereck.

Behauptung. Es ist $\angle A + \angle C = 2R$, und $\angle B + \angle D = 2R$.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir die Diagonalen AC und BD ziehen.



Fig. 6.

Der Winkel A wird dadurch in α und α', der Winkel B in β und β', der Winkel C in γ und γ', der Winkel D in δ und δ' zerlegt. Alle diese Winkel: α, α', β, β', γ, γ', δ, δ' können wir als Peripheriewinkel auffassen, denn ihr Scheitelpunkt liegt in der Kreislinie, und ihre Schenkel sind Sehnen; und zwar stehen

α und β' über demselben Bogen CD,
α' „ δ „ „ „ BC,
γ „ δ' „ „ „ AB,
γ' „ β „ „ „ AD.

Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich; mithin ist:

$$\alpha = \beta'$$
$$\alpha' = \delta$$
$$\gamma = \delta'$$
$$\gamma' = \beta$$
$$\overline{\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma' = \beta' + \delta + \delta' + \beta,}$$

oder wenn wir die Summanden der rechten Seite in anderer Weise ordnen:

$$\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma' = \beta + \beta' + \delta + \delta'.$$

Wie wir aus der Fig. 6 ersehen, können wir in der letzten Gleichung

für $\alpha + \alpha'$ den Winkel A,
„ $\gamma + \gamma'$ „ „ C,
„ $\beta + \beta'$ „ „ B,
„ $\delta + \delta'$ „ „ D

einführen; wir erhalten dann:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

Gemäß Seite 89 betragen die vier Winkel in einem Viereck immer 4 Rechte; in unserm Falle ist daher:

$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 4R.$$

Wie uns die vorletzte Gleichung sagt, müssen von diesen vier Rechten

auf $\angle A + \angle C$ und auf $\angle B + \angle D$

gleiche Theile fallen, d. h., es muß

$\angle A + \angle C = 2R$ und $\angle B + \angle D = 2R$ sein,

was behauptet war.

C. Der Sehnen-Tangentenwinkel und der Sehnen-Tangentenbogen.

§ 17. Ein Satz über den Sehnen-Tangentenwinkel. Der Winkel α in Fig. 7 hat die beiden Schenkel AB und AC, und

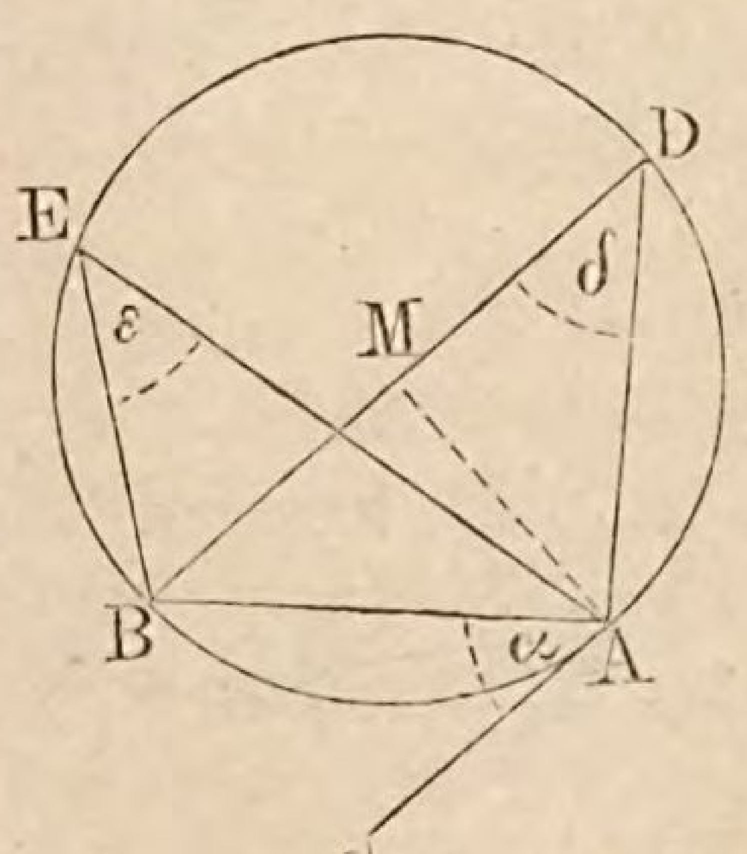


Fig. 7.

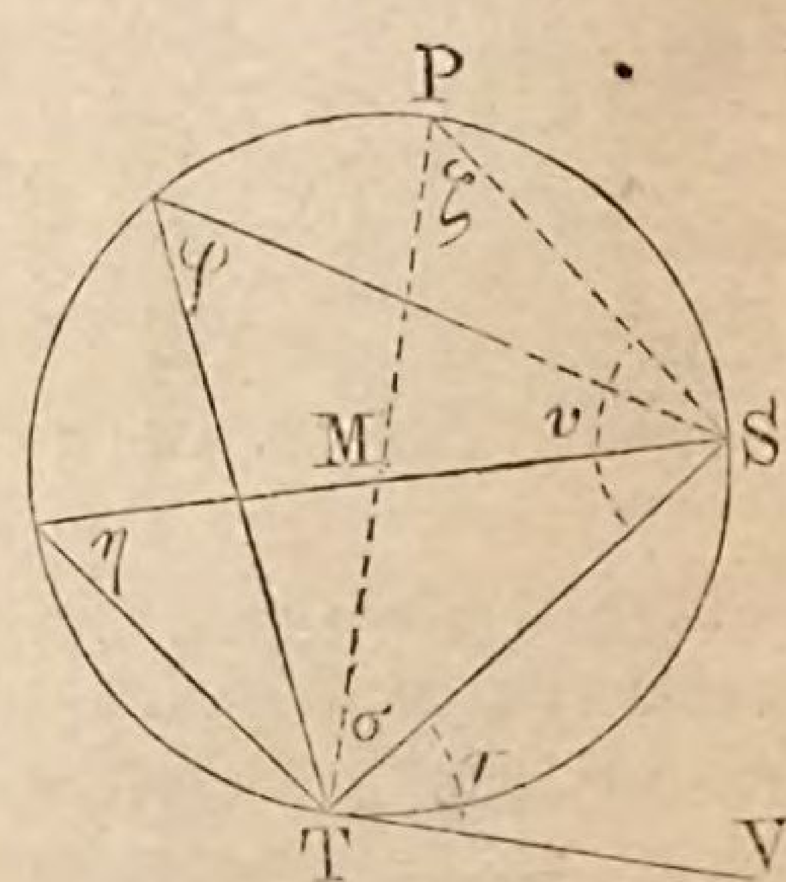


Fig. 8.

zwar ist AB eine Sehne und AC eine Tangente des Kreises um M. Der Winkel α ist

also von einer **Sehne** und einer **Tangente** eingeschlossen; man nennt ihn darum einen **Sehnen-Tangentenwinkel.**

Betrachten wir jetzt die beiden Bogen, in welche der Kreis um M durch die Sehne AB getheilt wird. Der eine dieser Bogen, in unserm Falle der kleinere, liegt an derselben Seite der Sehne AB, wie der Sehnen-Tangentenwinkel α, und zwar wird er ganz von den Schenkeln des Sehnen-Tangentenwinkels eingeschlossen. Der **zweite**, für uns wichtigere **Bogen** ADB ist an der andern Seite der Sehne gelegen, er ist dem **Sehnen-Tangentenwinkel** also **entgegengesetzt.** Trotzdem wollen wir ihn mit dem Worte **Sehnen-Tangentenbogen** bezeichnen, weil zwischen den Peripheriewinkeln (etwa δ und ε), die in ihm liegen, und dem Sehnen-Tangentenwinkel α eine Beziehung besteht.

Wenn wir nämlich den Sehnen-Tangenwinkel α und die beiden Peripheriewinkel δ und ε messen, so finden wir, daß sie gleich groß sind.

Die Messung ergiebt, daß

$$\alpha = 45^0, \quad \delta = 45^0 \text{ und } \varepsilon = 45^0 \text{ ist.}$$

Kleiden wir unsere Beobachtung in die Form eines Satzes, so können wir sagen:

Der Sehnen-Tangentenwinkel α ist ebenso groß wie die Peripheriewinkel δ und ε im Sehnen-Tangentenbogen.

In Fig. 8 ist τ Sehnen-Tangentenwinkel, denn τ wird von der Sehne ST und der Tangente TV gebildet.

Der Sehnen-Tangentenbogen, welcher zu τ gehört, ist SPT. In diesem Sehnen-Tangentenbogen sind η und φ Peripheriewinkel. Die Messung mit dem Transporteur ergiebt wieder, daß

$$\tau = \eta = \vartheta \text{ ist.}$$

Die beiden Sehnen-Tangentenwinkel α und τ in Fig. 7 und 8 sind spitz. Es ist aber ebenso gut möglich, daß ein Sehnen-Tangentenwinkel einen Rechten bildet, oder stumpf ist. In Fig. 9 ist z. B. der Sehnen-Tangentenwinkel φ stumpf. Als Sehnen-Tangentenbogen gehört zu φ der kleinere Bogen AB, in dem der Periphrriewinkel τ liegt. Auch hier ist $\varphi = \tau$. Allgemein besteht der

Lehrsatz III. Der **Sehnen-Tangentenwinkel** ist den **Peripheriewinkeln** gleich, welche im **Sehnen-Tangentenbogen** liegen.

Den Beweis wollen wir an zwei Figuren führen, in der ersten möge der Sehnen-Tangentenwinkel spitz, in der zweiten stumpf sein. In

Fall I ist die **Voraussetzung:** In Fig. 8 ist ST eine Sehne. TV eine Tangente, τ ein spitzer Sehnen-Tangentenwinket.

Behauptung. $\tau = \eta, \quad \tau = \varphi.$

Beweis. Wir wollen den Kreisdurchmesser TP ziehen und den Kreispunkt P mit S durch eine gerade Linie verbinden. Es entsteht dann der Peripheriewinkel ζ, dessen Schenkel in Fig. 8 durch punktirte Linien bezeichnet sind. Es ist nun nicht schwer, zu beweisen, daß der Sehnen-Tangentenwinkel τ dem Peripheriewinkel ζ gleich ist. Da die Tangente auf dem zugehörigen Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht, muß TV mit MT einen rechten Winkel bilden, es muß mithin die Gleichung bestehen:

$$\angle VTM = R,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\angle VTP = R.$$

Der Winkel PTV ist durch die Sehne ST in die beiden Winkel σ und τ zerlegt; σ und τ sind also zusammen ebenso groß wie der Winkel VTP, in Zeichen, es ist:

$$\text{I. } \tau + \sigma = R.$$

Betrachten wir jetzt den Winkel v genauer! PT ist ein Durchmesser und theilt daher den Kreis in zwei Halbkreise. In einem dieser Halbkreise liegt v als Peripheriewinkel. Es muß daher gemäß S. 3 6 § 12 die Gleichung bestehen:

$$v = R.$$

v ist zugleich Winkel des Dreiecks PST; die beiden anderen Winkel dieses Dreiecks heißen σ und ζ. In einem Dreieck betragen die drei Winkel zusammen zwei Rechte; wir haben mithin:

$$v + \zeta + \sigma = 2R = R + R.$$

Auf v kommt, wie wir wissen, von den zwei Rechten schon ein Rechter; der andere Rechte muß daher auf $\tau + \sigma$ fallen; d. h. es ist:

$$\text{II. } \zeta + \sigma = R.$$

Vorher waren wir zu der Gleichung gelangt:

$$\text{I. } \tau + \sigma = R.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind; wir haben daher:

$$\begin{array}{rl} & \zeta + \sigma = \tau + \sigma, \\ \text{es ist ferner:} & \quad \sigma = \quad \sigma \\ \hline & \zeta + \sigma - \sigma = \tau + \sigma - \sigma \\ & \text{d. i. } \zeta = \tau, \\ & \text{oder } \tau = \zeta. \end{array}$$

Durch diese letzte Gleichung können wir leicht zur Behauptung gelangen. Die drei Peripheriewinkel ζ, η und φ stehen über demselben Bogen ST. Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich, folglich ist:

$$\zeta = \eta = \varphi.$$

Setzen wir in der Gleichung:

$$\tau = \zeta$$

für ζ erst den Winkel η und darauf den gleichen Winkel ϑ ein, so erhalten wir:

$$\tau = \eta = \vartheta, \text{ was behauptet war.}$$

Wir kommen jetzt zu

Fall II. Der Sehnen-Tangentenwinkel möge stumpf sein; wir behaupten, daß er auch in diesem Falle dieselbe Größe habe, wie der Peripheriewinkel im Sehnen-Tangentenbogen.

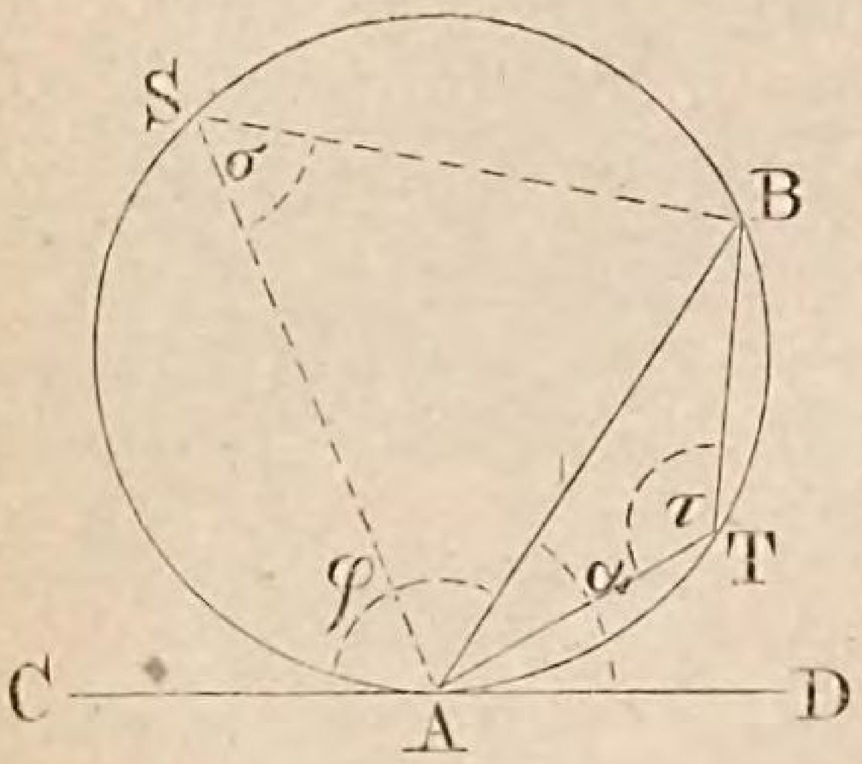


Fig 9.

Weil wir uns zum Beweise dieser Behauptung einer neuen Figur bedienen, müssen wir auch die Voraussetzung und Behauptung erneuern.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 9 der stumpfe Sehnen-Tangentenwinkel φ und der Peripheriewinkel τ in dem entsprechenden Sehnen-Tangentenbogen gegeben.

Behauptung. $\varphi = \tau$.

Beweis. Um den Beweis zu führen, verbinden wir den beliebig gewählten Punkt S mit den Endpunkten A und B der Sehne AB durch gerade Linien. Es entsteht dann das Sehnenviereck ATBS. Da in einem Sehnenviereck zwei gegenüberliegende Winkel gemäß § 16 zwei Rechte betragen, muß

$$\text{I. } \tau + \sigma = 2 \text{ R sein.}$$

Wir wollen jetzt die Tangente CA über A hinaus bis D verlängern, und den Winkel, welchen die Verlängerung mit der Sehne AB bildet, α nennen. φ und α machen dann zusammen einen gestreckten Winkel aus; und da ein gestreckter Winkel zwei Rechte beträgt, besteht die Gleichung:

$$\varphi + \alpha = 2 \text{ R}.$$

Sehen wir jetzt zu, in welcher Beziehung die beiden Winkel α und σ zu einander stehen! α ist ein spitzer Winkel und wird von einer Sehne und einer Tangente eingeschlossen; es ist daher α ein spitzer Sehnen-Tangentenwinkel. σ ist ein Peripheriewinkel im zugehörigen Sehnen-Tangentenbogen. Nach dem ersten Falle unseres Lehrsatzes haben wir mithin:

$$\alpha = \sigma.$$

Vertauschen wir in der Gleichung

$$\varphi + \alpha = 2 \text{ R}$$

α mit der gleichwerthigen Größe σ, so ergiebt sich

$$\text{II. } \varphi + \sigma = 2 \text{ R}.$$

Vorher hatten wir:

$$\text{I. } \tau + \sigma = 2 \text{ R}.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, folglich:

$$\varphi + \sigma = \tau + \sigma,$$

es ist ferner: $\sigma = \sigma$

$$\varphi + \sigma - \sigma = \tau + \sigma - \sigma$$

d. i. $\varphi = \tau$, was behauptet war.

D. Der Halbkreis und der Sehnen-Tangentenbogen als geometrische Oerter.

§ 18. Der Halbkreis als geometrischer Ort. Auf Seite 140 des achten Briefes haben wir erörtert, was man unter einem geometrischen Ort versteht. Wir sahen, daß sich Punkte, welche eine gleiche Eigenschaft besitzen, oft zu einer bestimmten geraden oder krummen Linie gruppiren, die man den geometrischen Ort nennt. Daß die Kenntniß der geometrischen Oerter für die Lösung der Constructionsaufgaben von großer Wichtigkeit ist, haben wir häufig erfahren. Meist waren die Constructionsaufgaben gelöst, wenn es uns gelang, die Lage eines gesuchten Punktes zu bestimmen; und diesen gesuchten Punkt konnten wir gewöhnlich ermitteln, indem wir ihn als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter ansahen. Häufig geht aus der besondern Beschaffenheit der Aufgabe hervor, welche Linien wir als geometrische Oerter aufzufassen haben; wir haben aber auch einige allgemeine Sätze aufgestellt, welche wir bei vielen Fällen in Anwendung brachten, wenn es sich darum handelte, zur nähern Bestimmung eines Punktes die beiden geometrischen Oerter aufzusuchen. Wir fanden z. B., daß

> der Kreis der geometrische Ort für alle Punkte ist, die von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind.

Ferner haben wir festgestellt, daß

> der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Basis haben, die Senkrechte ist, die in der Mitte der Basis errichtet wird,

oder anders ausgedrückt, daß

> der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind, die gerade Linie ist, welche im Mittelpunkte der Verbindungslinie der beiden festen Punkte senkrecht steht.

Diesen Sätzen wollen wir jetzt noch einige andere hinzufügen. In § 11 haben wir gefunden, daß

die Peripheriewinkel in einem Halbkreise einen Rechten betragen.

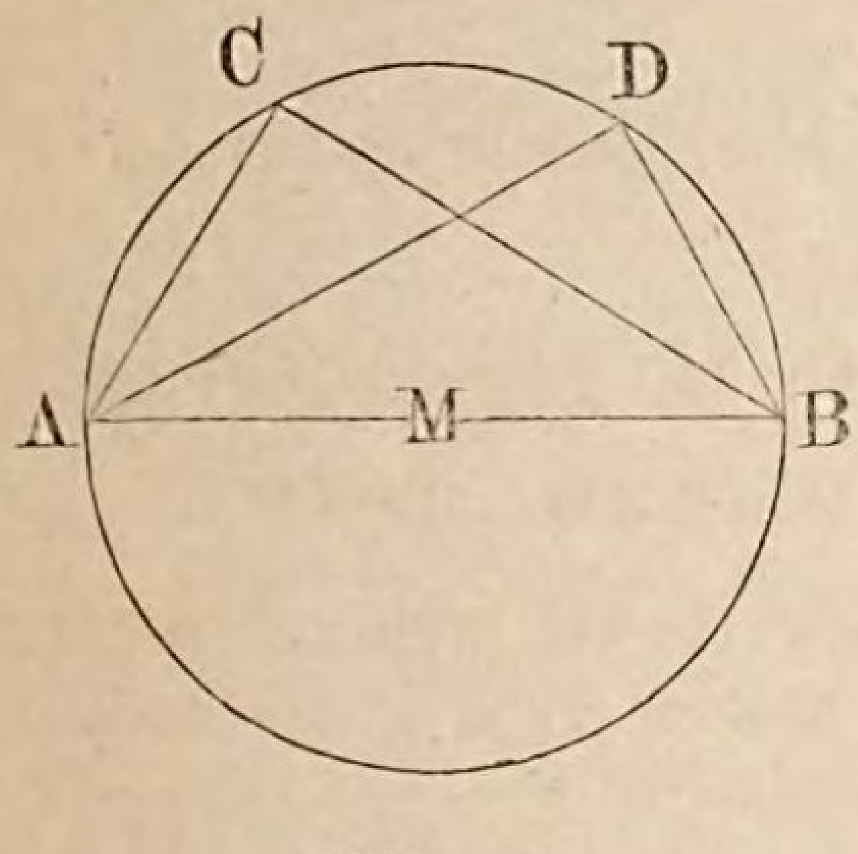


Fig. 10.

In Fig. 10 sind z. B. die Winkel ACB und ADB als Peripheriewinkel im Halbkreise Rechte; die Dreiecke ACB und ADB sind daher rechtwinklig und zwar ist ihre gemeinschaftliche Hypotenuse AB zugleich Durchmesser des Kreises um M. Außer ACB und ADB existiren noch unzählige andere rechtwinklige Dreiecke, die AB zur Hypotenuse haben. Wir brauchen nur einen beliebig gewählten Punkt des Kreises um M mit A und B geradlinig zu verbinden, so erhalten wir ein solches rechtwinkliges Dreieck. Jeder Punkt des Kreises um M d. i. jeder Punkt des Kreises, welcher über AB als Durchmesser beschrieben ist, kann also Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB werden, mit anderen Worten:

der Kreis, welchen wir über AB als Durchmesser construiren, ist der geometrische Ort für die Spitzen der rechtwinkligen Dreiecke, welche AB zur Hypotenuse haben.

Wenn wir diese Bemerkung verallgemeinern, erhalten wir den

Lehrsatz IV. Der Kreis, welcher über einer **gegebenen Strecke** als Durchmesser beschrieben ist, stellt den **geometrischen Ort** für die **Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke dar**, deren **Hypotenuse die gegebene Strecke** ist.

Wir wollen diesen Lehrsatz sogleich verwenden, um folgende Aufgabe zu lösen:

Von einem **rechtwinkligen Dreieck** sei die **Hypotenuse** und die **zur Hypotenuse gehörige Höhe** gegeben; das rechtwinklige Dreieck soll construirt werden.

Voraussetzung. Wir haben zwei Strecken a und b.

Forderung. Wir sollen ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, in dem die Hypotenuse gleich a und die Höhe, welche auf der Hypotenuse senkrecht steht, gleich b ist.

Analysis. Das gesuchte rechtwinklige Dreieck können wir leicht construiren, wenn wir die Spitze desselben gefunden haben. Wir haben dann nur nöthig, die Spitze mit den Endpunkten der gegebenen

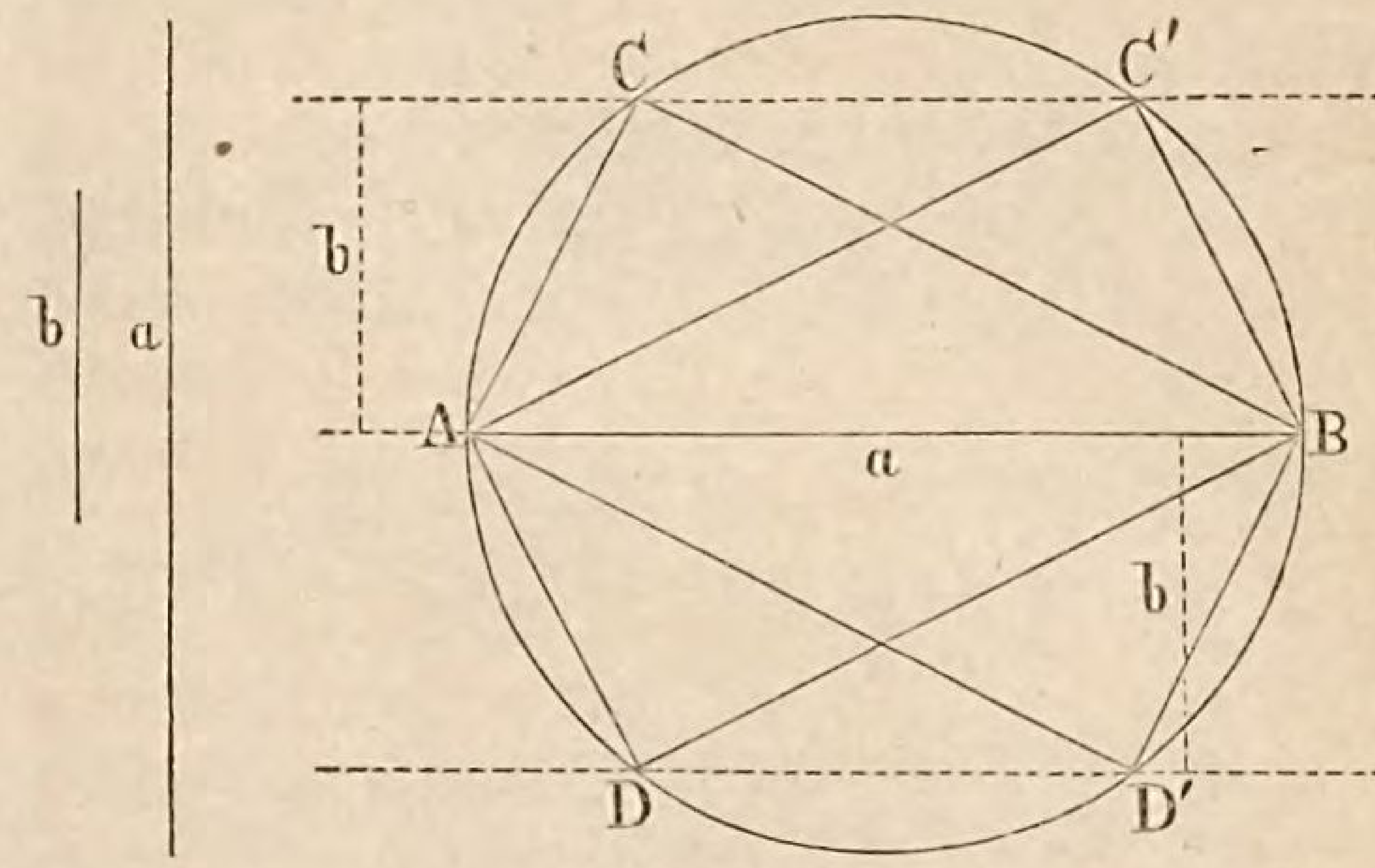


Fig. 11.

Hypotenuse geradlinig zu verbinden. Die Spitze werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen. Da die Spitze einem rechtwinkligen Dreiecke angehören soll, ist der eine geometrische Ort nach dem vorigen Lehrsatz der Kreis, den wir über der gegebenen Hypotenuse als Durchmesser errichten können. Den zweiten geometrischen Ort finden wir, wenn wir an folgenden in § 138 ausführlich besprochenen Satz denken:

Für die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und eine bestimmte Höhe haben, ist der geometrische Ort die Parallele, die durch einen um die Höhe von der Grundlinie entfernten Punkt gelegt ist.

In dem Dreieck, welches wir suchen, muß die gegebene Hypotenuse a Grundlinie und die gegebene Strecke b Höhe sein. Den zweiten geometrischen Ort für die Spitze erhalten wir also, wenn wir im Abstand b zur gegebenen Hypotenuse a eine Parallele ziehen.

Construction. Wir ziehen eine Gerade AB = a und machen AB zum Durchmesser eines Kreises, indem wir AB halbiren und mit der Hälfte um die Mitte einen Kreis beschreiben. Darauf legen wir zu AB in der gegebenen Entfernung b oberhalb und unterhalb von AB Parallelen. Die eine derselben möge den vorher construirten Kreis in C und C′, die andere in D und D′ schneiden. Ziehen wir die Geraden

AC, BC, AC′, BC′, AD, BD, AD′, BD′,

so entstehen die Dreiecke

ACB, AC′B, ADB, AD′B.

Behauptung. Die vier Dreiecke

ACB, AC′B, ADB und AD′B

entsprechen der Forderung, d. h. sie sind rechtwinklig, ihre Hypotenuse ist gleich a und ihre Höhe gleich b.

Beweis. Die Dreiecke

ACB, AC′B, ADB und AD′B

sind rechtwinklig, denn die Winkel bei C, C′, D, D′ sind als Peripheriewinkel im Halbkreise Rechte. Die gemeinschaftliche Hypotenuse AB dieser Dreiecke ist nach der Construction der gegebenen Strecke a gleich; die Höhe ist gleich b, weil ja die Parallelen im Abstande b von der Hypotenuse gezogen sind.

Aufgaben. Der Schüler möge

a) ein rechtwinkliges Dreieck construiren, wenn

1) die Hypotenuse gegeben ist und
2) die Bedingung besteht, daß das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig werden soll.

Er möge

b) ein rechtwinkliges Dreieck construiren, wenn

1) die Hypotenuse,
2) die Mittellinie gegeben ist, welche die Mitte der Hypotenuse mit der Spitze verbindet.

Er möge

c) ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, wenn die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche die Hypotenuse von der Höhe getheilt wird.

Im folgenden Briefe werden wir diesen Abschnitt weiter behandeln.

E. Recapitulation.

Mit dem zwanzigsten Briefe haben wir den ersten Theil der Arithmetik geschlossen und mit dem **einundzwanzigsten Briefe** den **zweiten Theil der Planimetrie** begonnen, der, wie wir in der Einleitung unseres Briefes erklärten, zunächst die Lehre vom Kreise, dann die Lehre vom Flächeninhalt der planimetrischen Figuren und drittens die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke enthalten soll. Schon im ersten Briefe hatten wir den Kreis definirt und auch besprochen, was man unter Radien, Sehnen, Durchmessern, Secanten, Centri- und Peripheriewinkeln versteht. Weil aber anzunehmen ist, daß durch das Studium der Arithmetik die Definitionen und Lehrsätze der ersten neun Briefe im Vorstellungskreise des Schülers wieder in den Hintergrund getreten sind, hielten wir es für angemessen, in der **vierzigsten Lection** auf die Bedeutung der Kreisstücke und auf die Lehrsätze, welche sich unmittelbar anschließen, noch einmal einzugehen. Den im zweiten Briefe bereits behandelten Satz, daß zu gleichen Kreisbogen auch gleiche Centriwinkel gehören, erweiterten wir, indem wir auch die Sehnen in ihn hineinzogen. Nachdem wir darauf die Beziehung des Kreismittelpunktes zur Sehne erörtert hatten, wandten wir uns dem wichtigen Satze zu, daß der Centriwinkel doppelt so groß ist, wie der Peripheriewinkel, welcher mit ihm über demselben Bogen steht. Wir besprachen auch die wichtigen Folgerungen, welche wir aus diesem Satze ziehen konnten, und gingen dann in der **einundvierzigsten Lection** zur Begriffsbestimmung der Tangente über. Wir setzten auseinander, daß man in der höhern Mathematik die Tangente aus der Secante entstehen läßt, und bemerkten dabei, daß Leibniz durch diese Auffassung der Tangente zur Differentialrechnung geführt wurde. Aus methodischen Gründen nahmen wir in der elementaren Planimetrie diese Definition nicht an, wir verstanden vielmehr unter der Tangente eine gerade Linie, welche auf dem Kreisradius in seinem Endpunkte senkrecht steht. Auf die Begriffsbestimmung der Tangente ließen wir zwei Aufgaben folgen, welche die Construction der Tangente betrafen. Nachdem wir darauf noch einen Satz über das Tangentenviereck und einen Satz über das Sehnenviereck gebracht hatten, behandelten wir den wichtigen Satz über das Verhältniß des Sehnen-Tangentenwinkels zum Peripheriewinkel im Sehnen-Tangentenbogen. Im letzten Abschnitt stellten wir dann noch einen Lehrsatz über den geometrischen Ort, für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke auf, welche dieselbe Grundlinie haben, erläuterten diesen Satz durch mehrere Aufgaben und beendigten damit den einundzwanzigsten Brief.

F. Wiederholungsfragen.

1) Wie haben wir einen Kreis definirt?
2) Was sind concentrische Kreise?
3) Was sind Sehnen, was sind Secanten?
4) Was versteht man unter einem Durchmesser, was unter einem Halbkreis?
5) Was ist ein Centriwinkel, was ist ein Peripheriewinkel?
6) Welchen Lehrsatz haben wir über Radien ein und desselben Kreises aufgestellt?
7) Welche Beziehungen bestehen zwischen gleichen Kreisbogen, gleichen Sehnen und gleichen Centriwinkeln?
8) Welchen Satz haben wir über die gerade Linie aufgestellt, die das Kreiscentrum mit dem Mittelpunkt einer Sehne verbindet?
9) Wie verhält sich der Centriwinkel zum Peripheriewinkel, der mit ihm über demselben Bogen steht?
10) Wie verhalten sich Peripheriwinkel über demselben Bogen zu einander?
11) Wie groß ist der Peripheriewinkel im Halbkreise?
12) Wie wird die Tangente in der höhern Mathematik definirt?
13) Wie definirt man die Tangente in der elementaren Planimetrie?
14) Welchen Satz haben wir über das Tangentenviereck aufgestellt?
15) Wie groß ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel im Sehnenviereck?
16) Welchen Winkeln ist der Sehnen-Tangentenwinkel gleich?
17) Welches ist der geometrische Ort, für die Spitzen der rechtwinkligen Dreiecke mit derselben Basis?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 42 und 43.
Planimetrie.

Als Manuscript gedruckt.

22. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Der Kreis ist die regelmäßigste und vollendetste Figur der Planimetrie.
Aristoteles.

Lection 42.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 40.

Abschnitt A. § 5. Aufgaben. Wenn

$$\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DE} \text{ ist,}$$

so muß auch:

$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DE}$$

und $\angle ACB = \angle BCD = \angle DCE$ sein.

Abschnitt B. § 12. **Aufgaben** a) In Fig. 22 sind die Strecken CF und CG Radien, und die Strecken DF, DG, EF, EG Sehnen. Die Strecke MN ist eine Secante; FCG, oder anders bezeichnet, γ ist ein Centriwinkel, FDG und FEG, oder anders bezeichnet, δ und ε sind Peripheriewinkel.

b) In Fig. 23 sind die Strecken AD und BE Durchmesser.

c) In Fig. 22 ist $\gamma = 2\delta$ und $\gamma = 2\varepsilon$, oder $\delta = \frac{1}{2}\gamma$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma$.

d) Die beiden Peripheriewinkel δ und ε sind sind einander gleich, weil sie über demselben Bogen FG stehen.

e) Als Peripheriewinkel im Halbkreise sind Rechte die Winkel: ABD, ACD, AED, AFD, BDE und BAE.

Lection 41.

Abschnitt D. Aufgaben. Von den folgenden Constructionsaufgaben geben wir nur die Analysis.

a) Ein rechtwinkliges Dreieck soll construirt werden, wenn die Hypotenuse gegeben ist und die Bedingung besteht, daß das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig wird.

Analysis. Die Hypotenuse des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks kennen wir. Die Spitze werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen. Der eine geometrische Ort ist der Kreis, welcher über der gegebenen Hypotenuse als Durchmesser beschrieben ist; den andern geometrischen Ort erhalten wir, wenn wir bedenken, daß das gesuchte rechtwinklige Dreieck gleichschenklig werden soll und daß der geometrische Ort für die Spitze aller gleichschenkligen Dreiecke, die über einer bestimmten Basis (hier der Hypotenuse) stehen, die gerade Linie ist, welche in der Mitte der Basis senkrecht errichtet wird.

b) Es soll ein rechtwinkliges Dreieck construirt werden, wenn die Hypotenuse gegeben ist und die Mittellinie, welche die Mitte der Hypotenuse mit der Spitze verbindet.

Analysis. Die Hypotenuse ist uns bekannt, die Spitze werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter bestimmen. Der eine geometrische Ort ist der über der Hypotenuse als Durchmesser geschlagene Kreis, der zweite geometrische Ort ist der Kreis, welcher mit der gegebenen Mittellinie um den Mittelpunkt der Hypotenuse beschrieben

wird. Haben wir die Spitze gefunden, so können wir das gesuchte rechtwinklige Dreieck leicht construiren, indem wir die Spitze mit den Endpunkten der Hypotenuse verbinden.

c) Ein rechtwinkliges Dreieck soll construirt werden, wenn die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche die Hypotenuse von der Höhe getheilt wird.

Analysis. Die beiden Abschnitte, in welche die Hypotenuse von der Höhe zerlegt wird, sind gegeben. Legen wir diese Abschnitte an einander, so erhalten wir die Hypotenuse. Der Punkt, in dem die Abschnitte an einander stoßen, ist zugleich der Punkt, in dem die Höhe die Hypotenuse trifft. Wenn wir auf der Hypotenuse in diesem Punkte eine Senkrechte errichten, erhalten wir den einen geometrischen Ort für die Spitze des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks. Der zweite Ort ergiebt sich, wenn über der Hypotenuse als Durchmesser ein Kreis geschlagen wird. Haben wir die Spitze des rechtwinkligen Dreiecks als Durchschnitt dieser beiden geometrischen Oerter bestimmt, so ist die Construction leicht.

B. Antworten auf die im Abschnitt F der Lection 41 gestellten Fragen.

1) Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem festen Punkte gleich weit entfernt sind. 2) Concentrische Kreise haben denselben Mittelpunkt, aber verschiedene Radien. 3) Sehnen sind gerade Linien, welche Kreispunkte mit einander verbinden, Secanten sind gerade Linien, welche den Kreis durchschneiden. 4) Durchmesser sind Sehnen, die durch den Kreismittelpunkt hindurchgehen; die beiden Hälften, in welche die Kreislinie vom Durchmesser getheilt wird, nennt man Halbkreise. 5) Winkel, deren Scheitelpunkt zugleich Kreiscentrum ist, heißen Centriwinkel; Winkel, deren Scheitelpunkt zugleich ein Punkt der Kreislinie ist, heißen Peripheriewinkel. 6) Radien eines Kreises sind einander gleich. 7) Zu gleichen Kreisbogen gehören gleiche Sehnen und gleiche Centriwinkel.

Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Kreisbogen und gleiche Sehnen.

Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und gleiche Kreisbogen.

8) Die gerade Linie, welche den Kreismittelpunkt mit der Mitte der Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht. 9) Der Centriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel, welcher mit ihm über demselben Bogen steht. 10) Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich. 11) Der Peripheriewinkel im Halbkreise beträgt einen Rechten. 12) In der höhern Mathematik wird die Tangente als Secante definirt, welche um einen Schnittpunkt so lange gedreht ist, bis die beiden Schnittpunkte in einen zusammenfallen. 13) In der elementaren Planimetrie definirt man die Tangente als eine gerade Linie, die auf dem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht. 14) In einem Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten gleich. 15) Die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck sind zwei Rechten gleich. 16) Der Sehnen-Tangentenwinkel ist den Peripheriewinkeln im Sehnen-Tangentenbogen gleich. 17) Der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke mit derselben Basis ist die Gerade, welche auf der Basis im Mittelpunkte senkrecht steht.

C. Der Sehnen-Tangentenbogen als geometrischer Ort. Fortsetzung des Abschnitts D im vorigen Briefe.

§ 19. Im Abschnitt D des vorigen Briefes haben wir wiederholt, was man unter einem geometrischen Ort versteht und auch kurz den Nutzen der geometrischen Oerter für die Lösung der Constructionsaufgaben beleuchtet. Wir haben auch zu den früher behandelten geometrischen Oertern einen neuen hinzugefügt. Indem wir von dem Satz ausgingen, daß

> die Peripheriewinkel im Halbkreise einen Rechten betragen,

fanden wir, daß

> der Kreis, welcher über einer gegebenen Strecke als Durchmesser beschrieben ist, den geometrischen Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke darstellt, deren Hypotenuse die gegebene Strecke ist.

Dieser Satz gilt nur für rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse bekannt ist. Von solchen Dreiecken kennen wir also zwei Bestimmungsstücke, nämlich **eine Seite** (die Hypotenuse) und den rechten Winkel, welcher der Hypotenuse **gegenüberliegt**, und zwar haben wir die Hypotenuse immer als **Grundlinie** und demgemäß den gegenüberliegenden Rechten als **Winkel an der Spitze** aufgefaßt. Der vorher angeführte Lehrsatz macht uns also mit dem geometrischen Ort für die Spitzen der Dreiecke, deren Grundlinie und Winkel an der Spitze gegeben ist, für den Fall bekannt, daß der Winkel an der Spitze ein Rechter ist. Es wird jetzt die Aufgabe an uns herantreten, unsere Betrachtungen auf Dreiecke mit beliebigen Winkeln auszudehnen, d. h. den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke zu suchen, die über derselben Grundlinie errichtet sind, und an der Spitze einen Winkel von gegebener Größe haben, möge dieser Winkel nun spitz oder stumpf sein, oder einen Rechten bilden.

Betrachten wir in Fig. 1 (S. 367) die Dreiecke

$$AD_1B,\ AD_2B \text{ und } AD_3B.$$

In denselben ist

AB die gemeinsame Grundlinie, und δ_1, δ_2 und δ_3 sind die Winkel an der Spitze.

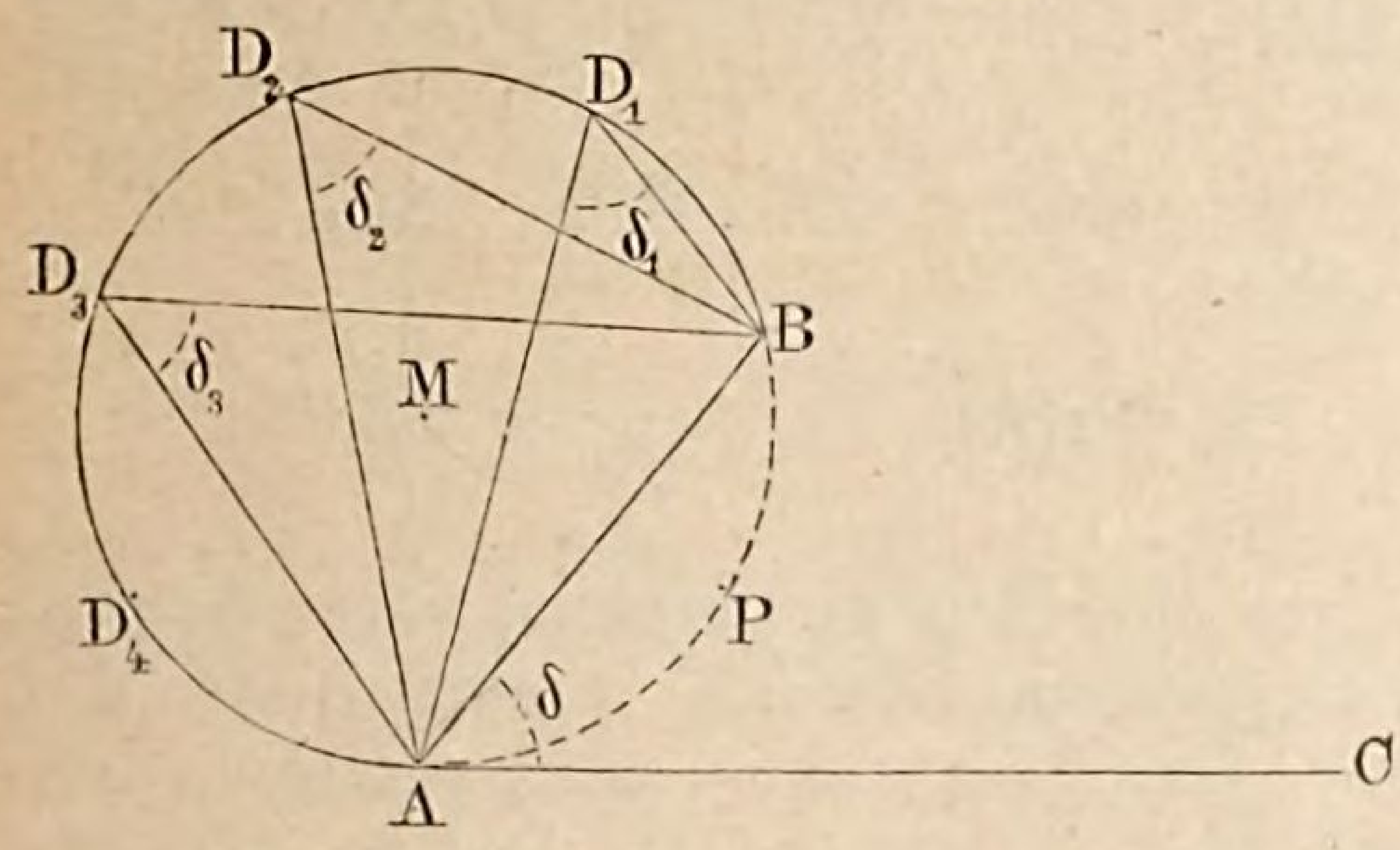


Fig. 1.

Wie wir sehen, sind δ_1, δ_2 und δ_3 Peripheriewinkel des Kreises um M. Da sie über demselben Bogen APB*) stehen, sind sie nach Lehrs. VII Seite 355 einander gleich, in Zeichen, es ist:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3.$$

Die Dreiecke AD_1B, AD_2B und AD_3B stehen also über der gemeinsamen Grundlinie AB und ihre Winkel an der Spitze haben alle die Größe des Winkels δ_1.

Sehen wir jetzt zu, welche Lage die Spitzen D_1, D_2 und D_3 der drei betrachteten Dreiecke haben. Dieselben sind, wie wir sofort bemerken, Punkte des Kreisbogens AD_1B. Wenn wir irgend einen andern Punkt dieses Kreisbogens, etwa D_4 mit A und B geradlinig verbinden, so erhalten wir gleichfalls ein Dreieck, in dem AB die Grundlinie ist und der Winkel an der Spitze die Größe des Winkels δ_1 hat.

Drücken wir uns mathematisch aus, so können wir daher sagen:

> Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche über der gemeinsamen Grundlinie AB stehen und deren Winkel an der Spitze die Größe des Winkels δ_1 haben, ist der Kreisbogen AD_1B.

Untersuchen wir die Beschaffenheit des Bogens AD_1B genauer und ziehen wir zu dem Zweck die Tangente AC. Es entsteht dann der Winkel δ, welcher von der Sehne AB und der Tangente AC eingeschlossen wird,

*) In Fig. 1 ist der Bogen APB punktirt. Man benennt Kreisbogen mit drei Buchstaben, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden; unter $\overset{\frown}{AB}$ könnte z. B. auch der Bogen AD_1B verstanden werden.

also gemäß § 17*) ein Sehnen-Tangentenwinkel ist. Suchen wir den Sehnen-Tangentenbogen, der dem Sehnen-Tangentenwinkel δ entspricht.

Durch die Sehne AB, welche zugleich der eine Schenkel des Sehnen-Tangentenwinkels ist, wird der Kreis um M in zwei Kreisbogen APB und AD_1B zerlegt. Der punktirte Kreisbogen APB liegt an derselben Seite der Sehne AB wie der Sehnen-Tangentenwinkel α. Der andere Bogen AD_1B ist auf der entgegengesetzten Seite gelegen,

> $\overset{\frown}{AD_1B}$ ist daher der Sehnen-Tangentenbogen, welcher zum Sehnen-Tangentenwinkel δ gehört und über der Sehne AB steht.

Nach § 17 ist der Sehnen-Tangentenwinkel den Peripheriewinkeln gleich, welche im Sehnen-Tangentenbogen liegen, es besteht daher die Gleichung:

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3.$$

Wenn wir für δ_1 den gleichen Winkel δ schreiben und den Bogen AD_1B unseren letzten Erörterungen gemäß näher bestimmen, so wird aus dem oben eingezogenen Satz:

> **Lehrsatz I.** Der **geometrische Ort** für die **Spitzen aller Dreiecke,** welche über der **gemeinsamen Grundlinie** AB stehen und **an der Spitze gleiche Winkel** von der Größe des Winkels δ **haben,** ist der **Sehnen-Tangentenbogen** AD_1B, **welcher** über der Sehne AB und dem Sehnen-Tangentenwinkel δ errichtet wird.

Wir könnten diesem Satze noch eine allgemeinere Fassung geben, indem wir für AB „eine beliebige Strecke“ und für δ „einen beliebigen Winkel“ setzen. Da aber die allgemeine Fassung wenig von dem Wortlaute des obigen Satzes abweicht, so wollen wir uns damit nicht aufhalten. Wir wollen vielmehr sogleich die Frage erwägen,

> wie wir den Sehnen-Tangentenbogen AD_1B construiren können, der über der Sehne AB errichtet werden soll und zu dem Sehnen-Tangentenwinkel δ gehört.

Diese Frage wird beantwortet sein, wenn wir den Kreis beschrieben haben, dessen einer Theil der Sehnen-Tangentenbogen AD_1B ist;

*) Die Paragraphen beziehen sich, wenn wir keine weitere Bemerkung hinzufügen, auf den zweiten Theil der Planimetrie.

und zwar kennen wir von diesem Kreise die Sehne AB und wissen, daß die Tangente AC, deren Berührungspunkt A mit dem einen Endpunkt von AB zusammenfällt, den Winkel δ mit AB einschließt. Die Construction dieses Kreises ist uns also ermöglicht, wenn wir eine Lösung gegeben haben von der

Aufgabe. Es soll ein **Kreis** construirt werden, von dem wir eine **Sehne** und **den Winkel** kennen, welchen diese **Sehne** mit der in einem ihrer Endpunkte errichteten **Tangente** bildet.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 2 eine Strecke AB und ein Winkel δ gegeben.

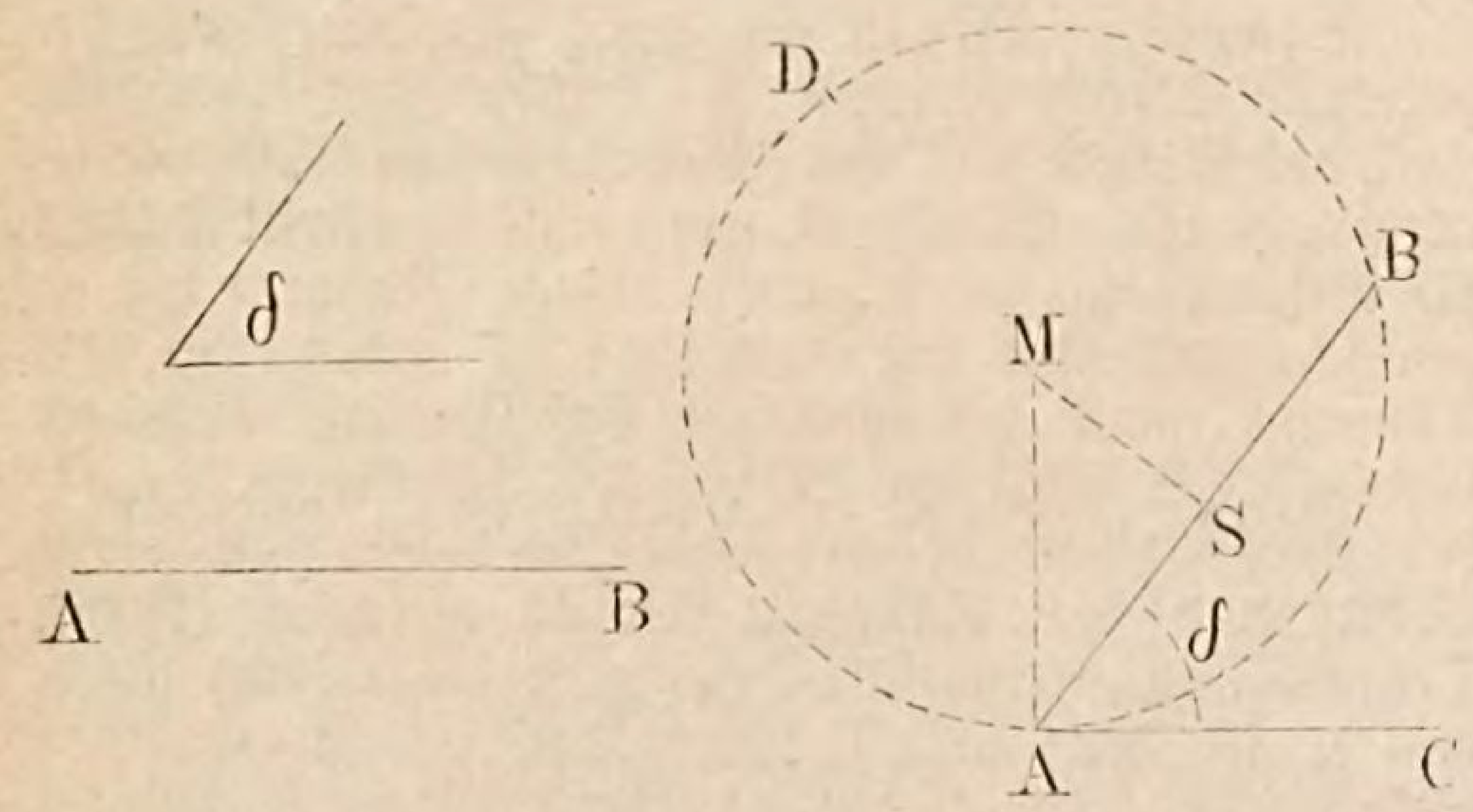


Fig. 2.

Forderung. Wir sollen einen Kreis beschreiben, in dem die gegebene Strecke AB Sehne und die Gerade AC, die mit AB den gegebenen Winkel δ bildet, Tangente wird.

Analysis und **Construction.** Um die Construction auszuführen, werden wir uns die gegebene Gerade AB hinlegen und an AB in einem der Endpunkte, etwa in A, den Winkel BAC = δ antragen. Wir sollen dann einen Kreis beschreiben, dessen Sehne AB und dessen Tangente AC ist. Von diesem Kreise werden wir uns zunächst das Centrum M suchen, indem wir M als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter auffassen. Den einen Ort finden wir, wenn wir bedenken, daß AC Tangente des gesuchten Kreises werden soll und daher auf dem Radius senkrecht steht, der das Centrum M mit dem Punkte A verbindet. Der eine Ort muß also die Senkrechte sein, die auf AC in A errichtet wird. Zum andern geometrischen Ort gelangen wir durch die Erwägung, daß die Senkrechte, die wir im Mittelpunkte einer Sehne errichten, das Kreiscentrum durchschneidet. Der zweite Ort muß mithin die Gerade sein, welche auf AB im Mittelpunkte S senkrecht steht. Haben wir auf diese Weise das Kreiscentrum M ermittelt, so brauchen wir nur um M mit MA bez. der gleichen Strecke MB einen Kreis zu beschreiben. Wir können dann

behaupten, daß dieser Kreis der gewünschte ist.

Der **Beweis** liegt in der Analysis.

§ 20. Die Verwendung des Sehnen-Tangentenwinkels als geometrischer Ort.

Wir kennen jetzt den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die bei gemeinsamer Grundlinie gleiche Winkel an der Spitze haben. Der letzte Paragraph hat uns gelehrt, daß dieser geometrische Ort durch einen Kreisbogen dargestellt wird, durch den Sehnen-Tangentenbogen nämlich, dem als zugehörige Sehne die gemeinsame Grundlinie und als zugehöriger Sehnen-Tangentenwinkel ein Winkel entspricht, der dieselbe Größe hat wie die Winkel an den Dreiecksspitzen. Wir haben auch auseinandergesetzt, wie wir den Sehnen-Tangentenbogen construiren können, der den geometrischen Ort für die Spitzen der Dreiecke mit gegebener Grundlinie und gegebenem Winkel an der Spitze bildet, indem wir lehrten, wie der Kreis beschrieben werden müsse, von dem der gesuchte Sehnen-Tangentenbogen ein Theil ist.

Jetzt müssen wir uns die Aufgabe stellen, an passenden Constructionsaufgaben zu zeigen, wie der Sehnen-Tangentenbogen bei der Lösung Verwendung findet! Immer wenn uns von einem Dreieck die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben ist, wird er uns einen geometrischen Ort für die Dreiecksspitze liefern. Ja, weil wir bei einem Dreieck jede Seite als Grundlinie und die gegenüberliegende Ecke als Spitze ansehen dürfen, können wir den Sehnen-Tangentenbogen als geometrischen Ort immer benutzen, wenn wir irgend eine Dreiecksseite und den ihr gegenüberliegenden Winkel kennen.

Um bei den folgenden Constructionsaufgaben nicht zu viele Worte zu machen, wollen wir für die Seiten, Winkel, Höhen und Mittellinien eines Dreiecks die Bezeichnungsweise einführen, welche wir schon auf Seite 73, 148 und 151 besprochen haben, d. h. wir wollen (wie in Fig. 3 sichtbar),

die Seiten mit a, b, c,
die zugehörigen Höhen mit h_a, h_b, h_c,
die zugehörigen Mittellinien mit m_a, m_b, m_c,
die gegenüberſtehenden Ecken mit A, B, C,
die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ
benennen.

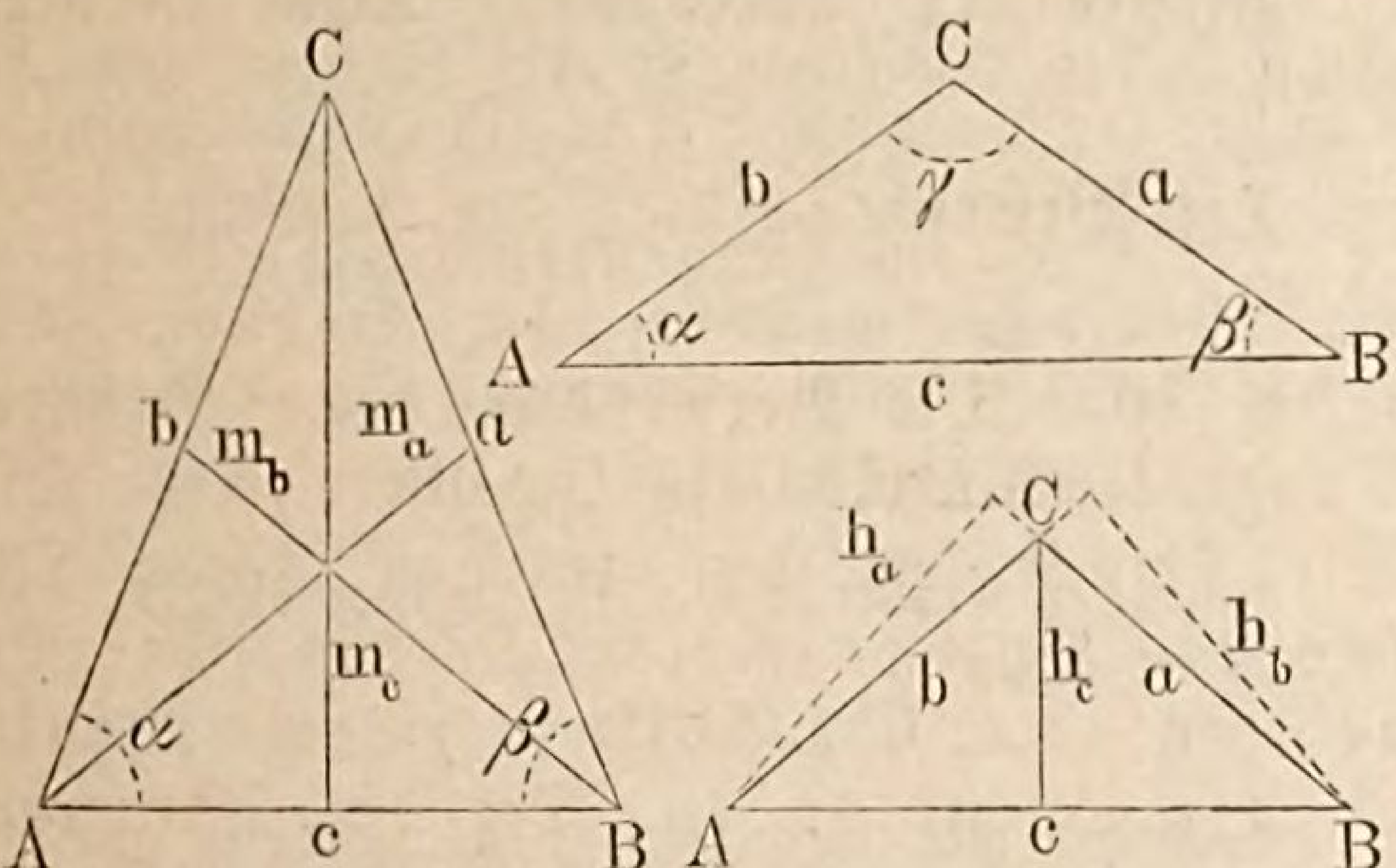


Fig. 3.

Aufgabe I. Wir ſollen ein Dreieck conſtruiren, von dem uns die **Grundlinie**, der **Winkel an der Spitze** und die **Höhe** gegeben iſt, die auf der Grundlinie ſenkrecht ſteht.

Vorausſetzung. Uns ſind in Figur 4 zwei Strecken c und h_c und ein Winkel γ gegeben.

Forderung. Wir ſollen ein Dreieck zeichnen, in dem c Grundlinie, h_c die zugehörige Höhe und γ der Winkel an der Spitze wird.

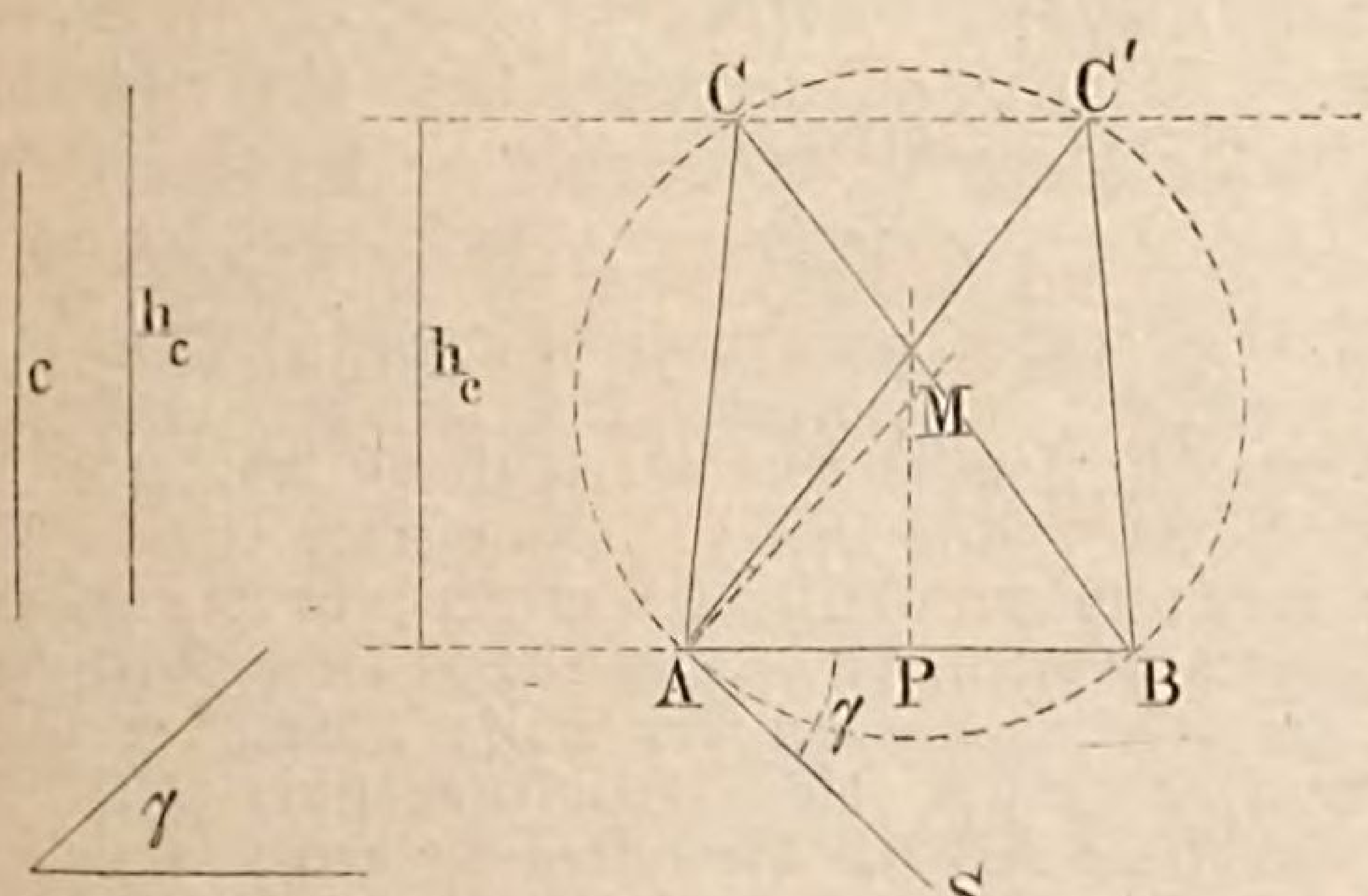


Fig. 4.

Analyſis. Wir wollen uns zunächſt eine Gerade AB hinzeichnen, welche der gegebenen Strecke c gleich iſt, und darauf an AB in A den Winkel γ antragen. Der freie Schenkel des angetragenen Winkels möge AS heißen. Es iſt dann leicht, die Spitze des geſuchten Dreiecks als Durchſchnitt zweier geometriſchen Orte darzuſtellen. Der eine Ort wird der Sehnen-Tangentenbogen ſein, der über der Sehne AB ſteht und zum Sehnen-Tangentenwinkel BAS $= \gamma$ gehört, denn dieſer Bogen iſt ja gemäß Lehrſ. I der geometriſche Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche über der Grundlinie AB errichtet werden können und an der Spitze den Winkel γ haben. Der andere Ort für die geſuchte Spitze iſt die Parallele, die im Abſtande h_c von AB gezogen wird*). Haben wir die Spitze C, ſo können wir das geſuchte Dreieck leicht conſtruiren, indem wir C mit A und B geradlinig verbinden.

Conſtruction. Wie wir ſchon in der Analyſis erörtert haben, zeichnen wir zuerſt AB $=$ c und tragen an AB in A den Winkel BAS $= \gamma$ an. Darauf errichten wir auf AS in A und auf AB im Mittelpunkt P Senkrechte, die ſich in M ſchneiden mögen, und beſchreiben um M mit MA einen Kreis. Hiernach legen wir zu AB im Abſtande h_c eine Parallele, die den Kreis in C und C′ durchſchneidet, und ziehen die Geraden CA, CB, C′A, und C′B.

Behauptung. Die Grundlinie AB der beiden Dreiecke ACB und AC′B iſt ſo groß wie die gegebene Strecke c, die Höhen ſind der gegebenen Strecke h_c und die Winkel bei C und C′ dem gegebenen Winkel γ gleich.

Beweis. AB iſt ſo groß gezeichnet wie die gegebene Strecke c, und die Höhen ſind h_c gleich, weil die Gerade CC′ im Abſtande h_c zu AB parallel gelegt iſt. Es bleibt nun noch der dritte Theil der Behauptung zu beweiſen übrig. In dem Kreiſe, den wir mit MA um M geſchlagen haben, iſt AS Tangente, weil AS nach der Conſtruction auf dem Radius MA ſenkrecht ſteht. AB iſt Sehne desſelben Kreiſes; der Winkel BAS iſt daher von einer Sehne und einer Tangente eingeſchloſſen; er iſt ein Sehnen-Tangentenwinkel. Ein Sehnen-Tangentenwinkel iſt den Peripheriewinkeln im zugehörigen Sehnen-Tangentenbogen gleich; mithin iſt Winkel BAS ebenſo groß wie die Winkel bei C und C′. Da BAS nach der Conſtruction gleich γ iſt, müſſen auch die Winkel bei C und C′ die Größe des Winkels γ haben. Damit iſt der dritte Theil der Behauptung bewieſen.

Aufgabe II. Es ſoll ein Dreieck conſtruirt werden, von dem wir den **Winkel an der Spitze** kennen und die **beiden Abſchnitte**, in welche die **Grundlinie durch die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze** zerlegt wird.

Vorausſetzung. Uns ſind zwei Strecken s und t und ein Winkel γ gegeben. (Siehe Fig. 5).

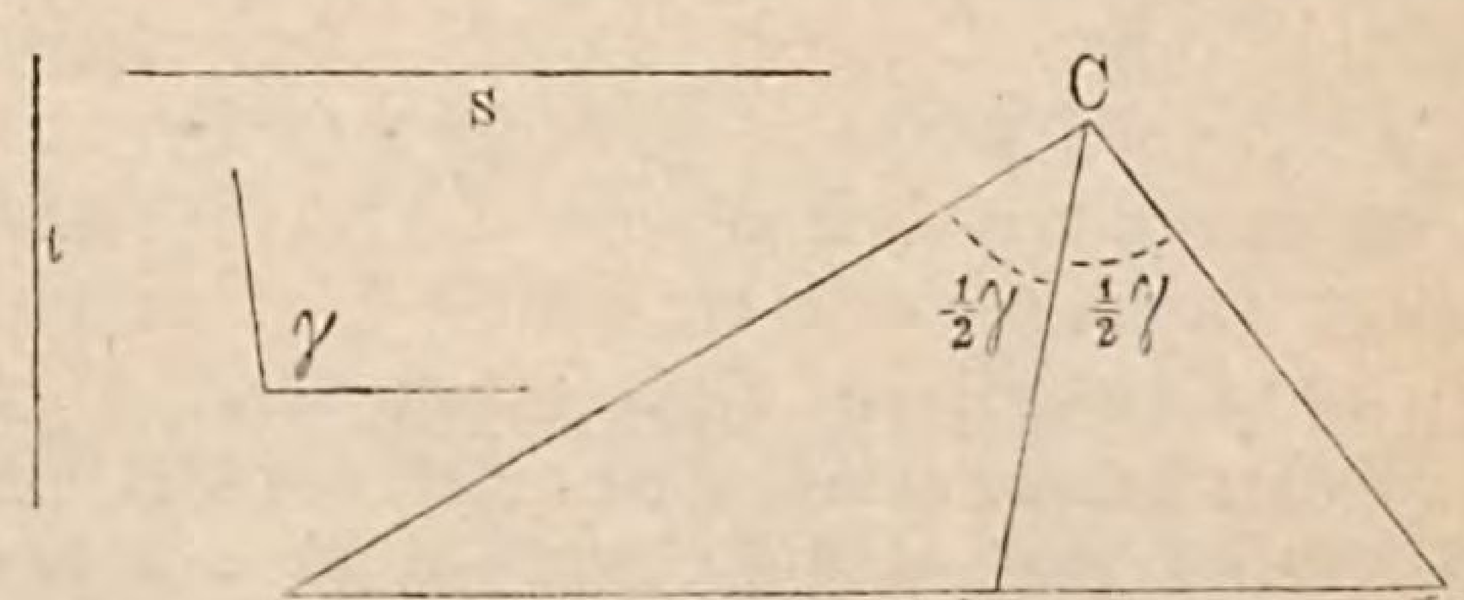


Fig. 5.

*) Denn der geometriſche Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche dieſelbe Grundlinie und eine beſtimmte Höhe haben, iſt die Parallele, die durch einen um die Höhe von der Grundlinie entfernten Punkt gelegt iſt.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC zeichnen; in demselben soll der Winkel an der Spitze gleich dem gegebenen Winkel γ sein; und die Gerade, welche den Winkel an der Spitze halbirt, soll die Grundlinie in die beiden Abschnitte s und t theilen.

Analysis. Nehmen wir an, das Dreieck ABC, welches wir in Fig. 5 sehen, entspreche der Forderung; in demselben sei der Winkel ACB ebenso groß wie der gegebene Winkel γ und die Gerade CH, welche den Winkel ACB halbirt, treffe die Grundlinie AB in dem Punkte H so, daß AH = s und BH = t ist. Durch Betrachtung der beiden Dreiecke ACH und BCH werden wir dann leicht Anhaltspunkte für die Construction des Dreiecks ACB finden.

In dem Dreieck ACH ist uns nämlich die Größe der Grundlinie AH und die Größe des Winkels ACH an der Spitze bekannt, denn es ist: AH = s und Winkel ACH = $\frac{1}{2}\gamma$.

Der **geometrische Ort für die Spitze** wird also der **Sehnen-Tangentenbogen** sein, welcher der Sehne AH und dem Sehnen-Tangentenwinkel $\frac{1}{2}\gamma$ entspricht.

In dem Dreieck BCH ist uns gleichfalls die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben, denn wir haben: BH = t und BCH = $\frac{1}{2}\gamma$.

Der geometrischer Ort für die Spitze C ist daher der **Sehnen-Tangentenbogen**, welcher auf BH als Sehne steht und zu dem Sehnen-Tangentenbogen $\frac{1}{2}\gamma$ gehört.

Construction. Wir legen uns eine Gerade AH = s hin und verlängern AH über H hinaus um HB = t. Dann tragen wir an AH im Punkte A den Winkel HAD = $\frac{1}{2}\gamma$ und an HB im Punkte B den Winkel $HBD_1 = \frac{1}{2}\gamma$ an, und errichten auf AD im Punkte A die Senkrechte AS und auf

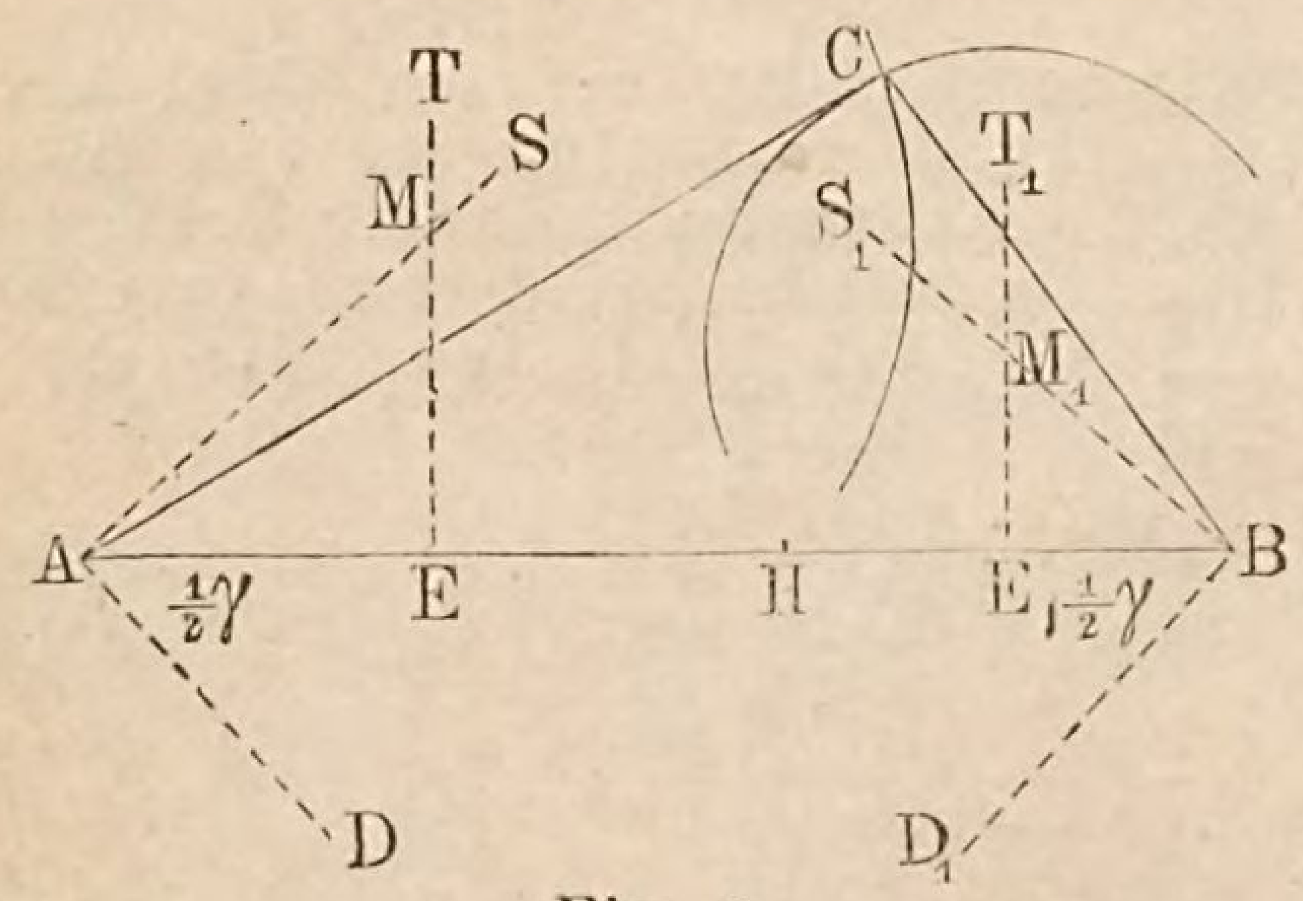


Fig. 6.

BD_1 in B die Senkrechte BS_1. Nachdem wir dies ausgeführt haben, halbiren wir AH und BH, und errichten auf AH im Mittelpunkte E die Senkrechte ET und auf BH im Mittelpunkte E_1 die Senkrechte E_1T_1. Die beiden Geraden AS und ET mögen sich in M, die beiden Geraden BS_1 und E_1T_1 in M_1 schneiden. Um M wollen wir dann mit MA und um M_1 mit M_1B einen Kreis beschreiben. Der obere Schnittpunkt der beiden Kreise möge C heißen.

*) In Fig. 6 sind nur die für die Construction nöthigen Linien gezeichnet; für den Beweis möge sich der Schüler die Figur selbst construiren.

Wenn wir dann die Geraden AC und BC ziehen, so entsteht das Dreieck ABC.

Behauptung. Das Dreieck ACB entspricht der Forderung, d. h. der Winkel ACB ist dem gegebenen Winkel γ gleich, und die Grundlinie AB wird durch die Halbirungslinie des Winkels ACB in die beiden Abschnitte s und t zerlegt.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Kreis um M. Bei demselben ist AH Sehne und AD Tangente; der Winkel HAD ist daher Sehnen-Tangentenwinkel.

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich den Peripheriwinkeln im Sehnen-Tangentenbogen; mithin haben wir:

$$\angle HAD = \angle ACH.$$

Nach der Construction ist Winkel HAD = $\frac{1}{2}\gamma$, folglich ist auch:

$$\text{I.}\ \angle ACH = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Wenden wir uns jetzt zu dem Kreise um M_1; bei demselben ist HBD_1 Sehnen-Tangentenwinkel und HCB Peripheriewinkel im zugehörigen Sehnen-Tangentenbogen; mithin besteht die Gleichung:

$$\angle HBD_1 = \angle HCB,$$

Nach der Construction ist Winkel HBD_1 gleich $\frac{1}{2}\gamma$, folglich auch:

$$\text{II.}\ \angle HCB = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Vorher hatten wir

$$\text{I.}\ \angle ACH = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Nach dem Grundsatze: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Geiches, ist mithin:

$$\angle ACH + \angle HCB = \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma = \gamma,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\angle ACB = \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma = \gamma, \text{ was behauptet war.}$$

Wir haben nun noch den zweiten Punkt der Behauptung zu beweisen. Wie wir bereits gezeigt haben, ist sowohl Winkel ACH wie Winkel BCH gleich der Hälfte von γ. Die Gerade CH halbirt also den Winkel ACB, der so groß ist wie γ, mit anderen Worten, die Gerade CH ist die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze. Nach der Construction zerlegt diese Halbirungslinie CH die Grundlinie AB in die beiden Abschnitte s und t; damit ist auch der zweite Punkt der Behauptung erledigt.

Aufgabe III. Wir sollen ein Dreieck ABC construiren, von dem wir die **Grundlinie** c, die **Höhe** h_c und den **Winkel** kennen, den die **Mittellinie** m_c mit der **Seite** b bildet.

Die Voraussetzung und Behauptung wollen wir übergehen und sogleich die

Analysis bringen. Untersuchen wir das Dreieck ABC (Fig. 7), von dem wir annehmen wollen, daß es der Forderung entspricht. Wie wir sehen, wird dieses Dreieck durch die Mittellinie m_c in die beiden kleinen Dreiecke ACM und BCM zerlegt. Von dem Dreieck ACM kennen wir drei Stücke; es ist nämlich die Grundlinie AM gleich der Hälfte der gegebenen Strecke c, die Höhe h_c ist uns gleichfalls

gegeben, und auch der Winkel an der Spitze, der von m_c und b eingeschlossen wird, ist uns bekannt. Gemäß Aufgabe I können wir daher das Dreieck ACM zeichnen. Wenn wir erst ACM haben, so können wir auch leicht ACB construiren; wir brauchen nur AM über M hinaus um die Hälfte der gegebenen Strecke c bis B zur verlängern und B mit C geradlinig zu verbinden.

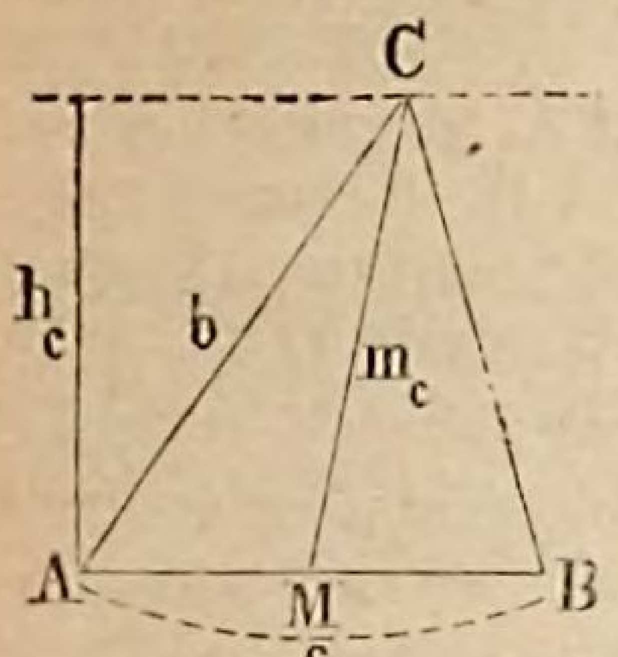


Fig. 7.

Aufgaben. Der Schüler möge ein Dreieck construiren, wenn er kennt

1) den Winkel γ an der Spitze und die beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie c von der Höhe h_c zerlegt wird,

2) die Grundlinie c, die Höhe h_c und den Winkel, welchen die Mittellinie m_c mit der Seite b bildet,

3) c, γ und m_c,

4) a, α und h_a.

D. Der eingeschriebene Kreis. Aufgaben über den eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreis.

§ 21. Die Lage des Mittelpunktes beim eingeschriebenen Kreise. Den Kreis, welcher durch die drei Ecken eines Dreiecks gelegt ist, haben wir den **umgeschriebenen Kreis** genannt. Diesem umgeschriebenen Kreise wollen wir jetzt den **eingeschriebenen Kreis** gegenüberstellen, welcher so in ein Dreieck hineingezeichnet ist, daß die Dreiecksseiten seine Tangenten sind. In Fig. 8 ist z. B. der Kreis um M in das Dreieck ABC eingeschrieben; die Seiten AB, BC und AC sind Kreistangenten und berühren den Kreis

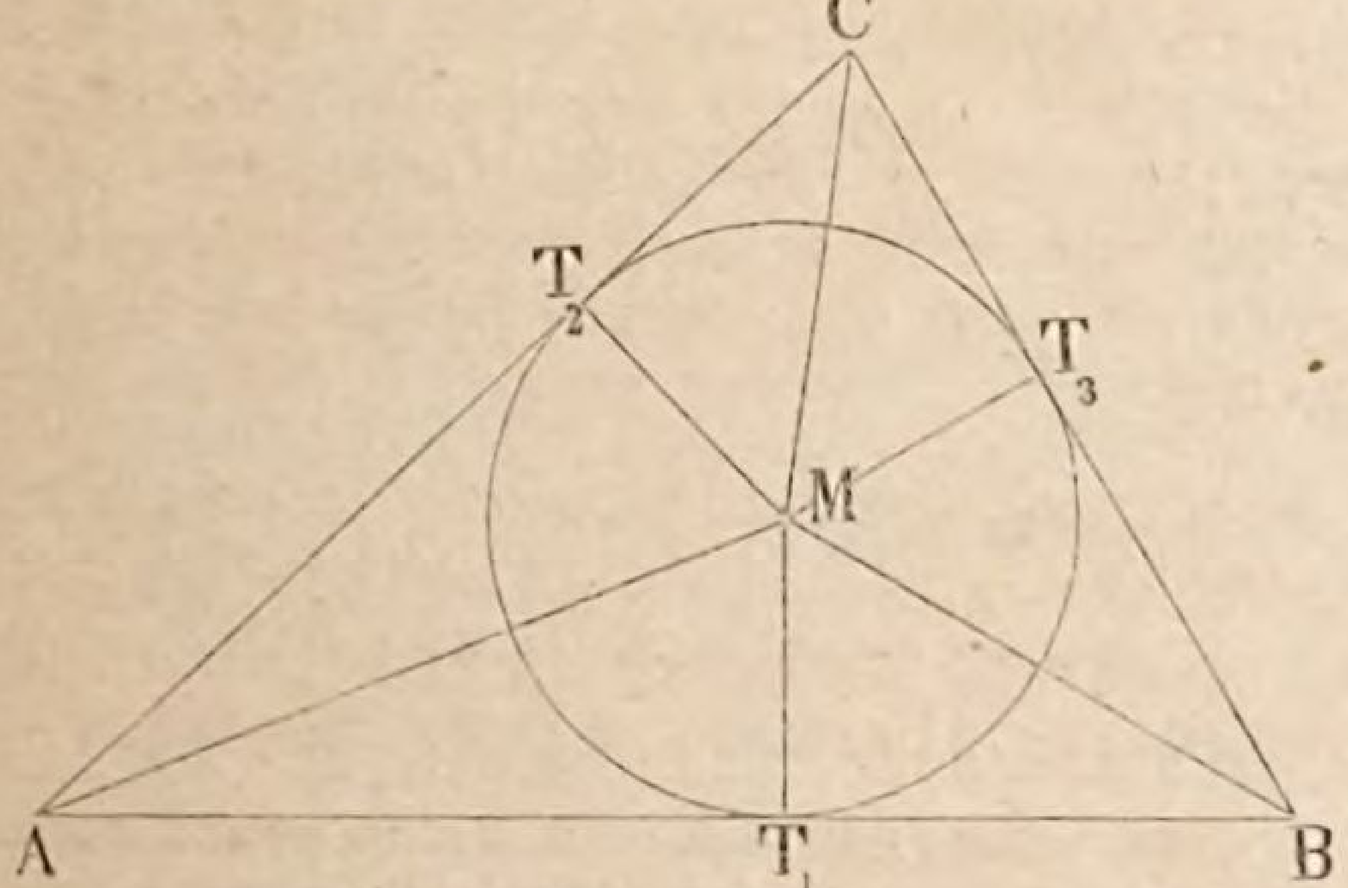


Fig. 8.

in den Punkten T_1, T_2 und T_3. Wenn wir in Fig. 8 die Geraden AM, BM und CM ziehen, und dann die Winkel MAB, MAC, MBA, MBC, MCB, MCA messen, so finden wir, daß

$$MAB = MAC$$
$$MBA = MBC$$
$$MCB = MCA$$

ist. Die Winkel bei A, B und C sind also durch die Geraden MA, MB und MC halbirt, oder anders ausgedrückt, die Geraden MA, MB und MC sind die Halbirungslinien der Winkel A, B und C. Das Centrum M des eingeschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt dieser Halbirungslinien; genauer gesagt:

> Das Centrum M des Kreises, welcher dem Dreieck ABC eingeschrieben ist, liegt in den Halbirungslinien der Dreieckwinkel A, B und C.

Wenn wir diese Beobachtung verallgemeinern, erhalten wir den

Lehrsatz II. Bei einem **Dreieck** liegt das **Centrum des eingeschriebenen Kreises** in den **Halbirungslinien** der Dreieckswinkel.

Wir wollen diesen Satz streng mathematisch an Fig. 8 beweisen.

Voraussetzung. Der Kreis um M ist dem Dreieck ABC eingeschrieben, d. h. die Dreiecksseiten AB, BC und CA sind Tangenten des Kreises um M.

Behauptung. Die Gerade MA halbirt den Winkel bei A, die Gerade MB den Winkel bei B und die Gerade bei MC den Winkel bei C, d. h. es ist:

a) $\angle MAB = \angle MAC$,
b) $\angle MBA = \angle MBC$,
c) $\angle MCB = \angle MCA$.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir das Centrum M des eingeschriebenen Kreises mit den Berührungspunkten T_1, T_2, T_3 der Dreiecksseiten verbinden, und von den entstehenden Dreiecken zunächst MT_1A und MT_2A betrachten. Die beiden Dreiecke sind rechtwinklig*) und zwar ist in denselben

$AM = AM$**)
$MT_1 = MT_2$***) als Radien.

Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und in einer der Katheten übereinstimmen, sind sie gemäß Seite 118 congruent. folglich haben wir:

$$\text{I. } \triangle MT_1A \cong \triangle MT_2A.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber. Die Seiten

---

*) Weil die Tangenten mit dem Radius, der nach ihrem Berührungspunkte gezogen ist, einen rechten Winkel bilden. **) AM ist gemeinschaftliche Hypotenuse der beiden rechtwinkligen Dreiecke MT_1A und MT_2A. ***) MT_1 ist die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks MT_1A und MT_2 ist Kathete des rechtwinkligen Dreiecks MT_2A.

MT_1 und MT_2 sind als Radien ein und desselben Kreises gleich, folglich ist:

a) $\angle MAB = \angle MAC$, was behauptet war.

Aehnlich kann bewiesen werden, daß

II. $\triangle MT_1B \cong \triangle MT_3B$,
III. $\triangle MT_3C \cong \triangle MT_2C$ ist,

und aus diesen Congruenzen folgt;

b) $\angle MBA = \angle MBC$,
c) $\angle MCB = \angle MCA$, was beh. war.

§ 22. Die Construction des eingeschriebenen Kreises. Mit Hülfe des vorigen Satzes können wir eine Lösung geben von der

Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck soll ein **Kreis** so **eingeschrieben** werden, daß die **Dreiecksseiten Tangenten** des Kreises sind.

Wir wollen die Voraussetzung und die Behauptung übergehen und sogleich die

Analysis geben. Um das Centrum des eingeschriebenen Kreises zu finden, werden wir uns erinnern, daß dasselbe in den Halbirungslinien der Dreieckswinkel liegen muß; die Halbirungslinien der Dreieckswinkel sind also die geometrischen Orte für das Centrum des eingeschriebenen Kreises. Wenn wir also zwei Dreieckswinkel gemäß S. 371 halbiren und die Halbirungslinien ziehen, muß sich das Kreiscentrum als Durchschnittspunkt ergeben. Sind wir auf diese Weise zu dem gesuchten Centrum gelangt, so brauchen wir zur Construction des Kreises nur noch den Radius zu kennen. Denselben werden wir finden, wenn wir in Erwägung ziehen, daß die Dreiecksseiten Tangenten werden und daher auf dem zugehörigen Radius auf seinem Endpunkte senkrecht stehen, von dem ermittelten Kreiscentrum auf irgend eine der Seiten eine Senkrechte fällen. Der Kreis, welchen wir mit der Länge dieser Senkrechten um das Kreiscentrum beschreiben, ist dann der gesuchte.

Bemerkung. Wir haben in § 8 den umgeschriebenen und in unserm Paragraphen den eingeschriebenen Kreis construirt, der zu einem Dreieck gehört. Um zum Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises zu gelangen, halbirten wir zwei der Dreiecksseiten; und um den Radieus des eingeschriebenen Kreises zu finden, wurden von uns zwei Dreieckswinkel halbirt. Weil für „trigonometrische Berechnungen" die Radien des umgeschriebenen und eingeschriebenen Kreises von großer Wichtigkeit sind, hat man ihnen eine besondere Bezeichnung gegeben. Es wird nämlich der **Radius des umgeschriebenen Kreises** (indem man an das Wort radius denkt) mit r, der der **Radius des eingeschriebenen Kreises** mit ϱ*) benannt. Wir werden uns auch bei den folgenden Constructionsaufgaben dieser Bezeichnungsweise bedienen.

§ 23. Der Radius des umgeschriebenen Kreises. Wir wollen jetzt eine Dreieckconstruction ausführen, bei welcher der Radius des umgeschriebenen Kreises zu den gegebenen Bestimmungsstücken gehört, nämlich die Lösung geben von der

Aufgabe. Es soll ein **Dreieck** construirt werden, von welchem wir die **Lage** und **Größe** der **Grundlinie**, die zugehörige **Höhe** und den **Radius des umgeschriebenen Kreises** kennen.

Voraussetzung. Uns sind in Figur 9 drei Strecken AB, h_c und r gegeben; von AB kennen wir auch die Lage.

Forderung. Es soll ein Dreieck construirt werden, bei welchem AB die Grundlinie, h_c die zugehörige Höhe und r der Radius des umgeschriebenen Kreises ist.

Analysis. Wir wollen annehmen, das Dreieck ABC entspreche der Forderung, und wollen zusehen, wie wir mit Hilfe der gegebenen Bestimmungsstücke die Lage des Kreiscentrums M feststellen können. Wie wir sehen, ist die Grundlinie AB Sehne des umgeschriebenen Kreises; gemäß § 6 muß daher der Kreismittelpunkt in der Geraden ST liegen, welche im Mittelpunkt auf AB senkrecht steht. Diese Senkrechte ist der eine geometrische Ort für das Kreiscentrum M; den zweiten Ort finden wir, wenn wir erwägen, daß M von jedem Punkte der Kreislinie, also auch von A bez. B um den gegebenen Radius r entfernt sein müsse. M muß also auch in dem Kreise liegen, den wir um A mit r beschreiben; dieser Kreis ist der zweite geometrische Ort. Haben wir M als Durchschnittspunkt der beiden Orte bestimmt, so werden wir leicht die Dreiecksspitze C ermitteln; sie muß erstens ein Punkt des Kreises sein, der um M mit r beschrieben ist, sie muß zweitens in der Parallelen liegen, die im Abstande der gegebenen Höhe h_c zu AB gelegt ist. Schneidet sich Kreis und Parallele in zwei Punkten, so sind zwei Dreiecke möglich, welche der Forderung genügen. (In Fig. 9 haben wir die beiden Dreiecke ABC und ABC'.)

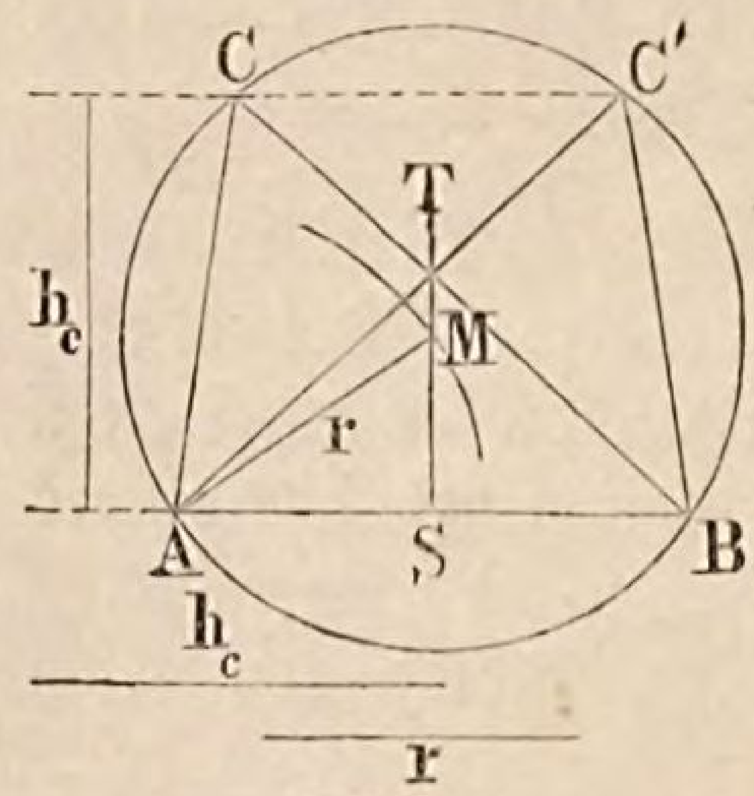


Fig. 9.

Bemerkung. Wenn AB nur der Größe und nicht auch der Lage nach gegeben wäre, so könnten wir die Construction bequemer anders ausführen. Wir werden zuerst einen Kreis mit dem gegebenen Radius r beschreiben und haben dann in diesen Kreis ein Dreieck mit der Grundlinie AB und der Höhe h_c hineinzuzeich-

*) ϱ ist ein griechischer Buchstabe, wird gesprochen wie das deutsche r und Rho genannt.

nen. Diese Aufgabe läßt sich leicht lösen; wir brauchen nur AB als Sehne in den Kreis hineinzutragen, darauf zu AB im Abstande h_c eine Parallele zu legen und die Schnittpunkte C und C' der Parallelen mit A und B geradlinig zu verbinden,

Bemerkung. Man kann eine Sehne von gegebener Länge in einen Kreis hineintragen, indem man um irgend einen Punkt dieses Kreises mit der gegebenen Sehne einen Kreis schlägt.

Aufgabe II. Es soll ein Dreieck construirt werden, von welchem uns die **Grundlinie, einer der anliegenden Winkel** und **der Radius des eingeschrieben Kreises** bekannt ist.

Voraussetzung. Uns sind in Fig. 10 zwei Strecken c und ϱ und ein Winkel α gegeben.

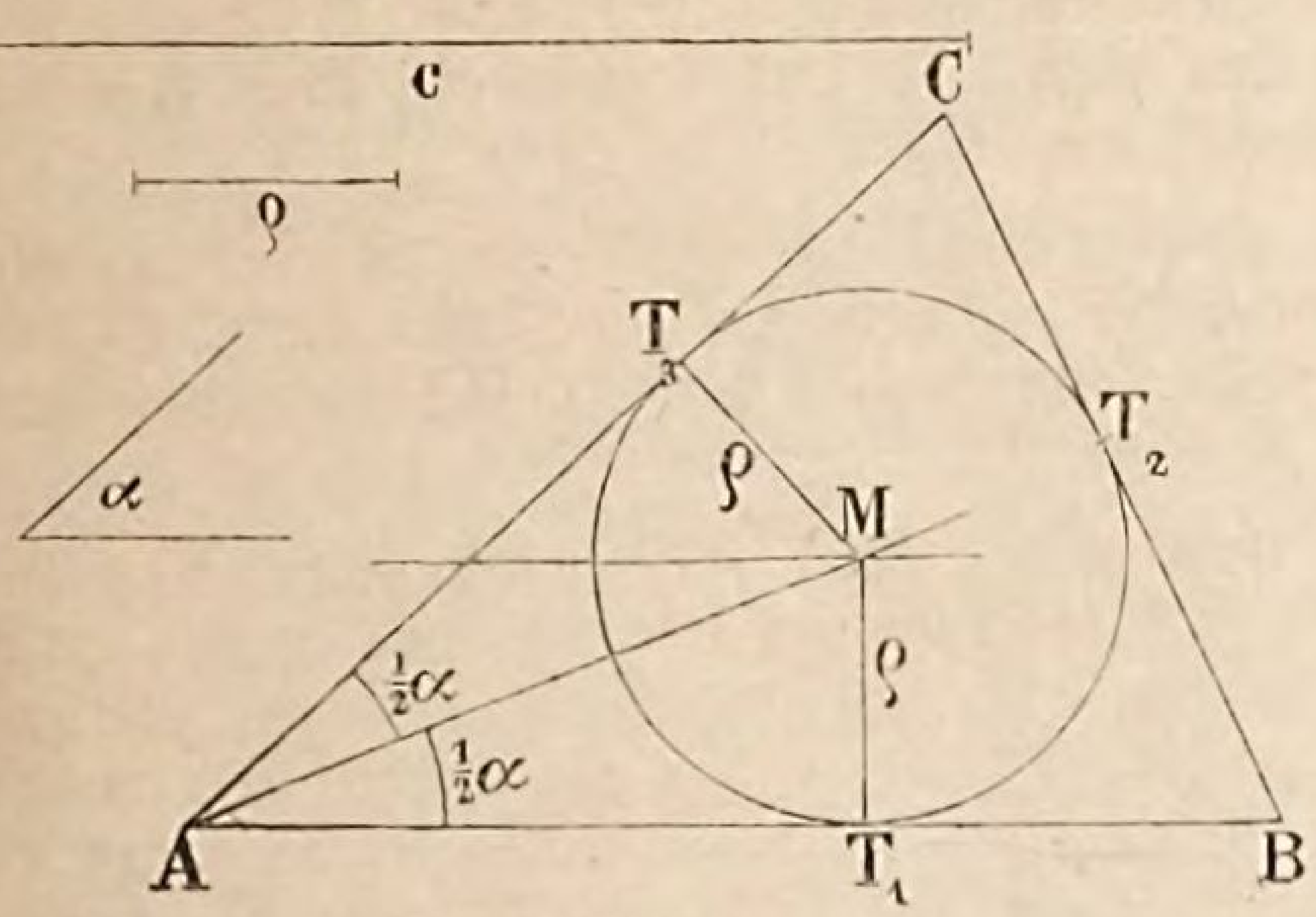


Fig. 10.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC zeichnen, in dem c die Grundlinie, ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises und α ein Winkel an der Grundlinie wird.

Die **Construction** möge der Schüler selbst ausführen, wir wollen in der

Analysis nur zwei Wege andeuten, auf denen er zur Construction gelangen kann. In Fig. 10 sei ABC ein Dreieck, welches der Forderung genügt. In demselben ist also:

$AB = c$, $\angle BAC = \alpha$ und $MT_1 = MT_2 = MT_3 = \varrho$.

Um die Construction auszuführen, können wir

1) von der bekannten Grundlinie AB und dem bekannten Winkel α ausgehen und den Mittelpunkt M des eingeschriebenen Kreises suchen. Dieser Mittelpunkt ist als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Orte darzustellen, und zwar ist der eine Ort die Halbirungslinie des Winkels α und der andere die Parallele, die im Abstande ϱ zu AB gelegt wird. Haben wir M, so bietet die Construction weitere Schwierigkeiten nicht.

Wir können aber auch

2) den eingeschriebenen Kreis als Ausgangspunkt benutzen, indem wir um einen beliebigen Punkt einen Radius mit der gegebenen Strecke ϱ beschreiben. Den weitern Weg zur Construction finden wir, wenn wir bedenken, daß uns auch Winkel T_1MT_3 bekannt ist, weil er mit α zusammen zwei Rechte ausmacht (weshalb?). Erwägen wir dies, so haben wir nur in dem Kreis mit ϱ einen beliebigen Radius MT_1 zu zeichnen und einen andern MT_3, der mit MT_1 den Winkel T_1MT_3 bildet. Darauf haben wir in T_1 und T_3 Tangenten zu errichten u. s. f.

Bei der Leiter der Mathematik darf keine Sprosse übersprungen werden.

Lection 43.

A. Die Durchschnitte der geometrischen Oerter

§ 24. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden. Die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Geraden. Die geometrischen Oerter haben uns bei der Lösung der Constructionsaufgaben, die bisher von uns behandelt wurden, die trefflichsten Dienste geleistet. Konnten wir einen gesuchten Punkt als Durchschnittspunkt zweier Oerter bestimmen, so war gewöhnlich die Lösung so weit vorbereitet, daß sie weitere Schwierigkeiten nicht mehr bot. Wenn demgemäß der Schüler mit uns von dem großen Nutzen der geometrischen Oerter sicherlich überzeugt ist, so wird ihm bei der Verwendung derselben doch Einiges aufgefallen sein, über das er Aufklärung wünscht.

Wenn wir, um die Lage eines gesuchten Punktes festzustellen, zwei geometrische Oerter sich schneiden ließen, ist es uns häufig begegnet, daß wir nicht einen, sondern zwei Durchschnittspunkte erhielten. Ja, wir haben bei einzelnen Beispielen erfahren, daß sich die geometrischen Oerter gar nicht schnitten. Wenn wir zwei Durchschnittspunkte fanden, so ergaben sich auch immer zwei Lösungen, d. h. zwei Figuren, welche der Forderung genügten. War kein Durchschnittspunkt vorhanden, so konnte die Construction überhaupt nicht ausgeführt werden.

Der Schüler wird nun wünschen, daß wir auf die Fälle näher eingehen, in denen sich **geometrische Oerter**

a) in **einem** Punkte,
b) in **zwei** Punkten,

c) in **keinem** Punkte

schneiden, und damit zugleich angeben, in welchen Fällen wir

a) zu **einer** Figur,
b) zu **zwei** Figuren,
c) zu **keiner** Figur

gelangen, die **den Anforderungen der Constructionsaufgabe entspricht.**

Wir wollen diese Frage sogleich näher erörtern. Zwar sind die geometrischen Oerter Linien von der allerverschiedensten Gestalt; aber in der elementaren Planimetrie, die sich nur mit geraden Linien und Kreisen beschäftigt, haben wir auch nur geometrische Oerter kennen gelernt, die einer dieser beiden Liniengattungen angehören. Wenn wir uns also mit den Durchschnittspunkten der geometrischen Oerter beschäftigen wollen, so müssen wir untersuchen, wie sich

1) zwei gerade Linien,
2) eine gerade Linie und ein Kreis,
3) zwei Kreise

schneiden.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Die beiden geometrischen Oerter, deren Durchschnittspunkt wir untersuchen wollen, mögen **gerade Linien** sein. Wenn wir uns zwei gerade Linien neben einander hinzeichnen, so sehen wir, daß sie

entweder **parallel** sind, d. h. sich **niemals treffen,** so weit man sie auch verlängern mag, (siehe Fig. 1),

oder daß sie bez. ihre Verlängerungen sich in **einem** Punkte schneiden (siehe Fig. 2).

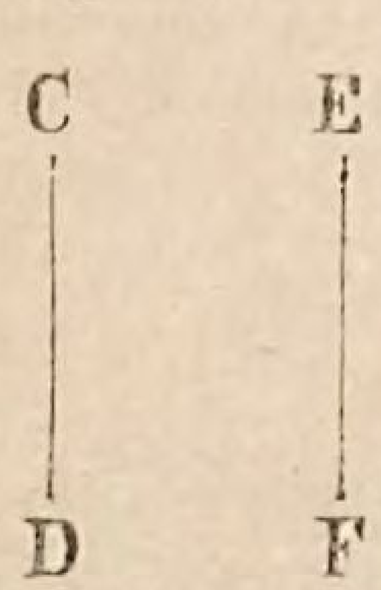


Fig. 1.

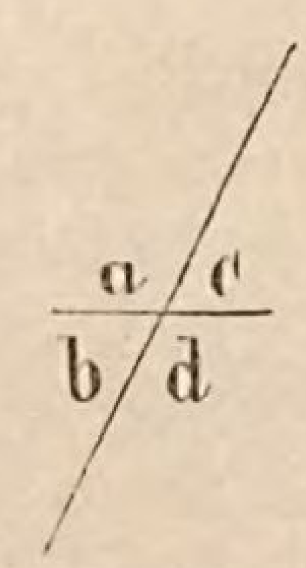


Fig. 2.

Zwei geometrische Oerter, die von **geraden Linien** dargestellt werden, haben also entweder **einen** oder **keinen Durchschnittspunkt;** und für Aufgaben, die auf solchen geometrischen Oertern beruhen, giebt es entweder **eine** oder **keine Figur,** die den Anforderungen der Constructionsaufgaben genügt.

Anders steht es dagegen, wenn von den geometrischen Oertern, die zur Bestimmung eines Punktes dienen, der eine **ein Kreis,** der andere **eine gerade Linie** ist.

Eine **gerade Linie** kann

1) den **Kreis schneiden** (Fig 3),
2) den **Kreis berühren** (Fig. 4),
3) ganz **außerhalb des Kreises liegen** (Fig. 5).

Im ersten Falle haben Kreis und gerade Linie **zwei Punke,**
im zweiten Falle **einen Punkt,**
im dritten Falle **keinen Punkt**
mit einander gemein.

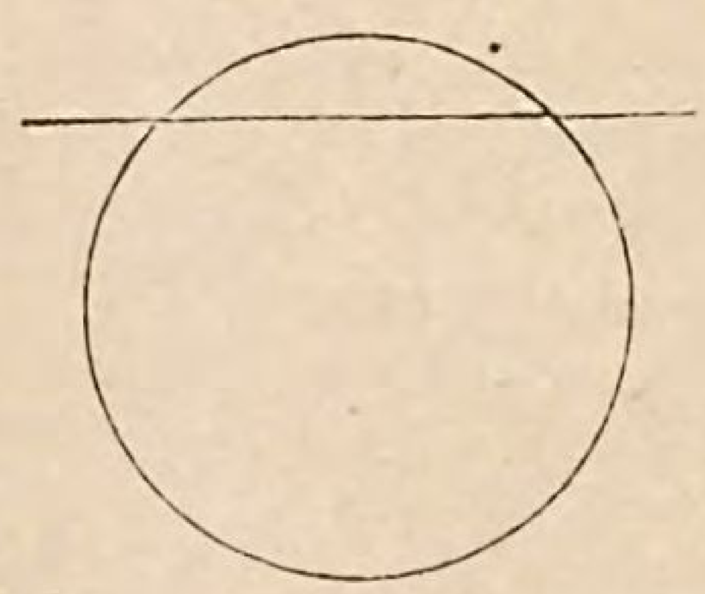
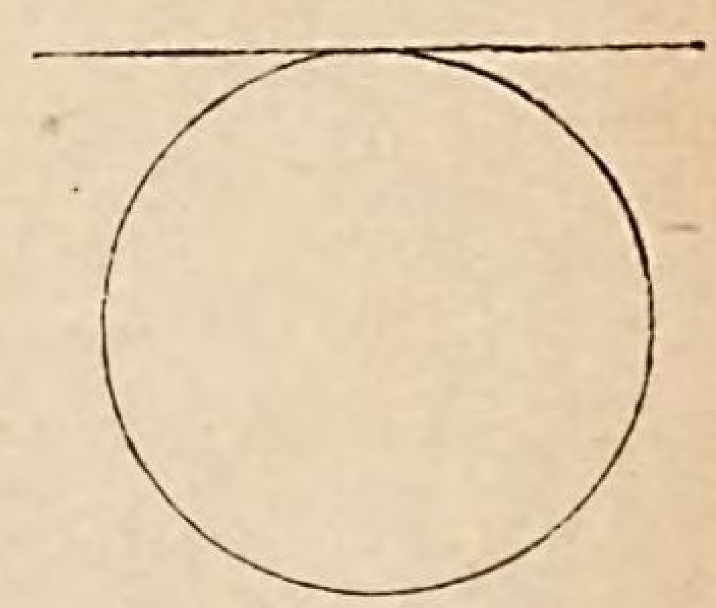
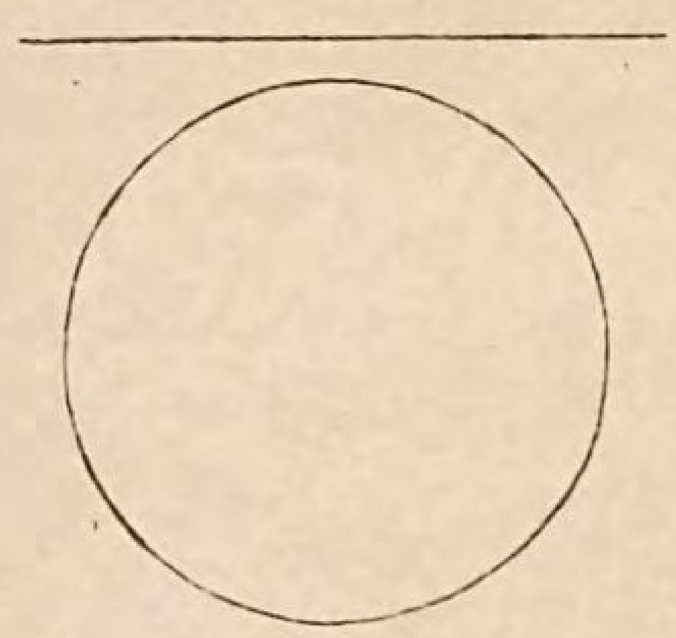
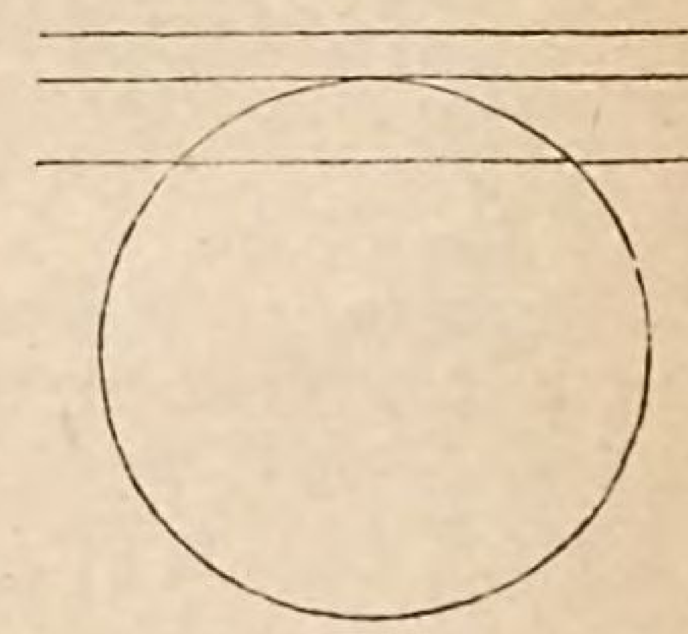
Fig. 3.


Fig. 4.



Fig. 5


Fig. 6

Wenn also bei einer Constructionsaufgabe ein Kreis und eine gerade Linie die geometrischen Oerter für den gesuchten Punkt darstellen, so werden sich

zwei Lösungen ergeben, falls die gerade Linie den Kreis durchschneidet; es wird

eine Lösung möglich sein, falls die Gerade den Kreis berührt; es wird sich

keine den Anforderungen der Aufgabe entsprechende Linie construiren lassen, falls die gerade Linie ganz außerhalb des Kreises fällt.

§ 25. Die Durchschnittspunkte zweier Kreise. Untersuchen wir jetzt den Fall, daß die beiden geometrischen Oerter, die wir zur Bestimmung eines Punktes verwenden wollen, **Kreise** sind, und betrachten wir die Lage, welche zwei Kreise zu einander haben können. — Wie die einfache Anschauung, lehrt, können sie

1) ganz **außerhalb einander** liegen; in diesem Falle giebt es **keinen Punkt**, den sie mit einander **gemein** haben! Es kann

2) vorkommen, daß **ein Kreis** ganz **innerhalb eines andern** liegt; auch in diesem Falle existirt **kein Punkt**, der beiden Kreisen **gemeinsam** ist (siehe Fig. 7),

3) können zwei Kreise **einen Punkt** mit einander **gemein** haben, man sagt dann von ihnen: sie **berühren sich** von **innen** oder von **außen** (siehe Fig. 8 und 9), und

4) können zwei Kreise sich **schneiden**, sie treffen sich dann in **zwei Punkten**.

Fig. 7.

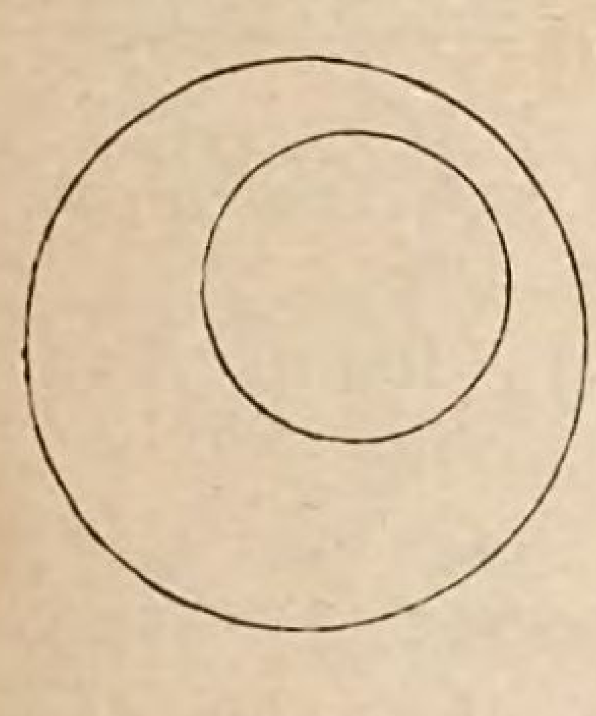
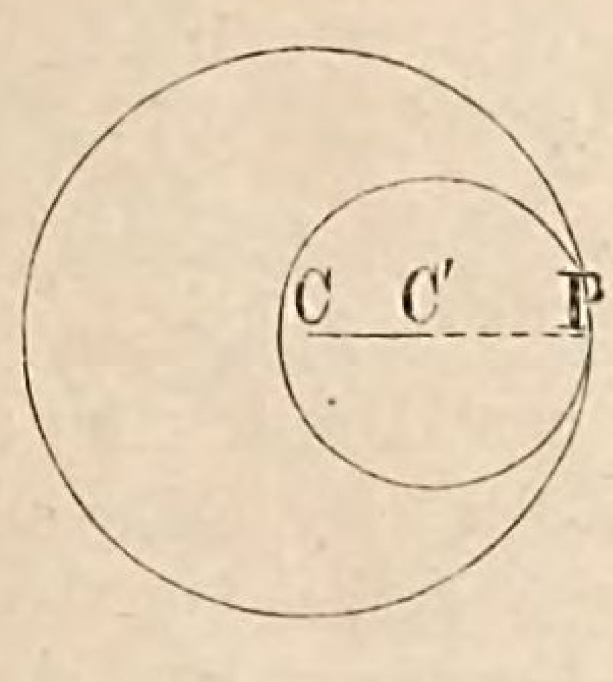


Fig. 8.



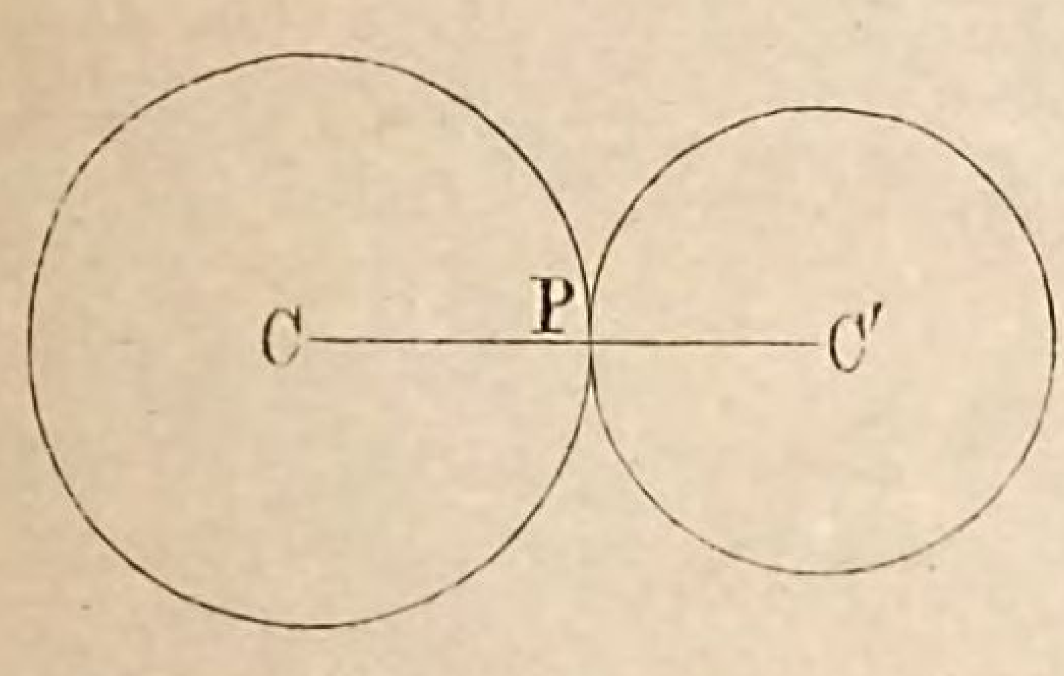


Fig. 9.

Sind bei einer Constructionsaufgabe die beiden geometrischen Oerter, welche wir **zur Bestimmung** des gesuchten Punktes brauchen, **Kreise**, so werden sie

bei den beiden ersten der vier genannten Lagen keinen Durchschnittspunkt haben; die Construction ist in diesem Falle unmöglich.

Bei der dritten Lage ist ein gemeinsamer **Punkt** vorhanden; es wird sich mithin eine Figur ergeben, die der Forderung genügt.

Bei der vierten Lage haben wir zwei **Durchschnittspunkte**; wir werden demgemäß **auch** zwei Lösungen für die Constructionsaufgabe finden.

§ 26. Die Centrale. Die Linie, welche die **Mittelpunkte** (Centra) **zweier Kreise** mit einander verbindet, pflegt man die **Centrale** zu nennen.

MM′ (siehe Fig. 10) ist z. B. die Centrale der beiden Kreise, welche sich in den beiden Punkten S und S′ schneiden. Die Fig. 10 giebt uns zugleich Anlaß, einen Satz über die Centralen aufzustellen. Wenn wir nämlich die Gerade SS′ ziehen und die Winkel messen, welche SS′ mit der Centrale MM′ bildet, so finden wir, daß alle vier Winkel einen Rechten betragen, oder mit andern Worten, daß SS′ auf der Centrale MM′ senkrecht steht. Verallgemeinern wir die Bemerkung, die wir an Fig. 10 gemacht haben, so erhalten wir den

Lehrsatz I. Bei zwei **Kreisen**, die sich **schneiden**, steht die **Gerade**, **welche die beiden Schnittpunkte** mit einander **verbindet**, **auf der Centrale senkrecht**.

Wir wollen diesen Satz streng mathematisch an Fig. 10 beweisen.

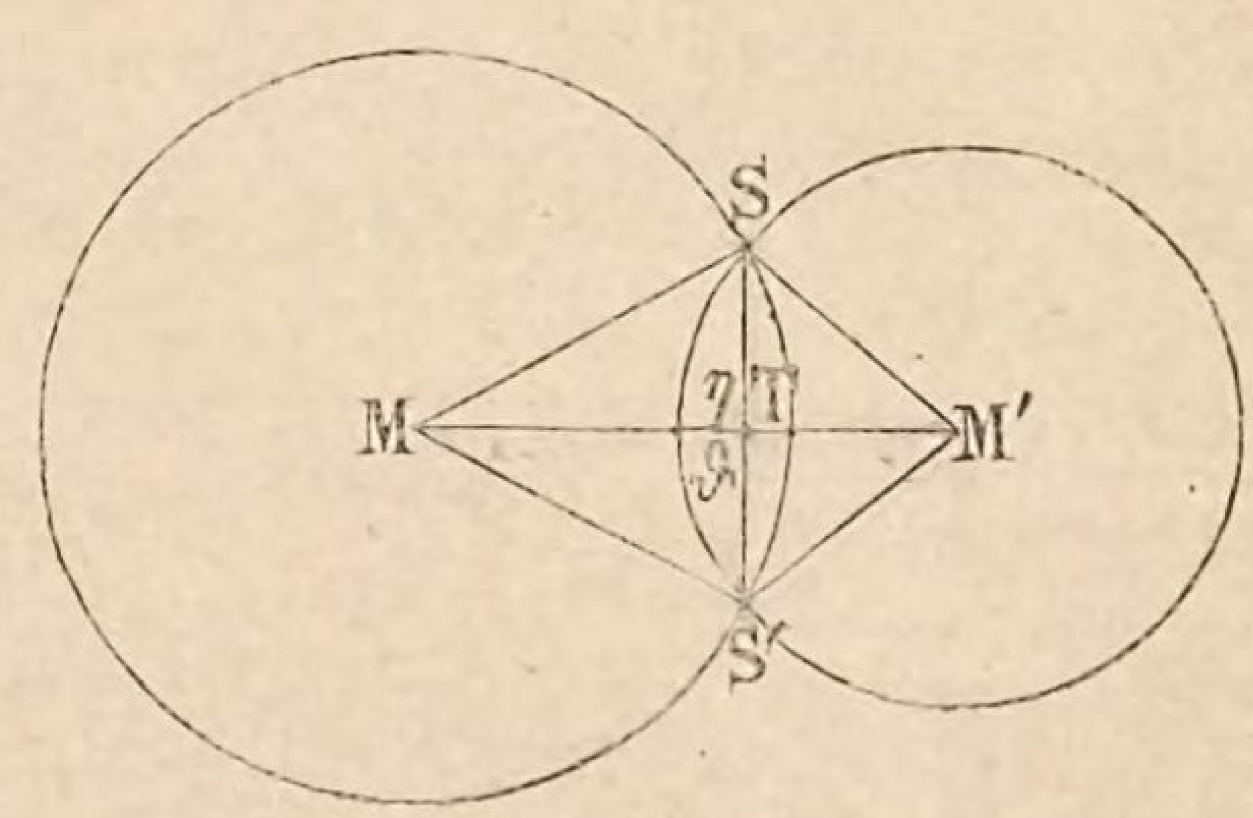


Fig. 10.

Voraussetzung. Uns sind die beiden Kreise um M und M′ gegeben, die sich in den Punkten S und S′ schneiden.

Behauptung. Es ist SS′ ⊥ MM′.

Beweis*). Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir die Geraden MS, MS′, M′S und M′S′ ziehen, welche in Fig. 10 punktirt geschnitten sind. In den beiden Dreiecken MSM′ und MS′M′, welche dadurch entstehen, ist dann

$$MS = MS'^{**)},$$
$$M'S = M'S'^{**)}$$
$$\text{und } MM' = MM'.$$

d. h. die beiden Dreiecke MSM′ und MS′M′ stimmen in ihren drei Seiten überein; sie sind daher nach dem zweiten Congruenzsatze congruent, in Zeichen, es ist:

$$\triangle MSM' \cong \triangle MS'M'.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; M′S ist gleich M′S′, daher auch

$$\alpha = \alpha'.$$

*) Wir könnten Lehrsatz I zwar einfacher beweisen; wir ziehen es aber vor, den folgenden umständlicheren Beweis zu geben, um den Schüler wieder in der Anwendung der Congruenzsätze zu üben. **) Als Radien desselben Kreises.

Die Gleichung zwischen den beiden Winkeln α und α' werden wir benutzen, um die Congruenz der beiden Dreiecke MST und MS'T zu beweisen. In diesen beiden Dreiecken ist:

$$MT = MT$$
$$MS = MS';$$

kommt dazu $\alpha = \alpha'$,

so stimmen die beiden Dreiecke also in zwei Seiten und in dem Winkel überein, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird. Nach dem ersten Congruenzsatze haben wir daher:

$$\triangle\, MST \cong \triangle\, MS'T.$$

Da in congruenten Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, haben wir auch

$$\eta = \vartheta.$$

η und ϑ sind Nebenwinkel; die Summe zweier Nebenwinkel beträgt zwei Rechte; sind beide Nebenwinkel gleich, so wird daher jeder gleich einem Rechten sein, mithin ist:

$$\eta = R \text{ und } \vartheta = R.$$

Die beiden Geraden SS' und MM' schneiden sich demnach unter rechten Winkeln, oder anders ausgedrückt, es ist:

$$SS' \perp MM.$$

Aufgaben I. Der Schüler möge einen Beweis liefern von dem

Lehrsatz II. Wenn sich zwei **Kreise** schneiden, sind die **Durchschnittspunkte** von der **Centrale** gleich weit entfernt.

Er möge dann Lehrsatz I und Lehrsatz II zusammenfassen und den so entstehenden Lehrsatz beweisen, indem er auf den Seite 352 bewiesenen Satz zurückgeht:

Jede Gerade, welche bei einem Kreise das Centrum mit dem Mittelpunkte der Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

Wir gehen jetzt zu einer Eigenschaft über, welche die **Centrale** bei **Kreisen** hat, **die sich** von **außen** oder **innen berühren.** Um diese Eigenschaft aufzusuchen, werden wir uns des Lehrs. II bedienen, dessen Beweis wir in den Aufgaben des vorigen Paragraphen dem Schüler überlassen haben. Denken wir uns, der Kreis um M' (Fig. 10 S. 375) würde so bewegt, daß sich die beiden Mittelpunkte M und M' immer weiter von einander entfernen, dann werden die beiden Schnittpunkte S und S' näher aneinander rücken; sie müssen dabei aber immer nach dem Lehrsatz II unseres Paragraphen von der Centrale MM' gleich weit entfernt bleiben, d. h. die Senkrechten, welche wir von den beiden Schnittpunkten S und S' auf die Centrale MM' fällen können, müssen gleich groß sein. Bewegen wir den Kreis um M' noch weiter fort, so wird in einem bestimmten Zeitpunkt der Bewegung der Punkt S mit dem Punkte S' zusammenfallen; die beiden Kreise werden sich **von außen berühren.** Auch in diesem Falle haben die zusammenfallenden Punkte eine **gleiche Entfernung,** nämlich gar keine Entfernung von der Centrale; die zusammenfallenden Punkte (der Berührungspunkt) **liegen in der Centrale selbst.**

Also:

wenn **zwei Kreise** sich von **außen berühren,** liegt der **Berührungspunkt** in der **Centrale** der beiden Kreise.

So liegt z. B. in Fig. 9 der Berührungspunkt P in der Centrale CC'.

Einen ähnlichen Satz können wir leicht für zwei Kreise erhalten, welche sich von innen berühren. Stellen wir uns vor, der Kreis um M' (siehe Fig. 10) werde so bewegt, daß das Centrum M' immer mehr an das Centrum M heranrücke, so werden die beiden Schnittpunkte S und S' erst weiter auseinander gehen; und dann werden sie sich wieder einander nähern, bis sie, wie Fig. 11 zeigt, ganz zusammenfallen. Wie aber auch die Lage der beiden Punkte S und S' sein möge, immer muß nach Lehrs. II der Punkt S, welcher über der Centrale MM' liegt, ebenso weit von MM' bez. der Verlängerung von MM' entfernt sein, wie der Punkt S', der unter MM' liegt. Wenn S und S' zusammenfallen, so muß die Entfernung gleich 0 werden, d. h. die zusammenfallenden Punkte, oder anders ausgedrückt, der **Berührungspunkt** muß auf der **Verlängerung der Centrale** liegen. Also:

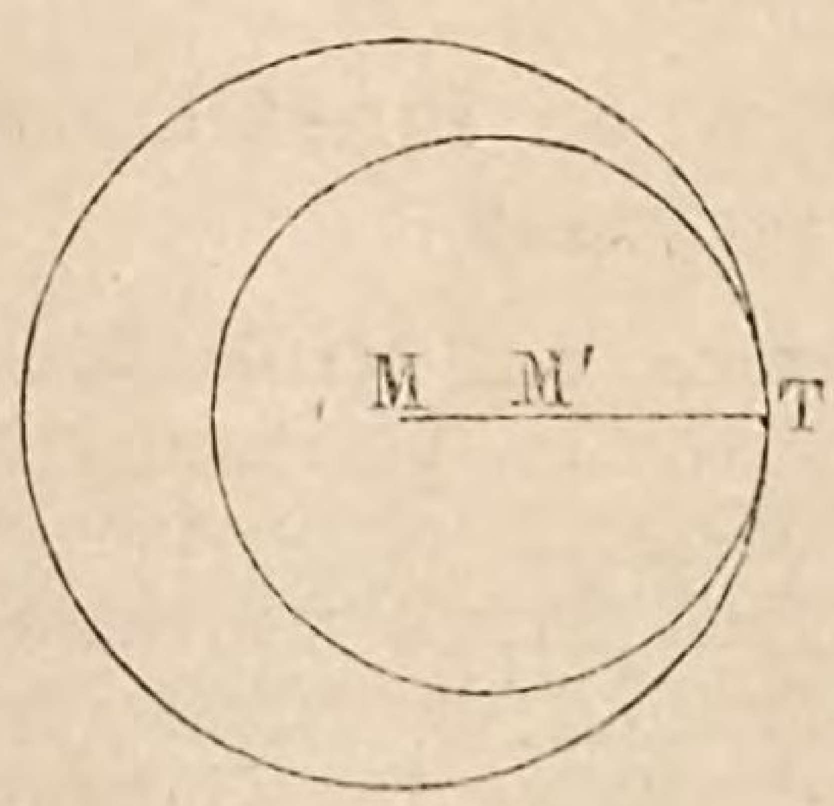


Fig. 11.

wenn **zwei Kreise** sich **von innen berühren,** liegt der **Berührungspunkt** in der **Verlängerung der Centrale.**

Aufgaben II. Ehe wir die Lehre vom Kreis verlassen, wollen wir mehrere Aufgaben stellen, an denen der Schüler seinen Scharfsinn üben möge; der nächste Brief wird die Lösungen bringen.

1) Es soll ein Kreis beschrieben werden, der
   a) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen gegebenen Punkt geht,
   b) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen außerhalb des Kreises gegebenen Punkt hindurchgeht.

2) Es soll der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise angegeben werden, die zwei sich schneidende gerade Linien berühren.

3) Es soll der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise bestimmt werden, die einen gegebenen Radius haben und
   a) einen gegebenen Kreis von außen berühren, und
   b) einen gegebenen Kreis von innen berühren.

Mit diesem Abschnitt wollen wir die Lehre vom Kreise beenden und im nächsten Capitel

die Lehre vom Flächeninhalt geradliniger Figuren

beginnen.

B. Die Flächengleichheit bei Dreiecken und Parallelogrammen.

§ 27. Die Congruenz und die Flächengleichheit. Wenn wir bisher planimetrische Figuren untersuchten, so haben wir sie immer in Bezug auf ihre äußere Gestalt mit einander verglichen; wir sahen zu, ob ihre Seiten und Winkel gleich seien; aber um den **Flächenraum, der von den Seiten eingeschlossen wird,** haben wir uns nicht gekümmert; und doch wird uns die Größe dieses Flächenraumes ganz besonders interessiren. Haben wir doch besondere Beamte, welche den Flächenraum der Straßen, der Güter, der Städte vermessen, bestimmen doch die Geographen selbst den Flächenraum ganzer Länder und der Erdoberfläche. Alles Messen der Flächen kommt nun darauf hinaus, diese Flächenräume mit gewissen Flächeneinheiten, jetzt gewöhnlich dem Quadratmeter, zu vergleichen; wenn wir messen, müssen wir also zusehen, ob Flächen gleich oder ungleich sind. Daher wird die **Lehre von der Flächengleichheit und -Ungleichheit,** die wir jetzt beginnen werden, die Grundlage der Meßkunde bilden.

Schon wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, den der Schüler durch unsere bisherigen Briefe erreicht hat, können wir ohne große Vorbereitung einiges über die Flächengleichheit ausmachen. Wie wir wissen, können congruente Figuren immer so über einander gelegt werden, daß sie in allen ihren Punkten zusammenfallen. Solche Figuren werden auch zwischen den Linien, von denen sie begrenzt werden, einen gleichen Flächenraum einschließen.

Congruente Figuren müssen also **gleichen Flächeninhalt** haben.

So z. B. sind zwei Dreiecke congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; solche Dreiecke müssen also auch flächengleich sein.

Ebenso sind Kreise congruent, deren Radien gleich sind, denn wenn wir die Mittelpunkte solcher Kreise auf einander legen, so fallen auch ihre Peripherien (Kreislinien) über einander. Also auch Kreise mit gleichen Radien sind flächengleich.

Indessen, wenn auch alle congruenten Figuren flächengleich sind, so brauchen doch nicht alle flächengleichen Figuren congruent zu sein. Es kann im Gegentheil vorkommen, daß Figuren von ganz verschiedener Gestalt gleichen Flächeninhalt haben. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms kann ebenso groß sein wie der Flächeninhalt eines Kreises.

Wir dürfen uns nun in diesem Abschnitte nicht die Aufgabe stellen, den Flächenraum von Figuren mit allen möglichen Gestalten zu vergleichen; wir werden uns vielmehr mit den einfachsten Fällen beschäftigen und zunächst einige Sätze über die **Flächengleichheit** und **-Ungleichheit** der **Parallelogramme** und und **Dreiecke** besprechen.

§ 28. Die Höhen der Parallelogramme. Wenn wir das Parallelogramm ABCD (Fig. 12) betrachten, so sehen wir zwischen den Parallelen AB und CD die Linien MN, M_1N_1, M_2N_2, welche sowohl auf AB wie auf CD senkrecht stehen, alle drei eine gleiche Länge haben und einander parallel sind*). Die Bedeutung der Linien

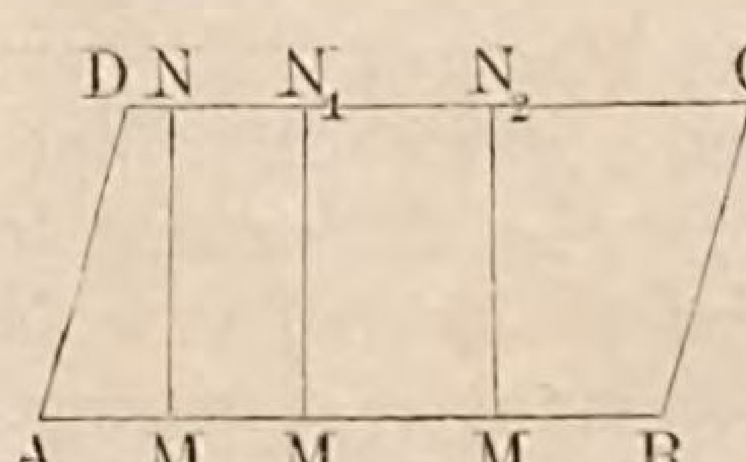


Fig. 12.

*) Als gegenüberliegende Seiten im Rechteck.

MN, M_1N_1, M_2N_2 ist leicht zu erkennen; sie zeigen uns an, wie groß der Abstand zwischen den beiden Parallelen AB und CD ist, oder anders ausgedrückt, wie hoch die Seite CD über der Seite AB liegt. Man sagt deswegen, die Geraden MN, M_1N_1 und M_2N_2, sowie alle übrigen geraden Linien, welche man zwischen AB und CD parallel zu MN ziehen kann, stellen die **Höhen des Parallelogramms** dar. Weil die Geraden MN, M_1N_1, M_2N_2 2c. gleich groß sind, ist es gleichgültig, welche derselben man als Höhe betrachtet.

Wenn wir nun das Parallelogramm ABCD derart umkehren, daß es auf der Seite BC ruht (siehe Fig. 13), so werden die Geraden ST und S_1T_1, welche auf den Parallelen BC und DA senkrecht stehen, die Höhe des Parallelogramms angeben, denn diese Geraden bezeichnen den Abstand zwischen den Parallelen BC und DA und zeigen somit an, wie hoch DA über BC liegt. Weil die Geraden ST und S_1T_1, sowie alle andern, welche zu ST zwischen BC und DA parallel gelegt werden können, gleichlang sind*), kommt es nicht darauf an, welche derselben als **Höhe** angesehen wird.

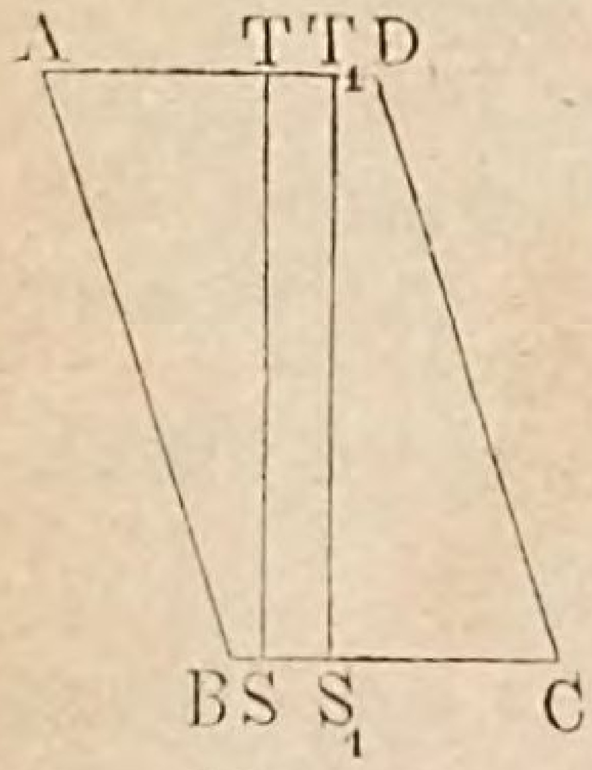


Fig. 13.

Die Höhe des Parallelogramms ABCD fällt also verschieden aus, je nachdem wir den Abstand zwischen den Parallelen AB und CD oder zwischen den Parallelen BC und DA bestimmen. Ueberhaupt

haben wir bei **einem Parallelogramm** immer **zwei Höhen** zu unterscheiden.

Zu jeder Höhe gehören in einem Parallelogramm zwei Grundlinien; betrachten wir bei dem Parallelogramm ABCD MN als Höhe (siehe Fig. 12), so wird entweder AB oder CD die zugehörige Grundlinie sein. Wird aber ST als Höhe angesehen (siehe Fig. 13), so ist entweder BC oder DA die zugehörige Grundlinie.

Aufgaben. Der Schüler möge angeben, wie ein **Parallelogramm beschaffen** sein muß, wenn in demselben die beiden **Höhen gleich** sein sollen.

*) Als gegenüberliegende Seiten im Rechteck.

§ 29. Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. Bevor wir Sätze über die **Flächengleichheit planimetrischer** Figuren bringen, müssen wir das Zeichen festsetzen, welches wir für das Wort „flächengleich" einführen wollen. Wenn zwei Figuren nicht blos einen gleichen Flächenraum, sondern auch eine gleiche Gestalt haben, so sind sie congruent; und zwar ist, wie wir wissen,

$\cong$ das Zeichen für **congruent.**

Achtet man nicht auf die gleiche Gestalt, sondern nur auf den gleichen Flächenraum, behauptet man also von zwei geometrischen Figuren nur, daß sie flächengleich sind, so bedient man sich einfach des Gleichheitszeichens. Demnach ist

$=$ das Zeichen für **flächengleich.**

Wenn ABCD und STUV zwei Parallelogramme sind, so heißt demnach

$$ABCD = STUV$$

in Worten:

Die beiden Parallelogramme ABCD und STUV sind flächengleich.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir uns zu einem Lehrsatz wenden. In **Fig. 14** und 15 sehen wir zwei Parallelogramme ABCD und STUV. Wie wir durch Messung finden, sind bei diesen Parallelogrammen sowohl die Grundlinien AB und ST, wie auch die Höhen h_a und h_t gleich. Wir behaupten von diesen Parallelogrammen, daß sie gleichen Flächeninhalt haben und stellen den

Lehrsatz III auf. **Parallelogramme** mit **gleicher Grundlinie** und **Höhe** haben **gleichen Flächeninhalt.**

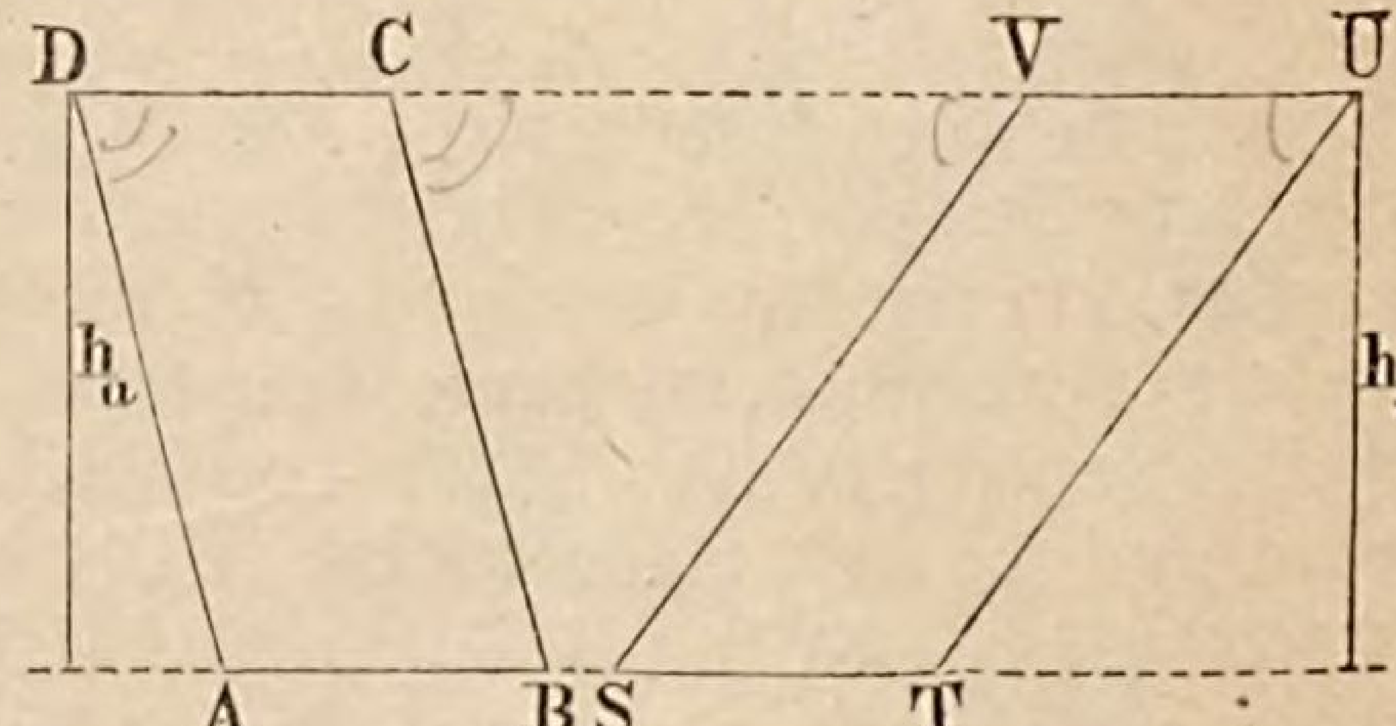


Fig. 14. Fig. 15.

Voraussetzung. Bei den beiden Parallelogrammen ABCD und STUV ist

$$AB = ST$$
$$\text{und } h_a = h_t.$$

Behauptung. ABCD = STUV.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir das Parallelogramm STUV so auf ABCD legen, daß die beiden gleichen Grundlinien ST und AB sich vollkommen decken, also der Punkt S auf A und der Punkt T auf B zu liegen kommt (siehe Fig. 16). Da die beiden Parallelogramme gleiche Höhe haben, so werden dann die Seiten CD und UV in eine gerade Linie fallen, die zur Grundlinie AB parallel ist.

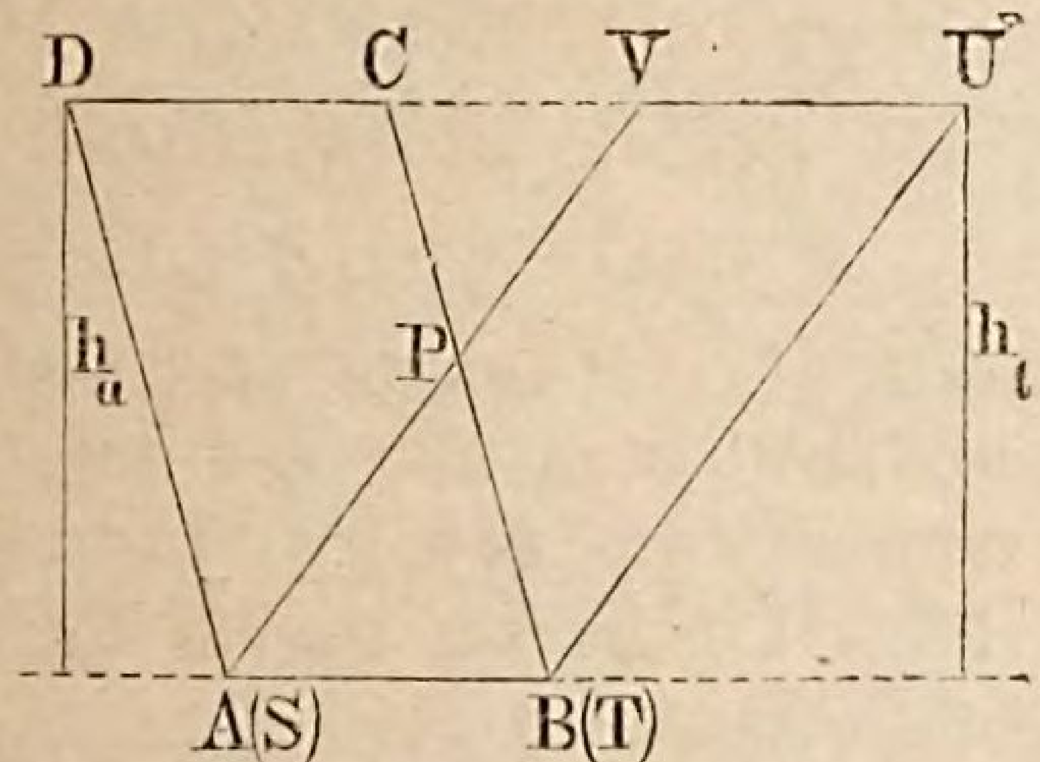


Fig. 16.

Von dem auf diese Weise entstandenen Trapez DABU wollen wir zunächst die beiden Dreiecke DAV und CBU betrachten. Da Gegenseiten im Parallelogramm gleich sind, muß

$$AB = CD$$
$$\text{und } AB = UV$$

und daher auch

$$CD = UV \text{ sein.}$$

Wir haben ferner $CV = CV$**)

$$CD + CV = UV + CV.$$

oder 1) $DV = CU$.

Es ist ferner:

2) $\angle ADV = \angle BCU$

als Gegenwinkel bei den Parallelen AD und BC geschnitten von DU und

3) $\angle AVD = \angle BUC$

als Gegenwinkel bei den Parallelen AV und BU geschnitten von DU.

Gleichung 1, 2 und 3 zeigt uns also, daß die beiden Dreiecke ADV und BCU in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. Nach dem dritten Congruenzsatze ist daher:

$$\triangle ADV \cong \triangle BCU.$$

Congruente Dreiecke sind auch flächengleich; mithin besteht die Gleichung:

$\triangle ADV = \triangle BCU$, wir haben ferner: $\triangle CPV = \triangle CPV$

$$\triangle ADV - \triangle CPV = \triangle BCU - \triangle CPV$$***).

*) Bei diesem Beweise kommt es häufig vor, daß Figuren addirt (zusammengefügt), oder von einander subtrahirt (abgezogen werden); es ist nöthig, daß der Schüler in diesen Fällen immer auf die Figur blicke. **) Nach dem Grundsatze: Jede Größe ist sich selbst gleich. ***) Nach dem Grundsatze: Gleiches, von Gleichem subtrahiert, giebt Gleiches.

Wenn wir vom Dreieck ADV das Dreieck CPV abziehen, erhalten wir das Trapez APCD; und wenn Dreieck CPV vom Dreieck BCU subtrahirt wird, ergiebt sich das Trapez BPVU. Die letzte Gleichung sagt uns mithin, daß das Trapez APCD ebenso groß ist, wie das Trapez BPVU, in Zeichen, daß wir haben:

$$\text{Trap. } APCD = \text{Trap. } BPVU.$$

Wir haben ferner:

$$\triangle APB = \triangle APB.$$

Folglich ist auch:

$$\text{Trap. } APCD + \triangle APB$$
$$= \text{Trap. } BPVU + \triangle APB\text{*)},$$

d. h. es ist:

$$ABCD = ABUV,$$

oder wenn wir in ABUV für A und B die Buchstaben S und T setzen:

$$ABCD = STUV, \text{ was behauptet war.}$$

Bemerkung. Die Parallelogramme CDEF, CDE_1F_1, CDE_2F_2, CDE_3F_3 in Fig. 17 haben **dieselbe** (die gleiche) **Grundlinie** CD und die **gleiche Höhe** h. Nach Lehrsatz III sind sie daher einander gleich, in Zeichen, wir haben:

$$CDEF = CDE_1F_1 = CDE_2F_2 = CDE_3F_3.$$

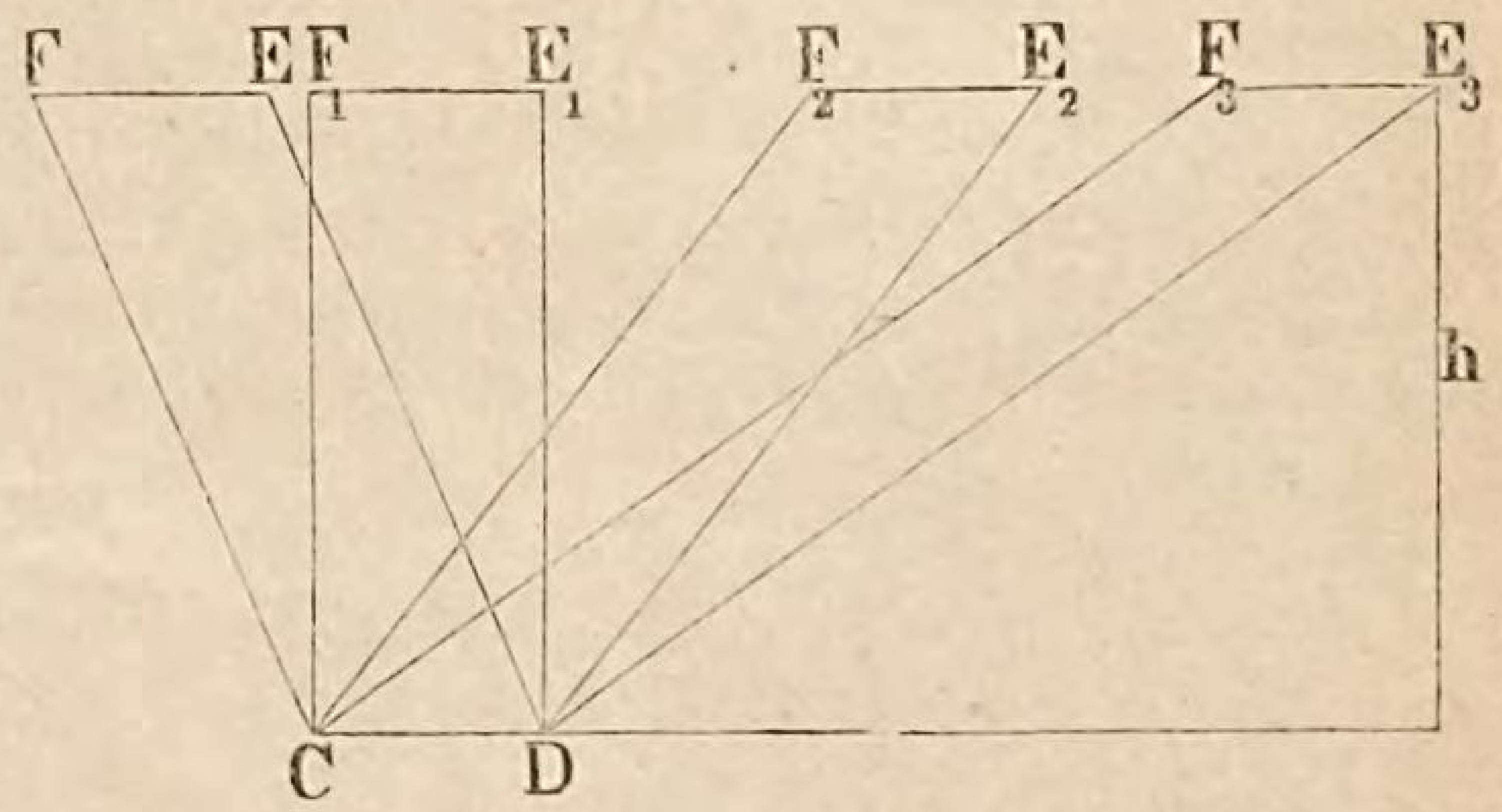


Fig. 17.

Aufgaben. Der Schüler möge

1) ein gegebenes schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln, welches gleichen Flächeninhalt und dieselbe Grundlinie hat.

Er möge

2) ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das dieselbe Grundlinie, gleichen Flächeninhalt und an der einen Ecke einen Winkel von gegebener Größe hat.

§ 30. Die Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe.

Wenn wir in dem Dreieck ABC zu AB durch C und zu AC durch B eine Parallele legen,

*) Nach dem Grundsatz: Gleiches, zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.

erhalten wir das Parallelogramm ABCD (siehe Fig. 18). Durch jede der Diagonalen wird ein Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke zerlegt, mithin ist:

$$\triangle ABC \cong \triangle BDC.$$

Congruente Dreiecke sind auch flächengleich; wir können daher die Gleichung aufstellen:

$$\triangle ABC = \triangle BDC.$$

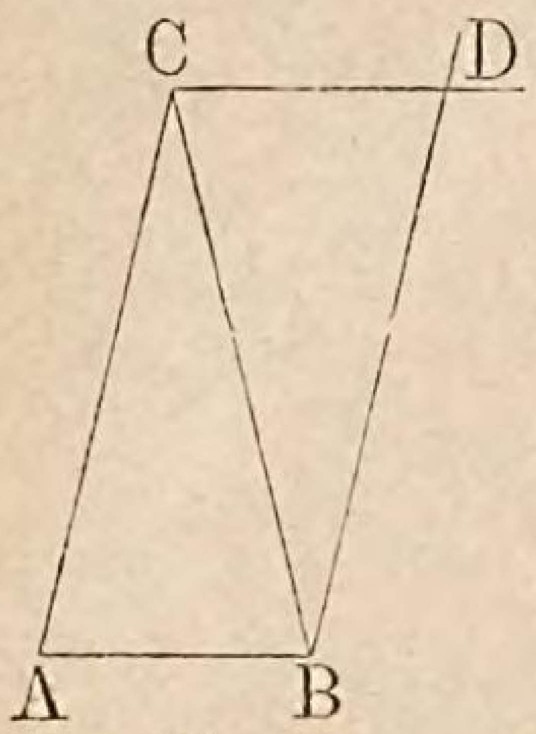


Fig. 18.

Die beiden Dreiecke ABC und BDC machen zusammen das Parallelogramm ABCD aus; da sie einander gleich sind, wird jedes derselben die Hälfte des Parallelogramms ausmachen, in Zeichen, es wird sein:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABCD,$$

und auch:

$$\triangle BDC = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Uns interessirt besonders die Gleichung:

$$\text{I. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Da Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind, so können wir für das Parallelogramm ABCD auch die Parallelogramme ABEF und ABE'F' (siehe Fig. 19) einsetzen; wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\text{II. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABEF,$$
$$\text{III. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABE'F',$$

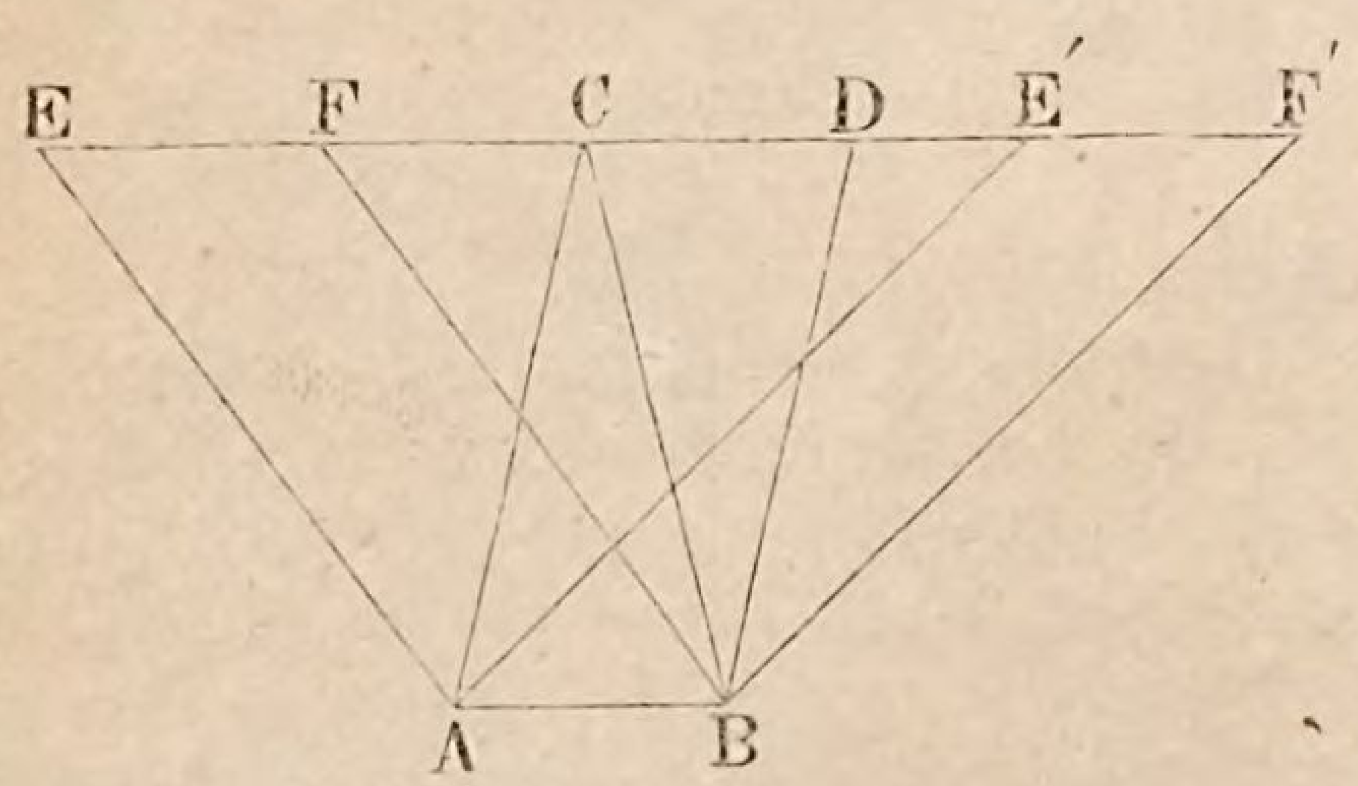


Fig. 19.

Betrachten wir die Gleichungen I, II und III. Auf der linken Seite haben wir das Dreieck ABC, auf der rechten Parallelogramme, die mit dem Dreieck ABC gleiche Grundlinie und Höhe**) haben. Die Gleichungen sagen uns also:

*) Das Dreieck ABC ebenso wie die Parallelogramme haben die Höhe h.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

C. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, setzten wir im dritten Abschnitt der **zweiundvierzigsten Lection** die Lehre von den geometrischen Oertern fort. Wir zeigten, daß der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die über einer gemeinsamen Grundlinie stehen und an der Spitze einen Winkel von gegebener Größe haben, ein Kreisbogen sei, und zwar der Sehnen-Tangentenbogen, zu welchem die gemeinsame Grundlinie als Sehne und der gegebene Winkel als Sehnen-Tangentenwinkel gehört. Durch mehrere Dreiecksconstructionen erläuterten wir die Verwendung dieses neuen geometrischen Ortes und stellten auch Aufgaben, welche der Schüler selbst zu lösen hat. In dem vierten Abschnitt der zweiundvierzigsten Lection gingen wir dann zur Construction des Kreises über, der in ein Dreieck eingeschrieben werden kann, kamen auch auf den umgeschriebenen Kreis zurück und zeigten an mehreren Aufgaben, wie Dreiecke construirt werden können, zu deren Bestimmungsstücken die Radien des ein- oder umgeschriebenen Kreises gehören. Darauf begannen wir mit der **dreiundvierzigsten Lection**. Im ersten Abschnitt derselben behandelten wir eine Frage, welche für die Lösung der geometrischen Constructionsaufgaben außerordentlich wichtig ist. Wir besprachen die Zahl der Durchschnittspunkte, welche zwei geometrische Oerter haben können. Da wir bei Constructionsaufgaben die Bestimmung eines gesuchten Punktes immer auf geometrische Oerter zurückgeführt haben, so ist mit der Anzahl der Punkte, in denen sich zwei geometrische Oerter durchschneiden, auch zugleich die Zahl der Figuren gegeben, welche die Lösung der Aufgaben darstellen. An die Betrachtung dieser Durchschnittspunkte schlossen wir zugleich einige Sätze über die Centrale, und wandten uns dann im zweiten Abschnitt der dreiundvierzigsten Lection der Lehre vom Flächeninhalt planimetrischer Figuren zu. Ehe wir uns auf die Messung des Flächeninhalts einlassen können, mußten wir erörtern, was man unter Flächengleichheit im Gegensatz zur Congruenz versteht und einige Fundamentalsätze über die Flächengleichheit bringen. Im nächsten Briefe werden wir mit der Lehre von der Flächengleichheit fortfahren.

D. Wiederholungsfragen.

1) Welches ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die bei gemeinsamer Grundlinie gleiche Winkel an der Spitze haben?
2) Was versteht man unter dem eingeschriebenen, was unter dem umgeschriebenen Kreise?
3) Welche Lage können zwei gerade Linien, welche Lage können Kreise zu einander haben?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus. Lection 44 und 45. Planimetrie.	Als Manuscript gedruckt.

23. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

In der Hand des Kundigen ist die Mathematik ein mächtiges Werkzeug.

Lection 44.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 42.

Abschnitt C. § 20. **Aufgaben.** In § 20 sind vier Constructionsaufgaben gestellt; von der ersten und dritten wollen wir die Analysis geben; zur zweiten und vierten wollen wir eine Bemerkung machen.

Analysis für Aufgabe I. Mit den beiden gegebenen Abschnitten kennen wir auch die Grundlinie c; wir werden uns daher zunächst eine Gerade AB = c hinlegen. Die Spitze C werden wir dann als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter auffassen; und zwar ist der erste Ort die Senkrechte, die auf der Grundlinie in dem Punkte errichtet wird, in welchem die gegebenen Abschuitte zusammenstoßen; der zweite Ort der Sehnen-Tangentenbogen, welcher über der Sehne AB errichtet wird, und zum Sehnen-Tangentenwinkel γ gehört.

Bemerkung zu Aufgabe II. Die Analysis ist in diesem Falle ganz ähnlich wie bei der Constructionsaufgabe, welche wir in § 20 zuletzt behandelt haben.

Analysis zu Aufgabe III. Um die Construction des Dreiecks auszuführen, werden wir uns die Grundlinie AB = c hinzeichnen und die Spitze C als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter bestimmen. Der eine Ort ist der Sehnen-Tangentenbogen, welcher zu AB als Sehne und zu γ als Sehnen-Tangentenwinkel gehört; der andere Ort ist der Kreis, welcher mit m_0 um den Mittelpunkt von AB beschrieben wird.

Bemerkung zu Aufgabe IV. Aufgabe IV wird ebenso behandelt wie Aufgabe I in § 20.

§ 23. **Aufgaben.** Für Aufgabe II haben wir in der Analysis zwei Wege angedeutet, welche zur Construction führen.

Construction I. Wir ziehen eine Gerade AB = c, tragen an AB in A den Winkel α an und halbiren diesen Winkel. Darauf legen wir im Abstande ϱ zu AB eine Parallele, welche die Halbirungslinie des Winkels α in M treffen möge. Um M schlagen wir dann mit ϱ einen Kreis und legen von B an diesen Kreis eine Tangente, die den freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α in C schneiden möge.

Behauptung. Das Dreieck ABC entspricht der Forderung.

Der **Beweis** liegt in der Analysis, die wir in § 23 gegeben haben. Bei derselben könnte es dem Schüler befremdlich erscheinen, daß der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises in der Parallelen liegen soll, welche zu AB im Abstande des Radius ϱ gelegt ist. Der Grund dafür ist nicht schwer zu finden. Der Radius, welcher M mit dem Berührungspunkt T_1 der Tangente AB verbindet, steht auf AB senkrecht. Die Senkrechte, welche von einem Punkte auf eine Linie gefällt werden kann, drückt aber die Entfernung des Punktes von der geraden Linie aus. Der Punkt M muß also um den Radius ϱ von AB entfernt sein, er muß mithin in der geraden Linie liegen, welche den geometrischen Ort für alle Puntte darstellt, welche von AB um ϱ entfernt sind, d. h. in der Parallelen, die im Abstand ϱ zu AB gelegt ist.

Ehe wir zur Construction II übergehen, wollen wir eine Frage beantworten, die in § 23 von uns gestellt wurde. Wir fragten, weshalb denn die Winkel α und T_1MT_3 zusammen zwei Rechte betragen. Der Grund ist folgender: die vier Winkel in dem Viereck AT_1MT_3 müssen wie in jedem Viereck zusammen 4 Rechte betragen. Zwei dieser Winkel, nämlich AT_1M und MT_3A sind Rechte, weil eine Tangente auf ihrem zugehörigen Radius senkrecht steht; die beiden andern Winkel T_1MT_3 und α müssen also auch zusammen 2 Rechte betragen. Hiernach wenden wir uns zu

Construction II. Zunächst construiren wir uns einen Winkel ϑ, der mit α zusammen zwei Rechte beträgt, am besten, indem wir α hinlegen und den einen Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängern. Darauf beschreiben wir um einen beliebigen Mittelpunkt M einen Kreis mit ϱ, ziehen einen beliebigen Radius MT_1 und tragen an T_1M im Punkte M den Winkel ϑ an. Der freie Schenkel dieses Winkels möge den Kreis in T_3 schneiden. In den beiden Kreispunkten T_1 und T_3 errichten wir dann Tangenten, die sich in A treffen mögen. Die dadurch entstehende Gerade AT_1 verlängern wir bis B, sodaß $AB = c$ wird, und legen von B aus an den Kreis eine Tangente, welche die Verlängerung von AT_3 in C trifft.

Behauptung. ABC ist das verlangte Dreieck, der Beweis dafür liegt in der Analysis.

Section 43.

Abschnitt A. § 26. **Aufgaben I.** Wir haben den **Lehrsatz** II zu beweisen. Wenn sich **zwei Kreise** schneiden, sind die **Durchschnittspunkte** von der **Centrale gleich weit** entfernt.

Bedienen wir uns zum Beweise dieses Lehrsatzes der Fig. 7 (Seite 375), so wird die

Behauptung. $ST = S'T$.

Beweis. In dem Beweise, welchen wir für Lehrs. I Seite 375 gaben, ist umständlich gezeigt worden, daß

$$\triangle MST \cong \triangle MS'T$$

ist. Aus der Congruenz dieser beiden Dreiecke geht unmittelbar hervor, daß auch

$$ST = S'T$$

sei, was behauptet war.

§ 26. **Aufgaben** II. 1) In § 26 soll ein Kreis construirt werden, welcher

a) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen außerhalb der Geraden gegebenen Punkt geht.

Analysis. Der Kreis ist leicht zu beschreiben, wenn wir seinen Mittelpunkt gefunden haben, und den Mittelpunkt werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen. Der eine Ort ist die Senkrechte, welche wir auf der gegebenen Geraden in dem gegebenen Punkte errichten können, zu dem andern Ort gelangen wir, wenn wir erwägen, daß die gerade Linie, welche den Berührungspunkt der gegebenen Geraden mit dem außerhalb derselben gegebenen Punkte verbindet, eine Kreissehne ist, und daß der Kreismittelpunkt in der Senkrechten liegt, welche in der Mitte einer Sehne errichtet wird.

Es soll ferner ein Kreis geschlagen werden, welcher

b) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen außerhalb des Kreises gegebenen Punkt hindurchgeht.

Analysis. Wir wollen den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit M, den in der Kreislinie gegebenen Punkt mit T und den außerhalb des Kreises gegebenen Punkt mit P bezeichnen, und dann den Mittelpunkt C des gesuchten Kreises als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter bestimmen. Der eine Ort ergiebt sich durch die Erwägung, daß die Strecke PT Sehne des gesuchten Kreises wird und daß aus diesem Grunde das Centrum des gesuchten Kreises in der Geraden liegen muß, welche auf PT im Mittelpunkte senkrecht steht. Der andere Ort ist die Verlängerung des Radius MT, denn die Mittelpunkte zweier sich berührender Kreise müssen mit dem Berührungspunkt in einer geraden Linie (in der Centrale) liegen. Haben wir erst den gesuchten Mittelpunkt C, so werden wir mit CP oder CT einen Kreis schlagen, der dann der gewünschte ist.

2) Die punktirten Geraden MN und ST (Fig. 1), welche die von den Linien AB und CD gebildeten Winkel halbiren, sind die geometrischen Oerter für die Mittelpunkte aller Kreise, von denen die Geraden AB und CD berührt werden. Wir wollen z. B. auf MN beliebig den Punkt F annehmen und von F auf AB und CD die Senkrechten FT_1 und FT_2 fällen, dann ist in den beiden Dreiecken EFT_1 und EFT_2

$$EF = EF,$$
$$\angle ET_1F = \angle ET_2F,$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

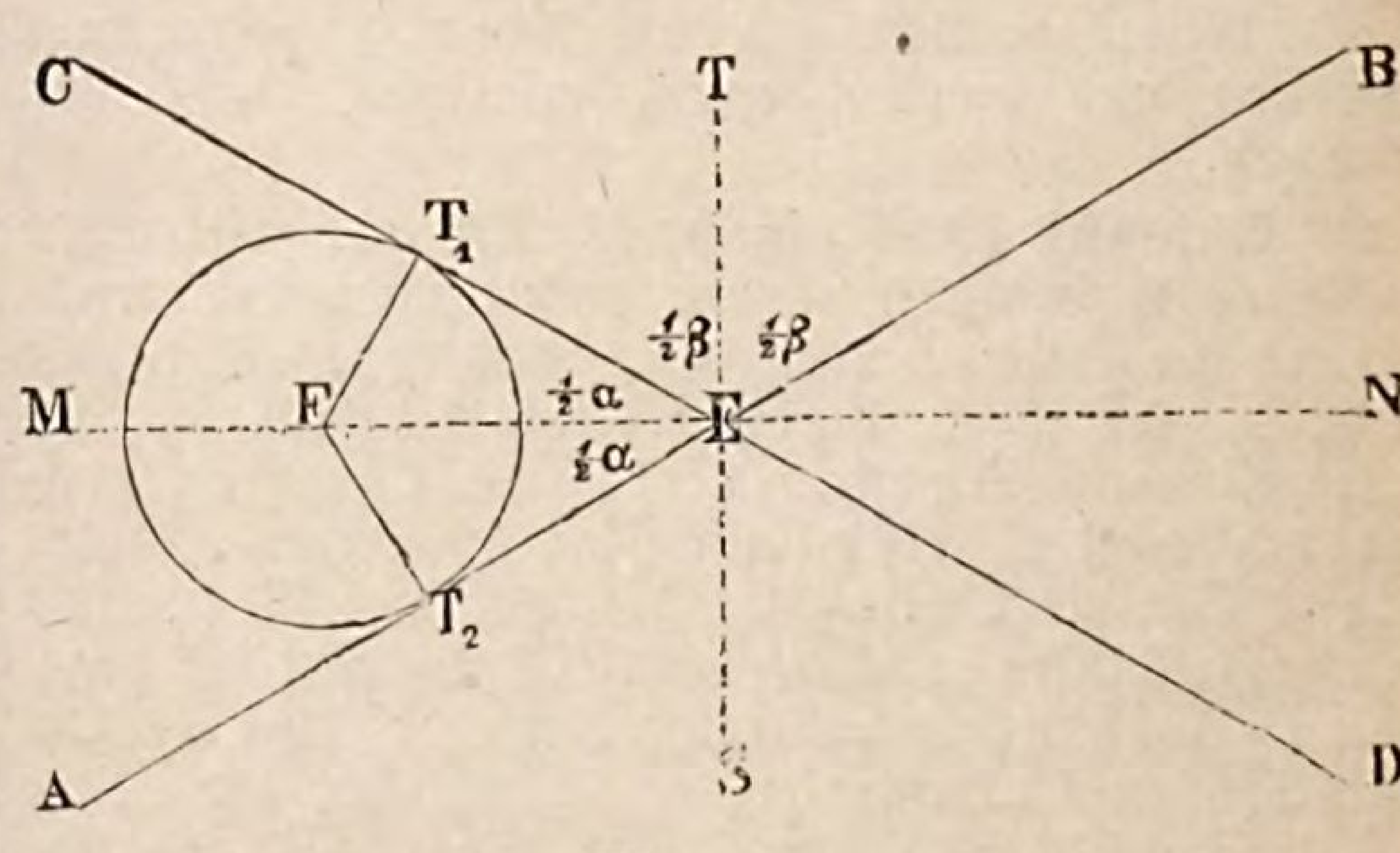


Fig. 1.

Die beiden Dreiecke EFT_1 und EFT_2 stimmen also in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln überein, sie sind mithin nach dem dritten Congruenzsatz congruent; in Zeichen, es ist:

$$\triangle EFT_1 \cong \triangle EFT_2.$$

In congruenten Dreiecken sind die Seiten gleich, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; es ist

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

folglich auch: $FT_1 = FT_2$.

Ein um F beschriebener Kreis, der durch T_1 geht, muß daher auch T_2 treffen, und zwar wird dieser Kreis sowohl AB wie CD berühren, weil der Radius FT_1 auf AB und der Radius FT_2 auf CD senkrecht steht.

3) Es soll

a) der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise gesucht werden, welche einen gegebenen Radius haben und einen der Lage nach gegebenen Kreis von außen berühren.

Analysis. Der Kreis, welcher der Lage nach gegeben ist, hat den Radius r und den Mittelpunkt M (siehe Fig. 2), der Radius der Kreise, für deren Mittelpunkte M′ wir den geometrischen Ort finden wollen, ist r′.

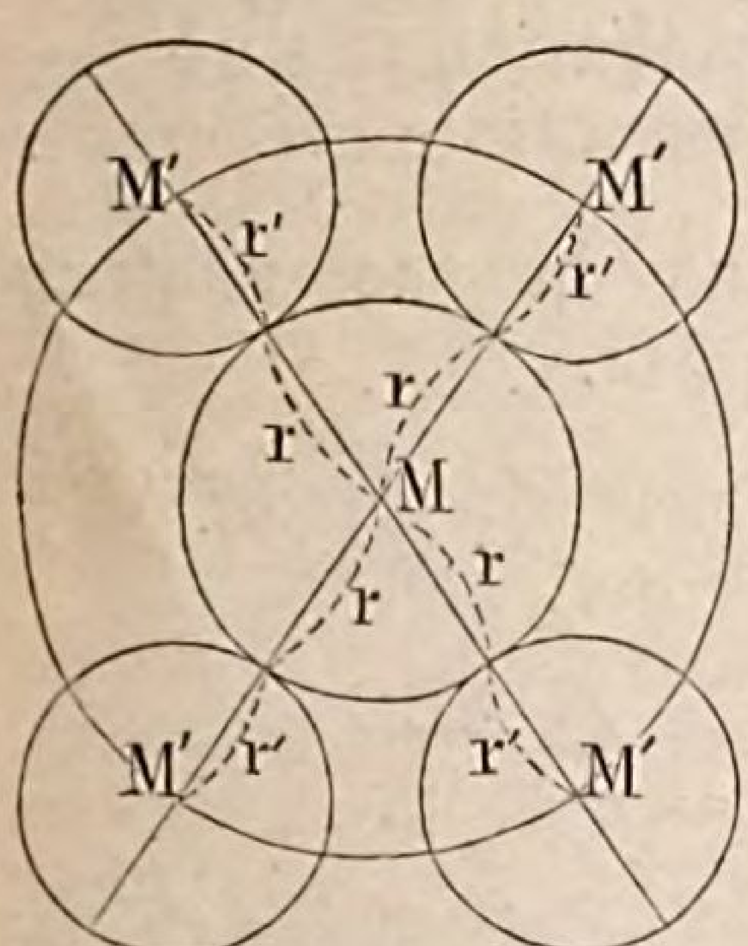


Fig. 2.

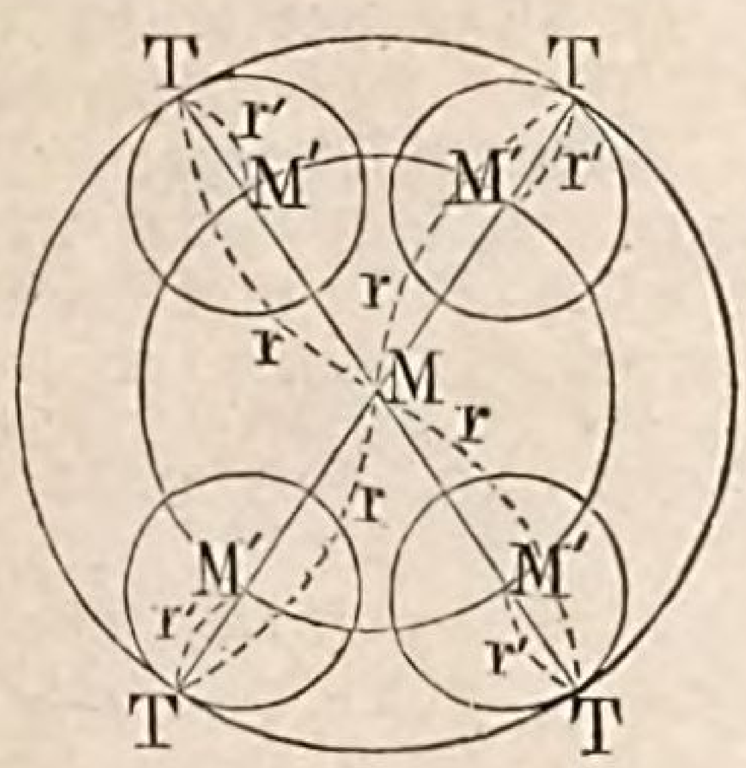


Fig. 3.

Jeder der Mittelpunkte M′ ist vom M um die Centrale MM′ entfernt, die durch den Berührungspunkt der Kreise geht und darum so groß ist wie die beiden Radien r und r′ zusammen. Die Mittelpunkte M′ müssen daher in dem Kreise liegen, welcher mit der Summe $r + r'$ der beiden Radien r und r′ um M beschrieben ist.

Es soll

b) der geometrische Ort für alle Kreise festgestellt werden, welche einen gegebenen Radius haben und einen Kreis von gegebener Lage von innen berühren.

Analysis. In Fig. 3 sehen wir den Kreis mit dem Radius r, der um den Mittelpunkt M beschrieben ist. In demselben haben wir andere Kreise mit den Mittelpunkten M′ und dem Radius r′, die den ersten Kreis berühren. Es handelt sich darum, zu bestimmen, in welcher Linie die Mittelpunkte M′ liegen. M′ ist von M immer um die Centrale MM′ entfernt, und zwar ist MM′, weil die Verlängerung der Centrale den Berührungspunkt T trifft, so groß wie MT weniger M′T, in Zeichen, wir haben:

$$MM' = MT - M'T = r - r'.$$

Die Punkte M′ werden also in einem Kreise liegen, dessen Radius gleich $r - r'$ d. h. gleich der Differenz der gegebenen Radien ist.

Abschnitt B. § 28. Ein Parallelogramm, in dem beide Höhen einander gleich sind, muß gleiche Seiten haben. (Rhombus oder Quadrat.)

§ 29. 1) Das gegebene schiefwinklige Parallelogramm sei ABCD, und AB sei die Grundlinie. Um die verlangte Verwandlung auszuführen, werden wir auf AB in A und an B Senkrechte errichten, welche CD bez. die Verlängerung von CD in E und F schneiden. Das Parallelogramm ABCD und das Rechteck ABEF haben dann dieselbe (die gleiche) Grundlinie AB und die gleiche Höhe, sie sind daher flächengleich.

2) Nehmen wir an, wir hätten ein Parallelogramm ABCD, und wir sollten dieses Parallelogramm in ein anderes mit derselben Grundlinie und dem gleichen Flächeninhalt verwandeln, das bei A den gegebenen Winkel α hat. Wir werden dann an AB in A den Winkel α antragen, und zwar möge der freie Schenkel des angetragenen Winkels die Seite CD oder deren Verlängerung in E schneiden, zu AE ziehen wir dann durch B eine Parallele, welche CD oder die Verlängerung von CD in F trifft. ABEF ist dann das verlangte Parallelogramm. Ist nun nicht der Winkel bei A, sondern der Winkel bei B gegeben, so verfahren wir ganz ähnlich. Kennen wir den Winkel bei C oder D, so sind auch die Winkel bei A oder B bekannt, denn in einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

B. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 43 gestellten Fragen.

1) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die bei gemeinsamer Grundlinie gleiche Winkel an der Spitze haben, ist der Sehnen-Tangentenbogen, der der gemeinsamen Grundlinie als Sehne und dem Winkel an der Spitze als Sehnen-Tangentenwinkel entspricht. 2) Ein Kreis ist einem Dreieck eingeschrieben, wenn die Seiten des Dreiecks ihn berühren; er ist dem Dreieck umgeschrieben, wenn er durch die Ecken des Dreiecks hindurchgeht. 3) Zwei gerade Linien können sich entweder in einem Punkte schneiden oder parallel laufen. Zwei Kreise haben entweder keinen Punkt mit einander gemein, oder sie schneiden sich in zwei Punkten, oder sie berühren sich in einem Punkte.

C. Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe. Ergänzungsparallelogramme.

§ 31. Die Flächengleichheit der Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe. Im letzten Abschnitt des vorigen Briefes haben wir den Lehrsatz aufgestellt, daß **Parallelogramme** mit gleicher Grundlinie und Höhe einander flächengleich sind. Wenn Parallelogramme von dieser Beschaffenheit gleiche Größe haben, so müssen auch ihre **Hälften gleich groß** sein. Die Hälften eines Parallelogramms sind aber (siehe § 30) die **Dreiecke,** die über **gleicher Grundlinie** stehen wie das Parallelogramm und **dieselbe Höhe** haben. Wir können daher auch den

Lehrsatz I aufstellen. **Dreiecke** von **gleicher Grundlinie** und **Höhe** sind einander **flächengleich.**

In Fig. 4 haben z. B. die Dreiecke

ACB, AC′B, AC″B, AC‴B

gleichen Flächeninhalt, denn sie stehen über derselben (der gleichen) Grundlinie AB und haben dieselbe Höhe h.

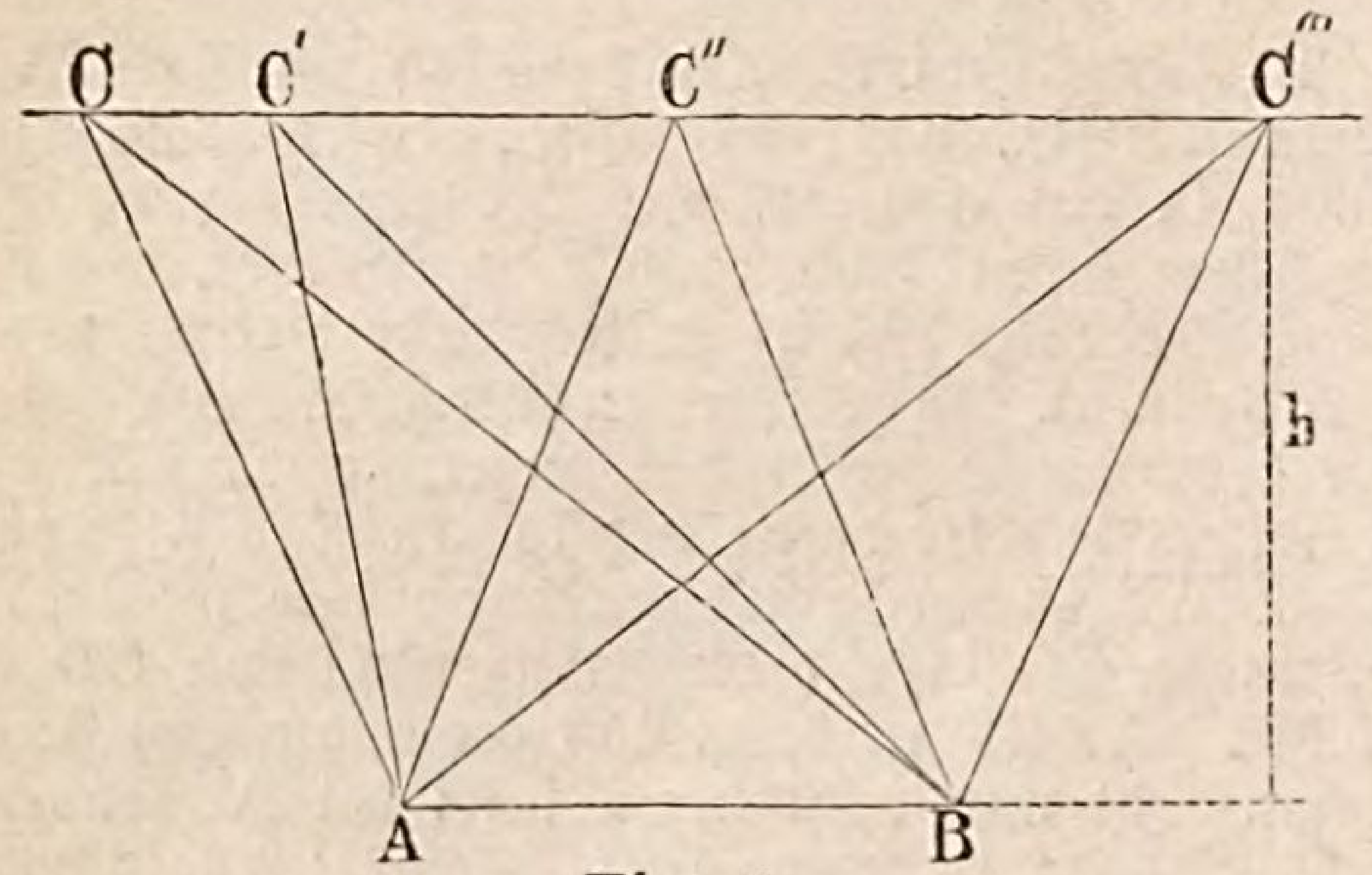


Fig. 4.

In Fig. 5 haben die Dreiecke ABC, MNP, STU gleichen Flächeninhalt, denn es ist

$AB = MN = ST$ und $h_a = h_m = h_t$.

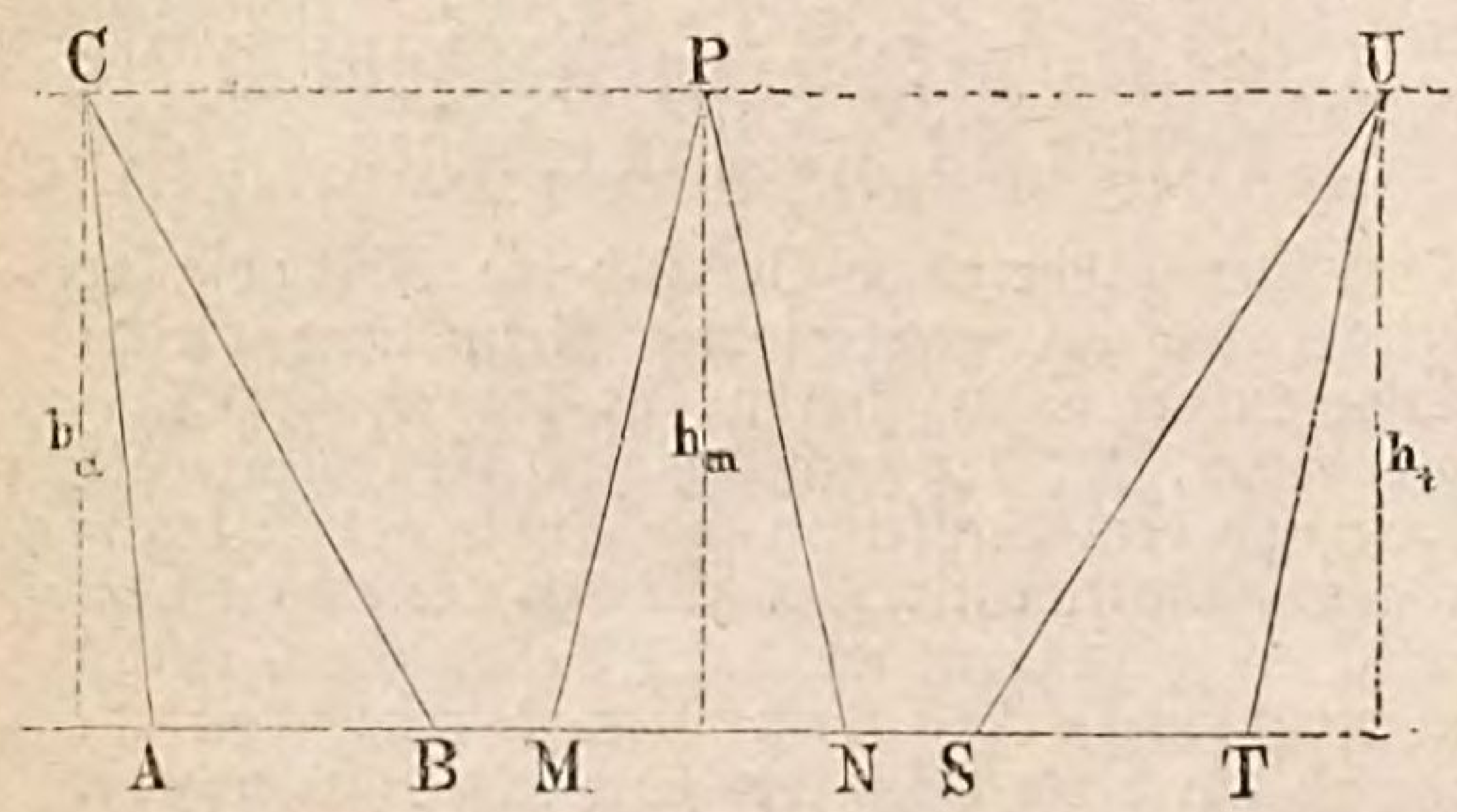


Fig. 5.

§ 32. Die Verwendung des Lehrsatzes I zu Dreiecksconstructionen. Betrachten wir Fig. 4; in derselben haben wir das Dreieck ABC mit der Grundlinie AB und der Höhe h; zu AB ist durch die Spitze C eine Parallele gezogen. Verbinden wir irgend einen Punkt dieser Parallelen, etwa C′, C″, C‴ mit A und B geradlinig, so entstehen, wie wir schon im vorigen Paragraphen angaben, Dreiecke, welche denselben Flächeninhalt haben wie das Dreieck ABC.

Die Parallele CC‴ ist also der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche dem Dreiecke ABC flächengleich sind; oder allgemein ausgedrückt:

Der **geometrische Ort** für die **Spitzen aller Dreiecke**, welche

1) mit einem **gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt** haben und
2) über **derselben Grundlinie** wie das **gegebene Dreieck** stehen,

ist die **gerade Linie**, welche durch die **Spitze des gegebenen Dreiecks** zur Grundlinie **parallel** gelegt ist.

Auf diesen geometrischen Ort wollen wir jetzt die Lösung mehrerer Constructionsaufgaben gründen; und zwar wollen wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, für die einzelnen Dreiecksstücke die Bezeichnungsweise beibehalten, die wir zuletzt in § 20 angegeben haben.

Aufgabe I. Ein gegebenes **ungleichseitiges Dreieck** ABC soll in ein **gleichschenkliges Dreieck** verwandelt werden, welches

1) **denselben Flächeninhalt** hat und
2) über **derselben Grundlinie** AB steht.

Voraussetzung. Uns ist das ungleichseitige Dreieck ABC gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC′ construiren, und zwar derart, daß

1) $\triangle ABC' = \triangle ABC$
2) $AC' = BC'$ ist.

Analysis. Wir werden die Spitze C′ des gesuchten Dreiecks AC′B als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter darstellen; und zwar ist der eine Ort die Parallele, welche durch C zu AB gezogen wird, denn diese Parallele ist den obigen Auseinandersetzungen gemäß der geometrische Ort für die Spitze aller Dreiecke, die über der Grundlinie AB stehen und denselben Flächeninhalt haben wie das Dreieck ABC. Den zweiten Ort erhalten wir, wenn wir bedenken, daß der gesuchte Punkt C′ die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks werden soll und daß die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche über einer Basis stehen, in der Senkrechten liegen, die auf der Basis in ihrem Mittelpunkte errichtet ist. Der zweite Ort ist also die Gerade, welche auf AB im Mittelpunkt M senkrecht steht.

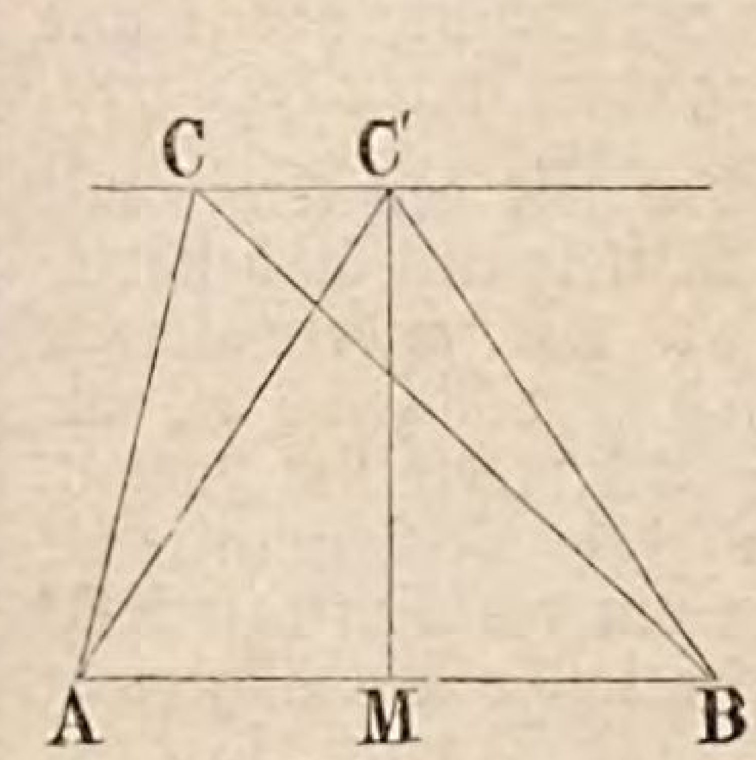


Fig. 6.

Construction. Wir legen durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks eine Parallele zu AB und errichten auf AB im Mittelpunkte M eine Senkrechte, welche die vorher genannte Parallele in C′ schneiden möge. C′ verbinden wir mit A und B durch gerade Linien.

Behauptung. $\triangle ABC' = \triangle ABC$
und $AC' = BC'$.

Der **Beweis** liegt in der Analysis.

Aufgabe II. Ein gegebenes Dreieck ABC soll in ein Dreieck ABD verwandelt werden, das

1) dem gegebenen Dreieck ABC **flächengleich** ist und
2) an der Spitze D **einen Winkel von gegebener Größe** hat.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 7 ein Dreieck ABC und ein Winkel δ gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABD derart construiren, daß

$$\triangle ABD = \triangle ABC$$
und $\angle ADB = \angle \delta$ ist.

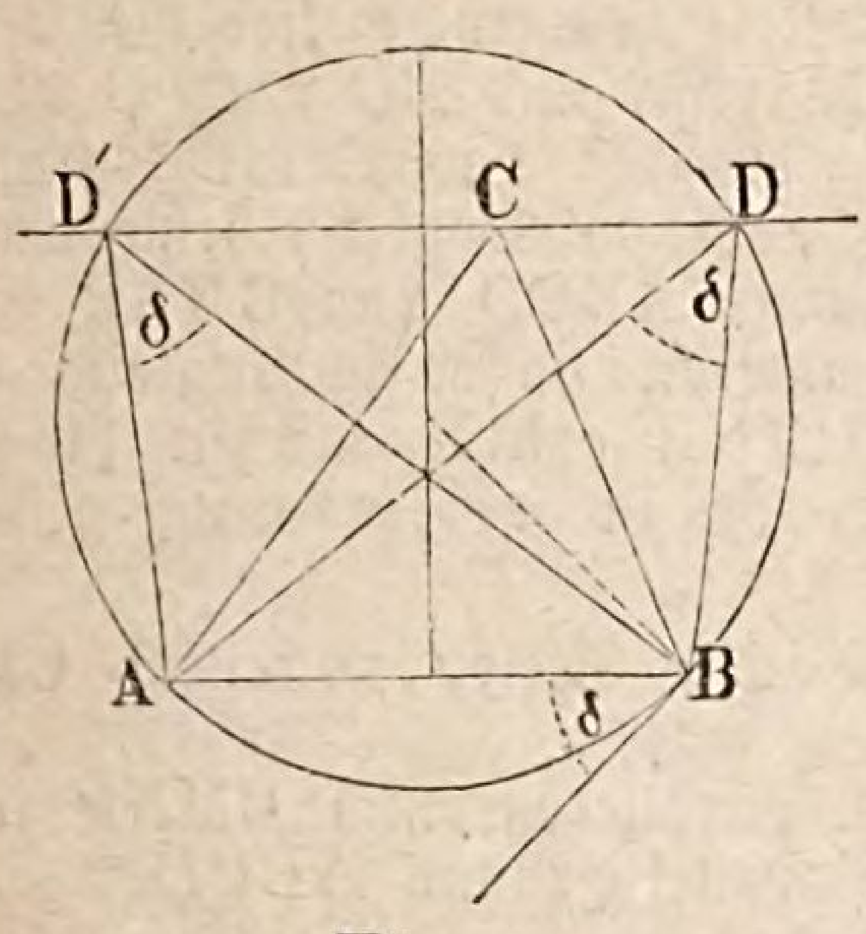


Fig. 7.

Analysis. Wir bestimmen die Spitze D als Durchschnitt zweier geometrischen Oerter. Der eine Ort ist die Parallele, welche durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks gelegt wird; der andere Ort ist der Sehnen-Tangentenbogen, der über der gegebenen Grundlinie AB steht und dem Sehnen-Tangentenwinkel δ entspricht.

Die Construction möge der Schüler selbst ausführen, ebenso möge er auch selbst die Behauptung aufstellen und den Beweis führen. In Fig. 7 sind die Geraden gezogen, welche zur Construction nöthig sind; die Dreiecke ABD und ABD' genügen der Forderung.

Aufgaben. Es soll ein Dreieck ABC in ein Dreieck ABC' mit gleichem Flächeninhalt verwandelt werden, in dem

a) der Winkel bei B von gegebener Größe ist,
b) die Seite BC' eine gegebene Länge hat,
c) die Mittellinie, welche den Mittelpunkt von AB mit C' verbindet, gleich einer gegebenen Strecke ist.

Um Irrthümer zu vermeiden, bemerken wir noch, daß die Fälle a, b und c drei verschiedene Aufgaben darstellen.

§ 33. Die Ergänzungsparallelogramme.

In Fig. 8 sehen wir das Parallelogramm ABCD mit der Diagonale BD; durch einen Punkt P dieser Diagonale ist zu AB die Parallele SS' und zu AD die Parallele TT' gelegt. Dadurch sind außer mehreren Dreiecken die beiden, in Fig. 8 mit einem Kreuz bezeichneten Parallelogramme ATPS und CT'PS' entstanden, welche den Namen **Ergänzungsparallelogramme** führen. Also

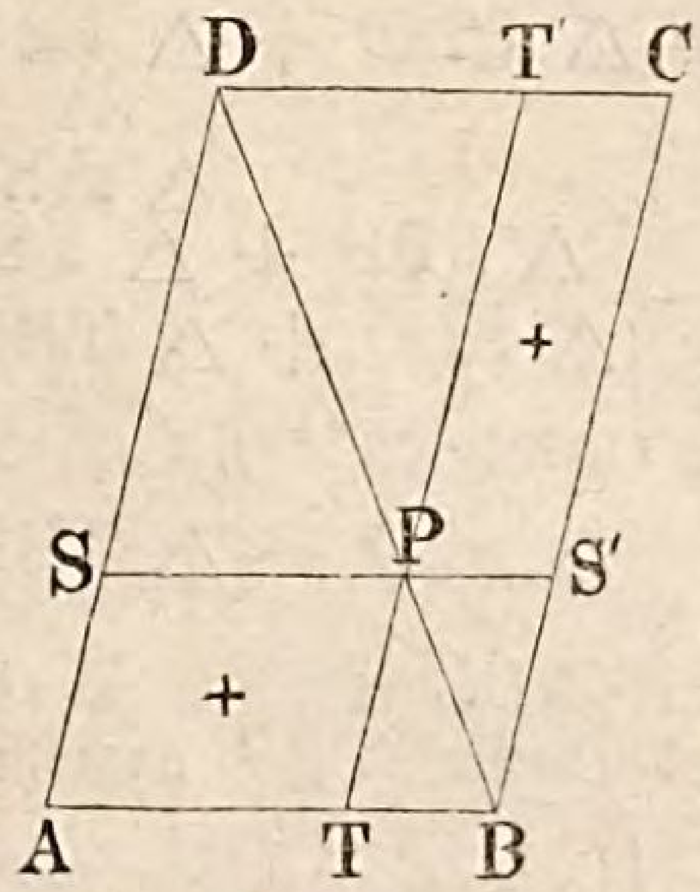


Fig. 8.

wenn man in einem Parallelogramm eine Diagonale zieht und durch irgend einen Punkt dieser Diagonale zu den Seiten des Parallelogramms Parallelen legt, so entstehen **zwei kleine Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht hindurchgeht.** Diese kleinen Parallelogramme werden **Ergänzungsparallelogramme** genannt.

Aufgaben I. Der Schüler möge in den Figuren 9 und 10 die Ergänzungsparallelogramme angeben.

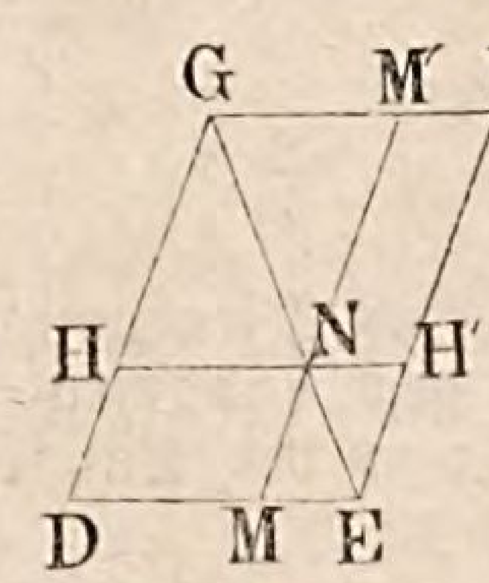


Fig. 9.

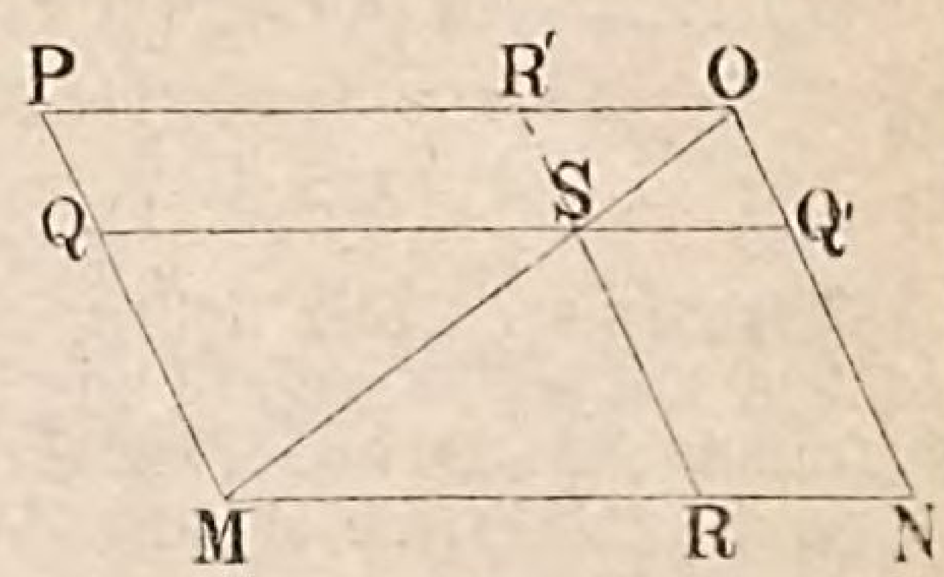


Fig. 10.

Von den **Ergänzungsparallelogrammen** gilt der

Lehrsatz II. Ergänzungsparallelogramme sind einander gleich.

Voraussetzung. In Fig. 8 ist uns ein Parallelogramm ABCD gegeben; zu den Seiten desselben sind durch einen Punkt P der Diagonale BD die Parallelen SS' und TT' gelegt, so daß die Ergänzungsparallelogramme ATPS und CT'PS' entstehen.

Behauptung. ATPS = CT'PS'.

Beweis. In Fig. 8 ist

$$\triangle\ SPD \cong \triangle\ PT'D$$
und $\triangle\ TBP \cong \triangle\ BS'P$*).

Congruente Figuren sind auch flächengleich, mithin können wir die Gleichungen aufstellen:

$$\triangle\ SPD = \triangle\ PT'D$$
$$\triangle\ TBP = \triangle\ BS'P$$
$$\text{I. } \triangle\ SPD + \triangle\ TBP = \triangle\ PT'D + \triangle\ BS'P.$$

Ferner ist:

$$\triangle\ ABD \cong \triangle\ BCD$$**),

mithin auch:

$$\text{II. } \triangle\ ABD = \triangle\ BCD.$$

Wenn wir Gleichung II und I unter einander stellen und dann nach dem Grundsatz verfahren: Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches, so erhalten wir:

$$\triangle\ ABD = \triangle\ BCD$$
$$\triangle\ SPD + \triangle\ TBP = \triangle\ PT'D + \triangle\ BS'P$$
$$\triangle\ ABC - (\triangle\ SPD + \triangle\ TBP) = \triangle\ BCD - (\triangle\ PT'D + \triangle\ BS'P),$$

und wenn wir die Klammer auflösen***),

$$\triangle\ ABC - \triangle\ SPD - \triangle\ TBP = \triangle\ BCD - \triangle\ PT'D - \triangle\ BS'P.$$

Wenn wir vom Dreieck ABC erst das Dreieck SPD und dann noch das Dreieck TBP abziehen, bleibt das Parallelogramm ATPS übrig.

Wird vom Dreieck BCD erst das Dreieck PT'D und dann noch das Dreieck BS'P subtrahirt (fortgenommen), so ergiebt sich als Rest das Parallelogramm CT'PS'.

Die letzte Gleichung sagt uns also, daß

ATPS = CT'PS' ist, was behauptet war.

Aufgabe Es soll ein **Parallelogramm** construirt werden, welches einem **gegebenen Parallelogramm flächengleich** ist und eine **Seite von gegebener Länge** hat.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 11 ein Parallelogramm ABCD und eine Strecke s gegeben.

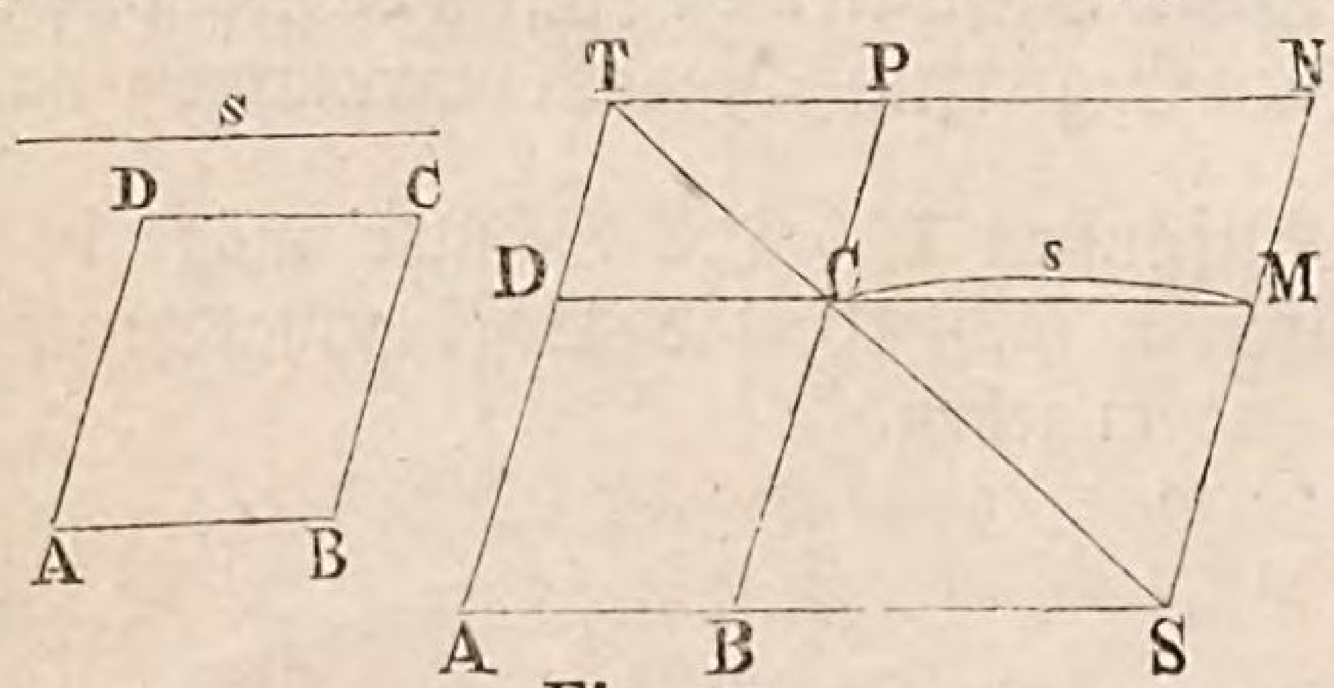


Fig. 11.

Forderung. Wir sollen ein Parallelogramm zeichnen, welches so groß ist wie das gegebene Parallelogramm ABCD und eine Seite von der Länge der gegebenen Strecke s hat.

Analysis. Wir wollen in Fig. 11 die Seite DC des Parallelogramms ABCD über C hinaus um CM = s verlängern und durch M zu AD eine Parallele legen, welche die Verlängerung von AB in dem Punkte S schneiden möge. Darauf wollen wir die Gerade SC ziehen, und den Durchschnittspunkt, in dem sich die Verlängerungen von SC und AD treffen, mit T bezeichnen. Wird dann noch durch T zu AB eine Parallele gezogen, welche die Verlängerung von SM in N trifft, und BC über C hinaus bis P verlängert, so entsteht das Parallelogramm CMNP, und zwar sind, wie wir sogleich bemerken, die beiden Parallelogramme ABCD und CMNP Ergänzungsparallelogramme und daher flächengleich Das Parallelogramm CMNP erfüllt mithin die beiden Bedingungen, welche in der Forderung gestellt werden, denn

1) ist eine der Seiten, nämlich CM und PN, gleich s, und
2) ist das Parallelogramm CMNP so groß wie das Parallelogramm ABCD.

D. Der Pythagoräische Lehrsatz.

§ 34. Wir kommen jetzt zum Pythagoräischen Lehrsatz, welcher einer der Eckpfeiler der Mathematik ist. Wir haben bereits in der historischen Einleitung des ersten Briefes bemerkt, daß Pythagoras, als er diesen Satz fand, in ein fröhliches „εὕρηκα" (heureka, ich hab's gefunden), ausgebrochen und den Göttern 1000 Rinder geopfert haben soll, weil er die große Wichtigkeit seiner Entdeckung

---

*) Die Vierecke SPT'D und TBS'P sind Parallelogramme, weil nach der Voraussetzung die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Parallelogramme werden durch jede der Diagonalen in zwei congruente Dreiecke zerlegt; wir haben daher in Figur 8:

$$\triangle\ SPD \cong \triangle\ PT'D \quad \text{und} \quad \triangle\ TBP \cong \triangle\ BS'P.$$

**) Weil das Parallelogramm ABCD durch die Diagonale BD in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird.

***) Gemäß Seite 223 verändern bei der Subtraction einer arithmetischen Summe die Glieder ihr Vorzeichen; die positiven Glieder werden negativ und die absoluten Glieder nehmen ein negatives Vorzeichen an. Subtrahiren wir daher: $\triangle\ SPD + \triangle\ TBP$, oder berechnen wir, anders ausgedrückt:

$$-(\triangle\ SPD + \triangle\ TBP), \text{ so ergiebt sich: } -\triangle\ SPD - \triangle\ TBP.$$

Wird: $\triangle\ PT'D + \triangle\ BS'P$ abgezogen, oder mit anderen Worten:

$$-(\triangle\ PT'D + \triangle\ BS'P) \text{ berechnet, so erhalten wir: } -\triangle\ PT'D - \triangle\ BS'P.$$

sofort erkannte. In allen Theilen der Mathematik gehört der Pythagoräische Lehrsatz zu den Fundamentalsätzen; wäre nicht Pythagoras auf ihn gestoßen, so würde man ihn sicher auf andere Weise gefunden haben. Besonders wäre jeder scharfsinnige Mathematiker durch Betrachtungen, welche sich an die Aehnlichkeit der Dreiecke anschließen, zu dem wichtigen Satze geführt worden sein.

Bevor wir den Pythagoräischen Lehrsatz selbst bringen, müssen wir erst einige Vorbemerkungen machen.

Wie wir wissen, ist das Quadrat ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich sind und dessen Winkel einen Rechten betragen. Es folgt daraus, daß wir ein Quadrat schon construiren können, wenn uns eine der Seiten bekannt ist. Um die Gestalt und Größe eines Quadrates näher zu bestimmen, brauchen wir daher nur eine der Seiten anzugeben. So ist z. B. das Quadrat ABCD in Fig. 12 vollständig bezeichnet, wenn wir es

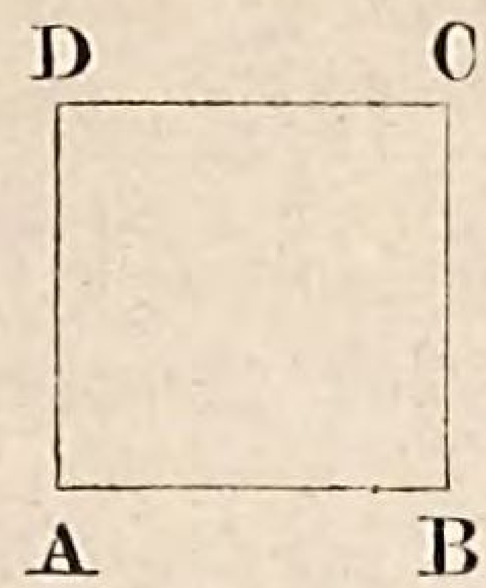


Fig. 12.

„das Quadrat über AB"

nennen, wobei wir AB als Grundlinie auffassen.

In Figur 13 sehen wir ein Dreieck ABC; über jeder der Seiten dieses Dreiecks ist ein Quadrat errichtet; und zwar steht

das Quadrat ABDE über AB,
das Quadrat ACFG über AC,
und das Quadrat BCHJ über BC;

wir werden darum passend

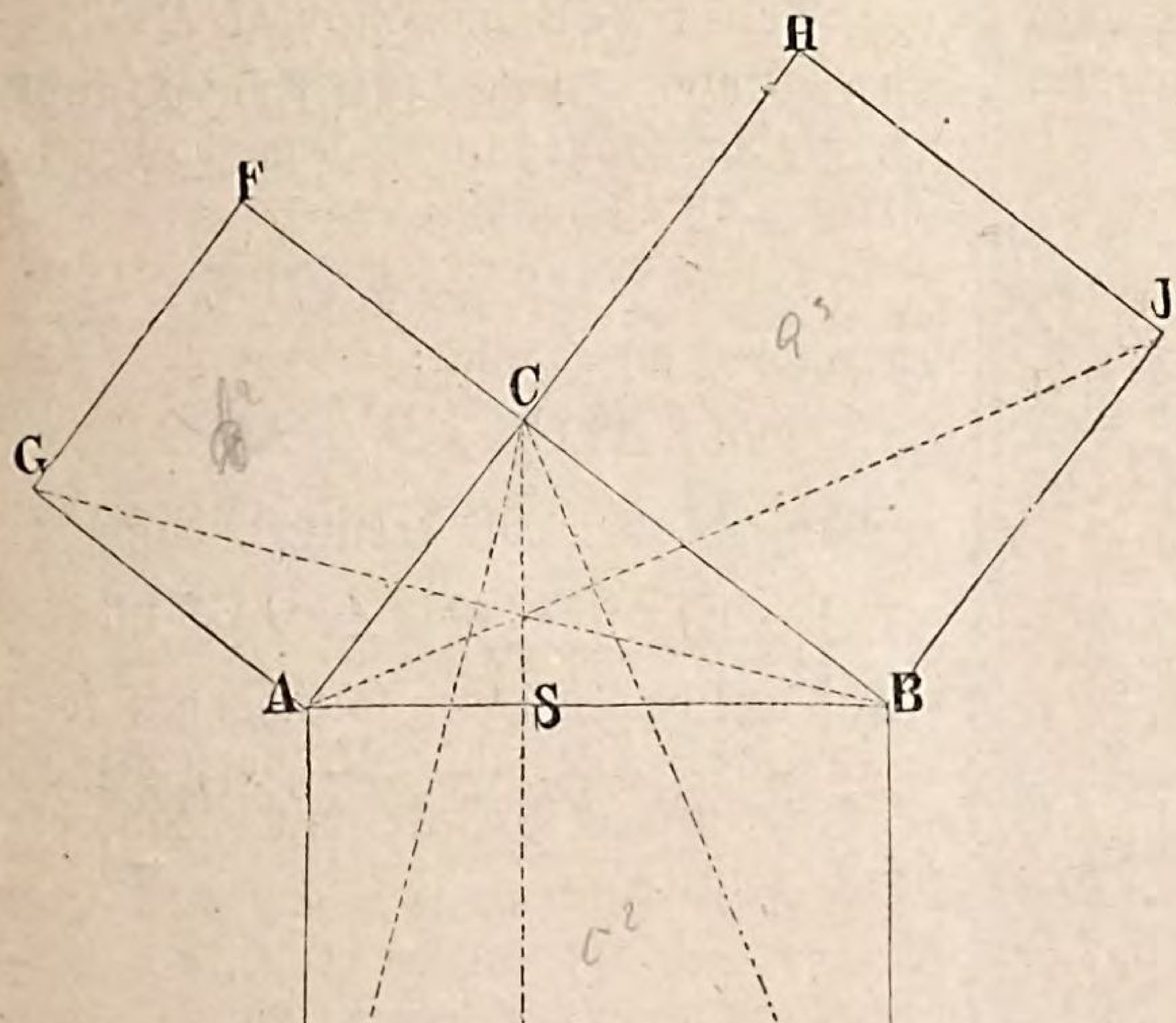


Fig. 13.

ABDE als Quadrat über AB,
ACFG als Quadrat über AC,
und BCHJ als Quadrat über BC

bezeichnen. Diese Bezeichnung wollen wir noch vervollständigen. Wenn wir im Dreieck ABC den Winkel ACB messen, so finden wir, daß er einen **Rechten** beträgt. Das Dreieck ABC ist mithin **rechtwinklig**. In einem rechtwinkligen Dreieck haben wir immer

die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, die **Hypotenuse**,
und die beiden anderen Seiten die **Katheten**

genannt.

In ABC ist demnach AB die Hypotenuse, und AC und BC sind die Katheten. Wenn wir die Ausdrücke: Hypotenuse und Katheten anwenden, so können wir daher sagen:

ABDE ist das **Quadrat über der Hypotenuse** AB,
ACFG ist das **Quadrat über der Kathete** AC,
BCHJ ist das **Quadrat über der Kathete** BC.

Wir behaupten nun, daß der Flächeninhalt des Quadrats über der Kathete AC zusammen mit dem Flächeninhalt des Quadrats über der Kathete BC gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse AB sei, in Zeichen, daß wir haben: ABDE = ACFG + BCHJ.

Die Richtigkeit dieser Behauptung werden wir aufzeigen, indem wir einen Beweis liefern von dem

Pythagoräischen Lehrsatz. Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Voraussetzung. Uns ist gegeben

das rechtwinklige Dreieck ABC,

über der Hypotenuse AB desselben das Quadrat ABDE,

über der Kathete AC das Quadrat ACFG,

und über der Kathete BC das Quadrat BCHJ.

Behauptung.

*) □ ABDE = □ ACFG + □ BCHJ.

Wir wollen für die Behauptung mehrere Beweise bringen, und dabei zunächst den Weg einschlagen, auf dem wahrscheinlich Pythagoras zu seinem berühmten Satze gelangt ist.

Beweis I. Um den Beweis zu führen, wollen wir durch C (siehe Fig. 13 Seite 387) zu AE eine Parallele legen, welche AB in S und DE in T schneiden möge. Wie wir sehen, wird durch diese Parallele das Hypotenusenquadrat ABDE in die beiden Rechtecke

ASTE und BSTD

zerlegt. Diese beiden Rechtecke sind für den Beweis wichtig; wir werden nämlich zeigen, daß jedes derselben gleich dem Quadrate über der anstoßenden Kathete ist, daß also die Gleichungen bestehen:

I. ASTE = □ ACFG

und II. BSTD = □ BCHJ.

Um den Beweis für die erste Gleichung zu liefern, ziehen wir die beiden Geraden BG und CE, und sehen dann zu, wie sich das

△ GAB zu dem □ ACFG

verhält. Wir bemerken zunächst, daß Dreieck GAB und Quadrat ACFG über **derselben Grundlinie** GA**) liegen; untersuchen wir, ob auch ihre Höhen die gleichen sind.

Wie wir wissen, beträgt jeder der Winkel FCA und ACB einen Rechten; FCB ist daher einem gestreckten Winkel gleich, d. h. die beiden Strecken FC und CB bilden eine einzige gerade Linie. Weil nun FC zu GA parallel ist, muß auch die ganze Strecke FB zu GA parallel sein. Dreieck GAB und Quadrat ACFG liegen daher zwischen denselben Parallelen GA und FB, d. h. sie haben **gleiche Höhe.**

*) □ ist das Zeichen für „Quadrat". **) Wir können bei einem Dreieck und Viereck jede Seite als Grundlinie ansehen, mithin auch in diesem Falle AG.

△ GAB und □ ACFG

haben also dieselbe (die **gleiche) Grundlinie** und die **gleiche Höhe.** Nach Seite 380 ist der Flächeninhalt eines Dreiecks halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das mit dem Dreieck gleiche Grundlinie und Höhe hat; mithin haben wir:

$$\triangle\ GAB = \tfrac{1}{2} \square\ ACFG$$

oder a) $\square\ ACFG = 2 \triangle\ GAB$*).

Prüfen wir jetzt, wie sich das Dreieck ACE zum Rechteck ASTE verhält! Der erste Blick lehrt uns, daß beide Figuren

über **derselben Grundlinie** AE stehen,

ferner

zwischen den Parallelen AE und CT liegen

und daher auch **gleiche Höhe** haben.

Dreieck ACE und Rechteck ASTE

haben daher dieselbe **(gleiche) Grundlinie** und **gleiche Höhe;** nach dem vorher angeführten Satz ist mithin:

$$\triangle\ ACE = \tfrac{1}{2}\ ASTE,$$

oder anders ausgedrückt:

b) $ASTE = 2 \triangle\ ACE$.

Vorher hatten wir ermittelt, daß

a) $\square\ ACFG = 2 \triangle\ GAB$ ist.

In den beiden letzten Gleichungen kommen die Dreiecke GAB und ACE vor; vergleichen wir diese beiden Dreiecke mit einander! In denselben ist:

1) GA = AC**),
2) AB = AE**).

Ferner ist: $\angle\ GAC = \angle\ BAE$***)
$\angle\ CAB = \angle\ CAB$

$\angle\ GAC + \angle\ CAB = \angle\ BAE + \angle\ CAB$†),

d. h. 3) $\angle\ GAB = \angle\ CAE$.

Die Gleichungen 1, 2 und 3 zeigen uns, daß die beiden Dreiecke GAB und CAE in zwei Seiten und in dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Nach dem ersten Congruenzsatz ist daher:

$$\triangle\ GAB \cong \triangle\ ACE.$$

*) Wenn ein Dreieck halb so groß ist wie ein Quadrat, so ist, anders ausgedrückt, das Quadrat doppelt so groß wie das Dreieck. **) Als Seiten ein und desselben Quadrates. ***) Als Rechte. †) Nach dem Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

Congruente Dreiecke sind auch flächengleich; es besteht daher die Gleichung:

$$\triangle GAB = \triangle ACE.$$

Gleiche Größen kann man für einander einsetzen; führen wir, gestützt auf diesen Grundsatz, in Gleichung

b) $ASTE = 2 \triangle ACE$

für $\triangle ACE$ das gleiche $\triangle GAB$ ein, so erhalten wir:

c) $ASTE = 2 \triangle GAB.$

Früher hatten wir gefunden, daß

a) $\square ACFG = 2 \triangle GAB$ ist.

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, folglich ist:

I. $ASTE = \square ACFG.$

Aehnlich können wir beweisen*), daß auch das Rechteck BSTD die gleiche Größe hat wie Quadrat BCHJ, in Zeichen, daß

II. $BSTD = \square BCHJ$ ist,

wir hatten I. $ASTE = \square ACFG$

$BSTD + ASTE = \square BCHJ + \square ACFG,$

d. h. $\square ABCD = \square BCHJ + \square ACFG,$

oder anders ausgedrückt:

$\square ABCD = \square ACFG + \square BCHJ$, w. b. w.

Beweis II. Wir wollen durch die Ecken D und E des Hypotenusenquadrats zu AC und BC Parallelen ziehen, welche sich in dem Punkte P treffen und die Verlängerungen der Katheten AC und BC in S und T schneiden mögen (siehe Fig. 14). Es entstehen dann die Dreiecke:

BSD, DPE, ETA.

Sehen wir zu, wie sich das erste dieser Dreiecke zum gegebenen rechtwinkligen Dreiecke ABC verhält! In den beiden Dreiecken ist:

1) $AB = BD$**),
2) $\gamma = \sigma$***),
3) $\alpha = \beta$†),

*) Die Linien AJ und CD, mit deren Hilfe der Beweis zu führen ist, sind in Fig. 13 gezogen; der Schüler wird nach einander zu zeigen haben, daß

$\square BCHJ = 2 \triangle JBA,$

ferner

Rechteck $BSTD = 2 \triangle BCD$

und endlich

$\triangle JBA = \triangle BCD$ ist.

Aus diesen drei Gleichungen ist dann leicht

Rechteck $BSTD = \square BCHJ$

abzuleiten. **) Weshalb? ***) Die Winkel γ und σ betragen beide einen Rechten. Aus welchem Grunde? †) Weshalb?

d. h. die beiden Dreiecke ABC und BSD stimmen in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln überein; sie sind daher nach dem dritten Congruenzsatze congruent, in Zeichen, wir haben:

$$\triangle ABC \cong \triangle BSD.$$

Ganz ähnlich können wir beweisen*), daß

$\triangle BSD \cong \triangle DPE$ und $\triangle DPE \cong \triangle ETA$

sei. Wir haben mithin:

$$\triangle ABC \cong \triangle BSD \cong \triangle DPE \cong \triangle ETA.$$

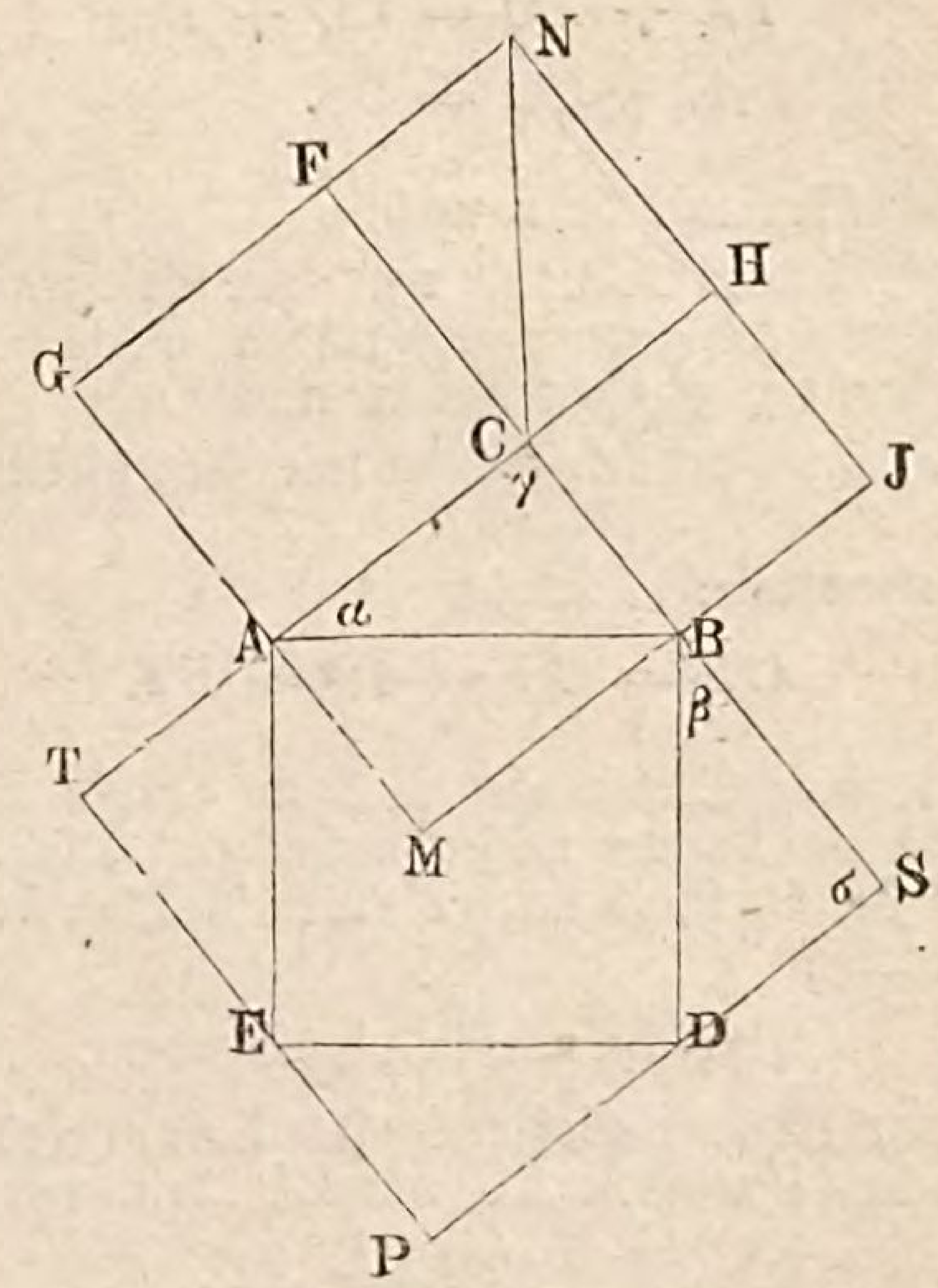


Fig. 14.

Zu diesen congruenten Dreiecken wollen wir noch eine zweite Reihe hinzufügen, indem wir GA über A, JB über B, GF über F und JH über H hinaus verlängern. Die Verlängerungen von GA und JB mögen sich in M, die Verlängerungen von GF und JH in N schneiden. Es entstehen dann die Dreiecke

ABM, FCN und CHN

und zwar ist leicht zu zeigen, daß:

$\triangle ABC \cong \triangle ABM \cong \triangle FCN \cong \triangle CHN$ ist.

Im Ganzen haben wir also:

$$\triangle ABC \cong \triangle BSD \cong \triangle DPE \cong \triangle ETA \cong \triangle ABM \cong \triangle FCN \cong \triangle CHN.$$

Congruente Figuren sind auch flächengleich, mithin ist:

$$\triangle ABC = \triangle BSD = \triangle DPE = \triangle ETA = \triangle ABM = \triangle FCN = \triangle CHN.$$

Betrachten wir jetzt das Viereck CSPT; zwei Seiten desselben sind CT und CS; und zwar ist:

$$CT = TA + AC$$
und $$CS = CB + BS.$$

*) Der Schüler möge die Richtigkeit dieser Congruenzen beweisen.

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke ETA und ACB folgt nun, daß

TA = CB ist.

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke ACB und BSD folgt ferner, daß

AC = BS ist.

Mithin haben wir:

$$\begin{aligned} TA &= CB \\ AC &= BS \text{ ist} \\ \hline TA + AC &= CB + BS, \end{aligned}$$

d. h. CT = CS.

Bedenken wir dazu noch,

daß Viereck CSPT ein Parallelogramm ist, weil wir die gegenüberliegenden Seiten parallel zu einander gezogen haben, und

daß im Parallelogramm die Gegenseiten gleich sind,

so erhalten wir:

CT = CS = SP = PT.

Die vier Seiten des Vierecks CSPT sind also einander gleich; wir wissen außerdem, daß die vier Winkel bei C, P, S und T einen Rechten betragen. Das Viereck

CSPT ist mithin ein Quadrat,

und zwar ist **jede Seite dieses Quadrates gleich den beiden Katheten** AC und BC, denn wir haben:

CT = TA + AC,

und wenn wir für TA die gleiche Große BC einsetzen:

CT = BC + AC.

Ganz ebenso verhält es sich bei dem Quadrate GMJN; auch hier ist **jede der Seiten gleich der Summe der beiden Katheten** AC und BC*).

Quadrate, deren **Seiten gleich** sind, müssen mit einander **congruent** sein, mithin haben wir:

□ CSPT ≅ □ GMJN,

also auch: □ CSPT = □ GMJN.

Wenn wir nun vom CSPT die **vier Dreiecke** ABC, BSD, DPE und ETA abziehen, so bleibt das Quadrat ABCD übrig. Werden von GMJN die **vier**, den vorigen **gleichen Dreiecke** ABC, AMB, FCN, CHN abgezogen, so bleiben als Rest die beiden Quadrate ACFG und BCHJ.

Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches, mithin ist:

□ ABCD = □ ACFG + □ BCHJ, w. b. w.

Beweis III. Den dritten Beweis können wir liefern, indem wir das Hypotenusenquadrat wie die beiden Kathetenquadrate in eine Anzahl Dreiecke zerlegen und dann nachweisen, daß jedem Dreieck im Hypotenusenquadrat ein Dreieck in den beiden Kathetenquadraten entspricht.

Um diese Zerlegung auszuführen, wollen wir EA über A hinaus um AM, und DB über B hinaus um BN verlängern. Darauf wollen wir durch M zu AB die Parallele MP, durch D zu BC die Parallele DQ, durch E zu AC die Parallele ER und durch B zu AC die Parallele BS legen.

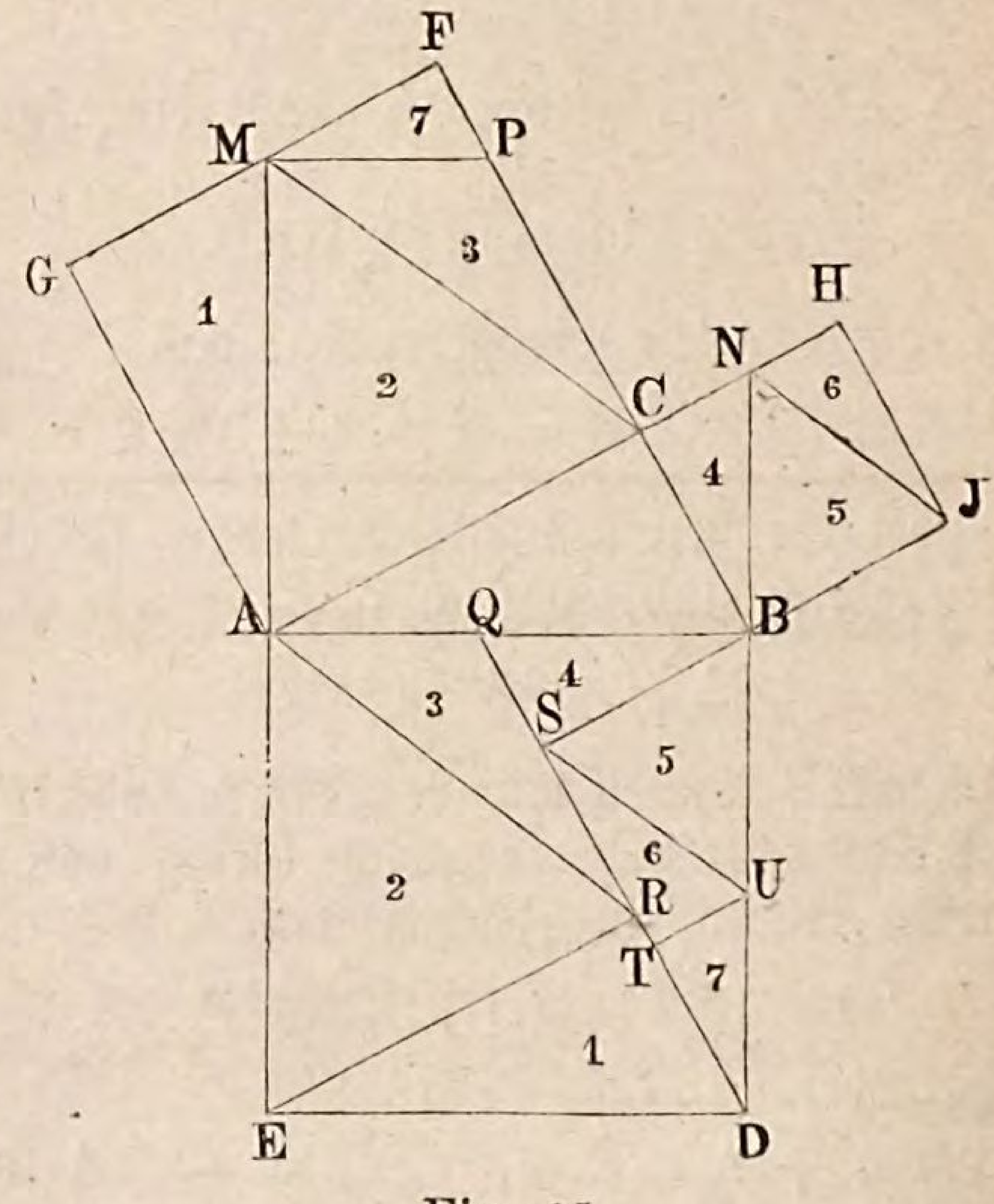


Fig. 15.

Hiernach schneiden wir von BD die Strecke BU = BN ab, ziehen durch U zu CA die Parallele UT und verbinden die Punkte A und R, S und U, M und C, N und J durch Gerade. In dem Hypotenusenquadrat sind dadurch 7 Dreiecke entstanden, die wir mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 bezeichnet haben.

Jedem der sieben Dreiecke entspricht in den Kathetenquadraten ein Dreieck, welches mit derselben Ziffer benannt ist. Wir behaupten nun, daß die mit denselben Ziffern bezeichneten Dreiecke congruent sind. Den Beweis dafür wollen wir nur in kurzen Zügen andeuten und die Ausführung dem Schüler überlassen, und zwar wird der Schüler dabei am besten verfahren, wenn er beim Beweise die Reihenfolge innehält, welche durch die 7 Ziffern angegeben ist. Er wird also zunächst zu beweisen haben, daß

△ ERD ≅ △ AGM ist.

Um dies zu beweisen, muß der Schüler zeigen, daß sowohl Dreieck ERD wie Dreieck AGM dem Dreieck ABC congruent ist. Mit Hilfe der zuerst bewiesenen Congruenz wird der Schüler leicht zeigen können, daß auch

2) △ AER ≅ △ MAC ist.

Im Anschluß daran ist dann zu beweisen, daß

3) △ ARQ ≅ △ MCP ist.

Um viertens darzuthun, daß

△ BCN ≅ △ BSQ

ist, muß erst nachgewiesen werden, daß

△ ABN ≅ △ QBD

*) Der Schüler möge ausführlich zeigen, daß das Viereck GMJN ein Quadrat darstellt und daß jede Seite dieses Quadrates gleich der Summe der beiden Katheten AC und BC ist.

ist. Der Nachweis der übrigen Congruenzen fordert noch eine lange Reihe von Erwägungen, in denen wir dem Schüler nicht vorgreifen wollen. Sollte es ihm nicht glücken, alle 7 Congruenzen nachzuweisen, so wird er in den Auflösungen der Aufgaben, die den Anfang des nächsten Briefes bilden, hinreichende Andeutungen finden, die ihn in den Stand setzen, in allen Einzelheiten den erforderlichen Beweis zu liefern.

Bemerkung. Den ersten Beweis, welchen wir für den Pythagoräischen Lehrsatz gebracht haben, werden wir in der nächsten Lection noch benutzen, um ein Rechteck in ein Quadrat und ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln.

Ein mathematischer Satz ist unumstößlich; er bleibt zu allen Zeiten eine Wahrheit.

Lection 45.

A. Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes.

§ 35. Die Summe zweier Quadrate. Der Pythagoräische Lehrsatz bietet uns ein Mittel, eine Lösung zu geben von der

Aufgabe. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, welches so groß ist wie **zwei gegebene Quadrate** zusammen.

Voraussetzung. Uns sind zwei Quadrate über AC und BC gegeben. (In Fig. 1 sind nur die Strecken AC und BC gezeichnet, die darüber stehenden Quadrate möge sich der Schüler hinzudenken.)

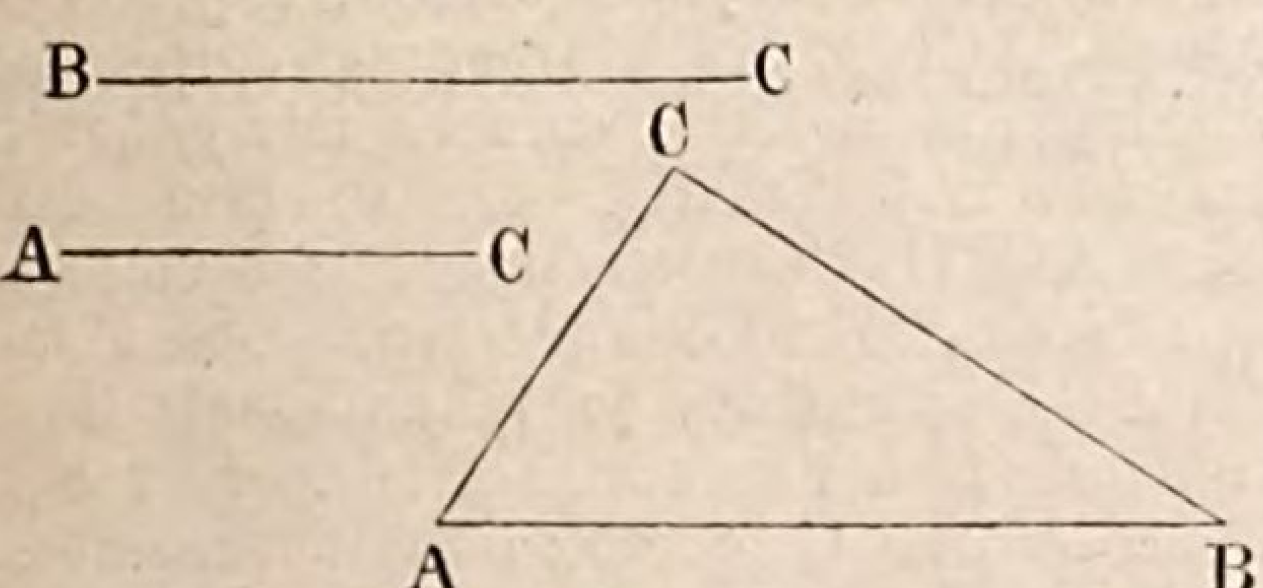


Fig. 1.

Forderung. Wir sollen ein Quadrat construiren, welches gleich der Summe der beiden über AC und BC errichteten Quadrate ist.

Analysis. Wenn wir AC und BC zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks machen, so ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz das Quadrat über der zugehörigen Hypotenuse AB gleich der Summe der beiden Quadrate über AC und BC.

Construction. Wir zeichnen uns ein rechtwinkliges Dreieck und nennen die Spitze desselben C. Von C aus schneiden wir dann auf dem einen Schenkel die Strecke AC und auf dem andern die Strecke BC ab und ziehen die Gerade AB.

Behauptung. Das Quadrat über AB ist so groß wie die beiden Quadrate über AC und BC zusammen. Der **Beweis** liegt in der Analysis.

§ 35. Die Differenz zweier Quadrate. Gehen wir auf Fig. 13 in der vorigen Lection zurück. Weil ACB ein rechtwinkliges Dreieck ist, muß

$$\square\, ABDE = \square\, ACFG + \square\, BCHJ$$

sein. Wir haben ferner:

$$\square\, BCHJ = \square\, BCHJ.$$

Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches, folglich ist:

$$\square\, ABDE - \square\, BCHJ$$
$$= \square\, ACFG + \square\, BCHJ - \square\, BCHJ$$

d. h. $\square\, ABDE - \square\, BCHJ = \square\, ACFG$,

oder anders geschrieben:

$$\square\, ACFG = \square\, ABDE - \square\, BCHJ.$$

$\square$ ACFG ist **ein Kathetenquadrat,**
$\square$ ABDE ist das **Hypotenusenquadrat,**
$\square$ BCHJ ist das **andere Kathetenquadrat.**

Die letzte Gleichung sagt uns also:

Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist das eine Kathetenquadrat gleich dem Hypotenusenquadrate vermindert um das andere Kathetenquadrat.

Wenn wir uns etwas anders ausdrücken, erhalten wir den

Lehrsatz I. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat gleich der Differenz des Hypotenusenquadrates und des andern Kathetenquadrates.

Wir wollen diesen Satz sogleich benutzen, um eine Lösung zu geben von der

Aufgabe. Es soll ein **Quadrat** construirt werden, welches **gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate** ist.

Voraussetzung. Uns sind zwei Quadrate

über den Strecken a und c gegeben (siehe Fig. 2).

Forderung. Wir sollen ein Quadrat zeichnen, das gleich der Differenz der beiden Quadrate über c und a ist.

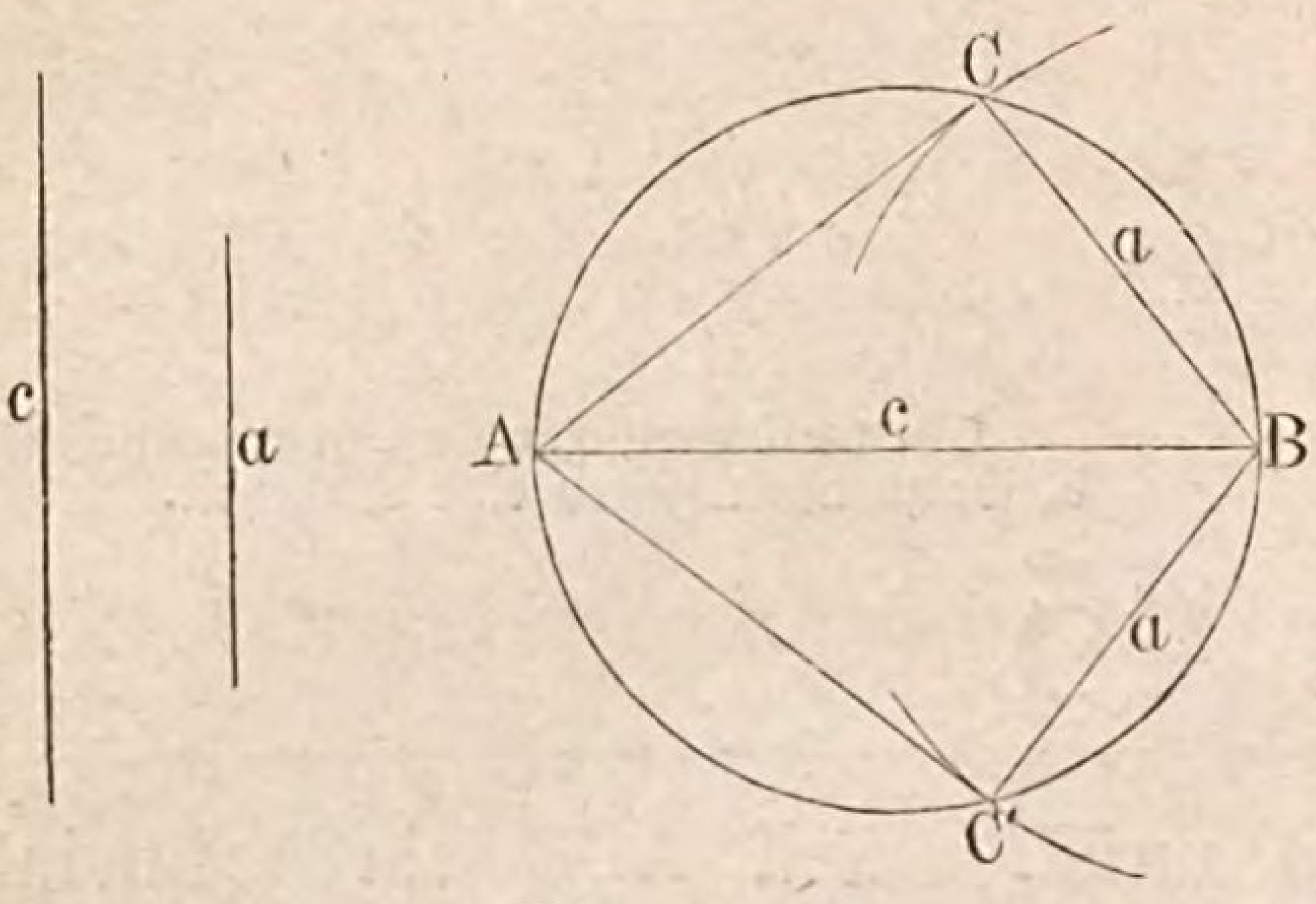


Fig. 2.

Analysis. Machen wir von den gegebenen Strecken c und a die größere c zur Hypotenuse und die kleinere a zur einen Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, so genügt gemäß Lehrs. I das Quadrat über der andern Kathete der Forderung.

Construction. Wir legen uns die Strecke AB = c hin, machen AB zum Durchmesser eines Kreises und schlagen um B mit a einen Kreis, der den ersten Kreis in den Punkten C und C' durchschneiden möge. Darauf verbinden wir A mit C und C' geradlinig und stellen die

Behauptung auf, daß die Quadrate über AC und AC' gleich der Differenz der Quadrate über c und a seien.

Beweis. Die Peripheriewinkel im Halbkreise sind einem Rechten gleich; mithin ist:

$$\angle ACB = R$$
$$\text{und } \angle AC'B = R,$$

d. h. die beiden Dreiecke ACB und AC'B sind rechtwinklig; AC und AC' sind Katheten dieser rechtwinkligen Dreiecke. Das Quadrat über AC ist mithin nach Lehrs. I gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse AB = c und über der Kathete BC = a, und ebenso ist das Quadrat über AC' gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse AB = c und über der Kathete BC = a. Die beiden Quadrate über AC und AC' entsprechen somit der Forderung.

Aufgaben zu § 34 und § 35. 1) Der Schüler möge ein Quadrat construiren, welches

a) doppelt so groß,
b) fünfmal so groß

ist wie ein gegebenes Quadrat; er möge

2) ein Quadrat zeichnen, das die Summe dreier gegebenen Quadrate darstellt; er möge

3) ein Quadrat construiren, welches so groß ist wie ein gegebenes Quadrat vermindert um zwei andere gegebene Quadrate.

§ 37. Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat. Für den Pythagoräischen Lehrsatz brachten wir drei Beweise; um den ersten Beweis zu führen, haben wir (siehe Fig. 13 der ersten Lection) durch die Spitze C des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu der Seite AE des Hypotensenquadrats die Parallele CT gelegt, durch welche das Hypotenusenquadrat in die beiden Rechtecke ASTE und BSTD zerlegt wird. Wir zeigten dann, daß

das Rechteck ASTE dem Kathetenquadrat ACFG,
das Rechteck BSTD dem Kathetenquadrat BCHJ

gleich ist, daß also

jedes der beiden Rechtecke ASTE und BSTD **denselben Flächeninhalt** hat wie das **Kathetenquadrat,** mit dem es an der einen Ecke zusammenstößt. Diese Beobachtung können wir verwerthen, um eine Lösung zu geben von der

Aufgabe. Ein Rechteck soll in ein **Quadrat mit demselben Flächeninhalt** verwandelt werden.

Voraussetzung. Uns ist (siehe Fig. 13 der vorigen Lection) das Rechteck ASTE gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Quadrat construiren, das dem Rechteck ASTE flächengleich ist.

Analysis. Wir wissen bereits, daß das Kathetenquadrat ACFG der Forderung entspricht; um unsere Aufgabe zu lösen, werden wir daher untersuchen, auf welche Weise wir zu dem Kathetenquadrate ACFG gelangen, wenn wir von dem gegebenen Rechteck ASTE ausgehen. Haben wir erst den Punkt C ermittelt, so fällt uns die Construction des gesuchten Quadrates leicht. Wir brauchen dann nur A und C geradlinig zu verbinden und über AC ein Quadrat zu errichten. Den Punkt C werden wir als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen. Der eine Ort ist, wie wir sogleich bemerken, die Verlängerung der Seite TS des gegebenen Rechtecks. Den andern Ort finden wir, wenn wir bedenken, daß in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC die Seite AB die Hypotenuse und der Punkt C die Spitze ist und daß die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, die über einer gemeinsamen Hypotenuse stehen, in dem Kreise liegen, welcher über der gemeinsamen Hypotenuse als Durchmesser beschrieben wird*).

Die Seite AB ist uns zwar nicht gegeben; wir können sie aber leicht erhalten, wenn wir die kleine Seite AS des gegebenen Rechtecks ASTE soweit verlängern, bis sie gleich der größern Seite AE wird.

Construction. In dem gegebenen Rechteck ASTE ziehen wir zunächst die Gerade ASB = AE (siehe Fig. 3). Darauf beschreiben wir um den Mittelpunkt von AB mit der Hälfte von AB einen Kreis,

---

*) Siehe Seite 363.

von dem wir uns nur den obern Halbkreis zeichnen. Hiernach verlängern wir TS über S hinaus, nennen den Punkt, in dem diese Verlängerung den Halbkreis schneidet, C, verbinden A mit C geradlinig und errichten über AC ein Quadrat.

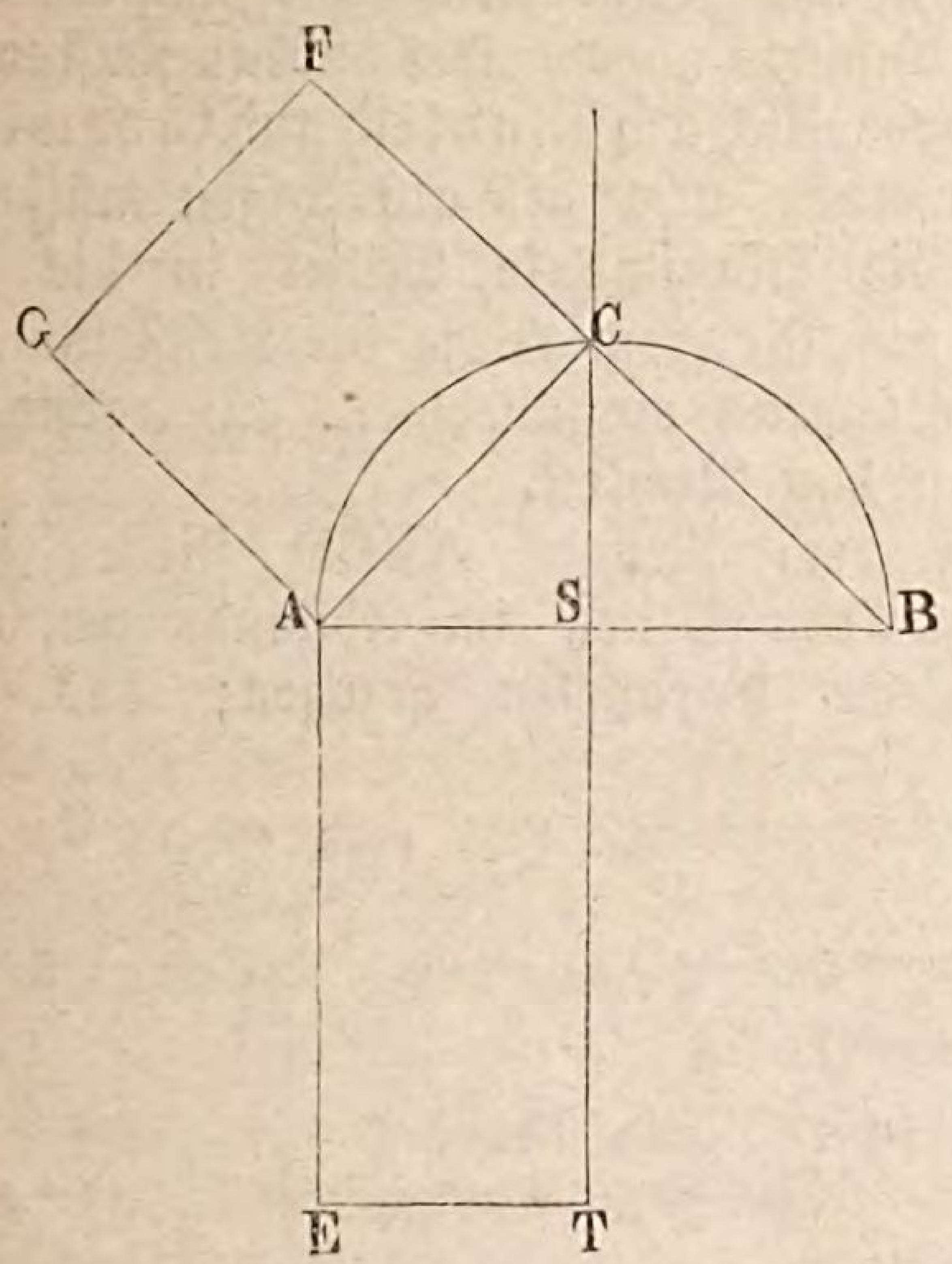


Fig. 3.

Behauptung. Das Quadrat über AC ist gleich dem gegeben Rechtecke ASTE.

Der **Beweis** liegt in der Analysis.

§ 38. Die Verwandlung des Quadrates in ein Rechteck. Im letzten Paragraphen haben wir gelehrt, wie wir ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln können; wir wollen jetzt den umgekehrten Fall behandeln und eine Lösung geben von der

Aufgabe. Ein gegebenes Quadrat soll in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden, von dem wir eine Seite kennen, die größer ist als die Quadratseite.

Um die Lösung zu finden, wollen wir wieder die Figur 13 der vorigen Lection benutzen, mit deren Hilfe wir den ersten Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz geführt haben.

Voraussetzung. Uns ist das Quadrat ACFG und die Strecke AE gegeben, und zwar ist

AE >*) AC:

Forderung. Wir sollen das Quadrat ACFG in ein flächengleiches Rechteck verwandeln, dessen eine Seite die Strecke AE ist.

Analysis. Aus dem ersten Beweise für den den Pythagoräischen Lehrsatz wissen wir, daß das Rechteck ASTE der Forderung genügt, weil es ebenso groß ist wie das gegebene Quadrat ACFG und auch die Seite AE hat. Wir müssen also untersuchen, auf welche Weise wir das Rechteck ASTE aus dem Quadrate ACFG herleiten können. Um den ersten Anhalt für die Construction zu gewinnen, wollen wir das rechtwinklige Dreieck ACB construiren, indem wir FC über C hinaus verlängern und, in Erwägung, daß AB gleich der gegebenen Strecke AE ist, mit AE um A einen Kreis schlagen. Können wir jetzt noch den Punkt S auf der Seite AB ermitteln, so bietet die Construction weiter keine Schwierigkeiten mehr, denn wir kennen dann zwei anstoßende Seiten AS und AE des Rechtecks ASTE. Diesen Punkt S finden wir aber, wenn wir bedenken, daß CS die Hypotenuse AB unter rechten Winkeln schneidet, daß also CS auf AB senkrecht steht.

Die **Construction** möge der Schüler selbst ausführen.

Bemerkung. Die Construction gestaltet sich ganz anders, wenn uns von dem Rechteck ASTE, das dem gegebenen Quadrat ACFG gleich werden soll, nicht die größere Seite AE, sondern die kleinere AS bekannt ist. Wir können dann nicht das rechtwinklige Dreieck ABC zunächst construiren, weil wir nicht AB (= AE) kennen, vielmehr müssen wir uns in diesem Falle zuerst das rechtwinklige Dreieck ACS zeichnen, von dem uns die Hypotenuse AC und die Kathete AS gegeben ist.*) Haben wir erst dieses Dreieck, so läßt sich der Punkt B leicht als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darstellen; und zwar ist der eine Ort die Verlängerung von AS, der andere Ort die Verlängerung von FC. Ist der Punkt B ermittelt, so haben wir auch AB und damit die gleiche Rechteckseite AE. Uns sind dann von dem Rechteck ASTE die beiden anstoßenden Seiten AS und AE bekannt; aus diesen beiden Seiten läßt sich das Rechteck leicht construiren. Wir brauchen nur an AS in Punkt A einen Rechten anzutragen, den freien Schenkel gleich AE zu machen, durch E zu AS und durch S zu AE eine Parallele zu legen, die sich in T schneiden.

B. Die Messung des Flächeninhaltes.

§ 39. Die Flächeneinheiten. Wenn eine **Linie** gemessen werden soll, so wird sie, wie wir bereits auf Seite 35 besprochen, mit einer **andern,** fest bestimmten **Linie** verglichen, welche man den **Maßstab** oder die **Längeneinheit** nennt. Will man **Flächen** messen, so muß man sie demnach mit einer **andern,** fest bestimmten **Fläche** vergleichen, die dann das **Flächenmaß** oder auch die **Flächeneinheit** heißt; genauer gesagt,

man muß untersuchen, **wie oft** das Flächenmaß oder die Flächeneinheit in der zu messenden Fläche **enthalten** ist.

Die **Flächeneinheit** oder das **Flächenmaß** kann ganz willkürlich gewählt werden; man könnte die Fläche eines Kreises mit bestimm-

*) > bedeutet: größer als.

*) Siehe § 18.

tem Radius oder die Fläche eines Dreiecks von bestimmter Gestalt und Größe als Flächenmaß verwenden. Die Erfahrung lehrt aber, daß man am practischsten verfährt, wenn man die Flächeneinheiten mit den Längeneinheiten in Verbindung bringt und

als Flächeneinheiten Quadrate ansieht, deren Seiten der Längeneinheit gleich sind.

Als **Längeneinheiten** gebrauchte man früher

die Meile, die Ruthe, den Fuß,
den Zoll, die Linie ꝛc.

Diesen Längeneinheiten entsprechen als **Flächeneinheiten:**

die □-Meile, die □-Ruthe, der □-Fuß,
der □-Zoll, die □-Linie ꝛc.

gesprochen:

Quadrat-Meile, Quadrat-Ruthe, Quadrat-Fuß,
Quadrat-Zoll, Quadrat-Linie ꝛc.

Wie wir bereits auf Seite 36 schilderten, hat es bis vor kurzer Zeit eine verwirrende Anzahl von Längeneinheiten gegeben. Durch Einführung des Metersystems, dem sich jetzt selbst die Türkei anschließen will, ist der Verwirrung ein Ziel gesetzt worden; damit ist auch Ordnung in die Flächenmaße gekommen. Dem

Kilometer, Hektometer, Dekameter,
Km Hm Dm

Meter, Decimeter, Centimeter, Millimeter,
m dm cm mm

entspricht ein:

□-Kilometer, □-Hectometer, □-Dekameter,
□Km*) □Hm*) □Dm

□-Meter, □-Decimeter, □-Centimeter, □-Millimeter.
□m □dm □cm □mm

Ein Quadratdekameter nennt man auch wohl **„Ar"**, ein Flächenstück von 100 Aren **Hectar.**

§ 40. Die Messung des Flächeninhaltes beim Rechteck. Wenn wir ein gegebenes Flächenstück messen und dabei das Quadrat-Centimeter als Flächeneinheit benutzen wollen, müssen wir zusehen, wie oft das Quadrat-Centimeter in dem gegebenen Flächenstück enthalten ist. Um dies zu ermitteln, könnten wir Quadrate, dessen Seiten die Länge eines Centimeters haben, so lange auf das zu messende Flächenstück legen, bis es ganz mit diesen Quadraten bedeckt ist. Würden etwa 75 Quadrat-Centimeter in die zu messenden Fläche hineingehen, so hätte sie einen

Flächeninhalt von 75 □cm.

Aehnliche Methoden der Messung wird man gewiß anfangs angewendet haben; sie sind aber außerordentlich umständlich und langwierig. Wir werden uns deshalb fragen müssen, ob nicht die Planimetrie Mittel in die Hand giebt, auf kürzerem Wege die Feststellung des Flächeninhaltes vorzunehmen. Betrachten wir zunächst das **Rechteck.**

In dem Rechteck ABCD (siehe Fig. 4) sind zu den Seiten im Abstande von einem Centimeter Parallelen gezogen; das ganze

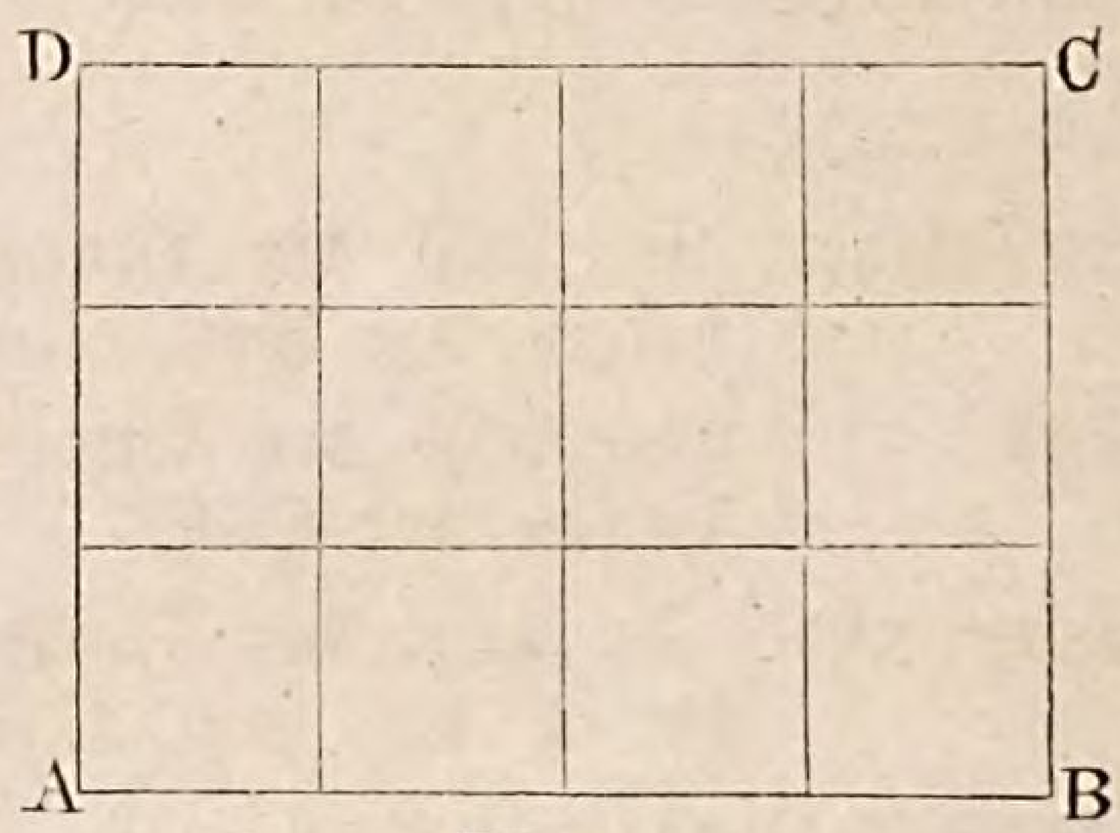


Fig. 4.

Rechteck ist dadurch in 12 Quadrate zerlegt, deren jedes einen Quadrat-Centimeter darstellt. Diese zwölf Quadrate zeigen uns mithin, daß das Rechteck ABCD

12 □cm groß ist.

Betrachten wir jetzt die beiden anstoßenden Seiten AB und BC.

AB ist **4** Centimeter lang
und BC ist **3** Centimeter lang.

Es ist **4 × 3 = 12.**

Wenn wir also die

4 d. h. die Anzahl der **Centimeter,** welche die Länge der Seite AB angeben, mit der

3 d. h. mit der Zahl der **Centimeter,** welche die Seite BC mißt,

multipliciren, so erhalten wir

12 d. h. die Anzahl der **Quadrat-Centimeter,** welche den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD ausdrücken.

Das **Centimeter** ist die **Längeneinheit** oder das **Längenmaß** für die Seiten AB und BC; das **Quadrat-Centimeter** ist die **entsprechende Flächeneinheit** oder das **Flächenmaß** für das ganze Rechteck ABCD.

*) Wird gesprochen: Quadrat-Kilometer, Quadrat-Hektometer u. s. w.

Wenn wir also bei dem Rechteck ABCD die Zahlen (3 und 4), welche die **Längeneinheiten der beiden anstoßenden Seiten** AB und BC angeben, mit einander **multipliciren**, so ergiebt sich die **Zahl der Flächeneinheiten des ganzen Rechtecks** ABCD.

Erwägen wir, daß wir AB als die **Grundlinie** und BC als die **Höhe** des Rechtecks ansehen können, so läßt sich der eben angeführte Satz folgendermaßen formuliren:

Bei dem Rechteck ABCD ist die Zahl der Längeneinheiten der **Grundlinie** AB **multiplicirt** mit der Zahl der Längeneinheiten der **Höhe** BC gleich der Zahl der Flächeneinheiten des ganzen Rechtecks ABCD.

Indem man nun

unter **Grundlinie** die **Zahl der Längeneinheiten der Grundlinie,**

unter **Höhe** die **Zahl der Längeneinheiten der Höhe,**

unter **Flächeninhalt** die **Zahl der Flächeneinheiten der ganzen Fläche**

versteht, kann man auch sagen:

Bei einem **Rechteck** ist die **Grundlinie** multiplicirt mit der **Höhe** gleich dem **Flächeninhalt.**

Führen wir noch den Ausdruck „Product“ ein, so haben wir den

Lehrsatz II. Bei einem Rechteck ist das Product aus Grundlinie und Höhe gleich dem Flächeninhalt.

Haben wir ein Rechteck, dessen Grundlinie 7 Centimeter und dessen Höhe 5 Centimeter beträgt, so muß demnach der Flächeninhalt des Rechtecks gleich 7 × 5 d. h. gleich 35 **Quadrat**centimetern sein.

Hat die Grundlinie eines Rechtecks 21 Meter, die Höhe 2 Meter Länge, so beträgt der Flächeninhalt 21 × 2 d. h. 42 **Quadrat**meter.

Ist die Grundlinie gleich 10, die Höhe gleich 7 Millimetern, so ist der Flächeninhalt gleich 10 × 7 d. h. gleich 70 **Quadrat**millimetern.

Bemerkung. Die Zahl, welche die Längeneinheiten einer Linie bez. die Flächeneinheiten einer Fläche angiebt, wird auch wohl die **Maßzahl** der Linie bez. der Fläche genannt. Ist eine Linie 20 Meter lang, so ist 20 ihre Maßzahl und „Meter“ die Längeneinheit, mit der ihre Länge gemessen wird.

Hat eine Fläche 725 Quadratmillimeter Inhalt, so ist 725 die Maßzahl und „Quadratmillimeter“ die Flächeneinheit.

Die Maßzahl ändert sich mit der Längeneinheit bez. der Flächeneinheit, auf welche sie bezogen wird. Eine Linie, die eine Länge von

2 Metern hat, ist zugleich
20 Decimeter
und 200 Centimeter

lang. Geben wir die Länge nach Metern an, so ist demnach 2 die Maßzahl der Linie; wird die Länge aber nach Decimetern bez. Centimetern gerechnet, so erhalten wir 20 bez. 200 als Maßzahl.

Um den Flächeninhalt eines Rechtecks zu erhalten, haben wir immer die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multiplicirt. Es ist dabei aber nöthig, daß die **Maßzahlen auf dieselbe Längeneinheit bezogen werden.** Man darf nicht etwa die Grundlinie nach Metern und die Höhe nach Centimetern rechnen. Ist Grundlinie und Höhe nach verschiedenen Längeneinheiten angegeben, so ist es nöthig, die **Längeneinheiten** mit einander **auszugleichen.** Wissen wir z. B., daß in dem Rechteck die Grundlinie 2 Meter und die Höhe 3 Decimeter beträgt, so werden wir die 2 Meter in Decimeter verwandeln. 2 Meter sind gleich 20 Decimetern. Wir werden nun 20 mit 3 multipliciren; 20 mal 3 giebt 60; der Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Grundlinie 2 Meter und dessen Höhe 3 Decimeter lang ist, beträgt mithin 60 **Quadrat**decimeter.

Betrachten wir noch kurz das Resultat, zu welchem wir gelangen, wenn wir bei einem Rechteck die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliciren; wie wir wissen, ergiebt sich die Maßzahl der Rechtecksfläche d. h. die Anzahl der Flächeneinheiten, welche in dem Rechteck enthalten sind, und zwar entsprechen diese Flächeneinheiten ganz den Längeneinheiten, nach welchen Grundlinie und Höhe gerechnet werden. Rechnen wir Grundlinie und Höhe nach

Zoll, Fuß, Ruthe,
Centimeter, Meter, Dekameter,

so erhalten wir eine gewisse Anzahl von

□-Zoll, □-Fuß, □-Ruthen,
□-Centimeter, □-Meter, □-Dekameter (Aren)

als Ausdruck für den Flächeninhalt.

Aufgaben. Der Schüler möge den Inhalt eines Rechtecks berechnen, wenn

a) die Grundlinie 15 m, die Höhe 3 m,
b) die Grundlinie 4 dm, die Höhe 2 dm,
c) die Grundlinie 2 cm, die Höhe 23 cm,
d) die Grundlinie 8 Fuß, die Höhe 4 Fuß,
e) die Grundlinie 3 Zoll, die Höhe 16 Zoll,
f) die Grundlinie $\frac{1}{2}$ Ruthe, die Höhe 4 Ruthen,
g) die Grundlinie $\frac{3}{4}$ Meile, die Höhe $\frac{4}{5}$ Meilen

beträgt.

§ 41. Das Quadrat. Indem wir die Grundlinie, die Höhe und den Flächeninhalt als „die Maßzahl der Grundlinie, der Höhe und des Flächeninhalts“ auffaßten, konnten wir den Satz aufstellen:

Bei einem **Rechteck** ist der Flächeninhalt gleich dem Producte von Grundlinie und Höhe.

Nennen wir den **Flächeninhalt** F, die **Grundlinie** G und die **Höhe** H, so haben wir mithin die Formel:

$$F = G . H.$$

Ein **Quadrat** ist ein **Rechteck**, in dem **alle Seiten** einander **gleich** sind; vom Quadrat gilt also auch der Satz:

$$F = G . H,$$

in Worten: Der **Flächeninhalt** ist gleich dem **Producte aus Grundlinie und Höhe.**

In dem Quadrat BCDE (siehe Fig. 5) kann BC als Grundlinie und CD als Höhe angesehen werden, mithin ist:

$$\square \, BCDE = BC . CD.$$

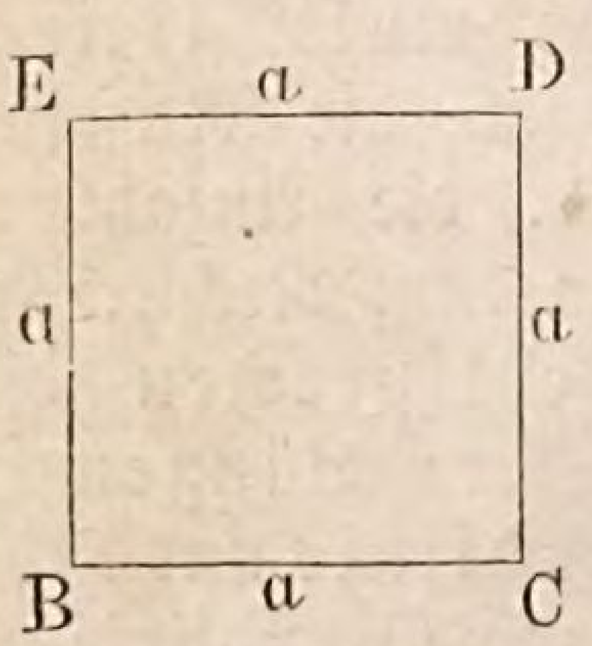


Fig. 5.

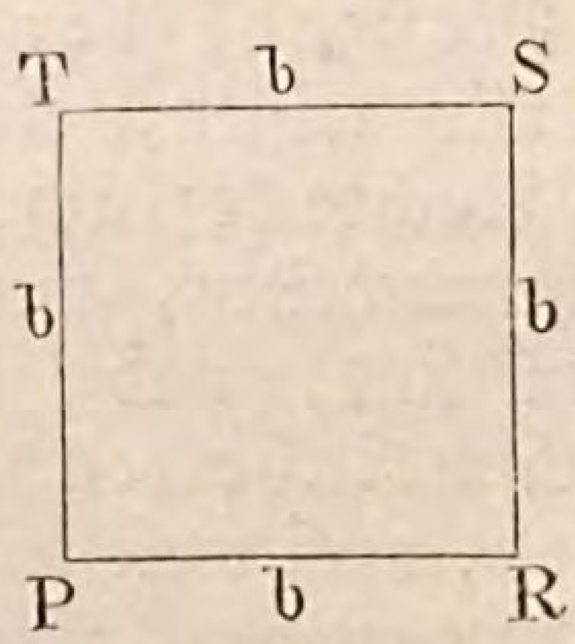


Fig. 6.

Alle Seiten haben beim Quadrate BCDE die Größe a; setzen wir in der letzten Gl. a für BC und CD ein, so erhalten wir:

$$\square \, BCDE = a . a = a^2.$$

In Fig. 6 sehen wir das Quadrat PRST; PR können wir als Grundlinie und RS als Höhe auffassen; mithin ist:

$$\square \, PRST = PR . RS.$$

Jede der Seiten ist gleich b; wir können darum b für PR und RS einführen, es ergiebt sich dann:

$$\square \, PRST = b . b = b^2.$$

Im nächsten Briefe werden wir auf den Flächeninhalt des Quadrats näher eingehen, und uns dann zur Messung des Flächeninhalts der Parallelogramme und Dreiecke wenden.

C. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, fuhren wir fort, die Lehre von der Flächengleichheit zu behandeln. Im letzten Paragraphen des vorigen Briefes hatten wir bewiesen, daß ein Dreieck halb so groß ist wie ein Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Aus diesem Lehrsatze leiteten wir unmittelbar den Satz ab, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind. Wir formten dann diesen Satz so um, daß er uns einen wichtigen geometrischen Ort lieferte, und brachten diesen neuen geometrischen Ort sogleich bei einigen Verwandlungsaufgaben in Anwendung. Wir verwandelten ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges, brachten noch ein ähnliches Beispiel und stellten dann einige Aufgaben, deren Lösung wir dem Schüler überließen. Darauf gingen wir zu den Ergänzungsparallelogrammen über, bewiesen, daß Ergänzungsparallelogramme einander gleich sind, und erläuterten an einem Beispiel, wie man den Satz über die Ergänzungsparallelogramme für die Lösung von Constructionsaufgaben verwerthen kann. Im dritten Abschnitt der vierundvierzigsten Lection wandten wir uns sodann dem Pythagoräischen Lehrsatze zu, dem wichtigen Satze, der für alle Theile der Geometrie gleiche Bedeutung hat. Wir gaben für denselben zwei Beweise und deuteten einen dritten an.

In dem ersten Abschnitt der fünfundvierzigsten Lection brachten wir sodann die Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Wir zeigten nämlich, wie ein Quadrat construirt werden könne, das der Summe, bez. der Differenz zweier Quadrate gleich ist, und verwandelten dann ein Rechteck in ein Quadrat und ein Quadrat in ein Rechteck. Darauf gingen wir auf die Flächenmessung ein, besprachen was man unter einer Flächeneinheit versteht und wie die Flächeneinheit mit der Längeneinheit zusammenhängt, bewiesen dann den Lehrsatz, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe ist, und dehnten diesen Satz auch auf Quadrate aus. Im nächsten Briefe werden wir mit der Lehre von der Flächenmessung fortfahren.

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 46 und 47.
Planimetrie.

24. Brief

Als
Manuscript
gedruckt.

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Der Gipfel aller großen Künste, wie der der Bäume erfreut uns; der Stamm und die Wurzel nicht ebenso. (Cicero.)

Lection 46.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 44.

Abschnitt A. § 32. Bei Aufgabe II haben wir die Construction, die Behauptung und den Beweis dem Schüler überlassen, wir wollen jetzt diese Theile der Lösung bringen.

Construction. Bei dem gegebenen Dreieck ABC tragen wir an AB in einem der Endpunkte, etwa in B, den Winkel δ an und errichten auf dem freien Schenkel im Punkte B, ebenso auf AB im Mittelpunkte eine Senkrechte. Um den Durchschnittspunkt dieser beiden Senkrechten schlagen wir dann mit der Entfernung des Durchschnittspunktes von A oder B einen Kreis und legen durch C zu AB eine Parallele, welche den Kreis in dem Punkte D und D' treffen möge. D und D' verbinden wir hierauf mit A und B durch gerade Linien.

Behauptung. $\triangle ABD = \triangle ABC$
und $\triangle ABD' = \triangle ABC$,
ferner $\angle ADB = \angle \delta$ und $\angle AD'B = \angle \delta$.

Beweis. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich, mithin haben wir:

$\triangle ABD = \triangle ABC$ und $\triangle ABD' = \triangle ABC$.

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich den Peripheriewinkeln im Sehnen-Tangentenbogen, daher ist:

$$\angle ADB = \delta \text{ und } \angle AD'B = \delta.$$

Wir haben ferner in § 32 drei Constructionsaufgaben a, b und c gestellt.

Analysis für Fall a. Die Spitze C' des gesuchten Dreiecks ist als Durchschnittspunkt zweier geometrischen Oerter darzustellen. Der eine Ort ist die Parallele, welche durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC zur Grundlinie AB gelegt ist, der andere Ort ist der freie Schenkel des an AB im Punkte B angetragenen gegebenen Winkels.

Analysis für Fall b. Der eine Ort für die gesuchte Spitze C' ist die durch C zu AB gelegte Parallele, der andere Ort ist der Kreis, welcher um B mit der gegebenen Seite BC' beschrieben wird.

Analysis für Fall c. Der eine Ort für die gesuchte Spitze C' ist wieder die durch C zu AB gelegte Parallele, der andere Ort der Kreis, welchen wir um den Mittelpunkt von AB mit der gegebenen Mittellinie schlagen.

§ 33. **Aufgaben.** In Fig. 9 sind

DMNH und NH'FM'

Ergänzungsparallelogramme; es ist daher

DMNH = NH'FM'.

In Fig. 10 sind

QSR'P und RNQ'S

Ergänzungsparallelogramme; es besteht daher die Gleichung

QSR'P = RNQ'S.

Abschnitt D. § 34. Beim zweiten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz haben wir in den Anmerkungen einige Fragen gestellt, welche wir jetzt beantworten wollen.

1) Es ist AB = BD, weil AB und BD Seiten ein und desselben Quadrates ABDE sind.

2) Es soll gezeigt werden, daß die Winkel γ und σ einen Rechten betragen. Wie wir aus der Construction der Linien SP und PT wissen, laufen in dem Viereck CSPT die gegenüberliegenden Seiten parallel; das Viereck CSPT ist mithin ein Parallelogramm, und zwar ist in demselben der Winkel bei C d. i. γ einem Rechten gleich, weil das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist. Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel einen Rechten beträgt, so müssen alle Winkel desselben einem Rechten gleich sein; daher betragen auch die Winkel bei S, P und T in dem Viereck CSPT einen Rechten; es ist also nicht blos

$\gamma = R$ sondern auch $\sigma = R$, w. z. b. w.

3) Wir sollen beweisen, daß

$$\alpha = \beta$$

ist. In einem Dreieck ist die Summe der Winkel immer zwei Rechten gleich, mithin haben wir in dem Dreieck ABC

$$\alpha + \gamma + \angle ABC = 2 R.$$

γ bildet schon für sich einen Rechten, daher ist:

$$\text{I. } \alpha + \angle ABC = R.$$

Ferner ist, weil die Winkel β, DBA und ABC zusammen einen Gestreckten ausmachen,

$$\beta + \angle DBA + \angle ABC = 2 R.$$

$\angle$ DBA beträgt als Winkel eines Quadrats einen Rechten, daher haben wir:

$$\text{II. } \beta + \angle ABC = R.$$

Wir hatten:

$$\text{I. } \alpha + \angle ABC = R.$$

Die Gleichungen I und II sagen uns mithin, daß sowohl β wie α den Winkel ABC zu einem Rechten ergänzen. **Zwei Winkel, die ein und denselben dritten Winkel zu einem Rechten ergänzen**, pflegt man **Complementwinkel** zu nennen, und zwar sind Complementwinkel immer einander **gleich**; in unserm besondern Falle können wir das leicht beweisen, wenn wir folgende Schlüsse ziehen:

$$\begin{array}{l} \beta + \angle ABC = R \\ \alpha + \angle ABC = R \\ \hline \alpha + \angle ABC = \beta + \angle ABC \\ \quad\ \angle ABC = \quad\ \angle ABC \\ \hline \alpha + \angle ABC - \angle ABC = \beta + \angle ABC - \angle ABB \end{array}$$

d. i. $\alpha = \beta$, w. z. b. w.

4) Der Schüler soll ferner noch darthun, daß

$$\triangle BSD \cong \triangle DPE \text{ und } \triangle DPE \cong \triangle ETA$$

ist. Diese Congruenzen können wir ähnlich beweisen, wie wir gezeigt haben, daß

$$\triangle ABC \cong \triangle BSD$$

ist; wir wollen daher den ausführlichen Nachweis unterlassen.

Um den dritten Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz zu liefern, müssen wir die Congruenz von sieben Dreiecken, die wir in Fig. 14 mit arabischen Ziffern bezeichnet hatten, nachweisen; und zwar ist zuerst zu zeigen, daß

$$\triangle ERD \cong \triangle AGM.$$

Wie wir bereits auf Seite 390 andeuteten, werden wir den Nachweis dieser Congruenz liefern, indem wir darthun, daß

$$\triangle ERD \cong \triangle ABC \text{ und } \triangle AGM \cong \triangle ABC.$$

In den beiden Dreiecken ERD und ABC ist

a) ED = AB als Seiten desselben Quadrats.
b) $\angle$ DER = $\angle$ BAC ⎱ als Winkel, deren Schen-
c) $\angle$ RDE = $\angle$ CBA ⎰ kel parallel sind (S. 70).

Die Dreiecke ERD und ABC stimmen also in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln überein, sie sind daher nach dem dritten Congruenzsatz congruent, in Zeichen, es ist

$$\triangle ERD \cong \triangle ABC.$$

Ferner ist in den beiden Dreiecken ABC und AGM

a) AC = AG als Seiten desselben Quadrats,
b) $\angle$ ACB = $\angle$ AGM als Rechte,
c) $\angle$ CAB = $\angle$ GAM, weil sowohl CAB wie GAM den Winkel MAC zu einem Rechten ergänzen.

D. h. die beiden Dreiecke ABC und AGM stimmen in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln überein; sie sind daher congruent, in Zeichen, es ist:

$$\triangle ABC \cong \triangle AGM.$$

Die beiden Dreiecke ERD und AGM sind also demselben dritten Dreieck ABC congruent, sie sind darum auch unter einander congruent, in Zeichen, wir haben:

$$1)\ \triangle ERD \cong \triangle AGM.$$

Aus dieser Congruenz folgt, daß

ED = AM
und ER = AG ist.

Setzen wir in diesen Gleichungen für ED die gleiche Seite AE und für AG die gleiche Seite AC ein, so ergiebt sich:

a) AE = AM
b) ER = AC.

Bedenken wir noch, daß

c) $\angle$ AER = $\angle$ MAC, als Gegenwinkel bei den Parallelen ER und AC, geschnitten von EM,

so finden wir, daß die beiden Dreiecke AER und MAC in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, also nach dem ersten Congruenzsatze congruent sind; in Zeichen, daß wir haben:

$$2)\ \triangle AER \cong \triangle MAC.$$

Aus dieser Congruenz folgt, daß wir haben:

a) AR = MC,
ferner $\angle$ EAR = $\angle$ AMC
und $\angle$ ERA = $\angle$ ACM, mithin auch
b) $\angle$ RAQ = $\angle$ CMP, denn die Winkel RAQ und CMP ergänzen die gleichen Winkel EAR und AMC zu einem Rechten*); und

*) Weshalb sind die beiden Winkel EAQ und AMP Rechte?

c) $\angle$ ARQ = $\angle$ MCP, denn die beiden Winkel ARQ und MCP ergänzen die beiden gleichen Winkel ERA und ACM zu einem Rechten*).

Aus den Gleichungen a, b und c ersehen wir, daß die beiden Dreiecke ARQ und MCP in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen und deshalb nach dem dritten Congruenzsatze congruent sind, in Zeichen, wir haben:

3) $\triangle$ ARQ $\cong$ $\triangle$ MCP.

Um nun zu zeigen, daß die mit 4 benannten Dreiecke BCN und BSQ congruent sind, haben wir, wie wir auch bereits auf Seite 390 erwähnten, zunächst die Congruenz der beiden Dreiecke ABN und QBD zu beweisen. Es sind

a) AB = BD als Seiten desselben Quadrats,
b) $\angle$ ABN = $\angle$ ABD als rechte Winkel,
c) $\angle$ CAB = $\angle$ BDQ, weil CAB und BDQ die beiden gleichen Winkel CBA und RDE zu einem Rechten ergänzen**).

Nach dem dritten Congruenzsatz ist daher:

$\triangle$ ABN $\cong$ $\triangle$ QBD.

In congruenten Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten und Winkel gleich, mithin ist:

a) BN = BQ.

ferner $\angle$ BNA = $\angle$ BQD,

oder anders ausgedrückt:

b) $\angle$ BNC = $\angle$ BQS.

Endlich ist noch;

c) $\angle$ BCN = $\angle$ BSQ***).

Die Gleichungen a, b, c sagen uns, daß die Dreiecke BCN und BSQ in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen; wir haben daher

4) $\triangle$ BCN $\cong$ $\triangle$ BSQ.

Aus dieser Congruenz folgt, das

BC = BS, mithin auch a) BJ = BS ist.

Wir haben ferner:

b) BN = BU nach der Construction,
c) $\angle$ JBN = $\angle$ SBU, als Scheitelwinkel.

Aus den Gleichungen a, b und c erfahren wir, daß die beiden Dreiecke BNJ und BSU in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; nach dem ersten Congruenzsatze ist daher

5) $\triangle$ BNJ $\cong$ $\triangle$ BSU.

Aus dieser Congruenz ergiebt sich

a) NJ = SU

und ferner: $\angle$ BJN = $\angle$ BSU.

Die Winkel NJH und TSU ergänzen die beiden gleichen Winkel BJN und BSU zu einem Rechten†), mithin ist

b) $\angle$ NJH = $\angle$ TSU.

*) Weshalb ist $\angle$ ERQ = R und $\angle$ ACP = R? **) Weshalb ist $\angle$ CBA = $\angle$ RDE? Warum ergänzt Winkel CAB den Winkel CBA zu einem Rechten. ***) Beide Winkel sind Rechte; aus welchem Grunde? †) Weshalb ist $\angle$ BJH = R und $\angle$ TSB = R.

Wir haben

c) $\angle$ JHN = $\angle$ STU, als Rechte.

Nach dem dritten Congruenzsatze ist daher

6) $\triangle$ JHN $\cong$ $\triangle$ STU.

Wir haben jetzt noch darzuthun, daß auch die beiden mit 7 bezeichneten Dreiecke congruent sind. Dieser Nachweis ist mit den meisten Schwierigkeiten verbunden; wir müssen dabei auf die vorher bewiesene Congruenz verschiedener Dreiecke zurückgehen. Es ist bereits gezeigt worden, daß

$\triangle$ ABN $\cong$ $\triangle$ QBD ist.

Daraus folgte: BN = BQ.

Nach der Construction ist nun: BN = BU,

folglich haben wir auch: BQ = BU.

Als Seiten desselben Quadrats sind AB und BD gleich, d. h. es ist:

$$\begin{array}{rl} & AB = BD \\ \text{wir hatten:} & BQ = BU \\ \hline & AB - BQ = BD - BU \\ & \text{d. i. } AQ = DU. \end{array}$$

Es ist bereits gezeigt worden, daß die mit 3 bezeichneten Dreiecke congruent sind; aus der Congruenz derselben ergiebt sich: AQ = MP.

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, daher ist:

a) DU = MP.

Dazu kommt, daß

b) $\angle$ DTU = $\angle$ MFP, als Rechte, und
c) $\angle$ TDU = $\angle$ FMP, weil TDU und FMP die beiden gleichen Winkel EDR und AMG zu einem Rechten ergänzen*).

Aus den Gleichungen a, b und c ersehen wir, daß die beiden Dreiecke FMP und DTU in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen; nach dem dritten Congruenzsatze ist daher

7) $\triangle$ FMP $\cong$ $\triangle$ DTU.

Es ist jetzt von uns gezeigt worden, daß jedem der sieben Dreiecke, in welche das Hypotenusenquadrat zerfällt, in einem der beiden Kathetenquadrate ein congruentes, also auch f l ä c h e n g l e i c h e s Dreieck entspricht, und zwar füllen die sieben Dreiecke den Flächenraum der beiden Kathetenqadrate vollkommen aus. Es folgt daraus, daß das Hypotenusenquadrat so groß ist, wie die beiden Kathetenquadrate zusammen, daß wir also die Gleichung haben:

$$\square\ ABDE = \square\ ACFG + \square\ BCHJ.$$

S e c t i o n 45.

Abschnitt A. Aufgaben zu § 35 und § 36.

1. a) Um ein Quadrat zu construiren, welches d o p p e l t so groß ist wie ein gegebenes Quadrat, werden wir uns ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, in dem beide Katheten den Seiten des gegebenen Quadrates gleich sind. Jedes der Kathetenquadrate

*) Weshalb ist $\angle$ EDR = $\angle$ AMG? Weshalb ergänzt Winkel FMP den Winkel AMG zu einem Rechten?

hat dann dieselbe Größe wie das gegebene Quadrat; das zugehörige Hypotenusenquadrat ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate, d. h. doppelt so groß wie das gegebene Quadrat.

b) Wenn wir ein gegebenes Quadrat verfünffachen wollen, können wir auf verschiedene Weise verfahren. Wir können z. B. erst das gegebenene Quadrat, das ABCD heißen und eine Seite von der Länge a haben möge, auf die vorher angegebene Weise verdoppeln. In dem Quadrat, welches wir dadurch erhalten, mögen die Seiten die Länge b haben. Wenn wir uns nun ein rechtwinkliges Dreieck construiren, dessen eine Kathete gleich a und dessen andere Kathete gleich b ist, so wird das zugehörige Hypotenusenquadrat so groß sein wie die beiden Quadrate über a und b zusammen, wird also den dreifachen Inhalt des gegebenen Quadrats ABCD haben. Die Seiten dieses Quadrates mit dreifachem Inhalt seien gleich c. Zeichnen wir uns darauf ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die eine Kathete c und die andere Kathete b ist, so erhalten wir über der zugehörigen Hypotenuse ein Quadrat, das so groß ist wie die beiden Quadrate über c und b zusammengenommen, also den drei- plus zweifachen, d. h. fünffachen Inhalt hat wie das gegebene Quadrat ABCD. Dieses Quadrat entspricht mithin der Forderung.

2) Die drei gegebenen Quadrate mögen über den Seiten a, b und c stehen. Um ein Quadrat zu construiren, das gleich der Summe dieser drei Quadrate ist, werden wir zunächst ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, in dem eine Kathete gleich a, die zweite Kathete gleich b ist. Das Quadrat über der zugehörigen Hypotenuse, die wir d nennen nennen wollen, ist dann gleich der Summe der beiden Quadrate über a und b. Zeichnen wir uns nun ein rechtwinkliges Dreieck, in dem eine Kathete die Länge d, die andere Kathete die Länge c hat, so ist das zugehörige Hypotenusenquadrat so groß wie die Quadrate über d und c zusammen, d. h. so groß wie die Quadrate a, b und c.

3) Das Quadrat, welches vermindert werden soll, möge über a, die beiden anderen Quadrate mögen über b und c stehen. Wir sollen dann ein Quadrat construiren, welches so groß ist wie das Quadrat über a vermindert um die beiden Quadrate über b und über c. Um die Construction auszuführen, werden wir zunächst von dem Quadrat über a das Quadrat über b abziehen, indem wir, gestützt auf den Satz, daß

> im rechtwinkligen Dreiecke jedes Kathetenquadrat gleich der Differenz des Hypothenusenquadrats und des andern Kathetenquadrats ist

ein rechtwinkliges Dreieck construiren, in dem die Hypotenuse die Länge a und die eine Kathete die Länge b hat. Das Quadrat über der andern Kathete, die wir mit d benennen wollen, ist dann gleich dem Quadrat über a, vermindert um das Quadrat über b. Führen wir die Construction mit d und c gerade so wie vorher mit a und b aus, so ergiebt sich ein Quadrat, welches die Größe des Quadrats über d vermindert um das Quadrat über c hat, also anders ausgedrückt, gleich dem Quadrate über a vermindert um die Quadrate über b und c ist; dieses Quadrat genügt also der Forderung.

Bequemer können wir noch verfahren, wenn wir erst ein Quadrat zeichnen, das gleich der Summe der Quadrate über b und c ist, und dann dieses Quadrat von dem Quadrate über a auf die bekannte Weise abziehen.

§ 39. Der Inhalt des Rechtecks ist:

a) gleich 15 . 3 d. i. gleich 45 □m,
b) gleich 4 . 2 d. i. gleich 8 □dm,
c) gleich 2 . 23 d. i. gleich 26 □dm,
d) gleich 8 . 4 d. i. gleich 32 □ Fuß,
e) gleich 3 . 16 d. i. gleich 48 □ Zoll,
f) gleich $\frac{1}{2}$. 4 d. i. gleich 2 □ Ruthen,
g) gleich $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$ d. i. gleich $\frac{3}{5}$ □ Meilen.

B. Fortsetzung der Flächenmessung.

§ 42. Die Multiplication der Grundlinie und Höhe. Im letzten Paragraphen des vorigen Briefes haben wir uns mit den Quadraten beschäftigt; ehe wir damit fortfahren, wollen wir noch auf einen Punkt eingehen, über welchen der Schüler wahrscheinlich ausführliche Aufklärung wünscht. In § 40 des vorigen Briefes haben wir gelehrt, daß

> der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe sei.

Wer unsern Satz in dieser Form zuerst hört, wird verwundert fragen, wie es möglich ist, ein Product zweier Linien zu bilden, also eine Linie mit einer andern Linie zu multipliciren. In der That! die Verwunderung wäre berechtigt; man kann Linien mit Linien ebenso wenig multipliciren wie Pferde mit Pferden, Baschkiren mit Baschkiren. Ehe wir den Satz aussprachen, daß sich der Flächeninhalt eines Rechtecks ergebe, wenn die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt wird, haben wir darum festgestellt, daß wir unter

Grundlinie und **Höhe**

die **Anzahl der Längeneinheiten** der Grundlinie und Höhe, und unter

Flächeninhalt

die **Anzahl der Flächeneinheiten** verstehen wollten. Für uns ist mithin

Grundlinie

gleichbedeutend mit **Maßzahl** der Grundlinie

und Höhe

gleichbedeutend mit **Maßzahl** der Höhe.

Die Grundlinien und Höhen bedeuten für uns also Zahlenwerthe, und Zahlen kann man ohne Schwierigkeiten mit einander multipliciren.

§ 43. Die Quadrate. Den Satz über den Flächeninhalt des Rechtecks hatten wir in die Formel gekleidet:

$$F = G \, . \, H,$$

wobei F den **Flächeninhalt**, G die **Grundlinie** und H die **Höhe** bedeutet. Diese Formel haben wir in § 41 auch auf Quadrate angewendet und sind dabei zu eigenthümlichen Resultaten gekommen.

Wir betrachteten zunächst das Quadrat BCDE (siehe Fig. 1), in welchem die Seiten die Länge a haben, und fanden, daß der Flächeninhalt dieses Quadrats gleich a^2 ist; in Zeichen, wir hatten

$$\square \, BCDE = a^2,$$

oder wenn wir den Flächeninhalt einfach mit F bezeichnen:

$$F = a^2.$$

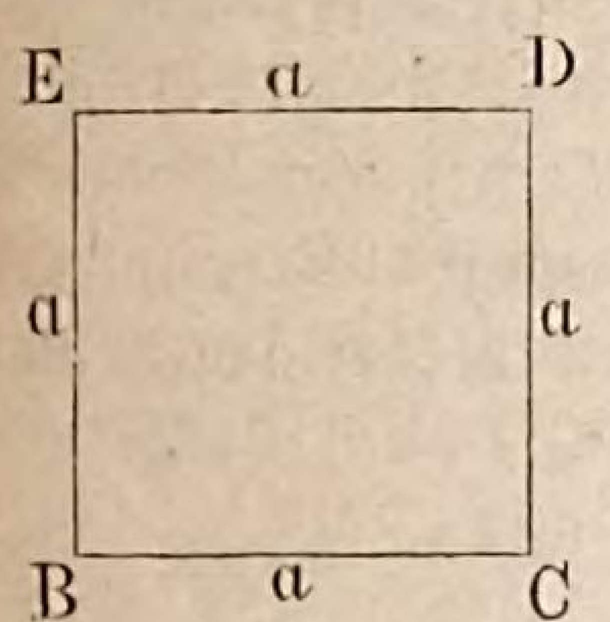


Fig. 1.

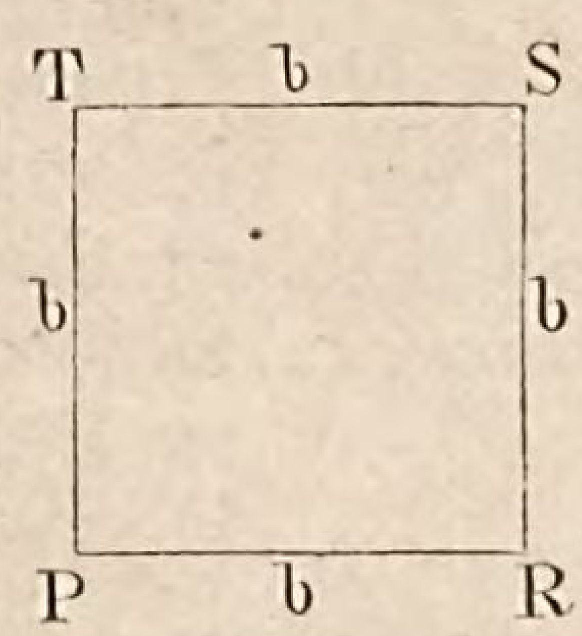


Fig. 2.

Darauf untersuchten wir das Quadrat PRST, dessen Seiten gleich b sind, und fanden:

$$\square \, PRST = b^2,$$

oder wenn der Flächeninhalt wieder mit F benannt wird:

$$F = b^2.$$

Haben wir ein Quadrat mit der Seite c, so wird demnach

$$F = c^2 \text{ sein.}$$

Ist uns ein Quadrat mit der Seite s gegeben, so werden wir

$$F = s^2 \text{ haben u. s. f.}$$

In allen Fällen wird der **Flächeninhalt des Quadrates gleich der zweiten Potenz der Quadratseite** sein.

Aufgaben I. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seiten

a) gleich e, b) gleich m, c) gleich n,
d) gleich x sind.

Wenden wir uns zu Zahlenbeispielen! Die Seiten eines Quadrats mögen eine Länge haben von

a) 5 m,	dann ist der Flächeninhalt gleich	5^2	d. i. gleich	5 . 5	d. i. gleich	25 □m,
b) 3 dm,	„ „ „ „ „	3^2	„ „ „	3 . 3	„ „ „	9 □dm,
c) 9 cm,	„ „ „ „ „	9^2	„ „ „	9 . 9	„ „ „	81 □cm,
d) 11 mm,	„ „ „ „ „	11^2	„ „ „	11 . 11	„ „ „	121 □mm,
e) 15 Km,	„ „ „ „ „	15^2	„ „ „	15 . 15	„ „ „	225 □Km,
f) 21 Fuß,	„ „ „ „ „	21^2	„ „ „	21 . 21	„ „ „	441 □Fuß,
g) 7 Meilen	„ „ „ „ „	7^2	„ „ „	7 . 7	„ „ „	49 □Meilen.

Aufgaben II. Die Seiten eines Quadrats mögen a) gleich 6 Ruthen, b) gleich 4 Zoll, c) gleich 19 Fuß, d) gleich 2 Metern, e) gleich 13 Millimetern, f) gleich 12 Decimetern, g) gleich 6 Meilen, h) gleich 11 Kilometern, i) gleich 23 Dekametern sein. Wie groß ist in diesen Fällen der Flächeninhalt?

Bemerkung. Nach den vorstehenden Erörterungen wird durch die **zweite Potenz** von a, d. h. durch a^2 der **Inhalt des Quadrates** angegeben, welches über a errichtet ist; a^2 ist also gewissermaßen der arithmetische Ausdruck für das Quadrat über a, oder anders gesagt, der Ausdruck a^2 bedeutet geometrisch ein Quadrat, dessen Seiten gleich a sind. Man spricht darum auch

a^2 gewöhnlich a-Quadrat,

und demnach:

b^2 gewöhnlich b-Quadrat,
c^2 „ c-Quadrat,
3^2 „ 3-Quadrat,
5^2 „ 5-Quadrat.

§ 44. Rückblick auf den Pythagoräischen Lehrsatz. Das Dreieck ABC in Fig. 3 ist bei C rechtwinklig; AB ist daher die Hypotenuse, AC und BC sind die beiden Katheten. Weil der Flächeninhalt eines Quadrats der zweiten Potenz der Seite gleich ist, wird der Inhalt des Hypotenusenquadrats durch AB^2,

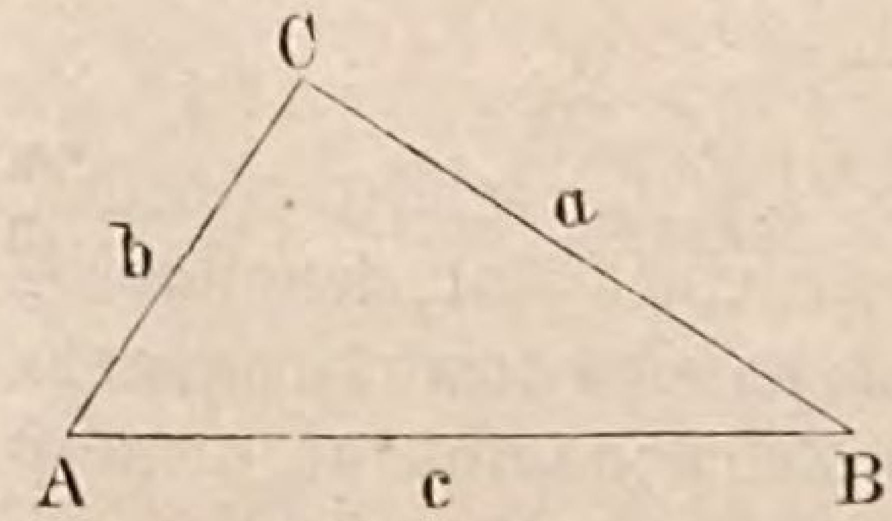


Fig. 3.

der Inhalt der beiden Kathetenquadrate durch AC^2 und BC^2 ausgedrückt. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist das Hypotenusenquadrat der Summe der beiden Kathetenquadrate flächengleich; wir haben daher:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

oder, wenn wir c für AB, b für AC und a für BC einführen:

$$c^2 = b^2 + a^2$$
$$= a^2 + b^2.$$

Nehmen wir an, die Kathete a habe eine Länge von 3 cm, die Kathete b eine Länge von 2 cm, so ist:

$$a^2 = 3^2 \square cm = 3 . 3 \square cm = 9 \square cm,$$
$$b^2 = 2^2 \square cm = 2 . 2 \square cm = 4 \square cm.$$

Wir haben: $c^2 = a^2 + b^2$,
mithin auch: $c^2 = 9 \square cm + 4 \square cm$
$= 13 \square cm$,

d. h. das Quadrat über der Hypotenuse c ist 13 Quadrat-Centimeter groß.

Aufgaben I. Es sei

1) a = 5 cm, b = 7 cm,
2) a = 15 mm, b = 6 mm,
3) a = 2 Km, b = 3 Km,
4) a = 4 m, b = 1 m.

Wie groß ist in diesen Fällen das Hypotenusenquadrat c^2?

Gehen wir jetzt weiter! Nach Lehrsatz I Seite 391 ist

im rechtwinkligen Dreiecke jedes Kathetenquadrat gleich dem Hypotenusenquadrat vermindert um das andere Kathetenquadrat.

In Fig. 3 ist demnach

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$
und $AC^2 = AB^2 - BC^2$,

oder wenn wir die kleinen Buchstaben zur Bezeichnung wählen:

$$a^2 = c^2 - b^2$$
und $b^2 = c^2 - a^2$.

Vermittelst der letzten beiden Formeln können wir den Inhalt eines Kathetenquadrats berechnen, wenn uns das Hypotenusenquadrat und das andere Kathetenquadrat gegeben ist. Es sei z. B.:

c = 12 cm, a = 5 cm,

so haben wir:

$$c^2 = 12^2 \square cm = 12 . 12 \square cm = 144 \square cm,$$
$$a^2 = 5^2 \square cm = 5 . 5 \square cm = 25 \square cm.$$

Folglich ist:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 144 \square cm - 25 \square cm = 119 \square cm,$$

d. h. das Quadrat über der Kathete b hat 119 Quadrat-Centimeter Inhalt.

Aufgaben II. Es möge

a) c = 7 dm, a = 2 dm,
b) c = 9 m, a = 3 m,
c) c = 15 Km, a = 7 Km sein,

wie groß ist das Quadrat über der Kathete b?

§ 45. Die Vergleichung der Flächeneinheiten. In Fig. 4 sehen wir das Quadrat ABCD, welches einen **Quadrat-Centimeter** darstellt.

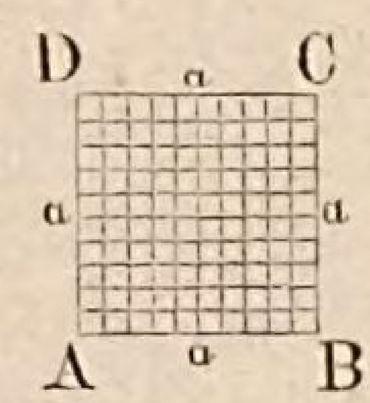


Fig. 4.

Jede Seite a dieses Quadrats ist einen Centimeter oder 10 Millimeter lang; bestimmen wir bei Festellung des Flächeninhalts die Seitenlänge nach Millimetern, so erhalten wir:

$$\square ABCD = 10^2 \square mm = 10 . 10 \square mm$$
$$= 100 \square mm,$$

oder $1 \square cm = 10^2 \square mm = 100 \square mm$.

Ebenso ist:

1) $1 \square Km = 10^2 \square Hm = 10 . 10 \square Hm = 100 \square Hm$,
2) $1 \square Hm = 10^2 \square Dm = 10 . 10 \square Dm = 100 \square Dm$,
3) $1 \square Dm = 10^2 \square m = 10 . 10 \square m = 100 \square m$,
4) $1 \square m = 10^2 \square dm = 10 . 10 \square mm = 100 \square mm$,
5) $2 \square dm = 10^2 \square cm = 10 . 10 mm = 100 \square mm$,
6) $1 \square Km = 1000^2 \square m = 1000 . 1000 \square m = 1\,000\,000 \square m$,
7) $1 \square Hm = 100^2 \square m = 100 . 100 \square m = 10\,000 \square m$,
8) $1 \square m = 100^2 \square cm = 100 . 100 \square cm = 10\,000 \square cm$,
9) $1 \square m = 1000^2 \square mm = 1000 . 1000 \square mm = 1\,000\,000 \square mm$,
10) $1 \square Km = 100^2 \square Dm = 100 . 100 \square Dm = 10\,000 \square Dm$.

Die Beziehungen, in welchen die Flächeneinheiten zu einander stehen, werden durch die nachstehende Tabelle angegeben, welche der Schüler mit der auf Seite 37 aufgestellten Tabelle vergleichen möge.

□Km	□Hm	□Dm	□m	□dm	□cm	□mm
1 =	10^2 =	100^2 =	1000^2 =	$10\,000^2$ =	$100\,000^2$ =	$1\,000\,000^2$
	1 =	10^2 =	100^2 =	$1\,000^2$ =	$10\,000^2$ =	$100\,000^2$
		1 =	10^2 =	100^2 =	$1\,000^2$ =	$10\,000^2$
			1 =	10^2 =	100^2 =	$1\,000^2$
				1 =	10^2 =	100^2
					1 =	10^2
						1^2,

oder ausgerechnet:

□Km	□Hm	□Dm	□m	□dm	□cm	□mm
1 =	100 =	10 000 =	1 000 000 =	100 000 000 =	10 000 000 000 =	1 000 000 000 000
	1 =	100 =	10 000 =	1 000 000 =	100 000 000 =	10 000 000 000
		1 =	100 =	10 000 =	1 000 000 =	100 000 000
			1 =	100 =	10 000 =	1 000 000
				1 =	100 =	10 000
					1 =	100
						1

§ 46. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms. In Fig. 5 erblicken wir das **Rechteck** ABCD und das **schiefwinklige***) **Parallelogramm** ABEF. Beide Parallelogramme stehen über derselben Grundlinie AB (g),

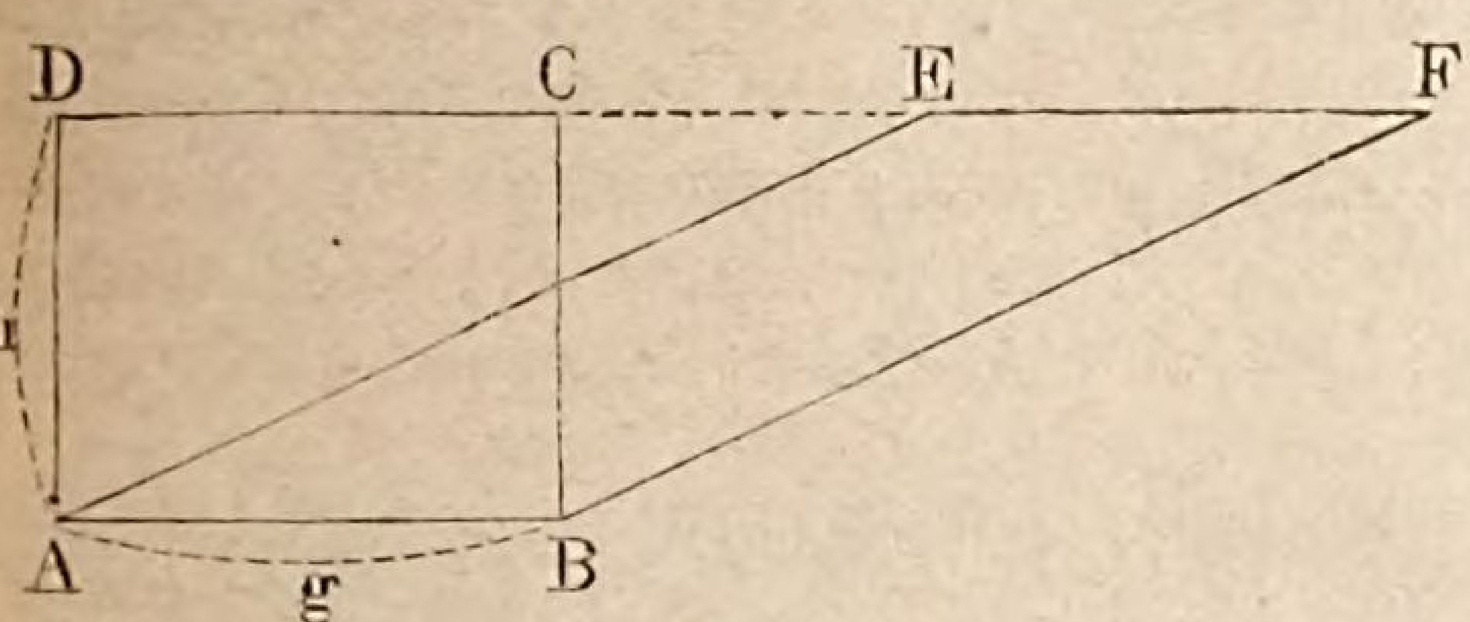


Fig. 5.

sie liegen ferner zwischen denselben Parallelen AB und DF und haben darum auch dieselbe Höhe h, welche durch die beiden gleichen Rechtecksseiten AD (h) und BC (h) repräsentirt wird. Parallelogramme mit derselben (mit gleicher) Grundlinie und derselben (gleichen) Höhe sind gemäß § 29 einander flächengleich. Es besteht daher die Gleichung:

Rechteck ABCD = schiefw. Parallelogr. ABEF.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe. Fassen wir bei dem Rechteck ABCD die Seite AB (g) als Grundlinie und AD (h) als Höhe auf, so haben wir:

Rechteck ABCD = AB . AD,

oder wenn wir für AB den kleinen Buchstaben g*) und für AD den kleinen Buchstaben h*) einführen:

Rechteck ABCD = g . h.

Dem Rechteck ABCD ist das schiefwinklige Parallelogramm ABEF gleich; mithin muß auch

schiefw. Parallelogr. ABEF = g . h

sein; und zwar ist g die Grundlinie und h**) die Höhe des schiefwinkligen Parallelogramms ABEF. Die vorstehende Gleichung sagt uns also, daß

> nicht blos beim rechtwinkligen, sondern auch beim schiefwinkligen Parallelogramm der Flächeninhalt gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe sei.

Wir können deshalb ganz allgemein den

Lehrsatz I. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe,

aufstellen, möge dieses Parallelogramm nun schiefwinklig oder rechtwinklig sein.

Nach diesem Lehrsatz ist in Fig. 6

$$BCDE = BC \,.\, h_b = b \,.\, h_b,$$

in Fig. 7

$$DEFG = DE \,.\, h_e = e \,.\, h_e,$$

in Fig. 8

$$MNPR = MN \,.\, h_m = m \,.\, h_m,$$

in Fig. 9

$$STUV = ST \,.\, h_t = t \,.\, h_t.$$

*) Man unterscheidet rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme; im rechtwinkligen Parallelogramm (Rechteck) sind alle vier Winkel Rechte, im schiefwinkligen Parallelogramm sind alle Winkel schief, d. h. spitz oder stumpf.

*) mit g oder G wird gewöhnlich die Grundlinie, mit h oder H die Höhe bezeichnet. **) Vergleiche Bemerkung II. zu diesem Paragraphen.

In Fig. 8 ist $m = 16$ mm, $h_m = 14$ mm,
in Fig. 9 ist $t = 12$ mm, $h_t = 15$ mm.

Daher haben wir:

$$MNPR = m \cdot h_m = 16 \cdot 14 \,\square\text{mm} = 224 \,\square\text{mm}$$
$$STUV = t \cdot h_t = 12 \cdot 15 \,\square\text{mm} = 180 \,\square\text{mm}$$

d. h. der Flächeninhalt des Parallelogramms MNPR beträgt 96, der Flächeninhalt des Parallelogramms STUV beträgt 150 Quadrat-Millimeter.

Fig. 6.

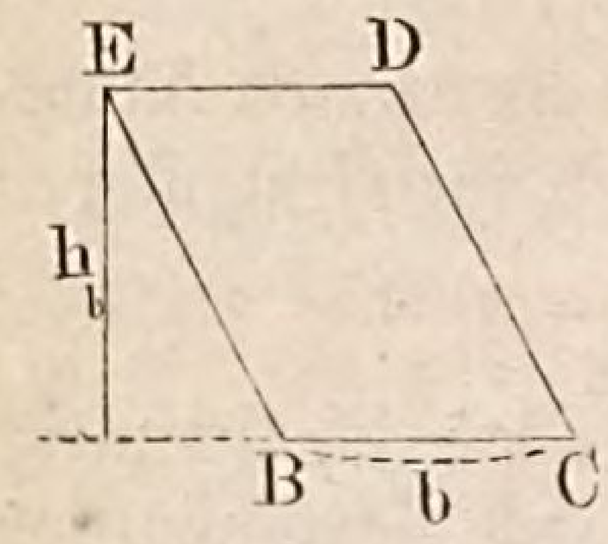
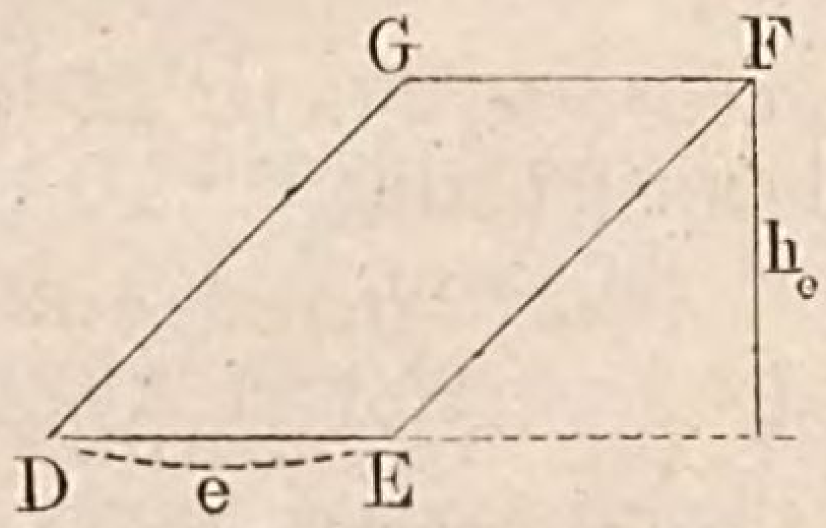


Fig. 7.



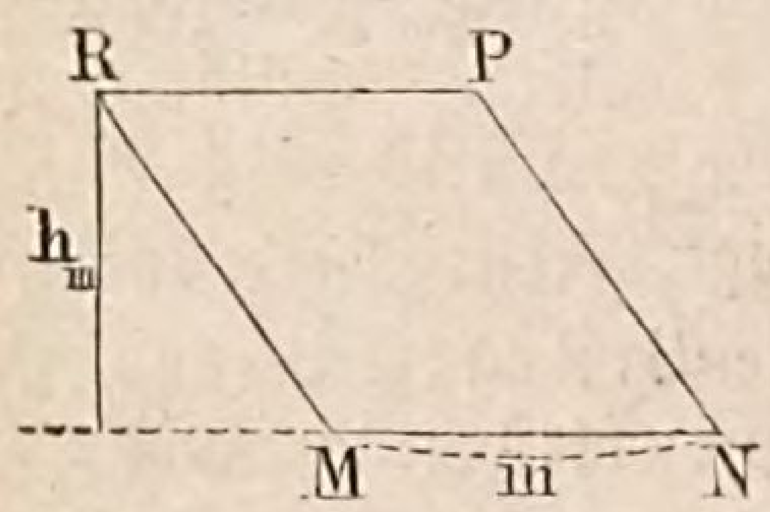


Fig. 8.

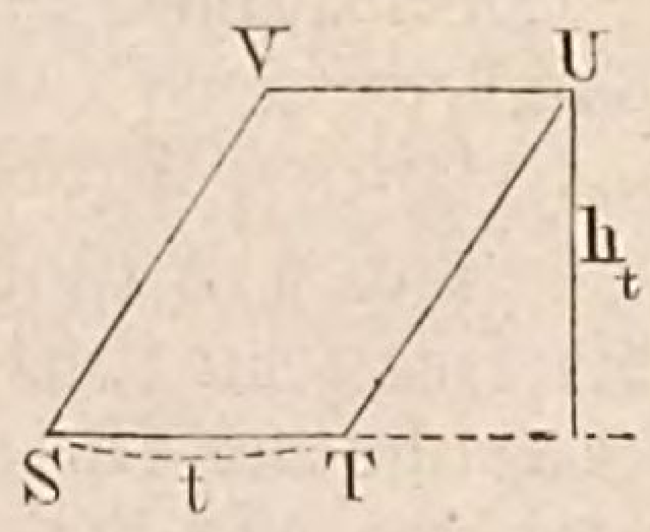


Fig. 9.

Ist bei einem Parallelogramm

a) g*) $= 2$ m, h*) $= 5$ m,
so ist f*) $= 2 \cdot 5 \,\square$m $= 10 \,\square$m,

b) $g = 6$ cm, $h = 4$ cm,
so ist $f = 6 \cdot 4 \,\square$cm $= 24 \,\square$cm,

c) $g = 7$ Km, $h = 8$ Km,
so ist $f = 7 \cdot 8 \,\square$Km $= 56 \,\square$Km,

d) $g = 13$ Dm, $h = 11$ Dm,
so ist $f = 13 \cdot 11 \,\square$Dm $= 143 \,\square$Dm,

e) $g = 12$ dm, $h = 20$ dm,
so ist $f = 12 \cdot 20 \,\square$dm $= 240 \,\square$dm,

f) $g = 2$ Fuß, $h = 3$ Fuß,
so ist $f = 2 \cdot 3 \,\square$Fuß $= 6 \,\square$Fuß.

Aufgaben I. Wie groß ist f, wenn

a) $g = 7$ m, $h = 9$ m,
b) $g = 3$ dm, $h = 15$ dm,
c) $g = 19$ cm, $h = 10$ cm,
d) $g = 25$ mm, $h = 4$ mm,
e) $g = 13$ Zoll, $h = 13$ Zoll,
f) $g = 29$ Meilen, $h = 2$ Meilen ist.

*) **g** bedeutet immer die Grundlinie, **h** die Höhe und **f** den Flächeninhalt.

Bemerkung I. Bei einem Parallelogramm ist der Flächeninhalt (f) gleich dem Producte aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h), in Zeichen, wir haben:

$$\text{I. } f = g \cdot h.$$

Gleiches dividirt durch Gleiches giebt Gleiches. Theilen wir beide Seiten der letzten Gleichung durch g, so erhalten wir daher:

$$\frac{f}{g} = \frac{g \cdot h}{g} = h\text{*)},$$

oder anders ausgedrückt:

$$\text{II. } h = \frac{f}{g},$$

d. h. **die Höhe ist bei einem Parallelogramm gleich dem Flächeninhalt dividirt durch die Grundlinie.**

Theilen wir jetzt beide Seiten der Gleichung:

$$f = g \cdot h$$

durch h, so ergiebt sich:

$$\frac{f}{h} = \frac{g \cdot h}{h} = g,$$

oder anders geschrieben:

$$\text{III. } g = \frac{f}{h},$$

d. h. **die Grundlinie ist bei einem Parallelogramm gleich dem Flächeninhalt dividirt durch die Höhe.**

Nach der Formel: I. $f = g \cdot h$
finden wir den **Flächeninhalt,** wenn wir **Grundlinie** und **Höhe** kennen.

Nach der Formel: II. $h = \frac{f}{g}$
ist die **Höhe** zu berechnen, wenn der **Flächeninhalt** und die **Grundlinie** gegeben ist.

Nach der Formel: III. $g = \frac{f}{h}$
können wir die **Grundlinie** bestimmen, wenn uns der **Flächeninhalt** und die **Höhe** gegeben ist.

*) Gemäß Seite 202 Brief 12 können wir ein aus mehreren Factoren bestehendes Product durch einen seiner Factoren dividiren, indem wir den betreffenden Factor aus dem Producte fortlassen. Wenn wir daher das Product $g \cdot h$ durch den Factor g theilen, d. h. $\frac{g \cdot h}{g}$ berechnen, so erhalten wir einfach h.

Haben wir bei einem Parallelogramm

a) f*) = 12 □cm, g*) = 4 cm, so ist
h**) = $\frac{12}{4}$ cm = 3 cm,

b) f = 24 □m, g = 6 m, so ist
h = $\frac{24}{6}$ m = 4 m,

c) f = 45 □Fuß, g = 9 Fuß, so ist
h = $\frac{45}{9}$ Fuß = 5 Fuß,

d) f = 14 □Meilen, h = 2 Meilen, so ist
g = $\frac{14}{2}$ Meilen = 7 Meilen,

e) f = 44 □Km, h = 11 Km, so ist
g = $\frac{44}{11}$ Km = 4 Km.

Aufgaben II. 1) Wie groß ist h, wenn

a) f = 18 □Fuß, g = 6 Fuß,
b) f = 26 □Zoll, g = 13 Zoll,
c) f = 25 □dm, g = 5 dm,
d) f = 45 □Ruthen, g = 5 Ruthen,
e) f = 70 □m, g = 10 m ist?

2) Wie groß ist g, wenn wir haben:

a) f = 15 □Km, h = 3 Km,
b) f = 21 □Dm, h = 7 Dm,
c) f = 105 □Fuß, h = 15 Fuß,
d) f = 75 □Ruthen, h = 25 Ruthen,
e) f = 72 □cm, h = 12 cm?

Bemerkung II. Schon als wir den Flächeninhalt des Rechtecks ableiteten, indem wir Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirten, bemerkten wir, daß **die Maßzahlen der Grundlinie und Höhe immer auf dieselbe Längeneinheit bezogen werden müssen.** Dasselbe gilt auch bei den Parallelogrammen im Allgemeinen. Man darf nicht die Grundlinie nach Metern oder Meilen und die Höhe nach Centimetern oder Kilometern angeben, wenn man durch Multiplication der Grundlinie und Höhe den Flächeninhalt erhalten will. Sind Grundlinie und Höhe nach **verschiedenen Längeneinheiten** (Längenmaßen) gemessen, so muß man sie **durch Rechnung erst auf dieselben Längeneinheiten bringen.** Weiß man z. B., daß bei einem Parallelogramm

g*) = 2 m und h*) = 3 dm ist,

so muß man erst die 3 Decimeter in Meter oder die 2 Meter in Decimeter verwandeln. Wir wollen das Letztere thun, weil wir uns noch nicht mit Decimalbrüchen beschäftigt haben.

Es sind: 2 m = 20 dm,
mithin: g = 20 dm, h = 3 dm,
also f**) = g . h = 20 . 3 □dm = 60 □dm.

Ist bei einem Parallelogramm
g = 2 Fuß, h = 8 Zoll, so haben wir auch
g = 2 . 12 Zoll = 24 Zoll, h = 8 Zoll;
daher ist: f = g . h = 24 . 8 □Zoll = 192 □Zoll.

*) g bezeichnet wieder die Grundlinie, h die Höhe. **) f bezeichnet den Flächeninhalt.

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn nach der Formel:

$$h = \frac{f}{g}$$

die Höhe (h) bestimmt werden soll. Von den gegebenen Größen f (Flächeninhalt) und g (Grundlinie) ist dann f in Flächeneinheiten und g in den entsprechenden Längeneinheiten anzugeben. Haben wir f nach Quadrat-Centimetern gemessen, so müssen wir g nach Centimetern, nicht aber etwa nach Metern, Fuß oder Zoll berechnen; die Höhe (h), welche sich als Resultat ergiebt, wenn wir f durch g dividiren, hat dann dieselbe Längeneinheit wie die Grundlinie g.

Soll nach der Formel:

$$g = \frac{f}{h}$$

die Grundlinie g gefunden werden, wenn f und h gegeben ist, so treffen dieselben Regeln zu.

Bemerkung III. Wenn wir beim **rechtwinkligen** Parallelogramm (beim **Rechteck**) die e i n e Seite als G r u n d l i n i e ansehen, so können wir eine der a n s t o ß e n d e n Seiten als H ö h e auffassen. Anstatt also den Satz aufzustellen:

Beim Rechteck ist der Flächeninhalt gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe,

können wir auch sagen:

Beim Rechteck ist der Flächeninhalt gleich dem Product zweier anstoßenden Seiten.

Anders steht es dagegen mit den **schiefwinkligen Parallelogrammen**; wenn man bei solchen Parallelogrammen die eine Seite als Grundlinie ansieht, wird die H ö h e n i c h t v o n d e n a n s t o ß e n d e n S e i t e n repräsentirt, sondern von den Geraden, welche den **senkrechten Abstand** der Grundlinie von der zu ihr parallel laufenden Seite ausdrücken.

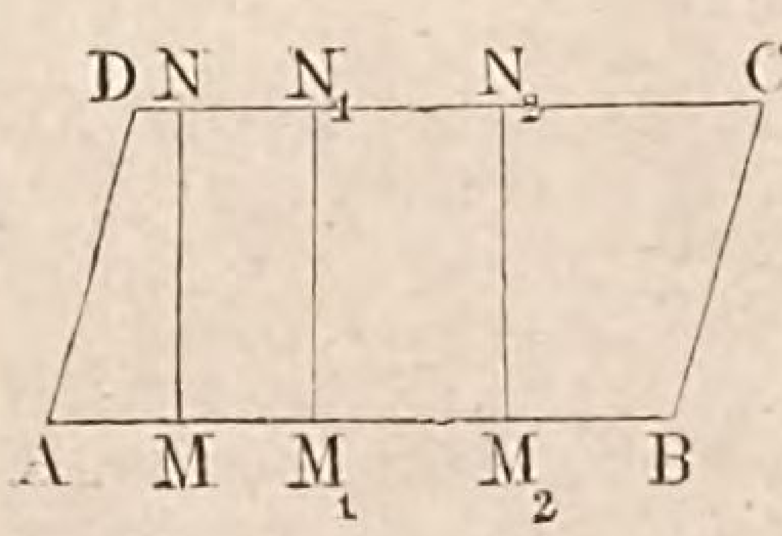


Fig. 10.

Fassen wir in Fig. 10 AB als Grundlinie auf, so bezeichnen die Geraden MN, M_1N_1, M_2N_2 und nicht die an AB anstoßenden Seiten AD und BC die Höhe. Beim schiefwinkligen Parallelogramm dürfen wir also n i c h t sagen, daß das Product zweier anstoßenden Seiten dem Flächeninhalt gleich ist.

§ 47. Constructionsaufgaben. Der Inhalt eines Parallelogramms ist durch das Product von Grundlinie und Höhe vollkommen bestimmt.

Parallelogramme, bei welchen die Produkte von Grundlinie und Höhe gleich sind, müssen daher gleichen Flächeninhalt haben,

oder umgekehrt:

Bei flächengleichen Parallelogrammen müssen die Producte aus Grundlinie und Höhe gleich sein.

Auf die beiden letzten Sätze wollen wir mehrere Constructionsaufgaben gründen.

Aufgabe I. Ein **gegebenes Parallelogramm** soll in ein anderes **flächengleiches Parallelogramm** verwandelt werden, in welchem

1) die **Grundlinie die doppelte Länge** hat wie beim gegebenen Parallelogramm,

2) die **Winkel dieselbe Größe behalten** wie beim gegebenen Parallelogramm.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 11 ein Parallelogramm ABCD mit der Grundlinie AB gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Parallelogramm AEFG mit der Grundlinie AE derart construiren, daß

1) AEFG = ABCD,
2) AE = 2 AB ist,
3) die Winkel in AEFG dieselbe Größe haben wie in ABCD.

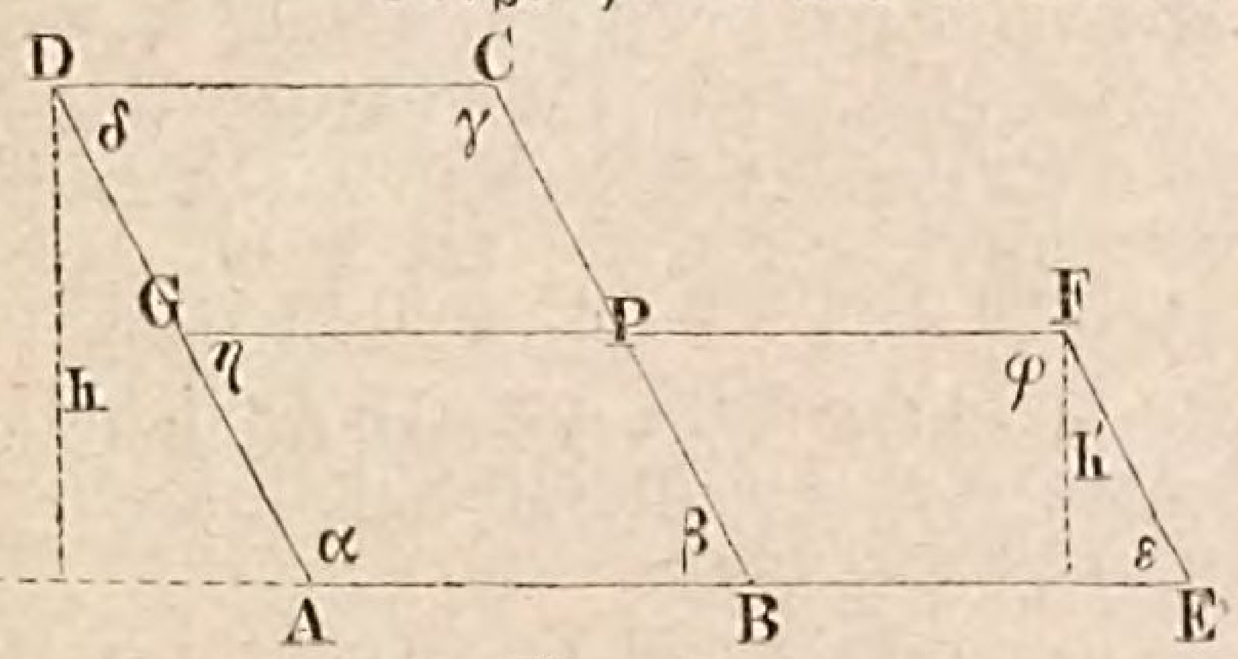


Fig. 11.

Analysis. In Fig. 11 möge das Parallelogramm AEFG der Forderung entsprechen; da dann AEFG und ABCD flächengleich sind, müssen nach dem obengenannten Satze die Producte aus Grundlinie und Höhe gleich sein. In ABCD ist die Grundlinie AB und die Höhe h, in AEFG ist die Grundlinie AE und die Höhe h', mithin haben wir:

$$AB \,.\, h = AE \,.\, h'.$$

AE muß gleich 2 AB sein; setzen wir für AE die gleiche Größe 2 AB ein, so erhalten wir:

$$AB \,.\, h = 2\,AB \,.\, h'.$$

Gleiches durch Gleiches (durch dasselbe) dividirt giebt Gleiches. Theilen wir beide Seiten der letzten Gleichung durch 2 AB oder 2 . AB, so ergiebt sich deswegen:

$$\frac{AB \,.\, h}{2 \,.\, AB} = \frac{2 \,.\, AB \,.\, h'}{2 \,.\, AB} \;{}^{*)},$$

d. h. $\frac{h}{2} = h'$,

oder anders geschrieben:

$$h' = \frac{h}{2}.$$

Jetzt kennen wir die Höhe (h') des gesuchten Parallelogramms AEFG; sie ist gleich $\frac{h}{2}$, d. h. gleich der halben Höhe des gegebenen Parallelogramms ABCD.

Wenn wir erst diese Höhe kennen, so ist die Construction leicht.

---

*) Siehe Seite 322 Brief 19.

Construction. Wir verlängern AB über B hinaus um BE = AB, zeichnen dann eine Gerade h', welche halb so groß ist wie die Höhe h des gegebenen Parallelogramms ABCD und ziehen zu AB im Abstande h' eine Parallele, welche AD in G und die zu AD durch E gelegte Parallele in F schneiden möge.

Behauptung. Das Parallelogramm ABEF ist das verlangte; wir haben

1) AE = 2 AB,
2) sind die Winkel in AEFG den entsprechenden Winkeln in ABCD gleich, und
3) ist AEFG = ABCD.

Beweis. 1) BE ist nach der Construction so groß wie AB; wir haben mithin:

AE = 2 AB, was gefordert war.

2) der Winkel α ist derselbe geblieben; ferner ist

$\varepsilon = \beta$ als Gegenwinkel bei den Parallelen BC und EF geschnitten von AE,

drittens ist

φ d. i. $\angle$ EFG = γ, weil Winkel mit parallelen Schenkeln gleich sind (Seite 70); endlich ist:

$\eta = \delta$ als Gegenwinkel bei den Parallelen FG und CD geschnitten von AD;

also auch die entsprechenden Winkel sind in den beiden Parallelogrammen AEFG und ABCD einander gleich.

3) Wir haben jetzt noch die Flächengleichheit von AEFG und ABCD zu beweisen.

In dem Parallelogramm AEFG ist AE die Grundlinie und h' die Höhe; der Flächeninhalt ist daher gleich AE . h', in Zeichen, wir haben:

$$AEFG = AE \,.\, h'.$$

Nach der Construction ist AE = 2 AB und $h' = \frac{h}{2}$; mithin ist:

$$AEFG = 2\,AB \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\,AB \,.\, h}{2} = AB \,.\, h.$$

AB . h ist auch der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD; mithin haben wir auch:

$$ABCD = AB \,.\, h.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind; daher ist

$$ABCD = AEFG.$$

Bemerkung. Die Construction des Parallelogramms AEFG ist von uns mit Hilfe der Höhe h' ausgeführt worden; wir sind in dieser Weise verfahren, um die Sätze vom Product aus Grundlinie und Höhe in Anwendung zu bringen. Leichter wird die Construction, wenn wir uns um die Höhe h' gar nicht kümmern, sondern die Linie FG construiren, indem wir durch den Mittelpunkt von AD eine Parallele zu AB ziehen.

Aufgabe II. Ein **gegebenes Parallelogramm** soll in ein **flächengleiches Parallelogramm** verwandelt werden, in dem

1) die **Höhe viermal** so groß ist wie die Höhe des gegebenen Parallelogramms,

2) **zwei gegenüberliegende Seiten** einer gegebenen **Strecke** gleich sind.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 12 ein Parallelogramm ABCD mit der Grundlinie AB und der Höhe h und eine Strecke s gegeben.

Forderung. Wir sollen ein Parallelogramm AEFG mit der Grundlinie AE und der Höhe h' zeichnen, und zwar derart, daß

1) $h' = 4h$,
2) $AG = EF = s$,
3) $AEFG = ABCD$ ist.

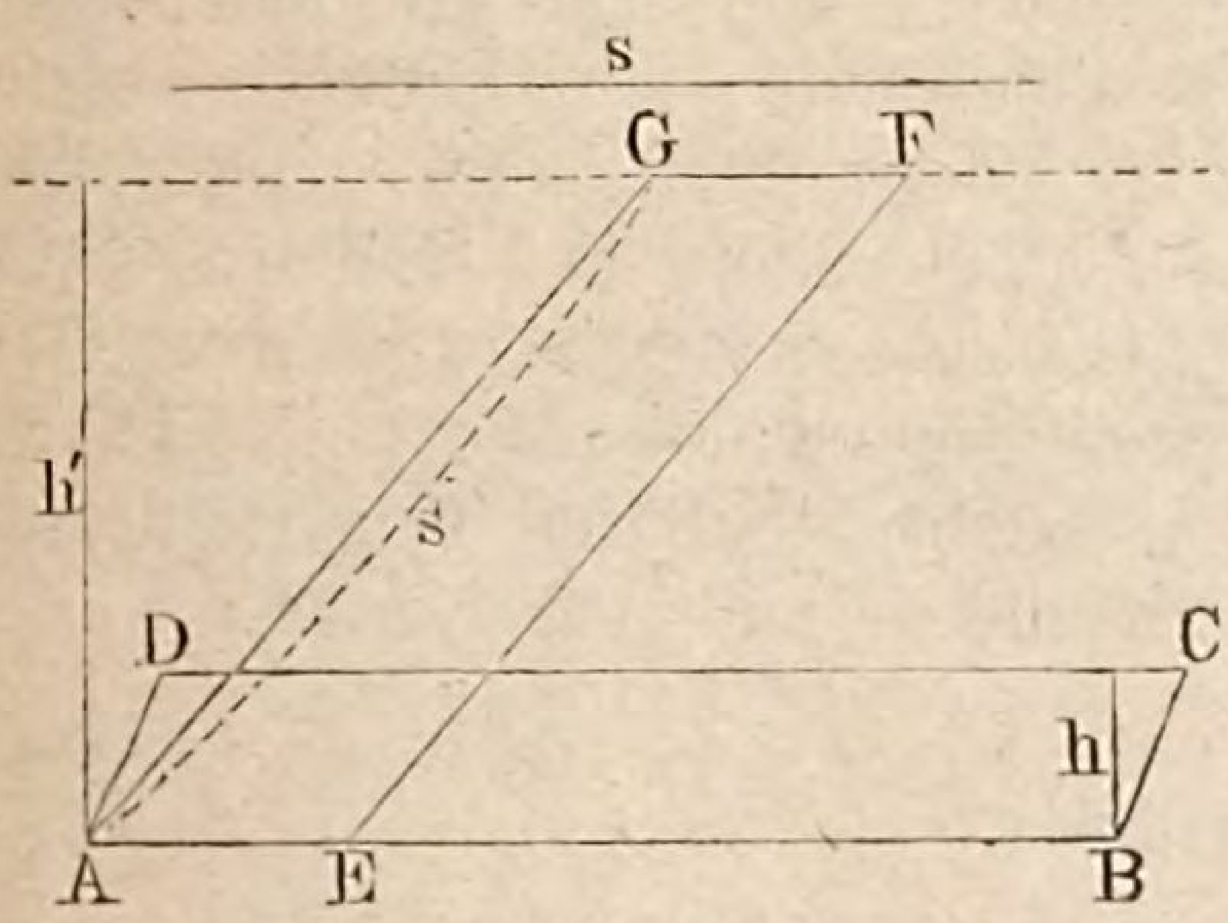


Fig. 12.

Analysis. Wenn uns von dem Parallelogramm AEFG die Grundlinie AE bekannt ist, so können wir es leicht construiren. Um diese Grundlinie zu ermitteln, wollen wir folgende Schlüsse ziehen.

Der Flächeninhalt von AEFG ist gleich $AE \,.\, h'$.
Der Flächeninhalt von ABCD ist gleich $AB \,.\, h$.

Da die beiden Parallelogramme ABCD und AEFG flächengleich sein müssen, ist:

$$AE \,.\, h' = AB \,.\, h.$$

h' ist gleich 4h; setzen wir für h' die gleiche Größe 4h ein, so ergiebt sich:

$$AE \,.\, 4h = AB \,.\, h.$$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch 4h, so erhalten wir nach dem Grundsatze: Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches

$$\frac{AE \,.\, 4h}{4h} = \frac{AB \,.\, h}{4h},$$

$$\text{also } AE = \frac{AB}{4}$$

d. h. die Grundlinie AE des gesuchten Parallelogramms AEFG ist gleich dem vierten Theile der Grundlinie AB des gegebenen Parallelogramms ABCD. Den vierten Theil von AB können wir aber leicht finden; wir brauchen nur erst AB und dann die Hälfte davon gemäß Seite 107 zu halbiren.

Haben wir erst AE, so kennen wir von dem gesuchten Parallelogramm zwei anstoßende Seiten AE und $AG = s$ und die Höhe; die Construction bietet keine Schwierigkeiten weiter.

Construction. Wir tragen auf AB von A aus die Strecke $AE = \frac{AB}{4}$ ab, legen dann zu AB im Abstande $h' = 4h$ eine Parallele und schlagen um A mit s einen Kreis, der die Parallele in G schneiden möge. Darauf ziehen wir die Gerade AG und durch E zu AG die Parallele EF, und **behaupten**, daß AEFG der Forderung entspricht. Den Beweis möge der Schüler selbst führen.

Aufgabe III. Ein gegebenes Parallelogramm soll halbirt werden.

Voraussetzung. Uns ist in Fig. 13 ein Parallelogramm ABCD gegeben.

Forderung. Das Parallelogramm ABCD soll in zwei gleiche Parallelogramme zerlegt werden.

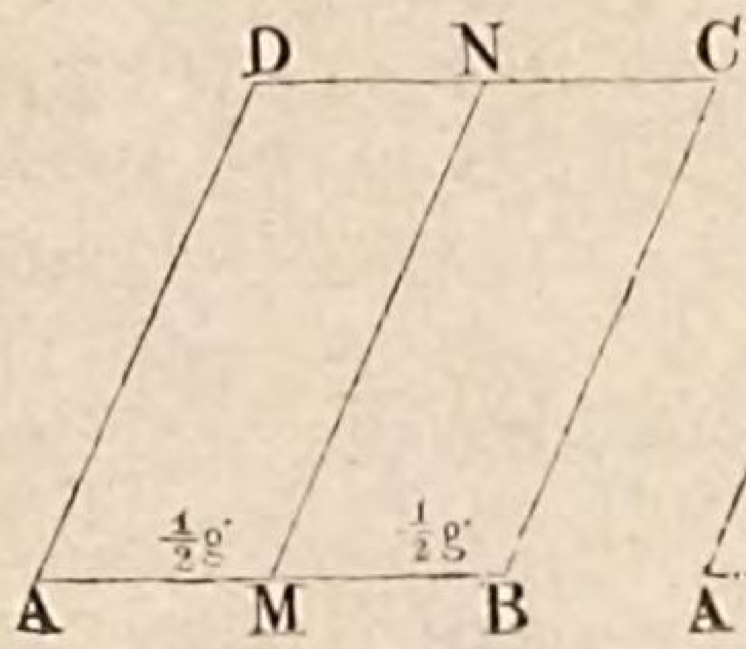


Fig. 13.

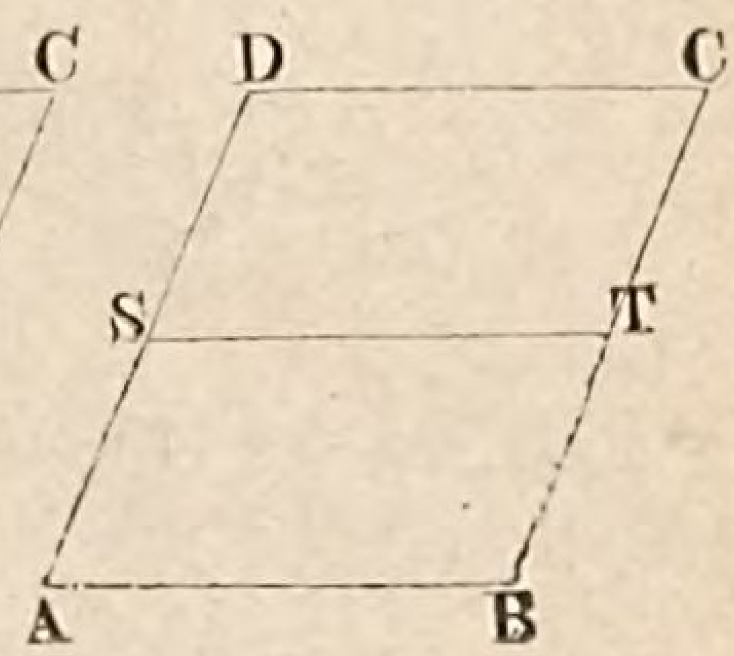


Fig. 14.

Analysis. Die Halbirung können wir sehr einfach ausführen, indem wir die Grundlinie AB halbiren und durch den Mittelpunkt M von AB zu AD die Parallele MN ziehen, welche das Parallelogramm ABCD in die beiden Parallelogramme AMND und MNCB zerlegt; und zwar sind die Grundlinien AM und MB dieser beiden kleinen Parallelogramme gleich der Hälfte von AB, d. h. gleich der Hälfte der Grundlinie des großen Parallelogramms ABCD. Bezeichnen wir AB mit g, so ist

$$AM = \tfrac{1}{2}g \text{ und } MB = \tfrac{1}{2}g.$$

Alle drei Parallelogramme AMND, MNCB und ABCD haben dieselbe in Fig. 13 nicht gezeichnete Höhe h; es hat deswegen

AMND den Flächeninhalt $\frac{1}{2}gh$
MNCB „ „ $\frac{1}{2}gh$
ABCD „ „ gh.

$\frac{1}{2}gh$ ist die Hälfte von gh, mithin sind die beiden Parallelogramme AMND und MNCB halb so groß wie ABCD.

Anstatt AB zu halbiren, hätten wir auch AD in zwei gleiche Strecken AS und SD (siehe Fig. 14) theilen, und durch S zu AB die Parallele ST ziehen können. Durch ST wird dann das Parallelogramm ABCD gleichfalls halbirt. (Weswegen?)

Aufgaben. Der Schüler möge ein Parallelogramm zeichnen, welches

a) zweimal,
b) dreimal,
c) viermal

so groß ist wie ein gegebenes Parallelogramm.

Die Wurzel der Bildung ist bitter, die Frucht ist süß. (Isokrates.)

Lection 47.

A. Die Flächenmessung eines Dreiecks.

§ 48. Der Flächeninhalt eines Dreiecks.

In Fig. 1 sehen wir das Parallelogramm ABDE und das Dreieck ABC; beide Figuren haben die gemeinsame Grundlinie AB (g) und dieselbe Höhe (h). Gemäß Seite 380 ist ein Dreieck halb so groß wie ein Parallelogramm, welches mit ihm über derselben Grundlinie steht und die gleiche Höhe hat; mithin ist

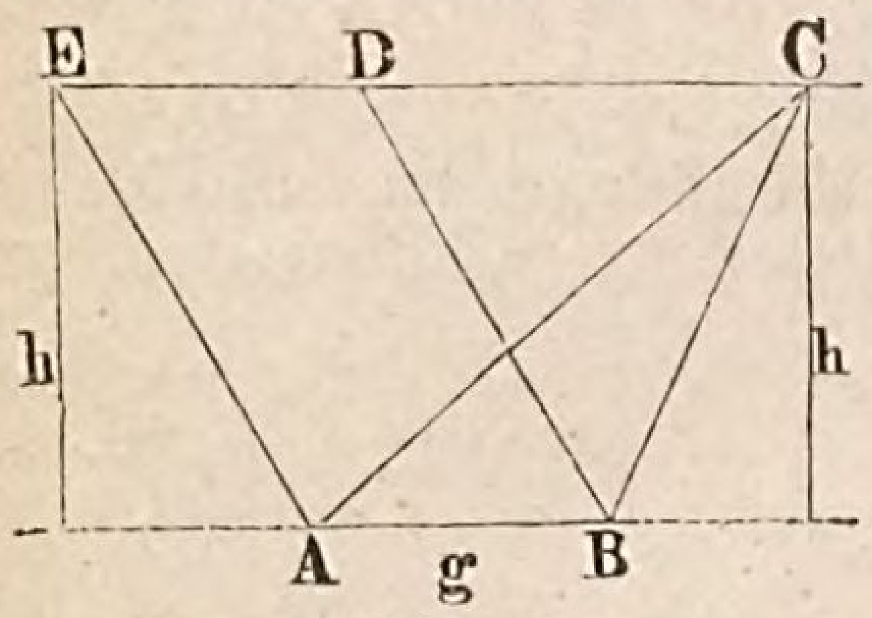


Fig. 1.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABDE.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe; wir haben daher:

$$ABDE = gh.$$

Führen wir in der vorletzten Gleichung für ABDE den gleichen Werth gh ein, so ergiebt sich;

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} gh,$$

d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Product aus der Grundlinie g und der Höhe h. Wenn wir diesen Satz verallgemeinern, erhalten wir den wichtigen

Lehrsatz I. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

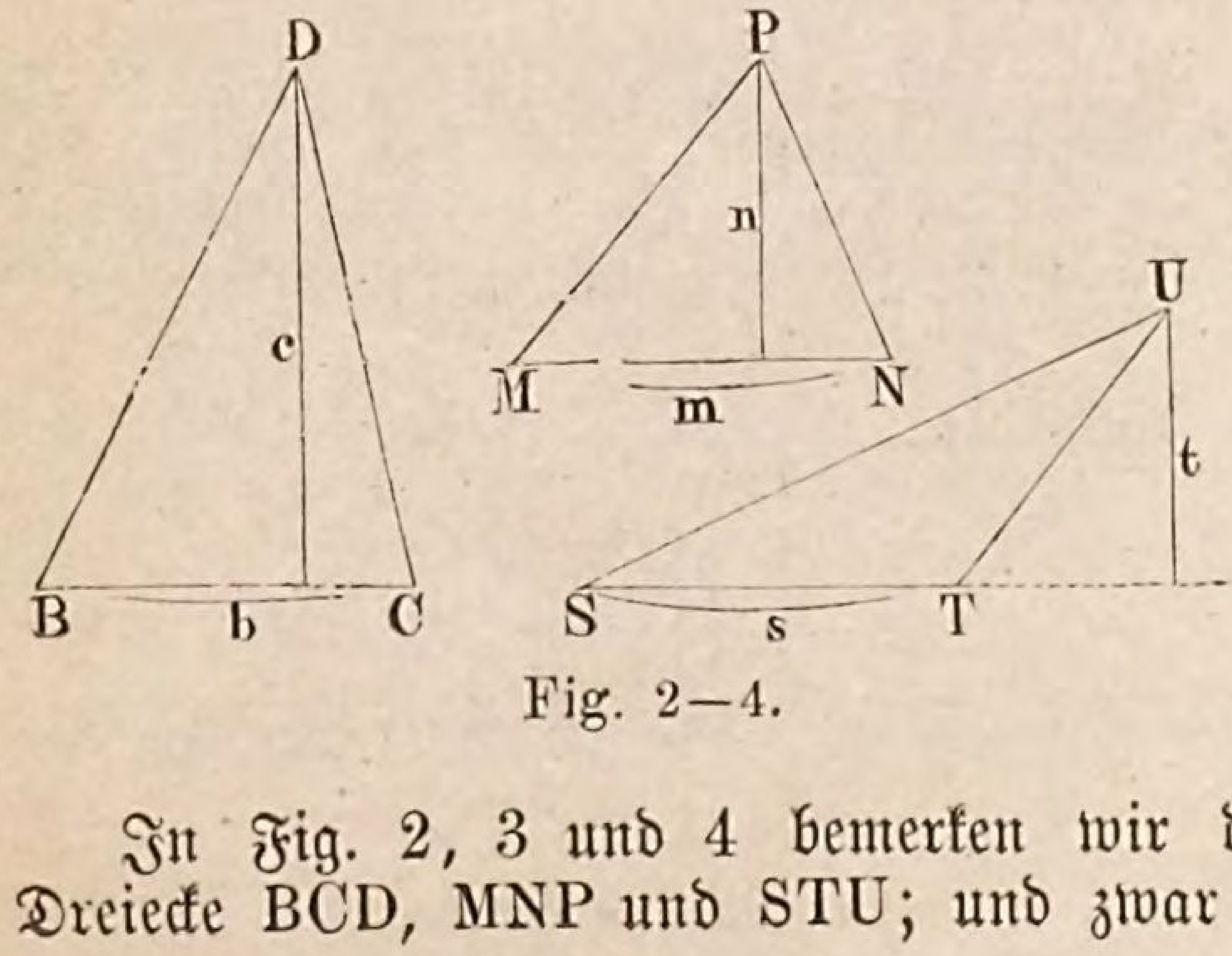


Fig. 2—4.

In Fig. 2, 3 und 4 bemerken wir die Dreiecke BCD, MNP und STU; und zwar ist im △ BCD b die Grundlinie, c die Höhe,
" △ MNP m " " n " "
" △ STU s " " t " "

Nach unserm Lehrsatze ist daher:

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2} bc, \quad \triangle MNP = \tfrac{1}{2} mn,$$
$$\triangle STU = \tfrac{1}{2} st$$

Wir wollen uns jetzt zu Zahlenbeispielen wenden, indem wir die Grundlinie, die Höhe und den Flächeninhalt nach Längeneinheiten bez. nach Flächeneinheiten bestimmen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir dabei die **Grundlinie** immer mit **g**, die **Höhe** mit **h** und den **Flächeninhalt** mit **f** bezeichnen. Der Flächeninhalt ist nach der Formel:

$$f = \tfrac{1}{2} gh$$

zu berechnen.

In einem Dreieck sei

a) g = 10 cm, h = 7 cm, dann ist
$f = \frac{1}{2} \cdot gh = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \,\square\text{cm} = 35 \,\square\text{cm}$,

b) g = 18 dm, h = 5 dm, folglich
$f = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 5 \,\square\text{dm} = 45 \,\square\text{dm}$,

c) g = 22 Fuß, h = 11 Fuß, folglich
$f = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 11 \,\square\text{Fuß} = 121 \,\square\text{Fuß}$,

d) g = 35 Zoll, h = 2 Zoll, folglich
$f = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 2 \,\square\text{Zoll} = 35 \,\square\text{Zoll}$.

Aufgaben I. Der Schüler möge den Flächeninhalt (f) eines Dreiecks berechnen, wenn wir haben:

a) g = 8 m, h = 3 m,
b) g = 20 m, h = 10 m,
c) g = 24 Meilen, h = 5 Meilen,
d) g = 22 Km, h = 13 Km,
e) g = 10 Dm, h = 9 Dm.

Bemerkung I. Wenn wir bei einem Dreieck f den Flächeninhalt, g die Grundlinie und h die Höhe nennen, ist

$$\text{I. } f = \tfrac{1}{2} gh,$$

folglich auch: $2f = gh$,

oder anders geschrieben:

$$gh = 2f.$$

Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches. Theilen wir beide Seiten der letzten Gleichung durch g, so ergiebt sich:

$$\frac{gh}{g} = \frac{2f}{g},$$

$$\text{oder II. } h = \frac{2f}{g},$$

d. h. **bei einem Dreieck ist die Höhe gleich dem doppelten Flächeninhalt dividirt durch die Grundlinie.**

Wenn wir in: $gh = 2f$ beide Seiten durch h dividiren, erhalten wir:

$$\frac{gh}{h} = \frac{2f}{h},$$

$$\text{oder III. } g = \frac{2f}{h},$$

d. h. **bei einem Dreieck ist die Grundlinie gleich dem doppelten Flächeninhalt dividirt durch die Höhe.**

Die Formeln: II. $h = \frac{2f}{g}$,

oder III. $g = \frac{2f}{h}$,

dienen dazu, die Höhe bez. die Grundlinie zu berechnen, wenn uns der Flächeninhalt und die Grundlinie bez. die Höhe gegeben ist.

Ist z. B. in einem Dreieck:

$$f = 12 \,\square\text{cm},\ g = 3 \text{ cm},$$

so haben wir nach der Formel:

$$h = \frac{2f}{g},$$

$$h = \frac{2 \cdot 12}{3} \text{ cm} = 8 \text{ cm}.$$

Wissen wir ferner, daß in einem Dreieck

$$f = 27 \,\square\text{cm},\ h = 9 \text{ cm}$$

ist, so ergiebt sich nach der Formel:

$$g = \frac{2f}{h},$$

$$g = \frac{2 \cdot 27}{9} \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Aufgaben II. In einem Dreieck sei

a) $f = 35 \,\square$m, $g = 7$ m,
b) $f = 24 \,\square$Fuß, $g = 8$ Fuß,

wie groß ist h?

Es sei ferner

a) $f = 28 \,\square$Zoll, $h = 7$ Zoll,
b) $f = 60 \,\square$mm, $h = 12$ mm,

wie groß ist g?

Bemerkung II. Wenn man bei einem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete als Grundlinie auffaßt, so stellt die andere Kathete die Höhe dar. Ist z. B. in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (siehe Fig. 5) die Kathete BC (a) die Grundlinie, so ist AC (b) die Höhe.

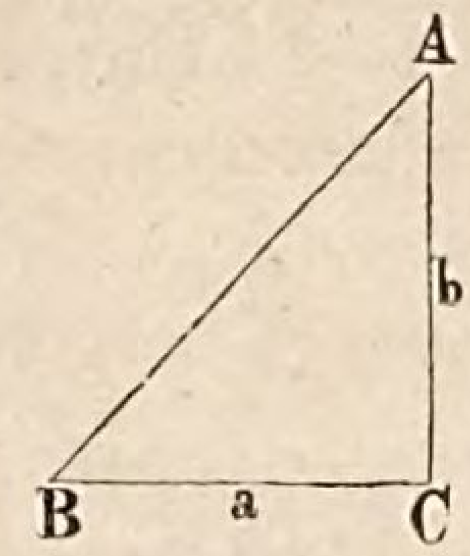


Fig. 5.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe; mithin ist:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \cdot AC = \tfrac{1}{2} ab,$$

d. h. das rechtwinklige Dreieck ABC ist gleich dem halben Product aus den beiden Katheten a und b.

Allgemein können wir den Satz aufstellen:

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch das halbe Product aus den beiden Katheten angegeben.

Aufgaben III. In einem rechtwinkligen Dreieck betrage

a) die eine Kathete 2 m, die andere 3 m,
b) die eine Kathete 4 m, die andere 5 m,
c) die eine Kathete 5 Fuß, die andere 2 Fuß,

wie groß ist der Flächeninhalt?

§ 49. Verschiedene Ausdrücke für den Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Parallelogramms.

Bei einem Dreieck können wir jede der drei Seiten als Grundlinie auffassen; zu jeder Seite gehört auch eine Höhe. In Figur 6 kann z. B. sowohl AB (c), wie BC (a), wie AC (b) als Grundlinie angesehen werden; und zwar gehört zu c die Höhe h_c, zu b die Höhe h_b, zu a die Höhe h_a.

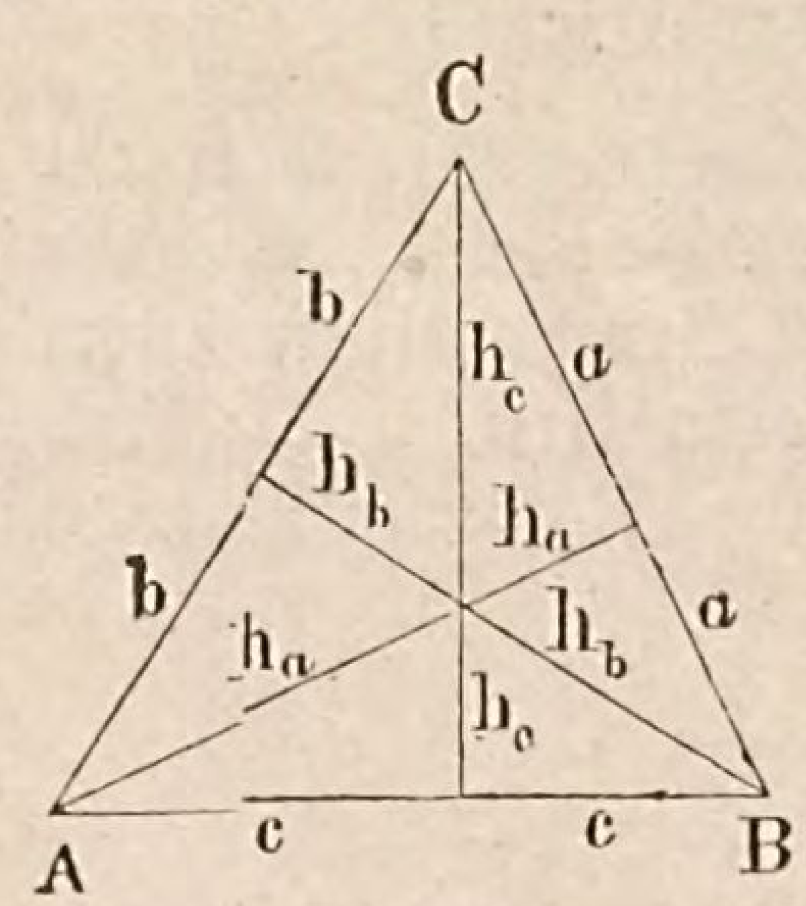


Fig. 6.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, welcher dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe gleich ist, kann darum auch auf dreifache Weise dargestellt werden; wir haben

$$1)\ \triangle ABC = \tfrac{1}{2} a h_a,$$
$$2)\ \triangle ABC = \tfrac{1}{2} b h_b,$$
$$3)\ \triangle ABC = \tfrac{1}{2} c h_c,$$

daher auch

$$\tfrac{1}{2} a h_a = \tfrac{1}{2} b h_b = \tfrac{1}{2} c h_c;$$

wenn die Hälften gleich sind, müssen auch die Ganzen gleich sein; folglich ist auch:

$$a h_a = b h_b = c h_c,$$

d. h. **in einem Dreiecke sind die Producte**

aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe einander gleich.

Wenn wir ein Dreieck mit den Seiten

$$s, \quad t, \quad u$$

und den zugehörigen Höhen

$$h_s, \quad h_t, \quad h_u$$

haben, so muß demnach

$$sh_s = th_t = uh_u$$

sein. Nehmen wir an, daß die **drei Höhen** h_s, h_t und h_u einander **gleich** sind und die Länge h haben, so können wir schreiben:

$$sh = th = uh.$$

Gleiches durch Gleiches (durch Dasselbe) dividirt, giebt Gleiches. Theilen wir jedes der drei Producte

$$sh, \quad th, \quad uh$$

durch h, so erhalten wir daher:

$$s = t = u,$$

d. h. **wenn in einem Dreieck die Höhen** (h_s, h_t, h_u) **gleich sind, so müssen auch die Seiten** (s, t und u) **gleich sein; das Dreieck ist gleichseitig.**

B. Die Proportionen.

§ 50. Die Definition der Proportionen. Wie wir auf Seite 298 auseinander gesetzt haben, **verändert ein Bruch seinen Werth nicht,** wenn wir ihn **erweitern,** d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciren. Erweitern wir $\frac{3}{4}$ mit 2, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 . 2}{4 . 2} = \frac{6}{8},$$

oder kürzer: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Wird $\frac{2}{3}$ mit 5 erweitert, so ergiebt sich:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 . 5}{3 . 5} = \frac{10}{15},$$

oder kürzer: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Mit den beiden Bruchgleichungen:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \text{ und } \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

wollen wir uns jetzt weiter beschäftigen, und zwar wollen wir zunächst erwähnen, daß man solchen **Gleichungen zwischen zwei Brüchen** einen besonderen Namen beigelegt hat; man nennt sie nämlich **Proportionen.**

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ist also eine „Proportion“,

und ebenso ist

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ eine „Proportion“.“

Man giebt den Proportionen in der Regel eine andere Form, indem man für den Divisionsstrich (—) die beiden übereinanderstehenden Punkte (:) als Divisionszeichen einführt. Aus

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \text{ und } \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

wird dann:

$$3:4 = 6:8 \text{ und } 2:3 = 10:15.$$

Wenn wir

$$3:4 = 6:8 \text{ und } 2:3 = 10:15$$

in Worte kleiden, müssen wir nach den Auseinandersetzungen auf Seite 12 sagen:

3 dividirt durch 4 ist gleich 6 dividirt durch 8, und

2 dividirt durch 3 ist gleich 10 dividirt durch 15,

$3:4 = 6:8$ wird aber gewöhnlich gesprochen:

3 **verhält sich zu** 4 **wie** 6 **zu** 8,

oder einfacher:

3 **zu** 4 **wie** 6 **zu** 8;

$2:3 = 10:15$ spricht man demnach:

2 **verhält sich zu** 3 **wie** 10 **zu** 15,

oder einfacher:

2 **zu** 3 **wie** 10 **zu** 15.

Aufgabe. Der Schüler möge bei den Proportionen:

$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, $\frac{11}{12} = \frac{33}{36}$, $\frac{13}{14} = \frac{26}{28}$

für den Bruchstrich die beiden übereinanderstehenden Punkte setzen, und dann angeben, wie diese Proportionen gesprochen werden.

§ 51. Die innern und äußern Glieder einer Proportion. In der Proportion:

$$3:4 = 6:8$$

finden wir außer den Divisionszeichen (:) und dem Gleichheitszeichen (=) die vier Zahlen 3, 4, 6 und 8. Diese vier Zahlen heißen

die **Glieder** der Proportion, und zwar werden die Zahlen

3 und 8, weil sie an den **äußern Enden** der Proportion stehen, die **äußern Glieder,**

die Zahlen 4 und 6 dagegen, weil sie die **Innenseite** der Proportion einnehmen, die **innern Glieder** genannt.

In: $2:3 = 10:15$

sind demnach:

2 und 15 die „äußern Glieder",
3 und 10 die „innern Glieder".

In: $a:b = c:d$,

oder anders geschrieben: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sind

a und d die äußern Glieder,
b und c die innern Glieder.

In: $x:y = u:v$

oder anders geschrieben: $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ sind

x und v die äußern Glieder,
y und u die innern Glieder.

Aufgaben. Der Schüler möge bei den Proportionen:

1) $1:2 = 4:8$, 2) $6:2 = 24:8$,
3) $10:5 = 20:10$, 4) $c:d = e:f$,
5) $m:n = s:t$, 6) $t:u = v:w$

die äußern und die innern Glieder nennen.

§ 52. Die Producte der äußern und der innern Glieder. In der Proportion:

$$3:4 = 6:8$$

sind 3 und 8 die beiden äußern, 4 und 6 die beiden innern Glieder.

Bilden wir das **Product der äußern Glieder,** so erhalten wir **24**; denn es ist:

$$3 \cdot 8 = 24.$$

Bilden wir das **Product der innern Glieder,** so ergiebt sich gleichfalls **24**, denn wir haben:

$$4 \cdot 6 = 24.$$

Es ist also: $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$,

d. h. bei der Proportion: $3:4 = 6:8$ ist das Product **der äußern Glieder** gleich dem Product **der innern Glieder.**

Suchen wir uns noch andere Proportionen (Bruchgleichungen), indem wir einige Brüche erweitern, und prüfen wir, ob auch bei diesen Proportionen die Beobachtung zutrifft, welche wir soeben gemacht haben. Es ist:

1) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$ ist mit 3 erweitert,
2) $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, $\frac{1}{4}$ ist mit 5 erweitert,
3) $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$, $\frac{2}{7}$ ist mit 2 erweitert.

Setzen wir statt der Bruchstriche (—) als Divisionszeichen die beiden übereinanderstehenden Punkte (:), so nehmen die vorstehenden Proportionen die Form an:

1) $1:2 = 3:6$,
2) $1:4 = 5:20$,
3) $2:7 = 4:14$.

Bei der ersten Proportion sind 1 und 6 die äußern, 2 und 3 die innern Glieder; wir haben:

$$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3.$$

Bei der zweiten Proportion sind 1 und 20 die äußern, 4 und 5 die innern Glieder; und zwar ist:

$$1 \cdot 20 = 4 \cdot 5.$$

Bei der dritten Proportion sind 2 und 14 die äußern, 7 und 4 die innern Glieder; auch hier finden wir:

$$2 \cdot 14 = 4 \cdot 7.$$

In allen diesen Fällen gilt also der

Lehrsatz II. Bei einer Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder.

Beweisen wir diesen Satz streng mathematisch!

Voraussetzung. Es sei $a:b = c:d$.

Behauptung. $a \cdot d = b \cdot c$.

Beweis. Wir wollen die Proportion:

$$a:b = c:d$$

in Bruchform schreiben; es ergiebt sich dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches. Multipliciren wir beide Seiten der letzten Gleichung mit bd, so erhalten wir:

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d} \text{ *)},$$

d. i. $ad = cb$,
oder $ad = bc$, was behaupt. war.

*) Siehe Seite 335 und 202.

Aufgaben. Bei den Proportionen:

1) $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$, 2) $\frac{9}{10} = \frac{27}{30}$, 3) $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$,
4) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, 5) $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, 6) $\frac{a^2}{b^3} = \frac{b^4}{d^5}$,
7) $1:10 = 4:40$, 8) $5:6 = 30:36$,
9) $1:2 = 13:26$, 10) $1:5 = 7:35$,
11) $m:n = p:q$, 12) $r:s = u:v$

möge der Schüler das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder setzen.

§ 53. Die Vertauschung der äußern Glieder. Wenn wir $\frac{2}{3}$ mit 5 erweitern, erhalten wir $\frac{10}{15}$; es besteht mithin die Proportion:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15},$$

oder anders geschrieben:

$$2:3 = 10:15.$$

Bei dieser Proportion sind 2 und 15 die äußern Glieder; wenn wir diese **äußern Glieder mit einander vertauschen,** ergiebt sich:

$$15:3 = 10:2.$$

Wir erhalten damit eine andere Proportion, welche auch vollkommen richtig gebildet ist; beide Seiten sind einander gleich, denn wenn wir 15 durch 3 dividiren, ergiebt sich 5, und wenn wir 10 durch 2 theilen, erhalten wir gleichfalls 5.

Es ist also erlaubt, bei der Proportion:

$$2:3 = 10:15$$

die äußern Glieder mit einander zu vertauschen.

Erweitern wir $\frac{5}{6}$ mit 2, so ergeben sich $\frac{10}{12}$; es in mithin:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12},$$

oder anders geschrieben:

$$5:6 = 10:12.$$

Werden in dieser Proportion die beiden äußern Glieder mit einander vertauscht, so wird

$$12:6 = 10:5.$$

Damit sind wir wieder zu einer Proportion gelangt, welche vollkommen zu Recht besteht; beide Seiten sind einander gleich, denn wenn 12 durch 6 getheilt wird, ergiebt sich 2, und wenn wir 10 durch 5 theilen, erhalten wir gleichfalls 2; auch dieser Fall bewahrheitet also den

Lehrsatz III. Bei einer Proportion dürfen die äußern Glieder mit einander vertauscht werden.

Wir wollen für diesen Satz einen vollkommen mathematischen Beweis geben.

Voraussetzung. $a:b = c:d$.

Behauptung. $d:b = c:a$.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir in der Proportion:

$$a:b = c:d$$

als Divisionszeichen Bruchstriche einführen; wir erhalten dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{d}{a}$ multiplicirt, so ergiebt sich:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{a} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a},$$

oder $\frac{ad}{ba} = \frac{cd}{da}$,

d. i. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$,

oder anders geschrieben:

$d:b = c:a$, was behauptet war.

§ 54. Die Vertauschung der innern Glieder. Wenn wir in der Proportion:

$$2:3 = 10:15$$

die beiden **innern Glieder** 3 und 10 **vertauschen,** so erhalten wir:

$$2:10 = 3:15.$$

Untersuchen wir, ob diese Proportion auch zu Recht besteht, ob also in der That

$2:10$ ebenso groß ist wie $3:15$.

Wenn wir in $2:10$ und in $3:15$ als Divisionszeichen den Bruchstrich anwenden, so erhalten wir:

$$2:10 = \frac{2}{10}$$

$$3:15 = \frac{3}{15}.$$

Heben wir $\frac{2}{10}$ durch 2 und $\frac{3}{15}$ durch 3, so ergiebt sich:

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ und } \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Es ist also

$$\tfrac{2}{10} = \tfrac{3}{15},$$

oder anders geschrieben:

$$2:10 = 3:15,$$

d. h. es ist gestattet, in der Proportion

$$2:3 = 10:15$$

die Vertauschung der innern Glieder 3 und 10 vorzunehmen. Wir werden überhaupt beweisen, daß der

Lehrsatz IV. In einer Proportion dürfen die beiden innern Glieder vertauscht werden,

allgemein gilt.

Voraussetzung. $a:b = c:d$.

Behauptung. $a:c = b:d$.

Beweis. In einer Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder; aus $a:b = c:d$ folgt daher:

$$ad = bc.$$

Dividiren wir beide Seiten durch cd, so ergiebt sich:

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd},$$

$$\text{d. h. } \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

oder anders geschrieben:

$a:c = b:d$, was behauptet war.

§ 55. Zusammenfassung der beiden Lehrsätze. Wenn wir die beiden letzten Lehrsätze, welche wir über die Vertauschung der Glieder einer Proportion gebracht haben, einander gegenüberstellen, erhalten wir:

Bei einer Proportion dürfen die **äußern** Glieder mit einander vertauscht werden.	Bei einer Proportion dürfen die **innern** Glieder mit einander vertauscht werden.

Bringen wir für diese beiden Sätze mehrere Beispiele. Wenn wir $\frac{3}{11}$ mit 8 und $\frac{7}{13}$ mit 3 erweitern, ergeben sich die Proportionen:

$$\tfrac{3}{11} = \tfrac{24}{88} \text{ und } \tfrac{7}{13} = \tfrac{21}{39},$$

oder anders geschrieben:

$$3:11 = 24:88 \text{ und } 7:13 = 21:39$$

Vertauschen wir in

$$3:11 = 24:88$$

die äußern Glieder, so ergiebt sich:

$$88:11 = 24:3.$$

Werden jetzt noch die innern Glieder vertauscht, so erhalten wir:

$$88:24 = 11:3.$$

Wenn wir bei der Proportion:

$$7:13 = 21:39$$

die innern Glieder vertauschen, so wird:

$$7:21 = 13:39.$$

Wird jetzt noch eine Vertauschung der äußern Glieder vorgenommen, so ist

$$39:21 = 13:7.$$

Es sei: $x:y = u:v$.

Durch Vertauschung der äußern Glieder ergiebt sich dann:

$$v:y = u:x.$$

Werden noch die innern Glieder vertauscht, so erhalten wir:

$$v:u = y:x.$$

Aufgaben. a) Der Schüler möge in den Proportionen:

1) $16:8 = 2:1$, 2) $9:3 = 30:10$,
3) $2:14 = 9:63$, 4) $s:t = u:v$

die äußern Glieder vertauschen; er möge

b) in den Proportionen

1) $6:3 = 18:9$, 2) $c:d = e:f$,
3) $a^2:b^2 = c^2:d^2$, 4) $m^3:n^3 = r^3:p^3$

die innern Glieder vertauschen; er möge

c) in den Proportionen

1) $25:5 = 30:6$, 2) $m:n = p:q$

erst eine Vertauschung der äußern, darauf eine Vertauschung der innern Glieder vornehmen.

§ 56. Die Vertauschung der äußern und der innern Glieder. Wenn wir den Bruch $\frac{3}{7}$ mit 5 erweitern, erhalten wir $\frac{15}{35}$. Es besteht mithin die Proportion:

$$\tfrac{3}{7} = \tfrac{15}{35},$$

oder anders geschrieben:

$$3:7 = 15:35.$$

In dieser Proportion sind 3 und 35 die

äußern, 7 und 15 die innern Glieder. Wenn wir die **äußern** Glieder zu **innern** und die **innern** Glieder zu **äußern** machen, so ergiebt sich:

$$7:3 = 35:15.$$

Eine leichte Prüfung zeigt, daß in der That 7 : 3 ebenso groß ist wie 35 : 15, daß also anders ausgedrückt die Proportion: 7 : 3 = 35 : 15 zu Recht besteht.

Erweitern wir nämlich $\frac{7}{3}$ mit 5, so gelangen wir zu dem Bruch $\frac{35}{15}$; es ist also

$$\frac{7}{3} = \frac{35}{15},$$

oder anders geschrieben:

$$7:3 = 35:15,$$

Aus der Proportion:

$$3:7 = 15:35$$

dürfen wir also die Proportion:

$$7:3 = 35:15$$

ableiten; es gilt allgemein der

Lehrsatz V. In einer **Proportion** dürfen wir die **äußern** Glieder zu **innern** und die **innern** Glieder zu **äußern** machen.

Voraussetzung. $a:b = c:d$.

Behauptung. $b:a = d:c$.

Beweis. Das Product der äußern Glieder ist in einer Proportion gleich dem Product der innern Glieder; aus

$$a:b = c:d$$

folgt daher:

$$ad = bc.$$

Dividiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch ac, so wird

$$\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac},$$

$$\text{d. i. } \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

$$\text{also auch: } \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

oder anders geschrieben:

$b:a = d:c$, was behauptet war.

Erläutern wir unsern Lehrsatz durch mehrere Beispiele. Wenn wir die drei Brüche

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8}$$

mit 3, 4, 5

erweitern, kommen wir zu den drei Proportionen:

a) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, b) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, c) $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$,

oder in anderer Form:

a) $2:3 = 6:9$,
b) $5:6 = 20:24$,
c) $7:8 = 35:40$.

Machen wir die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern, so ergeben sich die Proportionen

a) $3:2 = 9:6$,
b) $6:5 = 24:20$,
c) $8:7 = 40:35$.

Kehren wir noch die innern Glieder um, so erhalten wir:

a) $3:9 = 2:6$,
b) $6:24 = 5:20$,
c) $8:40 = 7:35$.

Werden jetzt die äußern Glieder umgekehrt, so ergiebt sich:

a) $6:9 = 2:3$,
b) $20:24 = 5:6$,
c) $35:40 = 7:8$.

Bemerkung I. Wie wir aus den vier mit a bezeichneten Gleichungen ersehen, folgen aus der Proportion:

$$2:3 = 6:9$$

die drei andern Proportionen:

$$3:2 = 9:6,\quad 3:9 = 2:6,\quad 6:9 = 2:3.$$

Die {äußern / innern} Glieder der ersten Proportion sind in den drei folgenden Proportionen zu {innern / äußern} Gliedern geworden; und zwar nehmen die ursprünglich {äußern / innern} Glieder in den drei letzten Proportionen als {innere / äußere} Glieder einen ganz **verschiedenen** Platz ein; 3 und 6 stehen bald als erstes, bald als viertes Glied; 2 und 9 bald als zweites, bald als drittes Glied.

Wenn wir also die **äußern** Glieder zu **innern** und die **innern** zu **äußern** machen, so ist es **gleichgiltig**, welches von den ursprünglich {äußern / innern} Glidern {2tes oder 3tes / 1tes oder 4tes} Glied wird.

Aufgaben. Der Schüler möge bei den Proportionen:

1) $2:5 = 14:35$, 2) $9:10 = 45:50$,
3) $3:7 = 21:49$, 4) $6:7 = 18:21$,
5) $b:c = d:e$, 6) $x:y = u:w$

die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern machen; er möge darauf die innern und dann die äußern Glieder mit einander vertauschen.

Bemerkung II. Wie uns die letzten vier Paragraphen lehren, ist uns bei der Behandlung der Proportionen ein weiter Spielraum gelassen. Wir dürfen die beiden äußern und ebenso auch die beiden innern Glieder mit einander vertauschen; wir dürfen ferner **die** äußern Glieder zu innern und **die** innern Glieder zu äußern machen, oder anders ausgedrückt, eine Vertauschung der **beiden** äußern Glieder mit den **beiden** innern Gliedern vornehmen; und zwar müssen wir auf das Wort **„beiden"** besondern Nachdruck legen; es ist fett gedruckt, um den Irrthum zu verhindern, daß **ein** äußeres Glied mit **einem** innern Gliede vertauscht werden könne. Dies ist **nicht** gestattet. Aus

$$2:3 = 6:9$$

folgt z. B. nicht

$$3:2 = 6:9.$$

Die Größe $3:2$ ist vielmehr von $6:9$ durchaus verschieden, denn es ist:

$$3:2 = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2} \text{ und } 6:9 = \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}.$$

§ 57. Die Multiplication eines äußern und innern Gliedes mit demselben Factor.

Wenn wir die Proportion

$$a:b = c:d$$

als Bruchgleichung schreiben, ergiebt sich:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Der Werth eines Bruches wird nicht verändert, wenn man ihn erweitert, d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt. Erweitern wir $\frac{a}{b}$ mit m, so ist deswegen:

$$\frac{ma}{mb} = \frac{c}{d},$$

oder anders geschrieben:

$$ma:mb = c:d.$$

Wenn man die Proportion

$$a:b = c:d$$

hat, darf man also auch die Proportion

$$\text{I. } ma:mb = c:d$$

bilden; d. h.

man darf in: $a:b = c:d$ das äußere Glied a und das innere Glied b mit derselben Zahl m multipliciren.

Gehen wir noch einmal auf die Proportion

$$a:b = c:d$$

zurück. Wenn wir die Form

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

wählen und beide Seiten dieser Gleichung mit m multipliciren, erhalten wir:

$$\frac{ma}{b} = \frac{mc}{b},$$

oder anders geschrieben:

$$ma:b = mc:d.$$

Aus: $a:b = c:d$

darf man mithin auch die Proportion

$$\text{II. } ma:b = mc:d$$

folgern.

Dividiren wir ferner in

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

beide Seiten durch m, so ergiebt sich:

$$\frac{a}{mb} = \frac{c}{md},$$

oder anders geschrieben:

$$\text{III. } a:mb = c:md.$$

Wird endlich in:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

der letzte Bruch $\frac{c}{d}$ mit m erweitert, so erhalten wir:

$$\frac{a}{b} = \frac{mc}{md},$$

oder anders geschrieben:

$$\text{IV. } a:b = mc:md.$$

Aus der Proportion:

$$a:b = c:d$$

folgen also die vier andern Proportionen:

I. $ma:mb = c:d$, II. $ma:b = mc:d$,
III. $a:mb = c:md$, IV. $a:b = mc:md$.

Die vier Proportionen I—IV sind aus

$$a:b = c:d$$

hervorgegangen, indem wir ein äußeres und zugleich ein inneres Glied mit m multiplicirt haben; sie sind also ein Beweis für die Richtigkeit des

Lehrsatzes VI. In einer Proportion darf ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Größe multiplicirt werden.

Es besteht die Proportion:

$$2:3 = 6:9;$$

nach dem vorigen Lehrsatze dürfen wir eins der beiden äußern Glieder und zugleich eins der beiden innern Glieder mit 5 multipliciren. Es ist mithin:

1) $5.2:5.3 = 6:9$, d. i. $10:15 = 6:9$,
2) $5.2:3 = 5.6:9$, d. i. $10:3 = 30:9$,
3) $2:5.3 = 6:5.9$, d. i. $2:15 = 6:45$,
4) $2:3 = 5.6:5.9$, d. i. $2:3 = 30:45$.

Es sei ferner: $u:v = x:y$.

Multipliciren wir ein äußeres und ein inneres Glied mit u, so erhalten wir:

1) $uu:uv = x:y$, d. i. $u^2:uv = x:y$,
2) $uu:v = ux:y$, d. i. $u^2:v = ux:y$,
3) $u:uv = x:uy$, 4) $u:v = ux:uy$.

Aufgaben. Der Schüler möge in den Proportionen

1) $3:4 = 6:8$, 2) $6:12 = 9:18$

ein äußeres und ein inneres Glied zunächst mit 5, dann mit a multipliciren; er möge ferner zeigen, welche Proportionen aus

$2:4 = 5:10$, $3:4 = 9:12$,
$a^2:b^2 = d^2:c^2$, $x^4:y^4 = u^4:v^4$

überhaupt abgeleitet werden können.

C. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes erledigt hatten, setzten wir im zweiten Abschnitt der **sechsundvierzigsten Lection** die Lehre von der Flächenmessung fort und gingen zunächst auf das Product aus Grundlinie und Höhe ein, das uns den Flächeninhalt eines Rechtecks repräsentirt. Wir wiesen darauf hin, daß ein solches Product keinen Widersinn enthalte, weil wir unter Grundlinie und Höhe die Zahlen ihrer Längeneinheiten verstehen. Darauf wandten wir uns wieder der Inhaltsbestimmung eines Quadrates zu; wir zeigten, daß der Flächeninhalt eines Quadrats gleich der zweiten Potenz der Quadratseite sei, und benutzten diesen Satz, um bequeme Formeln für den Pythagoräischen Lehrsatz aufzustellen und die Flächeneinheiten mit einander zu vergleichen. Soweit waren wir durch den Satz geführt worden, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks (rechtwinkligen Parallelogramms) dem Product aus Grundlinie und Höhe gleich sei; diesen Satz dehnten wir nun auf schiefwinklige Parallelogramme aus, und lehrten auch, wie bei einem Parallelogramm die Grundlinie bez. die Höhe zu berechnen sei, wenn uns der Flächeninhalt und die Höhe bez. die Grundlinie bekannt ist. Nachdem wir noch mehrere Constructionsaufgaben behandelt, gingen wir in der **siebenundvierzigsten Lection** zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks über, zeigten, daß der Inhalt eines Dreiecks dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe gleich sei, und erörterten auch, wie man die Höhe bez. die Grundlinie eines Dreiecks berechnen könne, wenn die Grundlinie bez. die Höhe gegeben ist.

Wir setzten dann noch auseinander, daß wir auf dreifache Weise den Flächeninhalt eines Dreiecks ausdrücken können, beendeten damit die Lehre von der Flächenmessung und wandten uns der Lehre von den Proportionen zu. Wir erörterten, was unter einer Proportion und unter den innern und äußern Gliedern derselben zu verstehen sei, bewiesen, daß die Producte der innern Glieder und äußern Glieder gleich sind, zeigten, auf welche mannichfaltige Weise die Glieder einer Proportion vertauscht werden können, und schlossen mit einem Satz über die Multiplication zweier Proportionsglieder den unterrichtenden Theil unserer Lection.

D. Wiederholungsfragen.

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks?
2) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats?
3) Wie pflegt man die zweite Potenz der Größe a zu nennen?
4) Welche Formel haben wir für den Pythagoräischen Lehrsatz kennen gelernt?
5) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms?
6) Nach welcher Formel berechnet man bei einem Parallelogramm die Höhe, wenn Flächeninhalt und Grundlinie gegeben ist?
7) Nach welcher Formel ist die Grundlinie zu berechnen, wenn Flächeninhalt und Höhe bekannt ist?
8) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks?
9) Wie findet man die Höhe eines Dreiecks, von dem wir Flächeninhalt und Grundlinie kennen?
10) Wie wird die Grundlinie eines Dreiecks gefunden, wenn Flächeninhalt und Höhe bekannt ist?
11) Wie viel halbe Producte aus Grundlinie und Höhe bezeichnen den Flächeninhalt eines Dreiecks?
12) Was versteht man unter einer Proportion?
13) Wie verhält sich das Product der äußern zum Product der innern Glieder?
14) Welche Glieder dürfen bei einer Proportion vertauscht werden?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 48 und 49.
Planimetrie.

25. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung
hervorragender Fachmänner und Gelehrten
bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als Manuscript gedruckt.

Kein Meister fällt vom Himmel.

Lection 48.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 46.

Abschnitt B. § 43. **Aufgaben I.** Nennen wir den Flächeninhalt f, so ist:

a) $f = e^2$, b) $f = m^2$, c) $f = n^2$, d) $f = x^2$.

Aufgaben II. Der Flächeninhalt möge wieder mit f bezeichnet werden; dann ist:

a) $f = 6^2$ □ Ruthen = 36 □ Ruthen,
b) $f = 4^2$ □ Zoll = 16 □ Zoll,
c) $f = 19^2$ □ Fuß = 361 □ Fuß,
d) $f = 2^2$ □ m = 4 □ m,
e) $f = 13^2$ □ mm = 169 □ mm,
f) $f = 12^2$ □ dm = 144 □ dm,
g) $f = 6^2$ □ Meilen = 36 □ Meilen,
h) $f = 11^2$ □ Km = 121 □ Km,
i) $f = 23^2$ □ Dm = 529 □ Dm.

§ 44. **Aufgaben I.** Nach der Formel:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ergiebt sich: 1) $c^2 = 74$ □ cm, 2) $c^2 = 261$ □ mm, 3) $c^2 = 13$ □ Km, 4) $c^2 = 17$ □ m.

Aufgaben II. Nach der Formel: $b^2 = c^2 - a^2$ ist: 1) $b^2 = 45$ □ dm, 2) $b^2 = 72$ □ m, 3) $b^2 = 176$ □ Km.

§ 46. **Aufgaben I.** Wir erhalten:

a) $f = 7 . 9$ □ m = 63 □ m,
b) $f = 3 . 15$ □ dm = 45 □ dm,
c) $f = 190$ □ cm, d) $f = 100$ □ mm,
e) $f = 169$ □ Zoll, f) $f = 5\frac{3}{8}$ □ Meilen.

Aufgaben II. 1) Wir erhalten:

a) $h = \frac{18}{6}$ Fuß = 3 Fuß, b) $h = \frac{26}{13}$ Zoll = 2 Zoll,
c) $h = \frac{25}{5}$ dm = 5 dm,
d) $h = \frac{45}{5}$ Ruthen = 9 Ruthen,
e) $h = \frac{70}{10}$ m = 7 m.

2) Es ergiebt sich:

a) $g = \frac{15}{3}$ Km = 5 Km, b) $g = \frac{21}{7}$ Dm = 3 Dm,
c) $g = \frac{105}{15}$ Fuß = 7 Fuß,
d) $g = \frac{75}{25}$ Ruthen = 3 Ruthen,
e) $g = \frac{72}{12}$ cm = 6 cm.

§ 47. **Aufgaben.** a) Es soll ein Parallelogramm gezeichnet werden, welches **doppelt so groß** ist wie ein gegebenes Parallelogramm.

Voraussetzung. Gegeben ist uns ein Parallelogramm ABCD (siehe Fig. 1).

Forderung. Wir sollen ein Parallelogramm construiren, welches doppelt so groß ist wie ABCD.

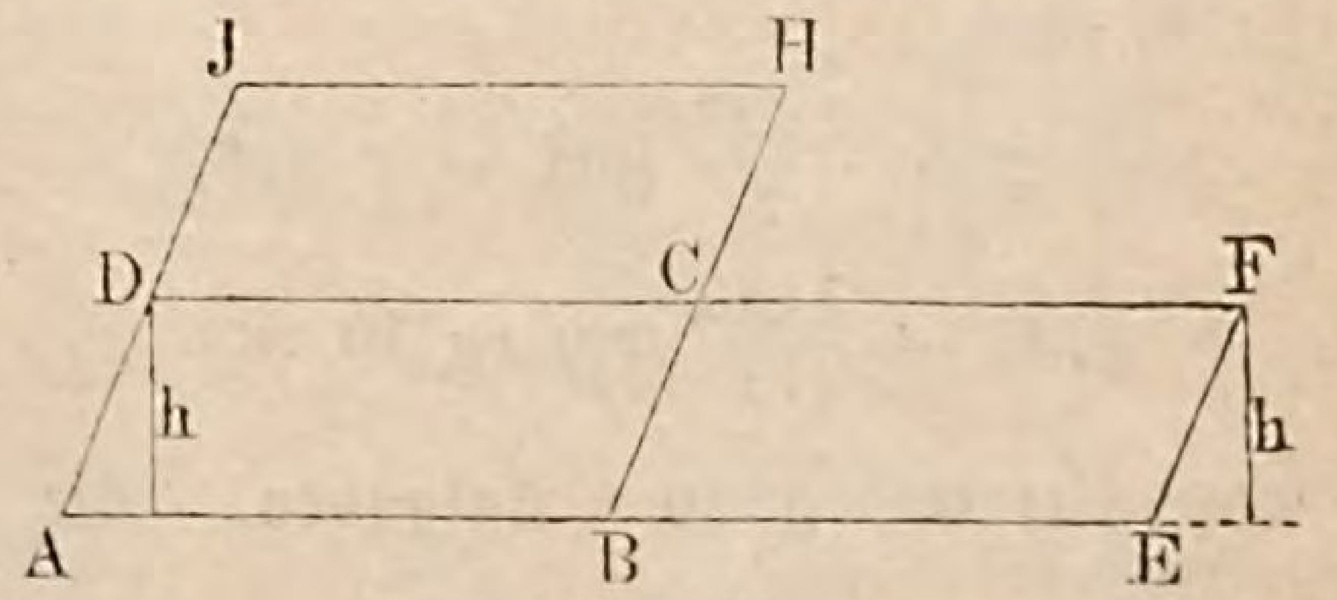


Fig. 1.

Construction. Wir verlängern AB über B hinaus bis E, so daß AE = 2 AB ist, ziehen durch E zu AD eine Parallele, welche die Verlängerung von CD in F schneiden möge.

Behauptung. 1) AEFD ist ein Parallelogramm.

2) AEFD = 2 ABCD.

Beweis. 1) AEFD ist ein Parallelogramm, weil die gegenüberliegenden Seiten der Construction gemäß parallel sind.

2) Die beiden Parallelogramme AEFD und ABCD haben dieselbe Höhe h. Weil der Flächeninhalt eines Parallelogramms dem Producte aus Grundlinie und Höhe gleich ist, haben wir:

$$ABCD = AB \,.\, h,$$
$$AEFD = AE \,.\, h.$$

Nach der Construction ist $AE = 2\,AB$, mithin auch $AEFD = 2\,AB \,.\, h$.

Führen wir in der letzten Gleichung für $AB \,.\, h$ die gleiche Größe ABCD ein, so erhalten wir:

$AEFD = 2\,ABCD$, was beh. war.

Bemerkung. Die Construction kann noch auf mannichfache Weise variirt werden. Man könnte z. B.

1) AB über A hinaus statt über B hinaus verlängern; man könnte

2) die gegenüberliegende Seite CD in derselben Weise zur Grundlage der Construction machen, wie wir es mit AB gethan haben; man könnte

3) AD oder BC um sich selbst verlängern; es würde dann das Parallelogramm ABHJ entstehen (siehe Fig. 1), welches der Forderung entspricht.

b und c) Parallelogramme, welche drei- bez. viermal so groß sind wie das gegebene Parallelogramm ABCD, können ganz ähnlich construirt werden wie das Parallelogramm mit doppeltem Inhalte. Man hat dann nur AB oder eine der andern Seiten nicht zu verdoppeln, sondern zu verdreifachen bez. zu vervierfachen.

Section 47.

Abschnitt A. § 48. **Aufgaben I.** Es ist:

a) $f = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3$ □m = 12 □m,
b) $f = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10$ □m = 100 □m,
c) $f = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5$ □Meilen = 60 □Meilen,
d) $f = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 13$ □Km = 143 □Km,
e) $f = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9$ □Dm = 45 □Dm.

Aufgaben II. Es ist:

$$a)\ h = \frac{2 \,.\, 35}{7}\ m = 10\ m,$$

$$b)\ h = \frac{2 \,.\, 24}{8}\ \text{Fuß} = 6\ \text{Fuß},$$

Es ist ferner:

$$a)\ g = \frac{2 \,.\, 28}{7}\ \text{Zoll} = 8\ \text{Zoll},$$

$$b)\ g = \frac{2 \,.\, 60}{12}\ mm = 10\ mm.$$

Abschnitt B. § 50. **Aufgaben.** Die vier Proportionen:

1) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, 2) $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, 3) $\frac{11}{12} = \frac{33}{36}$, 4) $\frac{13}{14} = \frac{26}{28}$

können geschrieben werden:

1) 4 : 5 = 12 : 15, 2) 7 : 8 = 21 : 24,
3) 11 : 12 = 33 : 36, 4) 13 : 14 = 26 : 28.

Man spricht sie der Reihe nach:

1) 4 verhält sich zu 5 wie 12 zu 15
oder 4 zu 5 wie 12 zu 15,

2) 7 verhält sich zu 8 wie 21 zu 24
oder 7 zu 8 wie 21 zu 24,

3) 11 verhält sich zu 12 wie 33 zu 36
oder 11 zu 12 wie 33 zu 36,

4) 13 verhält sich zu 14 wie 26 zu 28
oder 13 zu 14 wie 26 zu 28.

§ 51. **Aufgaben.**

Die äußern Glieder sind	die innern Glieder sind
in 1) 1 und 8,	in 1) 2 und 4,
in 2) 6 und 8,	in 2) 2 und 24,
in 3) 10 und 10,	in 3) 5 und 20,
in 4) c und f,	in 4) d und e,
in 5) m und t,	in 5) n und s,
in 6) t und w,	in 6) u und v.

§ 52. **Aufgaben.** Es ist:

1) 6 . 14 = 7 . 12, 3) 9 . 30 = 10 . 27,
3) 5 . 35 = 7 . 25, 4) 3 . 15 = 5 . 9,
5) ac = db, 6) $a^2 \,.\, d^5 = b^3 \,.\, b^4$,
7) 1 . 40 = 10 . 4, 8) 5 . 36 = 6 . 30,
9) 1 . 26 = 2 . 13, 10) 1 . 35 = 5 . 7,
11) mq = np, 12) rv = su.

§ 55. **Aufgaben.** a) Wenn wir in den Proportionen:

1) 16 : 8 = 2 : 1, 2) 9 : 3 = 30 : 10,
3) 2 : 14 = 9 : 63, 4) s : t = u : v

die äußern Glieder mit einander vertauschen, erhalten wir:

1) 1 : 8 = 2 : 16, 2) 10 : 3 = 30 : 9,
3) 63 : 14 = 9 : 2, 4) v : t = u : s.

b) Wenn in den Proportionen:

1) 6 : 3 = 18 : 9, 2) c : d = e : f,
3) $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, 4) $m^3 : n^3 = r^3 : p^3$

eine Vertauschung der innern Glieder vorgenommen wird, ergiebt sich:

1) 6 : 18 = 3 : 9, 2) c : e = d : f,
3) $a^2 : c^2 = b^2 : d^2$, 4) $m^3 : r^3 = n^3 : p^3$.

c) Wenn in den Proportionen:

1) 25 : 5 = 30 : 6, 2) m : n = p : q

erst die äußern und dann die innern Glieder vertauscht werden, erhalten wir:

1) 6 : 5 = 30 : 25, 2) q : n = p : m

und dann

1) 6 : 30 = 5 : 25, 2) q : p = n : m.

§ 56. **Aufgaben.** Wenn wir die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern machen; ergiebt sich:

1) 5 : 2 = 35 : 14, 2) 10 : 9 = 50 : 45,
2) 7 : 3 = 49 : 21, 4) 7 : 6 = 21 : 18,
5) c : b = e : d, 6) y : x = w : u.

oder

1) 14 : 2 = 35 : 5, 2) 45 : 9 = 50 : 10,
3) 9 : 3 = 21 : 7, 4) 18 : 6 = 21 : 7,
5) d : b = e : c, 6) v : x = w : y,

oder

1) 5 : 35 = 2 : 14, 2) 10 : 50 = 9 : 45,
3) 7 : 21 = 3 : 9, 4) 7 : 21 = 6 : 18,
5) c . e = b . d, 6) y . w = x . y,

oder: 1) $14 : 35 = 2 : 5$,	2) $45 : 50 = 9 : 10$,
3) $9 : 21 = 3 : 7$,	3) $18 : 21 = 6 : 7$,
5) $d : e = b : c$,	6) $v : w = x : y$.

§ 57. **Aufgaben.** Wenn wir in der Proportion:

$$3 : 4 = 6 : 8$$

ein äußeres und ein inneres Glied mit 5 multipliciren, erhalten wir:

1) $5 . 3 : 5 . 4 = 6 : 8$ d. i. $15 : 20 = 6 : 8$,
2) $5 . 3 : 4 = 5 . 6 : 8$ d. i. $15 : 4 = 30 : 8$,
3) $3 : 5 . 4 = 6 : 5 . 8$ d. i. $3 : 20 = 6 : 40$,
4) $3 : 4 = 5 . 6 : 5 . 8$ d. i. $3 : 4 = 30 : 40$.

Wird in der Proportion:

$$6 : 12 = 9 : 18$$

ein äußeres und ein inneres Glied mit a multiplicirt, so ergiebt sich:

1) $6a : 12a = 9 : 18$,
2) $6a : 12 = 9a : 18$,
3) $6 : 12a = 9 : 18a$,
4) $6 : 12 = 9a : 18a$.

Aus $2 : 4 = 5 : 10$ folgt unmittelbar:	Aus $3 : 4 = 9 : 12$ folgt unmittelbar:
1) $2 . 10 = 4 . 5$,	1) $3 . 12 = 4 . 9$,
2) $10 : 4 = 5 : 2$,	2) $12 : 4 = 9 : 3$,
3) $2 : 5 = 4 : 10$,	3) $3 : 9 = 4 : 12$,
4) $10 : 5 = 4 : 2$,	4) $12 : 9 = 4 : 3$,
5) $4 : 2 = 10 : 5$,	5) $4 : 3 = 12 : 9$,
6) $4 : 10 = 2 : 5$,	6) $4 : 12 = 3 : 9$,
7) $5 : 2 = 10 : 4$,	7) $9 : 3 = 12 : 4$,
8) $5 : 10 = 2 : 4$,	8) $9 : 12 = 3 : 4$.

Wird ein äußeres und ein inneres Glied mit

3 multiplicirt, folgt:	a multiplicirt, folgt:
9) $3 . 2 : 3 . 4 = 5 : 10$,	9) $3a : 4a = 9 : 12$,
10) $3 . 2 : 3 = 2 . 5 : 10$,	10) $3a : 4 = 9a : 12$,
11) $2 : 3 . 4 = 5 : 3 . 10$,	11) $3 : 4a = 9 : 12a$,
12) $2 : 4 = 3 . 5 : 3 . 10$,	12) $3 : 4 = 9a : 12a$.

Aus $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$ folgt unmittelbar:	Aus $x^4 : y^4 = u^4 : v^4$ folgt unmittelbar:
1) $a^2 d^2 = b^2 c^2$,	1) $x^4 v^4 = y^4 u^4$,
2) $d^2 : b^2 = c^2 : a^2$,	2) $v^4 : y^4 = u^4 : x^4$,
3) $a^2 : c^2 = b^2 : d^2$,	3) $x^4 : u^4 = y^4 : v^4$,
4) $d^2 : c^2 = b^2 : a^2$,	4) $v^4 : u^4 = y^4 : x^4$,
5) $b^2 : a^2 = d^2 : c^2$,	5) $y^4 : x^4 = v^4 : u^4$,
6) $b^2 : d^2 = a^2 : c^2$,	6) $y^2 : v^2 = x^2 : u^2$,
7) $c^2 : a^2 = d^2 : b^2$,	7) $u^4 : x^4 = v^4 : y^4$,
8) $c^2 : d^2 = a^2 : b^2$,	8) $u^4 : v^4 = x^4 : y^4$.

Wird ein äußeres und ein inneres Glied mit

$\frac{1}{2}$ multiplicirt, folgt:	x^2 multiplicirt, folgt:
9) $\frac{1}{2}a^2 : \frac{1}{2}b^2 = c^2 : d^2$,	9) $x^6 : x^2 y^4 = u^4 : v^4$,
10) $\frac{1}{2}a^2 : b^2 = \frac{1}{2}c^2 : d^2$,	10) $x^6 : y^4 = x^2 u^4 : v^4$,
11) $a^2 : \frac{1}{2}b^2 = c^2 : \frac{1}{2}d^2$,	11) $x^4 : x^2 y^4 = u^4 : x^2 v^4$,
12) $a^2 : b^2 = \frac{1}{2}c^2 : \frac{1}{2}d^2$,	12) $x^4 . y^2 = x^2 u^4 : x^2 v^4$.

B. Beantwortung der in den Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes enthaltenen Fragen.

Als wir im Abschnitt A der sechsundvierzigsten Lection den dritten Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz näher behandelten, haben wir in den Anmerkungen mehrere Fragen gestellt, welche wir jetzt beantworten wollen.

Seite 398, Spalte 2, Anm. 1. Winkel EAQ ist Winkel eines Quadrats; wir haben darum:

$$\angle EAQ = R;$$

es ist ferner: $\angle EAQ = \angle AMP$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und MP geschnitten von EM.

Seite 399, Spalte 1, Anm. 1. Winkel ERD ist ein Rechter, weil er, wie aus der Congruenz der Dreiecke ERD und ACB folgt, dem rechten Winkel ACB gleich ist. Winkel ERQ ist ein Nebenwinkel des rechten Winkels ERD, daher nach Seite 52 auch ein Rechter.

Anm. 2. Aus der ausführlich bewiesenen Congruenz der beiden Dreiecke ERD und ACB folgt, daß Winkel CBA dem Winkel RDE gleich ist. Der Winkel CAB ergänzt den Winkel CBA zu einem Rechten, weil die drei Winkel eines Dreiecks zusammen zwei Rechten gleich sind und der Winkel ACB schon einen Rechten beträgt.

Anm. 3. Winkel BCN ist ein Rechter als Nebenwinkel des rechten Winkels BCA. Es fragt sich noch, warum der Winkel BSQ einen Rechten beträgt. Wenn wir SQ über Q hinaus verlängern, bis AC in V geschnitten wird, so erhalten wir das Viereck CBSV. Dieses Viereck ist ein Parallelogramm, weil die gegenüberliegenden Seiten der Construction gemäß einander parallel laufen. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich. Winkel ACB ist ein Rechter, mithin muß auch Winkel BSQ einen Rechten betragen.

Anm. 4. Winkel BJH ist ein Rechter als Winkel eines Quadrats. Winkel TSB beträgt einen Rechten als Nebenwinkel des Winkels BSQ, von dem wir bereits gezeigt haben, daß er einem Rechten gleich ist.

Spalte 2, Anm. 1. Die Congruenz der beiden mit 1 bezeichneten Dreiecke ERD und AGM ist von uns ausführlich bewiesen worden. In congruenten Dreiecken sind die entsprechenden Winkel einander gleich, daher $\angle EDR = \angle AMG$. Wir haben nun noch zu zeigen, weshalb Winkel FMP den Winkel GMA zu einem Rechten ergänzt. Die drei Winkel FMP, PMA und GMA bilden zusammen einen gestreckten Winkel; wir haben mithin:

$$\angle FMP + \angle PMA + \angle GMA = 2 R.$$

Winkel PMA beträgt, wie bereits bewiesen, schon für sich einen Rechten; es muß daher

$$\angle FMP + \angle GMA = 1 R.$$

sein, d. h. der Winkel FMP ergänzt den Winkel GMA zu einem Rechten.

C. Antworten auf die im Abschnitt D der Lection 47 gestellten Fragen.

1) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe, oder anders ausgedrückt, gleich dem Product aus zwei anstoßenden Seiten. 2) Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz der Quadratseite. 3) a-Quadrat. 4) $c^2 = a^2 + b^2$. 5) Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe. 6) Nach der Formel: $h = \frac{f}{g}$. 7) Nach der Formel: $g = \frac{f}{h}$.

8) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe. 9) Nach der Formel: $h = \frac{2f}{g}$. 10) Nach der Formel: $g = \frac{2f}{h}$. 11) Drei halbe Producte, denn jede Dreiecksseite können wir als Grundlinie auffassen und zu jeder Grundlinie gehört eine Höhe. 12) Unter einer Proportion versteht man eine Gleichung zwischen zwei Brüchen. 13) Bei einer Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder. 14) Die beiden äußern, ebenso auch die beiden innern Glieder einer Proportion dürfen mit einander vertauscht werden; man darf ferner die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern machen.

D. Fortsetzung der Lehre von den Proportionen.

§ 58. Die Division eines äußern und innern Gliedes. Wie wir bereits auf Seite 349 andeuteten, wollen wir mit der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke den zweiten Theil der Planimetrie beschließen. Bevor wir uns aber zu diesem wichtigen Capitel wenden können, mußten wir den Schüler mit den Proportionen bekannt machen. Die Lehre von den Proportionen ist nicht blos für die Aehnlichkeit der Dreiecke wichtig, sie hat auch für andere Gebiete der Mathematik Bedeutung; ihre Wichtigkeit ist aber häufig überschätzt worden. Mit vieler Subtilität und großer Unverständlichkeit hat man die Beziehungen der Proportionsglieder nach allen Richtungen durchsucht und sich damit auf ein unfruchtbares Gebiet begeben. Besonders tragen die vielen neugeschaffenen termini technici dazu bei, das wahre Wesen der Proportionen zu verdunkeln, so daß ein berühmter Mathematiker mit einigem Recht behaupten konnte, es wäre gut, wenn die Proportionen aus der Mathematik überhaupt verschwänden. Wir wollen uns nicht den Vorwurf allzu großer Umständlichkeit zuziehen und bringen daher nur die unentbehrlichen Sätze aus der Proportionslehre. Im vorigen Brief haben wir bereits die Sätze behandelt, welche die Vertauschung der Proportionsglieder betreffen und zum Schluß den Lehrsatz gebracht:

> in einer Proportion darf ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplicirt werden.

An diesen Satz wollen wir unsere weiteren Betrachtungen anschließen! Das „Dividiren" dürfen wir als ein „Multipliciren" mit Brüchen auffassen; was vom Multipliciren allgemein gilt, hat daher auch vom Dividiren Geltung. In der That! auch in unserm Falle dürfen wir für „multiplicirt" das Wort „dividirt" setzen und den

Lehrsatz I aufstellen. **In einer Proportion darf ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl dividirt werden.**

Voraussetzung. Es sei $a:b = c:d$.

Behauptung. 1) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c:d$,

2) $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$,

3) $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$,

4) $a:b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$.

Beweis. Die uns in der Voraussetzung gegebene Proportion $a:b = c:d$ wollen wir als Bruchgleichung schreiben; dann ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Ein **Bruch verändert seinen Werth nicht,** wenn der Zähler und Nenner durch dieselbe Größe dividirt (**gehoben**) wird. Theilen wir in $\frac{a}{b}$ Zähler und Nenner durch m, so ergiebt sich:

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{c}{d},$$

oder anders geschrieben:

$$1)\ \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c:d, \text{ w. b. w.}$$

Durch zweckmäßige Vertauschung der Proportionsglieder und der Gleichungsseiten können wir ferner aus $a:b = c:d$ die drei Proportionen

$$a:c = b:d,$$
$$b:d = a:c,$$
$$c:d = a:b$$

ableiten. Wenn wir diese Proportionen ähnlich behandeln wie $a:b = c:d$, so haben wir:

$$\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = b:d,$$
$$\frac{b}{m} : \frac{d}{m} = a:c,$$
$$\frac{c}{m} : \frac{d}{m} = a:b,$$

und wenn wir jetzt die Glieder und die Gleichungsseiten wieder zweckmäßig vertauschen, so ergiebt sich:

$$2)\ \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d,$$

$$3)\ a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m},$$

$$4)\ a:b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}, \text{ w. beh. w.}$$

Bemerkung. Bringen wir einige Zahlenbeispiele für unsern Lehrsatz! Wenn wir den Bruch $\frac{4}{3}$ mit 6 erweitern, erhalten wir $\frac{24}{18}$; es ist daher:

$$\frac{4}{3} = \frac{24}{18} \text{ oder } \frac{24}{18} = \frac{4}{3}.$$

Mithin besteht die Proportion:

$$24 : 18 = 4 : 3.$$

Nach dem obigen Lehrsatz dürfen wir bei einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Größe dividiren. Wir wollen auf diese Weise aus $24 : 18 = 4 : 3$ mehrere neue Proportionen hervorgehen lassen. Theilen wir 24 und 18 durch 3, so ergiebt sich:

$$\frac{24}{3} : \frac{18}{3} = 4 : 3, \text{ d. i. } 8 : 6 = 4 : 3.$$

Dividiren wir 24 und 4 durch 4, so wird

$$\frac{24}{4} : 18 = \frac{4}{4} : 3, \text{ d. i. } 6 : 18 = 1 : 3.$$

Wird 18 und 3 durch 3 getheilt, so erhalten wir:

$$24 : \frac{18}{3} = 4 : \frac{3}{3}, \text{ d. i. } 24 : 6 = 4 : 1.$$

Wird schließlich 4 und 3 durch a dividirt, so ist:

$$24 : 18 = \frac{4}{a} : \frac{3}{a}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge aus der Proportion:

$$10 : 18 = 20 : 30$$

vier neue Proportionen ableiten, indem er ein äußeres und ein inneres Glied durch 5 theilt.

§ 59. Bestimmung eines Proportionsgliedes durch die drei andern. Eine Proportion hat, wie wir wissen, vier Glieder, welche durch Divisions- und Gleichheitszeichen von einander getrennt sind. Diese vier Glieder dürfen wir **nicht beliebig** wählen; wir dürfen z. B. nicht 20 zum ersten, 5 zum zweiten, 30 zum dritten und 15 zum vierten Gliede machen, denn die Gleichung

$$20 : 5 = 30 : 15$$

besteht nicht zu Recht. 20 dividirt durch 5 giebt **4**, 30 dividirt durch 15 ist dagegen gleich **2**. Die Auswahl der Glieder ist mithin beschränkt. Gerade so wie ein Dreieck seiner Gestalt und Größe nach durch **drei** von einander unabhängige Stücke vollkommen bestimmt ist, so ist **eine Proportion** schon durch **drei** ihrer Glieder **bestimmt.** Sind uns von einem Dreieck die drei Seiten bekannt, so können wir jedes andere Dreiecksstück construiren; ebenso können wir, wie wir sogleich zeigen werden, das **vierte Glied** einer Proportion **berechnen, wenn uns die drei andern Glieder gegeben sind.** Es sei uns z. B. die

Aufgabe I gestellt: das **vierte** Glied einer Proportion zu berechnen, wenn 2 das erste, 3 das zweite und 8 das dritte Glied ist.

Lösung. Nennen wir das uns vorläufig unbekannte Glied x, dann muß die Proportion bestehen:

$$2 : 3 = 8 : x.$$

Das Product der äußern Glieder ist gleich dem Product der innern Glieder; folglich haben wir:

$$2 . x = 3 . 8.$$

Dividiren wir beide Seiten der Gleichung durch 2, so ist

$$\frac{2 . x}{2} = \frac{3 . 8}{2}, \text{ d. i. } x = 12.$$

x ist also gleich 12; d. h. es besteht die Proportion:

$$2 : 3 = 8 : 12.$$

Es sei uns ferner die

Aufgabe II gestellt: das **zweite** Glied einer Proportion zu finden, wenn 3 das erste, 5 das dritte, 30 das vierte Glied ist.

Lösung. Bezeichnen wir das uns unbekannte zweite Glied mit x, so muß sein:

$$3 : x = 5 : 30.$$

Weil das Product der innern Glieder gleich dem Product der äußern Glieder ist, haben wir:

$$5 . x = 3 . 30$$

Theilen wir beide Seiten der Gleichung durch 5, so wird:

$$\frac{5 . x}{5} = \frac{3 . 30}{5}, \text{ d. i. } x = 18,$$

mithin besteht die Proportion:

$$3 : 18 = 5 : 30.$$

Wir wollen noch zwei ähnliche Aufgaben behandeln.

Aufgabe III. Das **vierte Glied** einer Proportion soll gefunden werden, wenn 1 das erste, 2 das zweite und 3a das dritte Glied ist.

Lösung. Wenn wir das gesuchte Glied wieder mit x bezeichnen, muß sein:

$$1 : 2 = 3a : x.$$

Weil das Product der äußern Glieder dem Product der innern Glieder gleich ist, müssen wir auch haben:

$$1 . x = 2 . 3a, \text{ d. i. } x = 6a.$$

Wir haben mithin die Proportion:

$$1 : 2 = 3a : 6a.$$

Aufgabe IV. Wir sollen das **erste Glied** einer Proportion finden, wenn

$\frac{1}{3}$ das zweite, $\frac{1}{8}$ das dritte und $\frac{1}{4}$ das das vierte Glied ist.

Lösung. Nennen wir das gesuchte Glied wieder x, so müssen wir haben:

$$x : \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4}.$$

Das Product der äußern Glieder ist dem Product der innern Glieder gleich; folglich:

$$\tfrac{1}{4} \cdot x = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{8}.$$

Dividiren wir beide Seiten der Gleichung durch $\frac{1}{4}$, so ist:

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot x}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{24} \cdot \tfrac{4}{1} = \tfrac{4}{24} = \tfrac{1}{6},$$

$$\text{d. i. } x = \tfrac{1}{6}.$$

Mithin besteht die Proportion:

$$\tfrac{1}{6} : \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8}.$$

Aufgaben. Der Schüler möge das erste Glied einer Proportion suchen, wenn 5 das zweite, 4 das dritte, 10 das vierte Glied ist; er möge ferner das dritte Glied einer Proportion bestimmen, wenn 7 das erste, 9 das zweite und 18 das vierte Glied ist.

§ 60. Proportionen mit drei gleichen Gliedern. Wenn wir drei Glieder einer Proportion haben, so können wir nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen das vierte Glied berechnen. Jedes Glied einer Proportion ist also durch die drei andern Glieder vollkommen bestimmt.

In $a : b = c : d$ und $\alpha : \beta = \gamma : \delta$

ist der Werth von d durch die Werthe von a, b und c, und der Werth von δ durch die Werthe von α, β und γ bedingt. Nehmen wir nun an, es sei

$$a = \alpha, \quad b = \beta \text{ und } c = \gamma,$$

dann sind die Größen gleich, welche die Werthe von d und δ bestimmen; wir können daraus unmittelbar schließen, daß auch d und δ gleiche Größe haben. Wir wollen aber einen vollständig mathematischen Beweis dafür geben und die Richtigkeit des

Lehrsatzes II darthun. **Wenn zwei Proportionen in drei** entsprechenden **Gliedern übereinstimmen,** so müssen auch die **vierten Glieder gleich** sein.

Voraussetzung. Es sei

1) $a : b = c : d$ und 2) $\alpha : \beta = \gamma : \delta$,

und zwar sei:

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma.$$

Behauptung. $d = \delta$.

Beweis. Wir wollen von der Proportion $a : b = c : d$ ausgehen. Das Product der äußern Glieder ist dem Product der innern Glieder gleich; mithin ist:

$$ad = bc,$$

$$\text{folglich auch: } \frac{ad}{a} = \frac{bc}{a} \text{ d. i. I. } d = \frac{bc}{a}.$$

Aus $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ folgt in gleicher Weise:

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

$$\text{mithin auch: } \frac{\alpha\delta}{\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \text{ d. i. II. } \delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}.$$

Nun ist $b = \beta$, $c = \gamma$, $a = \alpha$ nach der Voraussf.,

folglich $\frac{bc}{a} = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$, also auch $d = \delta$.

Ist in den Proportionen:

$$c : d = e : f \text{ und } \gamma : \delta = \varepsilon : \zeta,$$

$$a)\ c = \gamma, \quad b)\ d = \delta, \quad c)\ e = \varepsilon,$$

so muß auch $f = \zeta$ sein.

Haben wir in den beiden Proportionen:

$$s : t = u : v \text{ und } \sigma : \tau = v : \varphi,$$

$$a)\ s = \sigma, \quad b)\ t = \tau, \quad c)\ u = v$$

so muß auch $v = \varphi$ sein.

Aufgaben I. Es sei uns bekannt, daß

1) bei: $a : b = u : v$ und $\alpha : \beta = v : \varphi$
$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad u = v,$

2) bei $2 : 3 = 6 : 8$ und $x : y = v : w$
$x = 2, \quad y = 3, \quad v = 6$ sei,

was dürfen wir daraus schließen?

Bemerkung. Die Glieder, welche wir in den vorigen Proportionen gleich gesetzt haben, nehmen die drei ersten Stellen ein; unser Satz gilt aber auch, wenn die drei gleichen Glieder an anderen Stellen stehen. Wenn z. B. in

$$c : d = e : f, \text{ und } \gamma : \delta = \varepsilon : \zeta$$

$d = \delta$, $e = \varepsilon$, $f = \zeta$ ist, so können wir folgern, daß auch $c = \gamma$ sein muß.

Ist uns bekannt, daß in

$$d : e = s : t \text{ und } \delta : \varepsilon = \sigma : \tau$$

$d = \delta$, $e = \varepsilon$, $t = \tau$ ist, so dürfen wir schließen, daß wir auch $s = \sigma$ haben.

Jeden dieser Fälle für sich zu beweisen, ist unnöthig, weil wir durch zweckmäßige Vertauschung der Glieder immer auf den Fall zurückkommen können, von dem wir bei unserm Beweise ausgegangen sind.

Aufgaben II. Es sei

a) in: $m : x = s : t$ und $a : y = c : d$
$m = a, \quad s = c, \quad t = d,$

b) in: $r : s = t : u$ und $p : q = m : n$
$r = p, \quad s = q, \quad u = n,$

was können wir daraus schließen?

§ 61. Ableitung gleicher Brüche aus einander. Um uns Bruchgleichungen zu bilden, haben wir bisher Brüche **erweitert**, d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl **multiplicirt**. Gemäß Seite 300 gelangen wir auch zu Bruchgleichungen, wenn wir Brüche **heben**, d. h. Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl **dividiren**. Sehen wir zu, ob wir **das Heben auf das Erweitern zurückführen** können.

Wird der Bruch $\frac{10}{15}$ durch 5 gehoben, so ergiebt sich $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ erhalten wir auch, wenn wir $\frac{10}{15}$ mit $\frac{1}{5}$ erweitern, denn es ist:

$$\frac{10}{15} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 10}{\frac{1}{5} \cdot 15} = \frac{\frac{10}{5}\,^{*)}}{\frac{15}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Es ist also gleichgiltig, ob wir $\frac{10}{15}$

durch 5 heben, oder
mit $\frac{1}{5}$ erweitern,

in jedem Falle gelangen wir zu $\frac{2}{3}$. Ebenso werden wir Brüche mit

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$

erweitern dürfen, statt sie durch

2, 3, 4, 6, 7

zu heben. **Wir können mithin das Heben als ein Erweitern mit Brüchen auffassen.**

Die beiden Methoden (das Erweitern und Heben), die uns nach den obigen Erörterungen zu Bruchgleichungen führen, fallen für uns jetzt in das „**Erweitern**" zusammen. Das Erweitern ist demnach das einzig uns bekannte, ja wir müssen hinzufügen, das einzig mögliche Mittel, gleiche Brüche aus einander abzuleiten.

Immer wenn wir zwei gleiche Brüche haben, können wir den einen durch Erweiterung des andern entstehen lassen.

Nehmen wir einige Beispiele! Es bestehen die Bruchgleichungen:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \text{ und } \frac{4}{5} = \frac{20}{25}.$$

$\frac{9}{12}$ kann man aus $\frac{3}{4}$ herleiten, wenn man $\frac{3}{4}$ mit 3 erweitert, denn es ist:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 3}{3 \,.\, 4} = \frac{9}{12}.$$

$\frac{3}{4}$ geht umgekehrt aus $\frac{9}{12}$ hervor, wenn $\frac{9}{12}$ mit $\frac{1}{3}$ erweitert wird, denn wir haben:

$$\frac{9}{12} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 9}{\frac{1}{3} \cdot 12} = \frac{\frac{9}{3}}{\frac{12}{3}} = \frac{3}{4}.$$

$\frac{20}{25}$ können wir aus $\frac{4}{5}$ ableiten, wenn wir $\frac{4}{5}$ mit 5 erweitern, und $\frac{4}{5}$ entsteht durch Erweiterung mit $\frac{1}{5}$ aus $\frac{20}{25}$.

*) Gemäß Seite 335 können wir einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren, indem wir den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciren, es ist deswegen:

$$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{1 \,.\, 10}{5} = \frac{10}{5} \text{ und}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 15 = \frac{1 \,.\, 15}{5} = \frac{15}{5} \text{ ꝛc.}$$

Aufgaben. Es bestehen die Bruchgleichungen:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ und } \frac{2}{7} = \frac{18}{63},$$

wie kann man die gleichen Brüche aus einander entstehen lassen?

Bemerkung. Wenn wir die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

haben, so muß nach unseren Ausführungen $\frac{c}{d}$ aus $\frac{a}{b}$ durch Erweiterung hervorgehen*). Weil a, b, c und d in diesem Falle unbestimmte Zahlen sind, deren Werth uns unbekannt ist, so können wir auch die Größe nicht angeben, mit der $\frac{a}{b}$ erweitert werden muß, wenn sich $\frac{c}{d}$ ergeben soll; wir wissen nur, daß eine solche Größe existiren muß, und wollen sie mit dem unbestimmten Größenausdruck m bezeichnen. Soll aus

$\frac{a}{b}$ durch Erweiterung mit m der Bruch $\frac{c}{d}$

werden, so muß sich c ergeben, wenn wir a mit m multipliciren, ebenso d, wenn b mit m multiplicirt wird. Es ist demnach:

$$c = ma, \quad d = mb \text{ und } \frac{c}{d} = \frac{ma}{mb}.$$

Haben wir ferner die Bruchgleichung:

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$$

so können wir $\frac{u}{v}$ aus $\frac{s}{t}$ durch Erweiterung entstehen lassen**).

Wenn wir die Zahl, mit welcher $\frac{s}{t}$ zu diesem Zwecke zu erweitern ist, mit dem griechischen Buchstaben α bezeichnen, so muß

$$u = \alpha \,.\, s, \quad v = \alpha \,.\, t \text{ und } \frac{u}{v} = \frac{\alpha \,.\, s}{\alpha \,.\, t} \text{ sein.}$$

Benutzen wir unsere Bemerkung sogleich, um zwei neue Sätze über Proportionen abzuleiten.

§ 62. Die Zähler- und Nennersumme bei einer Proportion. Wir wollen voraussetzen, es bestehe die Proportion:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

und zwar möge $\frac{c}{d}$ aus $\frac{a}{b}$ **durch** Erweiterung mit α hervorgehen. Wir haben dann:

*) Ebenso kann $\frac{a}{b}$ aus $\frac{c}{d}$ durch Erweiterung hergeleitet werden. **) Auch $\frac{s}{t}$ entsteht aus $\frac{u}{v}$ durch Erweiterung.

$c = \alpha . a, \quad d = \alpha . b$ und $\frac{c}{d} = \frac{\alpha . a}{\alpha . b}$.

Erweitern wir nun $\frac{a}{b}$ mit $1 + \alpha$, so ergiebt sich:

$$\frac{a}{b} = \frac{a.(1 + \alpha)}{b.(1 + \alpha)}$$

und wenn wir die Klammern auflösen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + \alpha . a}{b + \alpha . b}.$$

Ersetzen wir $\alpha . a$ durch die gleiche Größe c und $\alpha . b$ durch die gleiche Größe d, so wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d},$$

mithin auch:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}{}^{*)} = \frac{a + c}{b + d},$$

d. h. wenn wir die **beiden gleichen Brüche** $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ haben, so können wir uns einen **dritten,** den beiden ersten gleichen **Bruch bilden, indem wir die Zähler** a und c **und die Nenner** b und d **addiren.**

Haben wir: $\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$, so muß aus ähnlichen Gründen auch

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v} = \frac{s + u}{t + v} \text{ sein.}$$

Gehen wir zu Zahlenbeispielen über! Es ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; mithin auch

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{4} = \frac{1 + 2}{2 + 4} = \tfrac{3}{6}.$$

Wir haben ferner: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$, daher auch:

$$\tfrac{2}{7} = \tfrac{6}{21} = \frac{2 + 6}{7 + 21} = \tfrac{8}{28}.$$

Aufgaben I. Was können wir nach den Ausführungen unseres Paragraphen aus den Proportionen: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$ folgern?

---

*) Wir können $\frac{c}{d}$ einschieben, weil nach der Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist.

§ 63. Die Zähler- und Nennerdifferenzen bei Proportionen. Wir wollen wieder von der Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ausgehen, und annehmen, daß wir $\frac{c}{d}$ aus $\frac{a}{b}$ ableiten können, indem wir $\frac{a}{b}$ mit α erweitern. Wir haben dann:

$$c = \alpha . a, \quad d = \alpha . b \text{ und } \frac{c}{d} = \frac{\alpha . a}{\alpha . b}.$$

Erweitern wir $\frac{a}{b}$ mit $1 - \alpha$, so wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a.(1 - \alpha)}{b.(1 - \alpha)} = \frac{a - \alpha . a}{b - \alpha . b}.$$

Vertauschen wir $\alpha . a$ mit der gleichen Größe c und $\alpha . b$ mit der gleichen Größe d, so wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d},$$

also auch: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d},$

d. h. wenn uns die **beiden gleichen Brüche** $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben sind, so können wir uns einen **dritten bilden,** der den beiden ersten gleich ist, **indem wir die Differenz der Zähler durch die entsprechende Differenz der Nenner dividiren.**

Ist demnach: $\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$, so muß auch

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v} = \frac{s - u}{t - v} \text{ sein.}$$

Haben wir: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{x}{y} = \frac{v}{w}$, so ist auch:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \text{ und } \frac{x}{y} = \frac{v}{w} = \frac{x - v}{y - w}.$$

Wenden wir uns zu Zahlenbeispielen! Es ist: $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, folglich auch:

$$\tfrac{24}{36} = \tfrac{2}{3} = \frac{24 - 2}{36 - 3} = \tfrac{22}{33}.$$

Ebenso haben wir: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, also auch:

$$\tfrac{9}{12} = \tfrac{3}{4} = \frac{9 - 3}{12 - 4} = \tfrac{6}{8}.$$

Aufgaben. Was können wir nach den Erörterungen unseres Paragraphen aus den Proportionen:

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}, \quad \frac{45}{50} = \frac{9}{10}, \quad \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

schließen?

Bemerkung. Es besteht die Proportion: $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$, mithin ist auch:

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{18} = \frac{2 - 12}{3 - 18} = \frac{-10}{-15},$$

d. h. wir kommen zu einem Bruch, in dem der **Zähler** und der **Nenner** eine **negative Größe** ist. Wenn wir diesen Bruch mit — 1 erweitern, ergiebt sich einfach $\frac{10}{15}$, denn es ist:

$$\frac{(-10).(-1)}{(-15).(-1)} = \frac{+^{*)} 10}{+15} = \frac{10}{15}.$$

Aehnlich können wir auch sonst verfahren, wenn wir zu Brüchen mit negativem Zähler und Nenner gelangen.

E. Parallelogramme und Dreiecke, die gleiche Grundlinie bez. gleiche Höhe haben.

§ 64. Parallelogramme mit gleicher Grundlinie bez. gleicher Höhe. Wir wollen annehmen, wir hätten zwei Parallelogramme. Das eine möge

den Flächeninhalt f und die Höhe h,

das andere

den Flächeninhalt f′ und die Höhe h′

haben. Die **Grundlinie** möge bei beiden Parallelogrammen **gleich groß** sein; wir wollen sie mit g bezeichnen. Nach dem Satze:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist dem Producte aus Grundlinie und Höhe gleich

haben wir dann:

$$f = g.h \text{ und } f' = g.h'.$$

Dividiren wir beide Gleichungen durch einander, so ergiebt sich nach dem Satze: Gleiches dividirt durch Gleiches

$$\frac{f}{f'} = \frac{g.h}{g.h'}$$

Heben wir den Bruch auf der rechten Seite durch g, so wird:

*) Die positiven Vorzeichen können wir fortlassen.

$$\frac{f}{f'} = \frac{h}{h'}$$

oder anders geschrieben:

$$f : f' = h : h',$$

d. h. der Flächeninhalt f verhält sich zum Flächeninhalt f′ wie die Höhe h zur Höhe h′.

Die Parallelogramme, deren Flächeninhalt durch f und f′ repräsentirt wird, haben **gleiche Grundlinie.** Unsere obige Proportion sagt uns also:

Die Flächeninhalte von Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

Wenn wir für „Flächeninhalte der Parallelogramme" einfach den Ausdruck „Parallelogramme" brauchen, haben wir den

Lehrsatz III. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie die Höhen.

Einen ähnlichen Satz können wir auch für **Parallelogramme mit gleicher Höhe** aufstellen. Es seien uns zwei Parallelogramme mit der **gleichen Höhe** h gegeben; das eine möge den

Flächeninhalt f und die Grundlinie g,

das andere den

Flächeninhalt f′ und die Grundlinie g′

haben.

Es ist dann:

$$f = gh \text{ und } f' = g'h.$$

Dividiren wir die beiden Gleichungen durch einander, so erhalten wir:

$$\frac{f}{f'} = \frac{gh}{g'h}$$

und wenn die rechte Seite durch h gehoben wird:

$$\frac{f}{f'} = \frac{g}{g'},$$

oder anders geschrieben:

$$f : f' = g : g',$$

d. h. der Flächeninhalt f verhält sich zum Flächeninhalt f′ wie die Grundlinie g zur Grundlinie g′.

Wir sind zur letzten Proportion gelangt, indem wir annahmen, daß die Parallelo-

gramme, deren Flächeninhalt durch f und f′ ausgedrückt wird, **gleiche Höhe** haben. Wir können deswegen sagen:

Die Flächeninhalte von Parallelogrammen mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien,

oder kürzer:

Lehrsatz IV. Parallelogramme von **gleicher Höhe** verhalten sich wie die **Grundlinien.**

§ 65. Dreiecke mit gleicher Grundlinie bez. gleicher Höhe. Es mögen uns zwei Dreiecke mit der **gleichen Grundlinie** g gegeben sein; das eine möge

den Flächeninhalt f und die Höhe h,

das andere

den Flächeninhalt f′ und die Höhe h′

haben. Weil der Flächeninhalt eines Dreiecks dem halben Product aus Grundlinie und Höhe gleich ist, haben wir:

$$f = \tfrac{1}{2}gh \text{ und } f' = \tfrac{1}{2}gh'.$$

Werden beide Gleichungen durch einander dividirt, so ergiebt sich:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\frac{1}{2}gh}{\frac{1}{2}gh'}.$$

Heben wir den Bruch auf der rechten Seite durch $\frac{1}{2}g$, so wird:

$$\frac{f}{f'} = \frac{h}{h'}$$

oder anders geschrieben:

$$f : f' = h : h'.$$

f und f′ sind die Flächeninhalte zweier Dreiecke, die eine **gleiche Grundlinie** haben; h und h′ sind die Höhen dieser Dreiecke. Die letzte Proportion giebt uns also den Satz:

Die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie die Höhen,

oder kürzer:

Lehrsatz V. Dreiecke von **gleicher Grundlinie** verhalten sich wie die **Höhen.**

Entwickeln wir einen ähnlichen Lehrsatz für Dreiecke mit **gleichen Höhen.** Es seien uns zwei Dreiecke bekannt, welche die **gleiche Höhe** h haben. Das eine Dreieck möge den

Flächeninhalt f und die Grundlinie g,

das andere den

Flächeninhalt f′ und die Grundlinie g′

haben; dann ist:

$$f = \tfrac{1}{2}gh \text{ und } f' = \tfrac{1}{2}g'h,$$

folglich:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\frac{1}{2}gh}{\frac{1}{2}g'h}.$$

Heben wir den Bruch auf der rechten Seite durch $\frac{1}{2}h$*), so wird

$$\frac{f}{f'} = \frac{g}{g'},$$

oder anders geschrieben:

$$f : f' = g : g'.$$

f und f′ stellen den Flächeninhalt zweier Dreiecke dar, die eine **gleiche Höhe** haben; g und g′ sind Grundlinien dieser Dreiecke. Wenn wir den Inhalt der letzten Proportion in Worte kleiden, haben wir daher den Satz:

Die Flächeninhalte zweier Dreiecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien,

oder kürzer den

Lehrsatz VI. Dreiecke von **gleicher Höhe** verhalten sich wie die **Grundlinien.**

§ 66. Zusammenfassung der beiden letzten Paragraphen. Die Lehrsätze, welche wir in den beiden letzten Paragraphen gebracht haben, entsprechen sich derart, daß es angemessen erscheint, sie einander gegenüber zu stellen, damit das, was in ihnen gemeinsam und verschieden ist, besser hervortritt.

Parallelogramme von **gleicher Grundlinie** verhalten sich wie die **Höhen.**	Parallelogramme von **gleicher Höhe** verhalten sich wie die **Grundlinien.**
Dreiecke von **gleicher Grundlinie** verhalten sich wie die **Höhen.**	Dreiecke von **gleicher Höhe** verhalten sich wie die **Grundlinien.**

Wenn wir bei dem einen Parallelogramm bez. Dreieck den

Flächeninhalt, die Grundlinie und die **Höhe**
f, g, h,

---

*) Um $\frac{\frac{1}{2}gh}{\frac{1}{2}g'h}$ durch $\frac{1}{2}h$ zu heben, müssen wir sowohl den Zähler $\frac{1}{2}gh$ wie den Nenner $\frac{1}{2}g'h$ durch $\frac{1}{2}h$ dividiren; und zwar werden wir gemäß Seite 322 die Division ausführen, indem wir sowohl in $\frac{1}{2}gh$ wie in $\frac{1}{2}g'h$ die Factoren $\frac{1}{2}$ und h fortlassen.

bei dem zweiten Parallelogramm bez. Dreieck den Flächeninhalt, die Grundlinie und die Höhe

f', g', h'

nennen, so besteht für $g = g'$ die Formel

$$\frac{f}{f'} = \frac{h}{h'},$$

oder anders geschrieben:

$$\text{I.}\quad f : f' = h : h'.$$

Für $h = h'$ haben wir die Formel:

$$\frac{f}{f'} = \frac{g}{g'}$$

oder anders geschrieben:

$$\text{II.}\quad f : f' = g : g'.$$

Wenden wir die beiden Formeln I und II auf bestimmte Fälle an! Wir wollen zunächst annehmen, wir hätten zwei Parallelogramme mit **gleicher Grundlinie**, und wir wüßten, daß

der Flächeninhalt des einen Parallelogramms **viermal** so groß ist wie der Flächeninhalt des andern.

Wenn f, f', h und h' die gewöhnliche Bedeutung behalten, haben wir dann:

$$f : f' = h : h' \text{ und } f = 4f'.$$

Führen wir in der Proportion für f die gleiche Größe $4f'$ ein, so wird

$$4f' : f' = h : h',$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{4f'}{f'} = \frac{h}{h'} \text{ d. i. } 4 = \frac{h}{h'}.$$

Multipliciren wir beide Seiten der letzten Gleichung mit h', so wird

$$4h' = h \text{ oder } h = 4h',$$

d. h. es ist dann auch die Höhe des ersten Parallelogramms **viermal** so groß wie die Höhe des zweiten.

4 ist eine von uns willkürlich angenommene Zahl; für 4 kann ebenso gut 2, 5, a, b gesetzt werden. Wir können demnach sagen:

Wenn bei zwei Parallelogrammen mit **gleicher Grundlinie** der Flächeninhalt des einen

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß ist wie der Flächeninhalt des andern, so muß auch

die Höhe des ersten Parallelogramms

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß sein wie die Höhe des andern; umgekehrt kann leicht bewiesen werden:

Wenn bei zwei Parallelogrammen mit **gleicher Grundlinie** die Höhe des einen

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß ist wie die Höhe des andern, so muß auch

der Flächeninhalt des ersten Parallelogramms

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß sein wie der Flächeninhalt des andern.

Wir können noch sogleich hinzufügen:

Wenn bei zwei Parallelogrammen mit **gleicher Höhe** der Flächeninhalt des einen

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß ist wie der Flächeninhalt des andern, so muß auch

die Grundlinie des ersten Parallelogramms

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß sein wie die Grundlinie des andern Parallelogramms,

und umgekehrt:

Wenn bei zwei Parallelogrammen mit **gleicher Höhe** die Grundlinie des einen

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß ist wie die Grundlinie des andern, so muß auch der

Flächeninhalt des ersten Parallelogramms

2=mal, 5=mal, a=mal, b=mal

so groß sein wie der Flächeninhalt des andern.

Wir können die beiden Formeln:

$$f : f' = h : h'$$
$$\text{und } f : f' = g : g'$$

auch benutzen, um ein Proportionsglied zu berechnen, wenn uns die drei andern Glieder gegeben sind. Bei zwei Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie sei z. B.

$$f = 26 \square\text{cm}, \quad f' = 13 \square\text{cm}, \quad h = 6 \text{ cm}.$$

Es besteht dann die Gleichung

$$26 : 13 = 6 : h',$$
$$\text{also } 26\,h' = 6 . 13$$
$$h' = \frac{6 . 13}{26} = 3,$$

d. h. die uns nicht gegebene Parallelogrammhöhe h' ist gleich 3 Centimetern.

Bei zwei Parallelogrammen, deren Höhe gleich ist, möge

$$f = 28 \square\text{m}, \quad g = 8 \text{ m}, \quad g' = 2 \text{ m},$$

mithin ist nach der Formel:

$$f : f' = g : g'$$
$$28 : f' = 8 : 2,$$
$$\text{also } 8\,f' = 2 . 28,$$
$$f' = \frac{2 . 28}{8} = 7,$$

d. h. der uns nicht gegebene Flächeninhalt f' des einen Parallelogramms ist 7 Quadrat=Metern gleich.

Man geht nicht in die Schlacht als Held,
Sondern man kommt als Held heraus.

Lection 49.

A. Proportionen beim Durchschnitt gerader Linien.

§ 67. Proportionale Abschnitte zwischen Parallelen. In Fig. 1 sehen wir die beiden Geraden MN und ST, welche von drei Parallelen in den Punkten A und A', B und B', C und C' getroffen werden.

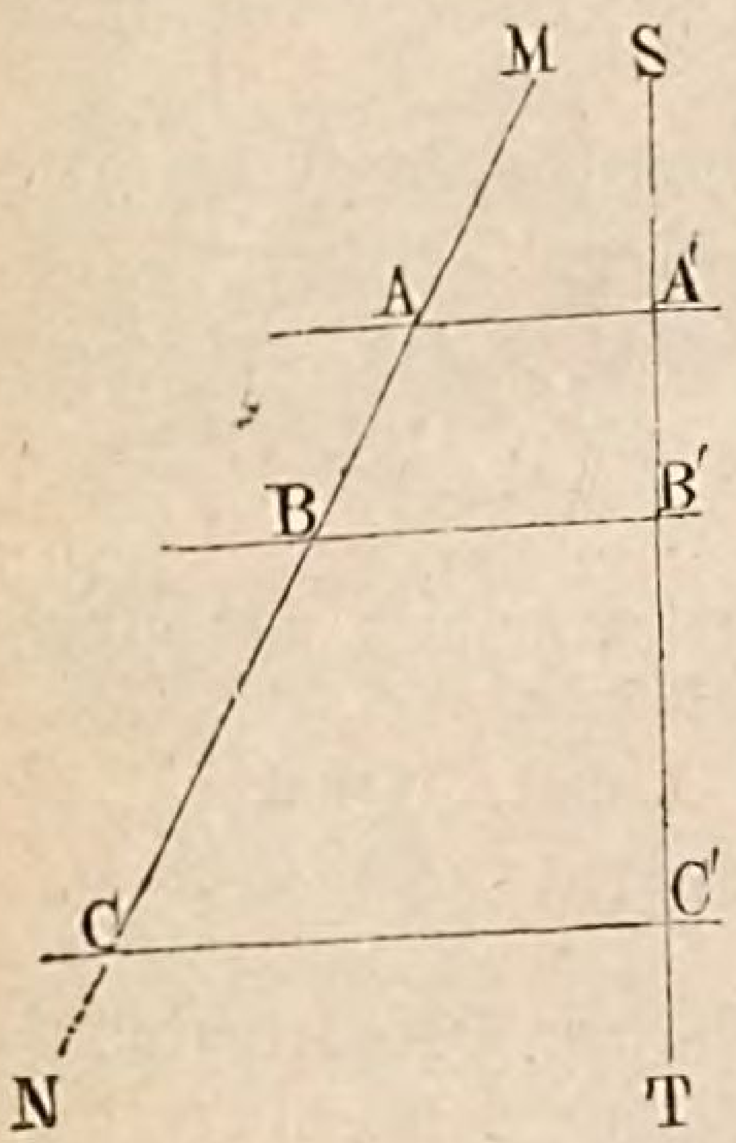


Fig. 1.

Zwischen den Parallelen liegen auf der Geraden MN die Abschnitte AB und BC und auf der Geraden ST die Abschnitte A'B' und B'C'. Wir behaupten nun, daß sich die Abschnitte auf der Geraden MN gerade so verhalten wie die Abschnitte auf den Geraden ST, daß mithin die Proportion besteht:

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

Wenn wir unsere Behauptung in einen Satz kleiden, erhalten wir den wichtigen

Lehrsatz I. Wenn zwei gerade Linien von **mehreren Parallelen** in Abschnitte zerlegt werden, so verhalten sich die zwischen den Parallelen liegenden **Abschnitte auf der einen Geraden** so wie die entsprechenden **Abschnitte auf der andern Geraden.**

Voraussetzung. Die beiden Geraden MN und ST (siehe Fig. 2) werden von den drei Parallelen AA', BB' und CC' geschnitten; zwischen den Parallelen liegen auf MN die Abschnitte AB und BC, auf ST die Abschnitte A'B', B'C'.

Behauptung. $AB : BC = A'B' : A'C'$.

Beweis. Wir wollen annehmen es gebe eine Strecke, welche sowohl in A'B' wie in B'C' eine **ganze Anzahl Mal** enthalten ist. In unserm Falle möge diese Strecke a sein, und zwar möge sich a auf A'B' **zweimal** und auf B'C' **dreimal** legen lassen, es ist dann:

$$A'B' = 2a \text{ und } B'C' = 3a.$$

Wir wollen nun A'B' in A'D' und D'B' derart theilen, daß

$$A'D' = a \text{ und } D'B' = a \text{ ist.}$$

Ferner wollen wir B'C' in B'E', E'F' und F'C so zerlegen, daß auch

$$B'E' = a,\quad E'F' = a \text{ und } F'C' = a \text{ wird.}$$

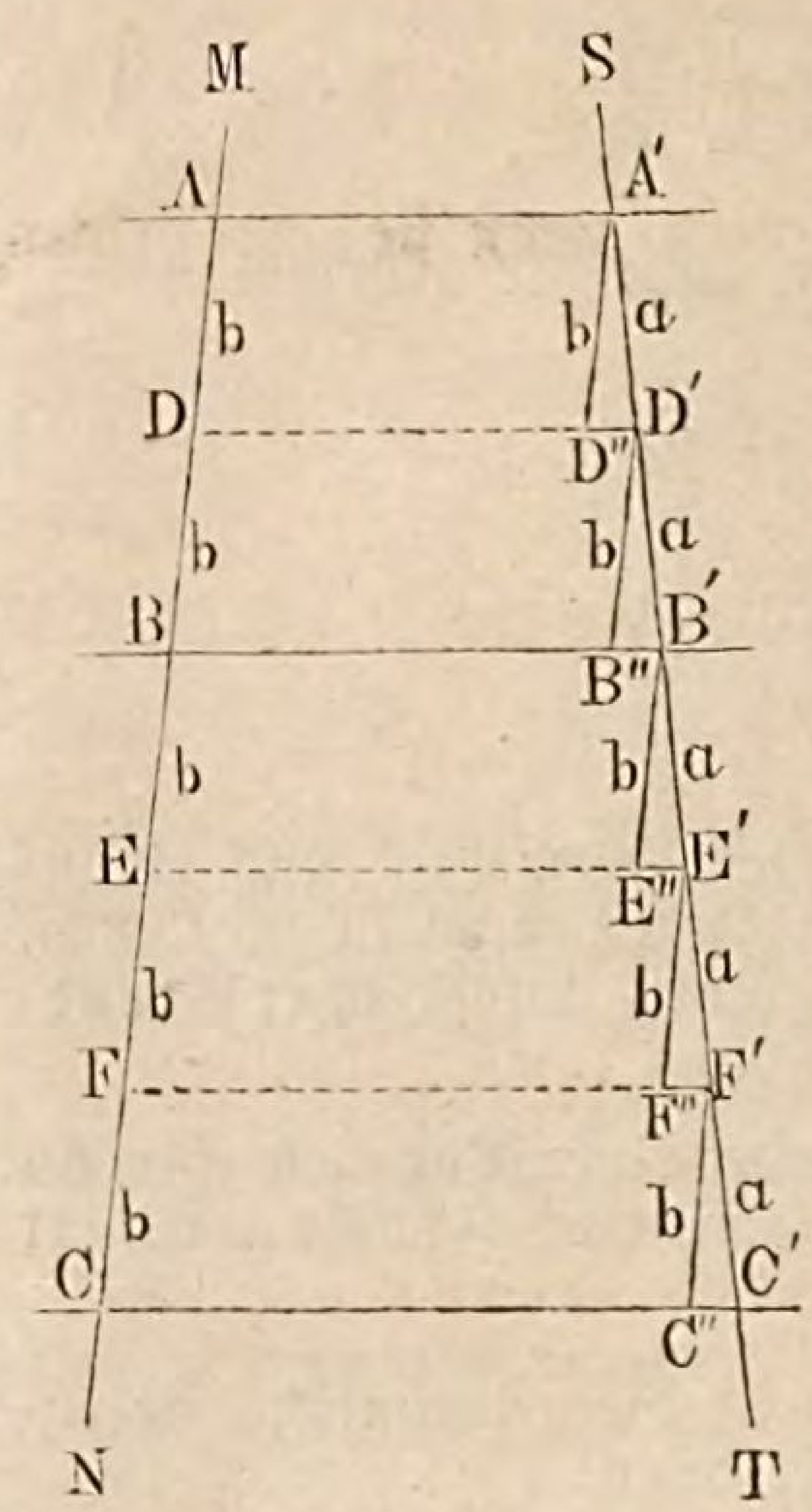


Fig. 2.

Darauf wollen wir durch D', E' und F' zu AA' Parallelen legen, welche die Gerade MN in den Punkten D, E und F schneiden mögen, und endlich durch A', D', B', E' und F' zu MN Parallelen ziehen, die DD', BB', EE', FF' und CC' in den Punkten D'', B'', E'', F'', C'' treffen mögen. Es entstehen dann die fünf Dreiecke A'D'D'', D'B'B'', B'E'E'', E'F'F'', F'C'C'', welche einander congruent*) sind, weil sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

In congruenten Dreiecken sind die Seiten gleich, welche beim Uebereinanderlegen aufeinander fallen würden, mithin ist:

$$A'D'' = D'B'' = B'E'' = E'F'' = F'C''.$$

Bezeichnen wir A'D'' mit b, so können wir daher auch

$$D'B'',\quad B'E'',\quad E'F'',\quad F'C''$$

mit b benennen.

Erwägen wir nun, daß die Vierecke AA'D''D, DD'B''B, BB'E''E, EE'F''F und FF'C''C Parallelogramme darstellen, weil wir die Seiten parallel zu einander gezogen haben, und daß die gegenüberliegenden Seiten im Parallelogramm gleich groß sind, so haben wir:

$$AD = A'D'',\quad DB = D'B'',\quad BE = B'E'',$$
$$EF = E'F'',\quad FC = F'C''.$$

Demnach ist auch:

$$AD = b,\quad DB = b,\quad BE = b,$$
$$EF = b,\quad FC = b,$$

mithin:

$$1)\ AB = 2b \text{ und } 2)\ BC = 3b,$$

wir hatten vorher

$$3)\ A'B' = 2a \text{ und } 4)\ B'C' = 3a.$$

Dividiren wir Gleichung 1 und 2, dann Glei-

*) Der Schüler möge den Beweis der Congruenz selbst versuchen; er kann im nächsten Briefe die Richtigkeit seiner Ausführungen controliren.

chung 3 und 4 durch einander, so ergiebt sich nach dem Grundsatz: Gleiches dividirt durch Gleiches giebt Gleiches:

$$\text{I)}\ \frac{AB}{BC} = \frac{2b}{3b} \text{ und II) } \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2a}{3a}.$$

Heben wir in Gleichung I den Bruch der rechten Seite durch b und in Gleichung I durch a, so wird:

$$\frac{AB}{BC} = \tfrac{2}{3} \text{ und } \frac{A'B'}{B'C'} = \tfrac{2}{3}.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, wir haben daher:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

oder anders geschrieben:

$$AB:BC = A'B':B'C',$$

was behauptet war.

Bemerkung I. Wir haben zum Beweise angenommen, daß es eine Strecke a gebe, welche sowohl in A'B' als in B'C' enthalten ist, daß also die Strecken A'B' und B'C' ein **gemeinschaftliches Maaß** haben, oder, wie man sagt, **commensurabel***) sind. Es giebt aber Strecken, für welche sich ein **gemeinschaftliches Maaß nicht auffinden** läßt, die, wie man sich ausdrückt, **incommensurabel****) sind. Wir werden solche Strecken erst im zweiten Cursus kennen lernen und wollen daher auch den Beweis unseres Lehrsatzes für den Fall, daß A'B' und B'C' incommensurabel sind, auf später verschieben.

Bemerkung II. Wir haben gefunden, daß
die Abschnitte AB und BC **sich verhalten wie** die Abschnitte A'B' und B'C'.

Statt den Ausdruck: „**verhalten sich wie**" zu gebrauchen, sagt man auch:

die Abschnitte AB und BC **und** die Abschnitte A'B' und B'C' **verhalten sich auf gleiche Weise**,

oder:

die Abschnitte AB und BC sind **den** Abschnitten A'B' und B'C' **proportional** (proportionirt),

oder:

die Abschnitte AB und BC **und** die Abschnitte A'B' und B'C' **sind proportional** (proportionirt).

Bemerkung III. In Figur 1 und 2 haben wir zwei gerade Linien durch drei Parallele schneiden lassen; es sind dadurch zwischen den Parallelen auf MN und auf ST **zwei angrenzende Abschnitte** entstanden; und zwar sind, wie von uns bewiesen wurde, die beiden Abschnitte auf MN den beiden Abschnitten auf ST **proportional**. Wie steht es nun, wenn zwei gerade Linien von vier und mehr Parallelen geschnitten werden? Blicken wir auf Fig. 3! Bei derselben bemerken wir vier Parallelen, welche die Geraden MN und ST durchschneiden; zwischen den Parallelen liegen

auf MN die Abschnitte a, b und c
und auf ST die Abschnitte a', b' und c'.

---

*) Commensurabel heißt: zusammen meßbar.
**) Incommensurabel heißt: nicht zusammen meßbar.

Weil die angrenzenden Abschnitte auf den Geraden MN und ST unserm Beweise gemäß proportional sind, haben wir:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ und } \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},$$

oder anders geschrieben:

$$a:b = a':b' \text{ und } b:c = b':c'.$$

Wenn wir in beiden Proportionen die innern Glieder vertauschen, ergiebt sich:

$$1)\ a:a' = b:b', \quad 2)\ b:b' = c:c'.$$

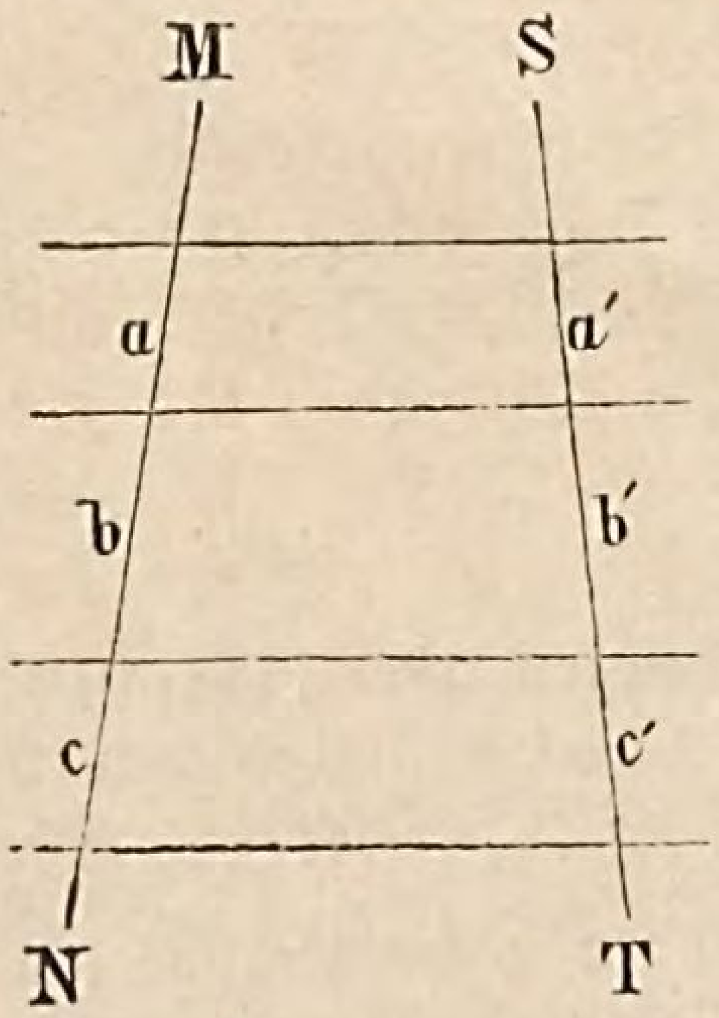


Fig. 3.

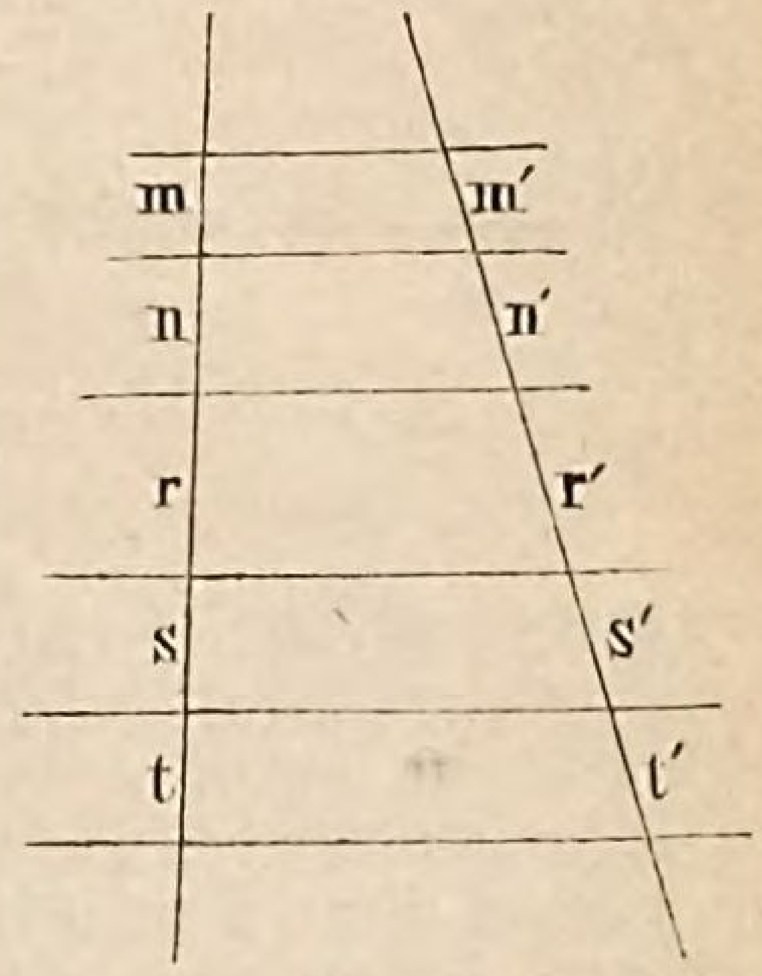


Fig. 4.

Machen wir bei Gl. 2 die rechte Seite zur linken und die linke Seite zur rechten, und stellen dann Gl. 2 unter Gl. 1, so wird

$$1)\ a:a' = b:b',$$
$$2)\ c:c' = b:b'.$$

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, mithin haben wir:

$$a:a' = c:c',$$

oder wenn die innern Glieder vertauscht werden,

$$a:c = a':c'.$$

Blicken wir jetzt wieder auf Fig. 3! a und c sind zwischen den Parallelen liegende Abschnitte auf MN, a' und c' sind die entsprechenden Abschnitte auf ST; und zwar grenzt a nicht an c und ebenso wenig a' an c'. Die letzte Proportion sagt uns also, daß

die Abschnitte zwischen den Parallelen proportional sind,

auch wenn sie **nicht an einander angrenzen.**

In Fig. 4 ist demnach nicht blos

$$1)\ m:n = m':n', \quad 2)\ n:r = n':r',$$
$$3)\ r:s = r':s', \quad 4)\ s:t = s':t',$$

sondern auch:

$$5)\ m:r = m':r', \quad 6)\ m:s = m':s',$$
$$7)\ m:t = m':t', \quad 8)\ n:s = n':s',$$
$$9)\ n:t = n':t', \quad 10)\ r:t = r':t'.$$

Wir können bei diesen Proportionen selbstverständlich auch wieder die äußern, ebenso die innern Glieder mit einander vertauschen, und auch die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern machen.

Aufgaben. In Fig. 5 werden zwei Gerade von 4,
" " 6 " " " " 5
Parallelen geschnitten; welche Proportionen können wir dem vorigen Paragraphen gemäß aufstellen?

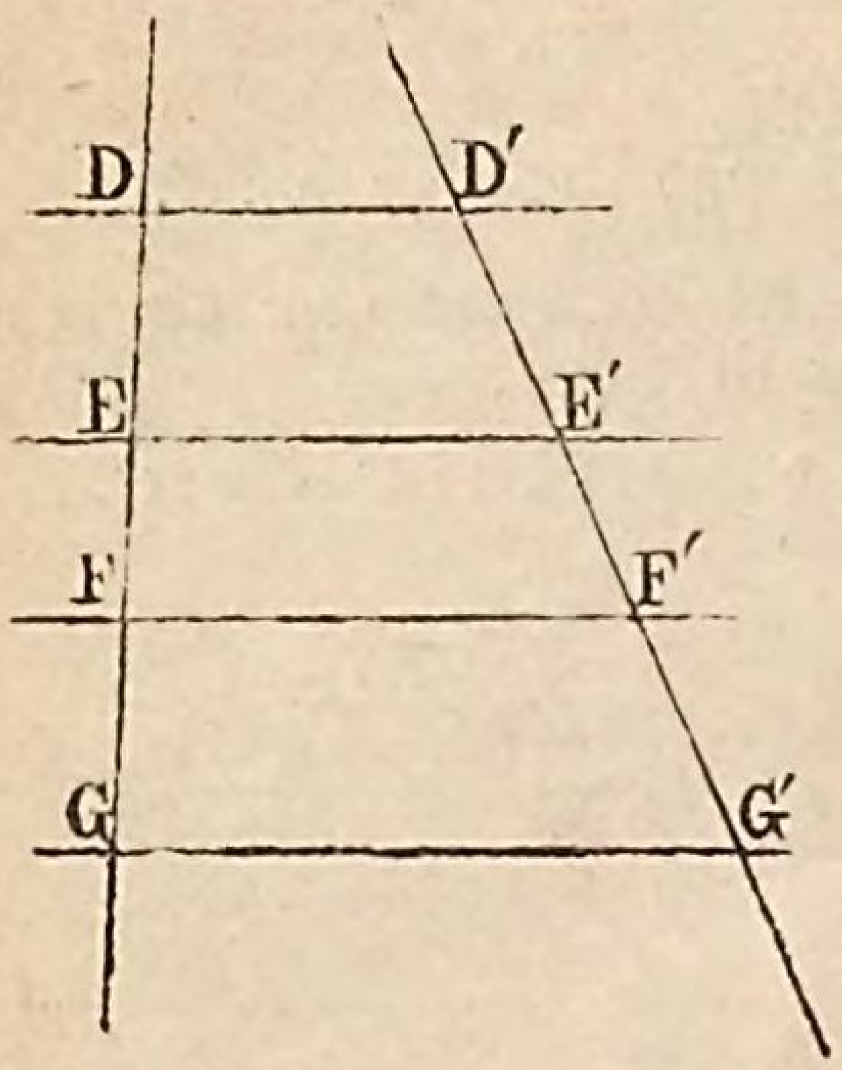


Fig. 5.

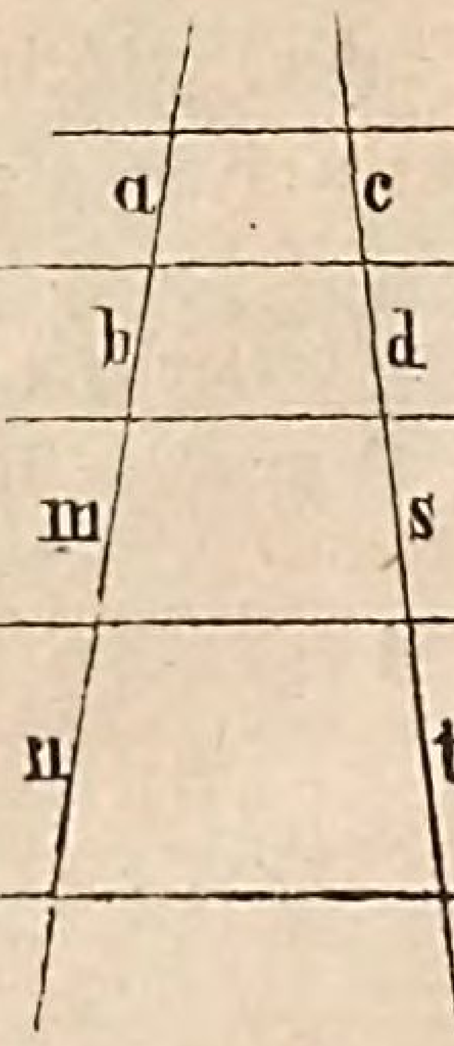


Fig. 6.

§ 68. Weitere Bemerkungen über Lehrsatz I.

1) Wenn zwei gerade Linien von mehreren Parallelen geschnitten werden, so können wir gemäß Lehrsatz I die zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte der geraden Linien zu **Gliedern einer Proportion machen**. Indem wir verschiedene Figuren betrachteten, haben wir auch die verschiedensten Proportionen aufgestellt. Aus Fig. 3 erhielten wir z. B.

$$a:b = a':b', \quad b:c = b':c', \quad a:c = a':c'.$$

Wenn wir bei diesen drei Proportionen unser Augenmerk auf die **Reihenfolge** richten, in der die Abschnitte a, b, a' u. s. w. in die Proportion eingestellt sind, so finden wir auf der l i n k e n Seite der Proportionsgleichungen immer A b s c h n i t t e d e r e i n e n G e r a d e n MN und auf der r e c h t e n Seite die e n t s p r e c h e n d e n A b s c h n i t t e d e r a n d e r n G e r a d e n ST. In:

$$a:b = a':b'$$

sind z. B. die Glieder der linken Seite

a und b Abschnitte der geraden Linie MN

und die Glieder der rechten Seite

a' und b' Abschnitte der geraden Linie ST.

Wir haben also, indem wir die drei Proportionen

$$a:b = a':b', \quad b:c = b':c', \quad a:c = a':c'$$

bildeten, e r s t auf der **einen** der geschnittenen Geraden **zwei Abschnitte** ausgewählt und uns d a n n die entsprechenden Abschnitte auf der **andern** Geraden herausgesucht.

Wir können aber auch a n d e r s v e r f a h r e n! Wenn wir in den drei Proportionen

$$a:b = a':b', \quad b:c = b':c', \quad a:c = a':c'$$

die innern Glieder vertauschen, so erhalten wir:

$$a:a' = b:b', \quad b:b' = c:c', \quad a:a' = c:c'.$$

Betrachten wir jetzt die erste Proportion

$$a:a' = b:b',$$

so ersehen wir aus Fig. 3, daß das erste Glied a auf der Geraden MN, das zweite Glied a' auf der andern Geraden ST, das dritte Glied b wieder auf der ersten Geraden MN und das vierte Glied b' auf der zweiten Geraden ST liegt.

Wir können also auch **die Proportionen zwischen den proportionalen Abschnitten bilden,** indem wir uns e r s t auf der **einen Geraden** einen Abschnitt a u s w ä h l e n, d a n n zum entsprechenden Abschnitt der **andern Geraden überspringen,** darauf zur **ersten Geraden zurückkehren,** und d a n n wieder zur **zweiten Geraden übergehen.**

In Fig. 1 ist demnach

nicht blos $AB:BC = A'B':B'C'$,
sondern auch $AB:A'B' = BC:B'C'$.

In Fig. 4 haben wir nicht blos die in Bemerkung IV des vorigen Paragraphen aufgestellten Proportionen, sondern auch:

$$m:m' = n:n', \quad n:n' = r:r',$$
$$r:r' = s:s', \quad s:s' = t:t' \text{ u. s. w.}$$

Aufgaben I. Der Schüler möge in Fig. 5 und in Fig. 6 die Proportionen zwischen den proportionalen Abschnitten aufstellen, indem er von einer der geschnittenen Geraden zur andern überspringt.

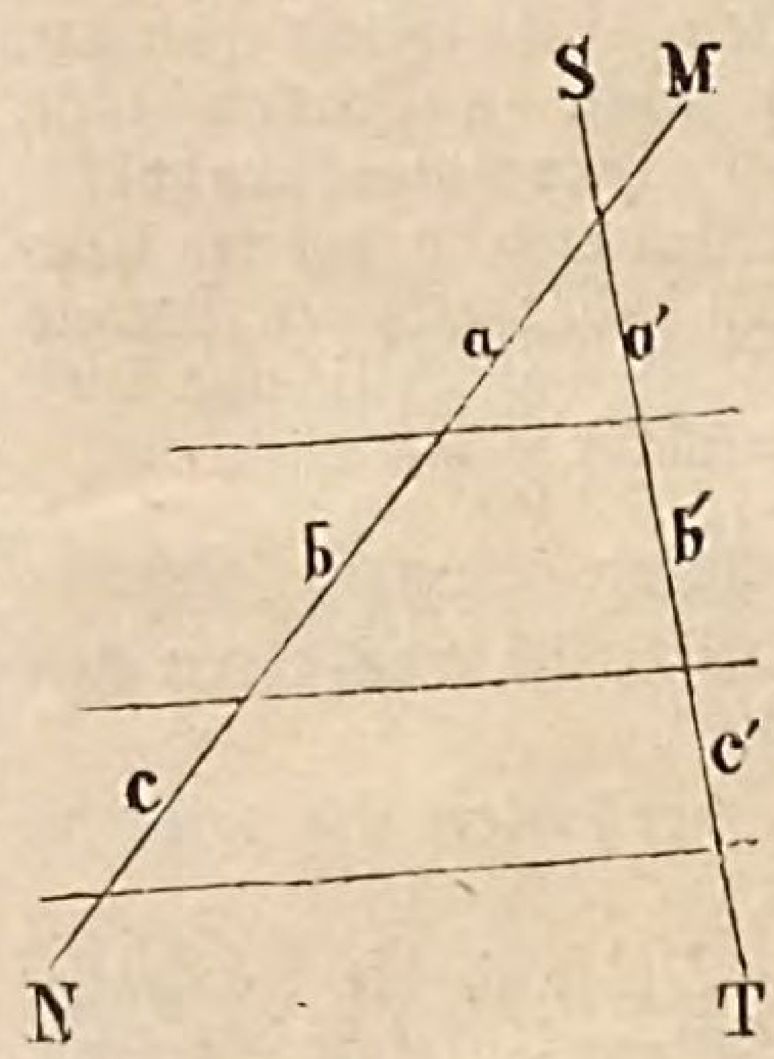


Fig. 7.

2) In Fig. 7 **treffen** sich die von drei Parallelen durchschnittenen Geraden MN und ST **in einem Punkte.** Diesen Punkt dürfen wir auch als **eine Parallele** von unendlich kleiner Größe ansehen und aus diesem Grunde die von diesem Punkte ausgehenden Abschnitte a und a' mit unter die p r o p o r t i o n a l e n S t ü c k e rechnen. In Fig. 7 ist demnach nicht blos

$$b:c = b':c',$$

sondern auch:

$$a:b = a':b', \quad a:c = a':c',$$
$$\text{oder } a:a' = b':b', \quad a:a' = c:c'.$$

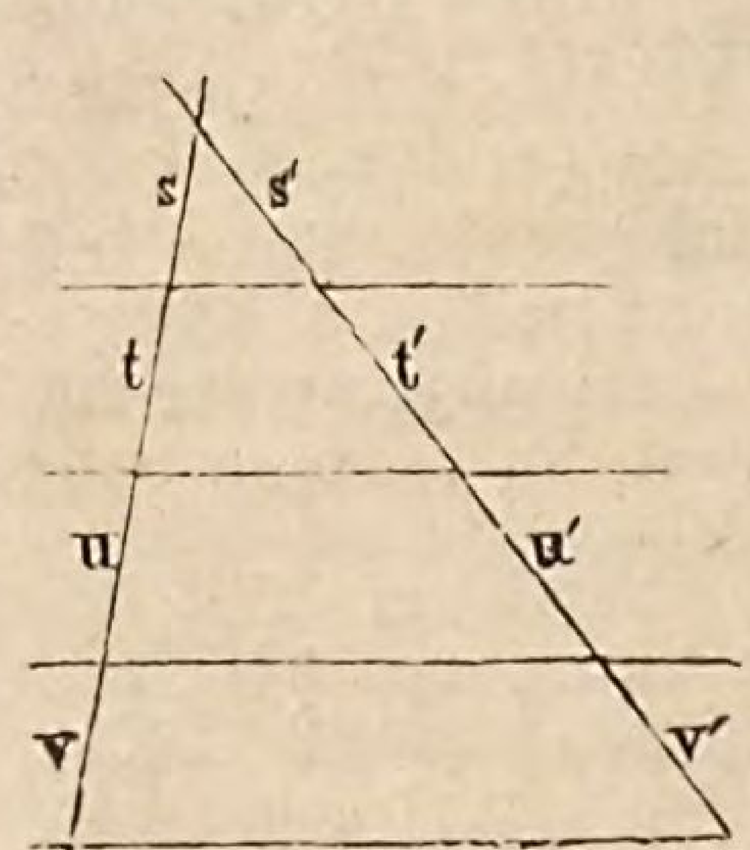


Fig. 8.

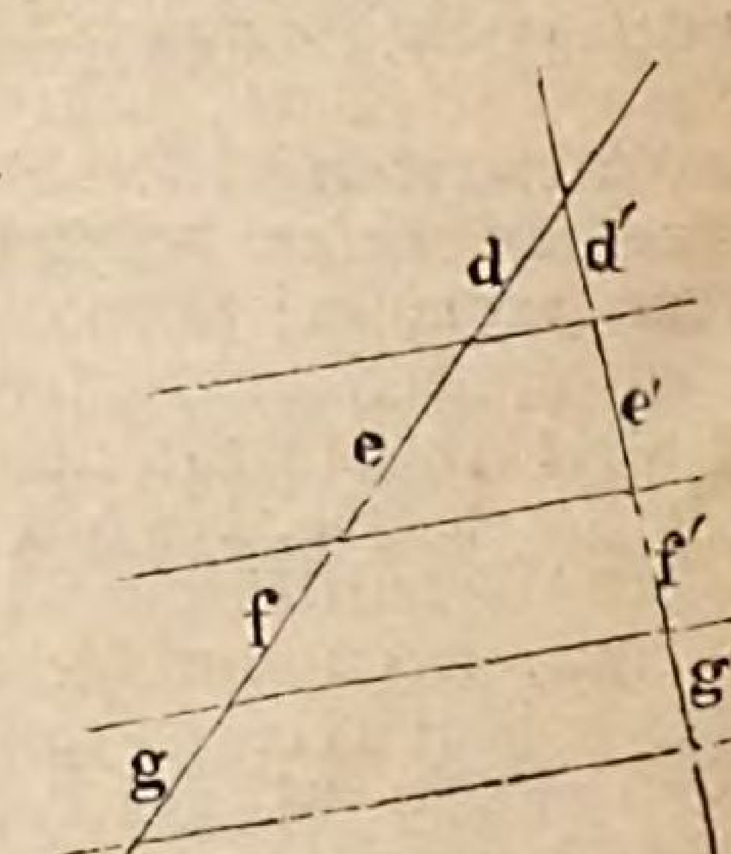


Fig. 9.

In Fig. 8 haben wir demnach auch:

$$s:t = s':t', \quad s:u = s':u', \quad s:v = s':v',$$

oder auch:

$$s:s' = t:t', \quad s:s' = u:u', \quad s:s' = v:v'.$$

Aufgaben II. Der Schüler möge in Fig. 9 (siehe Seite 430) die Proportionen aufstellen, in denen d und d' als Glieder vorkommen.

3) In Fig. 10 ist:

$$AB : A'B' = BC : B'C',$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

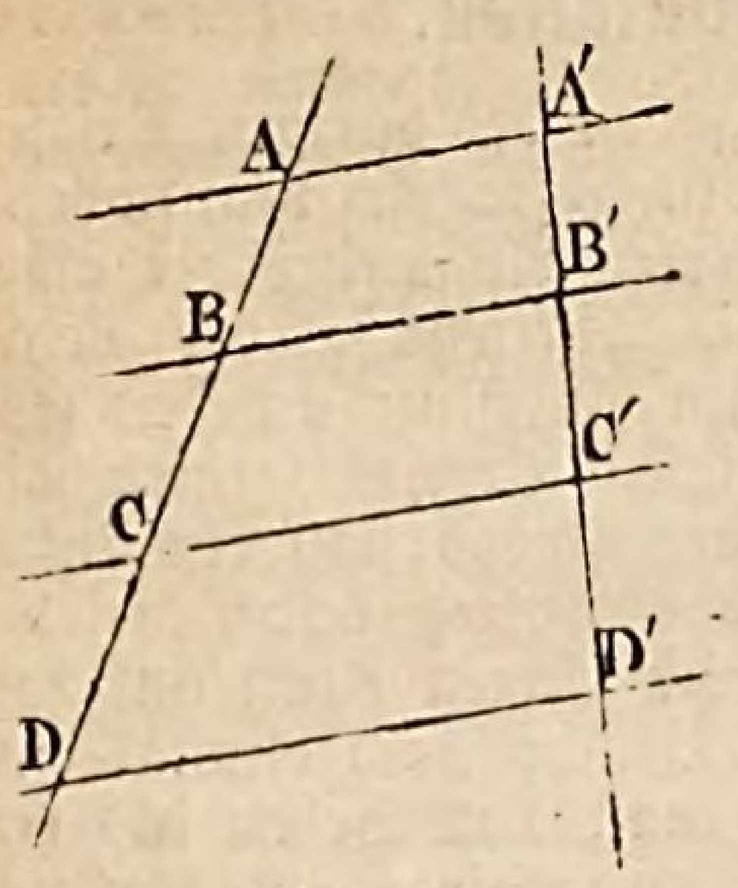


Fig. 10.

Wenn wir gemäß § 62 die Zähler und Nenner addiren, erhalten wir:

$$\frac{AB + BC}{A'B' + B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Wie wir aus Fig. 10 ersehen, ist:

$AB + BC = AC$ und $A'B' + B'C' = A'C'$;

folglich haben wir auch:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

oder in zwei Gleichungen geschrieben:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ und } \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Setzen wir für die Bruchstriche zwei übereinanderstehende Punkte als Divisionszeichen, so wird

1) $AC : A'C' = AB : A'B'$,
2) $AC : A'C' = BC : B'C'$,

Nun ist: $BC : B'C' = CD : C'D'$,
mithin auch:

3) $AC : A'C' = CD : C'D'$.

Vertauschen wir bei den letzten drei Proportionen die innern Glieder, so ergiebt sich:

a) $AC : AB = A'C' : A'B'$,
b) $AC : BC = A'C' : B'C'$,
c) $AC : CD = A'C' : C'D'$.

Sehen wir zu, was aus den Proportionen 1, 2, 3 und a, b, c lernen können! Wir bemerken in denselben die Glieder AC und A'C'. Wie wir aus Fig. 10 erkennen, liegen AC und A'C' zwischen Parallelen, welche n i c h t b e n a c h b a r t sind. Zwischen diesen Parallelen befindet sich vielmehr noch eine dritte Parallele. Wir

dürfen also zu den proportionalen Abschnitten auch diejenigen rechnen, welche zwischen nicht benachbarten Parallelen liegen.

Demnach ist in Fig. 10 auch:

$BD : AB = B'D' : A'B'$, $BD : BC = B'D' : B'C'$,
$BD : CD = B'D' : C'D'$, $AD : AB = A'D' : A'B'$,
$AD : BC = A'D' : B'C'$, $AD : CD = A'D' : C'D'$,
$AD : AC = A'D' : A'C'$ u. s. w.

oder wenn wir bei Aufstellung der Proportionen von einer der geschnittenen Geraden zur andern überspringen:

$BD : B'D' = AB : A'B'$, $BD : B'D' = BC : B'C'$,
$BD : B'D' = CD : C'D'$, $AD : A'D' = AB : A'B'$ 2c.

In Fig. 11 vertritt der Schnittpunkt P eine der Parallelen; es ist daher:

$PR : PQ = P'R' : P'Q'$, $PS : PQ = P'S' : P'Q'$

und so fort.

Aufgaben III. Der Schüler möge in Fig. 11 die übrigen Proportionen aufstellen, zu deren Gliedern Abschnitte zwischen nicht benachbarten Parallelen gehören.

Fig. 11.

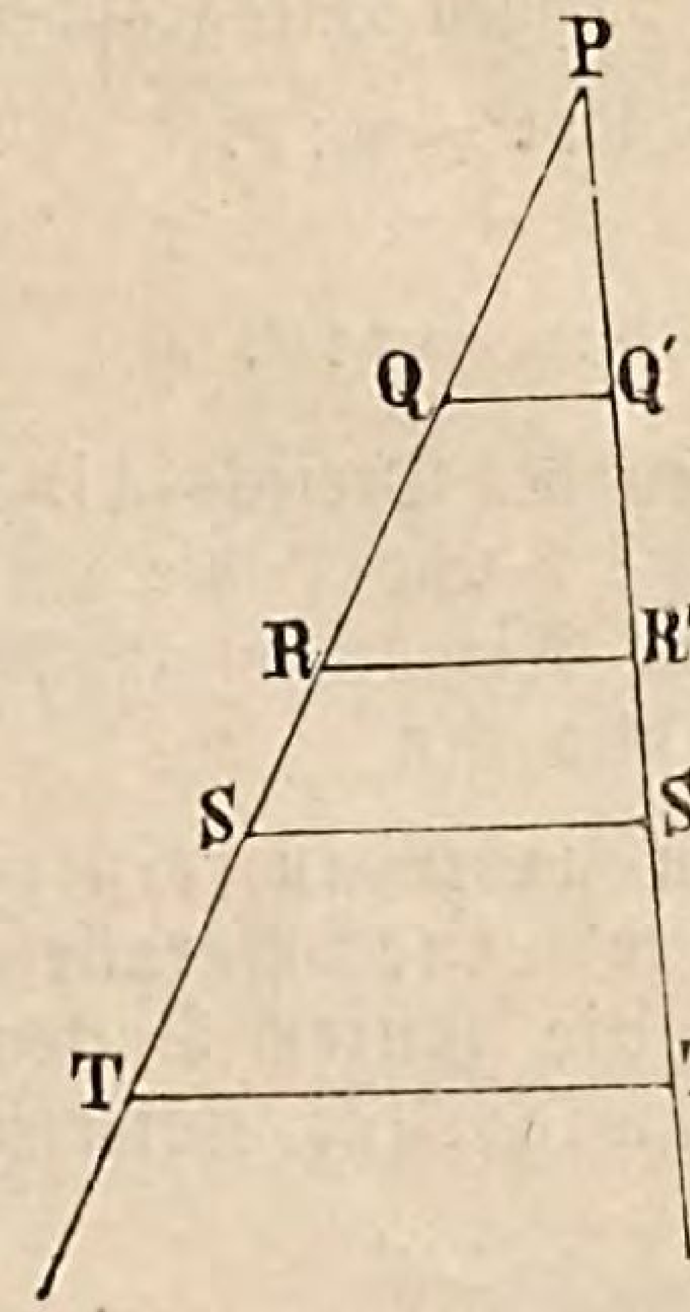
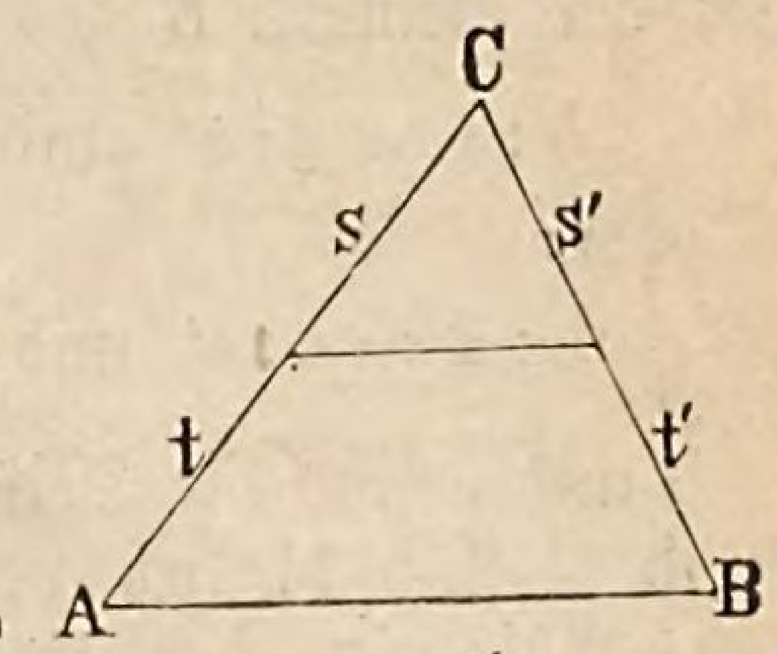


Fig. 12.



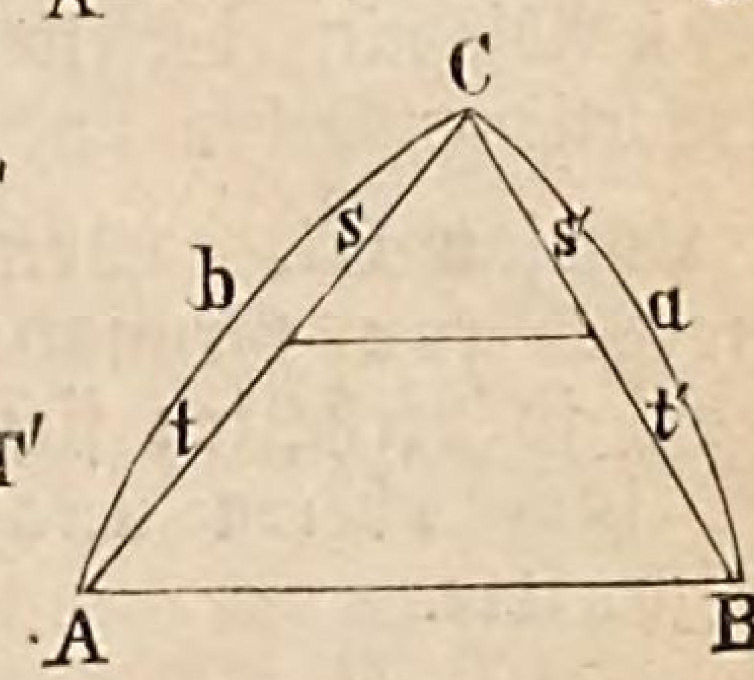


Fig 13.

§ 69. **Anwendung des Lehrsatzes I auf Dreiecke.** In dem Dreieck ABC (siehe Fig. 12) ist zur Grundlinie AB eine Parallele gezogen. Die Seite AC ist dadurch in die beiden Abschnitte s und t, die Seite BC in die Abschnitte s' und t' getheilt. Da die Abschnitte zwischen Parallelen proportional sind und die Ecke C die Stelle einer Parallelen vertritt, haben wir:

$$s : s' = t : t'.$$

s und s' sind die **obern,** t und t' die **untern** Abschnitte der Seiten AC und BC. Nennen wir AC und BC im Gegensatz zur **Grundlinie** AB die **Seiten***) des Dreiecks ABC, so giebt uns die letzte Proportion den

Lehrsatz II. Wenn man zur **Grundlinie** eines Dreiecks eine **Parallele** zieht, so **verhalten sich** die **obern** und **untern Abschnitte** der **Seiten auf gleiche Weise.**

---

*) **Jede Seite** eines Dreiecks können wir als **Grundlinie** auffassen. Die Einfachheit des Ausdrucks erfordert aber, daß wir zuweilen eine **bestimmte Seite** als **Grundlinie** betrachten und dann die **beiden andern Seiten** einfach als „**Seiten**" bezeichnen.

Wenden wir uns jetzt zu Fig. 13. In derselben sehen wir wieder das Dreieck ABC. Zur Grundlinie AB ist wie in Fig. 12 eine Gerade parallel gelegt; die Abschnitte der Seiten AC und BC sind wieder mit s, t, s' und t' benannt. Zur Seite AC haben wir aber den kleinen Buchstaben b und zur Seite BC den kleinen Buchstaben a hinzugesetzt. Weil die Ecke C eine Parallele vertritt, ist nach der Bemerk. 3 des vorigen Paragraphen

$$b:s = a:s' \text{ und } b:t = a:t'.$$

oder:

$$b:a = s:s' \text{ und } b:a = t:t'.$$

b und a sind die Seiten des Dreiecks ABC, s und s' sind die oberen, t und t' die unteren Abschnitte derselben. Die beiden letzten Proportionen geben uns also den

Lehrsatz III. Wenn man in einem Dreieck zur **Grundlinie** eine **Parallele** zieht, so **verhalten sich** die **ganzen Seiten** wie ihre **oberen** und wie ihre **unteren** Abschnitte.

Im Dreieck MNP (Fig. 14) ist zur Grundlinie MN die Parallele M'N' gelegt; PM' und PN' sind die oberen, M'M und N'N die unteren Abschnitte der Seiten PM und PN.

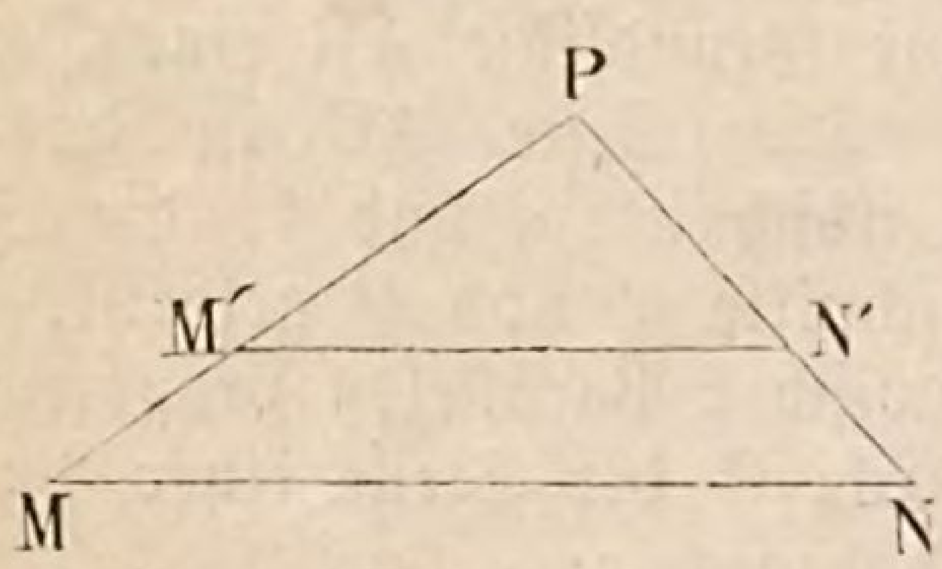


Fig. 14.

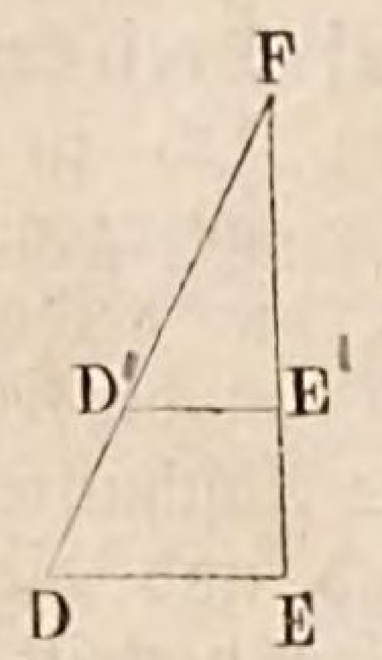


Fig. 15.

Nach Lehrsatz II ist deswegen

$$PM':PN' = M'M:N'N,$$

oder, wenn die innern Glieder vertauscht werden:

$$PM':M'M = PN':N'N.$$

Nach Lehrsatz III haben wir:

$$PM:PN = PM':PN'$$
$$\text{und } PM:PN = M'M:N'N.$$

Aufgaben. Der Schüler möge in Fig. 15 gemäß Lehrsatz II und III die Proportionen aufstellen.

Den ersten Cursus wollen wir unserm ursprünglichen Plane entgegen erst mit dem 26sten Briefe beschließen, um im Interesse des Schülers durch practische Beispiele (Messung eines Thurmes) u. s. w. das Verständniß der Aehnlichkeitssätze unterstützen zu können.

B. Recapitulation.

Nachdem wir die Aufgaben des vorigen Briefes gelöst und die Wiederholungsfragen beantwortet hatten, gaben wir im vierten Abschnitte der **achtundvierzigsten Lection** die Fortsetzung der Lehre von den Proportionen. Im Anschluß an den letzten Satz des vierundzwanzigsten Briefes zeigten wir zunächst, daß man bei einer Proportion ein äußeres und zugleich ein inneres Glied durch dieselbe Größe dividiren dürfe. Wir gingen dann auf das Erweitern und Heben der Brüche noch einmal ein, setzten auseinander, daß man das Heben als ein Erweitern auffassen dürfe, und erörterten, daß sich von zwei gleichen Brüchen der eine aus dem andern immer durch Erweitern ableiten lasse. Gestützt darauf wiesen wir nach, daß man sich einen Bruch bilden könne, welcher denselben Werth hat wie zwei gegebene gleiche Brüche, wenn man bei diesen gegebenen Brüchen die Zähler- und Nennersumme bez. die Zähler- und Nennerdifferenzen suche. Hiermit schlossen wir die Lehre von den Proportionen und wandten uns nun den Capiteln der Planimetrie zu, in denen die Proportionen Anwendung finden; und zwar bot sich uns zuerst die Lehre von dem Flächeninhalte der Parallelogramme und Dreiecke, welche gleiche Grundlinie bez. gleiche Höhe haben. Wir konnten ohne Mühe nachweisen, daß {Parallelogramme / Dreiecke} von gleicher {Grundlinie / Höhe} sich gerade so verhalten wie die {Höhe / Grundlinie}, und die betreffenden Sätze durch Beispiele erläutern.

In der **neunundvierzigsten Lection** behandelten wir sodann die proportionalen Abschnitte zwischen Parallelen. Wir betrachteten zwei gerade Linien, welche von mehreren Parallelen geschnitten werden, brachten den Satz, daß die Abschnitte, in welche die beiden Geraden von den Parallelen zerlegt werden, sich auf gleiche Weise verhalten, und bewiesen diesen Satz für den Fall, daß die Abschnitte commensurabel sind. Den Beweis für den Fall der Incommensurabilität verschoben wir auf später. Wir ergänzten unsern Satz noch durch zahlreiche Bemerkungen und übertrugen ihn auch auf das Dreieck, indem wir den Durchschnitt der beiden von den Parallelen getroffenen Geraden als eine unendlich kleine Parallele ansahen. Der nächste Brief wird nun endgiltig die Aehnlichkeit der Dreiecke und zahlreiche aus dem practischen Leben gegriffene Beispiele zur Erläuterung derselben bringen.

C. Wiederholungsfragen.

1) Wie kann man zwei gleiche Brüche aus einander ableiten?
2) Was ergiebt sich, wenn wir bei zwei gleichen Brüchen die Zähler und die Nenner addiren?
3) Wie verhalten sich Parallelogramme von gleicher Grundlinie?
4) Wie verhalten sich Dreiecke von gleicher Höhe?
5) Welcher Ausdrücke kann man sich statt der Worte „verhalten sich ebenso wie“ bedienen?

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

I. Cursus.
Lection 50 und 51.
Planimetrie.

26. Brief

der

Mathematischen Unterrichts-Briefe.

Für das Selbst-Studium Erwachsener.

Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung

hervorragender Fachmänner und Gelehrten

bearbeitet von

W. Burckhardt.

Als Manuscript gedruckt.

In den Werken der Natur ist Maß,
In den Werken der Menschen soll Maß sein.

Lection 50.

A. Auflösungen der Aufgaben des vorigen Briefes.

Lection 48.

Abschnitt D. § 58. Aus $10:15 = 20:30$ wird: $2:3 = 20:30$, $2:15 = 4:30$, $10:3 = 20:6$, $10:15 = 4:6$.

§ 59. **Aufgaben.** 1) Wir haben: $x:5 = 4:10$, folglich: $10x = 4 . 5 = 20$, $x = 2$. Es besteht mithin die Proportion: $2:5 = 4:10$.

2) Es ist: $7:9 = x:63$, daher $9x = 7 . 63$, $x = \frac{7 . 63}{9} = 49$. Wir haben also: $7:9 = 49:63$.

§ 60. **Aufgaben I.** 1) $v = \varphi$, 2) $s_1 = w$.
Aufgaben II. a) $x = y$, b) $t = m$.

§ 61. **Aufgaben.** Wir haben: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $\frac{3}{6}$ entsteht aus $\frac{1}{2}$, wenn $\frac{1}{2}$ mit 3 erweitert wird; $\frac{1}{2}$ erhalten wir aus $\frac{3}{6}$, wenn wir $\frac{3}{6}$ mit $\frac{1}{3}$ erweitern. Es ist ferner: $\frac{2}{7} = \frac{18}{63}$; $\frac{18}{63}$ ergiebt sich aus $\frac{2}{7}$, wenn $\frac{2}{7}$ mit 9 erweitert wird; $\frac{2}{7}$ geht aus $\frac{18}{63}$ hervor, wenn wir $\frac{18}{63}$ mit $\frac{1}{9}$ erweitern.

§ 62. Es ist: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

ferner: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{2 + 10}{3 + 15} = \frac{12}{15}$

und $\frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \frac{1 + 4}{5 + 20} = \frac{5}{25}$.

§ 63. Es ist: $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\delta - \zeta}$,

ferner: $\frac{45}{50} = \frac{9}{10} = \frac{45 - 9}{50 - 10} = \frac{36}{40}$

und $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{6 - 1}{12 - 2} = \frac{5}{10}$.

Lection 49.

Abschnitt A. § 67. **Aufgaben** (siehe Seite 428 Anm.) In den fünf Dreiecken:

$A'D'D''$, $D'B'B''$, $B'E'E''$, $E'F'F''$ und $F'C'C''$

ist: $A'D' = D'B' = B'E' = E'F' = F'C'$; denn alle diese Seiten sind der Construction gemäß gleich a.

Wir haben ferner:

$\angle A'D'D'' = \angle D'B'B'' = \angle B'E'E'' = \angle E'F'F'' = \angle F'C'C''$

als Gegenwinkel bei Parallelen geschnitten von ST und

$\angle D'A'D'' = \angle B'D'B'' = \angle E'B'E'' = \angle F'E'F'' = \angle C'F'C''$

als Gegenwinkel bei Parallelen geschnitten von ST.

Die fünf Dreiecke:

$A'D'D''$, $D'B'B''$, $B'E'E''$, $E'F'F''$ und $F'C'C''$

stimmen also in einer Seite und in den beiden anliegenden Winkeln überein; sie sind daher nach dem dritten Congruenzsatz einander congruent.

In Fig. 5 können wir die Proportionen:

$DE:EF = D'E':E'F'$, $DE:FG = D'E':F'G'$
$EF:FG = E'F':F'G'$ aufstellen.

Aus Fig. 6 folgen die Proportionen:

$a : b = c : d$, $a : m = c : s$, $a : n = c : t$,
$b : m = c : s$ u. s. w.

§ 68. **Aufgaben** I. In Fig. 5 ist:

$DE : D'E' = EF : E'F'$, $DE : D'E' = FG : F'G'$,
$EF : E'F' = FG : F'G'$.

In Fig. 6 ist:

$a : c = b : d$, $a : c = m : s$, $a : c = n : t$,
$b : t = m : s$ u. s. w.

Aufgaben II. Es ist;

$d : e = d' : e'$, $d : f = d' : f'$,
oder $d : d' = e : e'$, $d : d' = f : f'$.

Aufgaben III. In Fig 11 ist:

$PR : QR = PR' : Q'R'$, $PS : QR = PS' : Q'R'$,
$PS : RS = PS' : R'S'$, $PS : PR = PS' : P'R'$,
$PS : QS = PS' : Q'S'$, $PT : PQ = PT' : PQ'$,
$PT : QR = PT' : Q'R'$ $PT : RS = PT' : R'S'$,
$PT : ST = PT' : S'T'$, $PT : PS = PT' : PS'$,
$PT : QT = PT' : Q'T'$, $PT : PR = PT' : PR'$,
$PT : QS = PT' : Q'S'$, $PT : RT = PT' : R'T'$,
$QT : PR = Q'T' : PR'$, $QT : QR = Q'T' : Q'R'$,
$QT : RS = Q'T' : R'S'$, $QT : ST = Q'T' : S'T'$.

§ 69. **Aufgaben.** Es ist:

a) $FD' : FE' = D'D : E'E$,
b) $FD : FE = FD' : FE'$,
c) $FD : FE = D'D : E'E$.

B. Antworten auf die im Abschnitt C der Lection 49 gestellten Fragen.

1) Gleiche Brüche kann man durch Erweitern aus einander ableiten. 2) Wenn wir bei zwei gleichen Brüchen die Zähler und Nenner addiren, so erhalten wir einen dritten Bruch, welcher den beiden ersten gleich ist. 3) Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen. 4) Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. 5) Für die Worte: „verhalten sich ebenso wie" kann man auch sagen: „verhalten sich auf gleiche Weise", „sind proportional" u. s. f. (siehe § 67 Bemerk. II.)

C. Fortsetzung der Lehre von den Proportionen beim Durchschnitt gerader Linien.

§ 70. Ueberblick über den letzten Abschnitt des vorigen Briefes. Den letzten Abschnitt des vorigen Briefes haben wir mit der Betrachtung **zweier geraden Linien** begonnen, **welche von mehreren Parallelen durchschnitten werden.** Wir fanden dabei den wichtigen Satz, daß

die zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte auf der einen Geraden sich gerade so verhalten wie die entsprechenden Abschnitte auf der andern Geraden.

In Fig. 1 **verhält sich** demnach

AB zu CD **wie** A'B' zu C'D'.

Die Messung ergiebt, daß

AB **so groß wie** CD

ist, darum*) muß auch:

A'B' **so groß wie** C'D' sein.

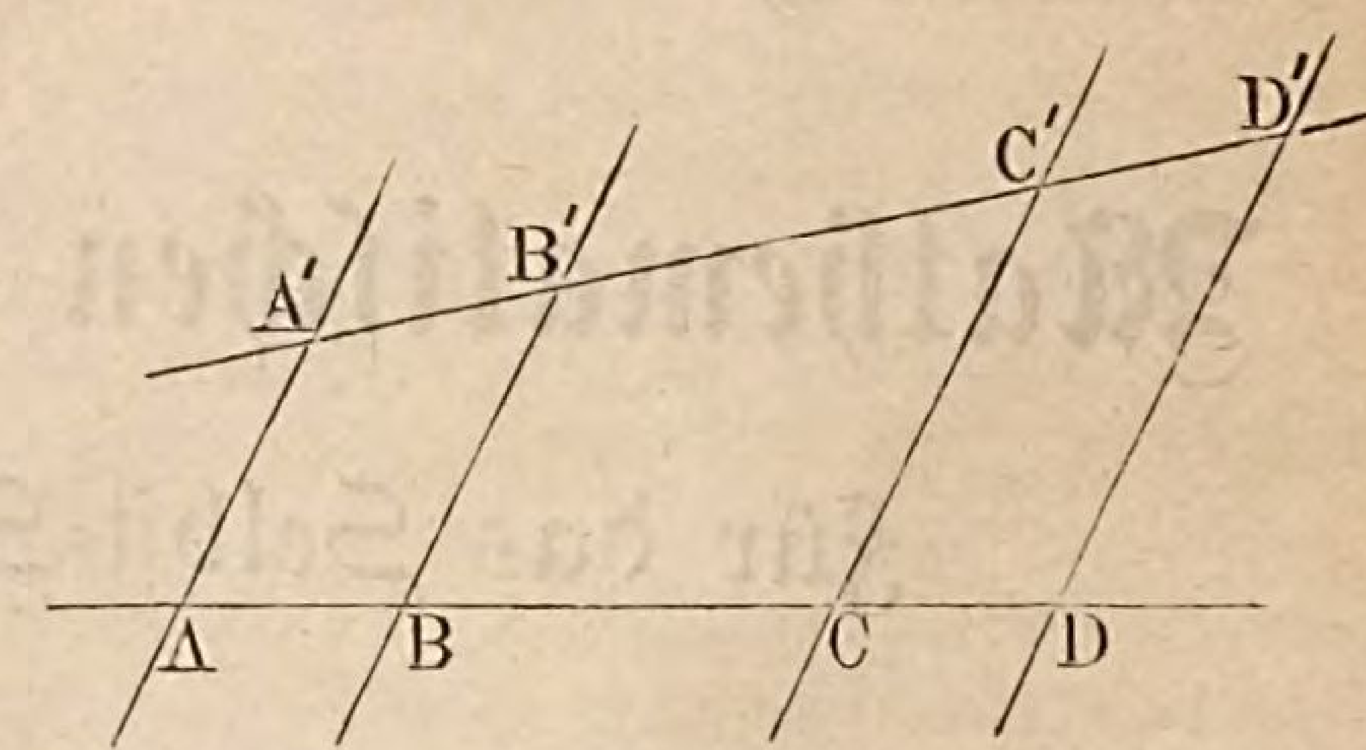


Fig. 1.

In Fig. 1 **verhält sich** ferner

BC zu AB **wie** B'C' zu A'B'.

Nun ist, wie wir uns durch Messung überzeugen können,

BC **doppelt so groß wie** AB,

daher muß auch:

B'C' **doppelt so groß** sein **wie** A'B'.

Es **verhält sich** drittens:

AC zu CD **wie** A'C' zu C'D'.

Nun ist

AC **dreimal so groß wie** CD

folglich ist auch:

A'C' **dreimal so groß wie** C'D'.

Aufgaben. In Fig. 2 ist:

a gleich c, b doppelt so groß wie a und wie c;

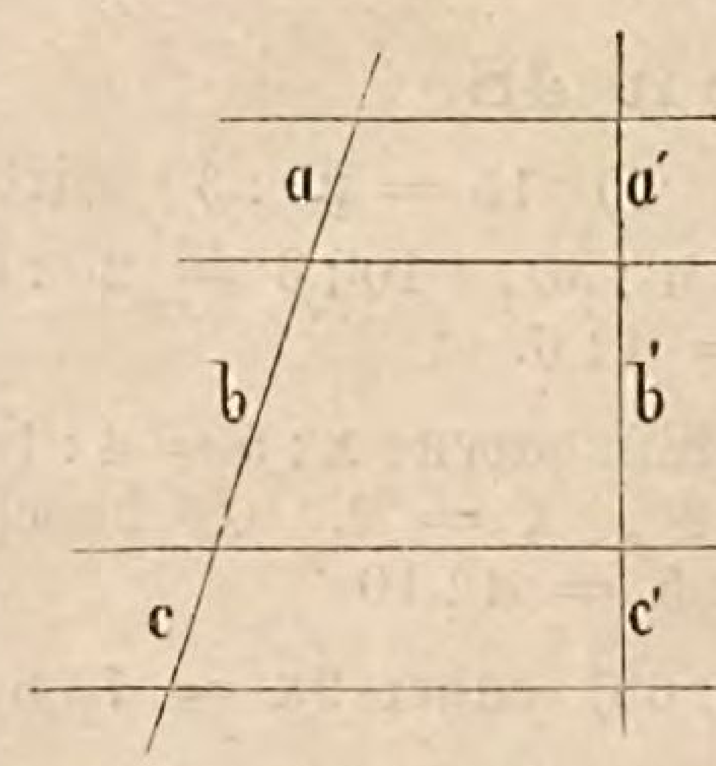


Fig. 2.

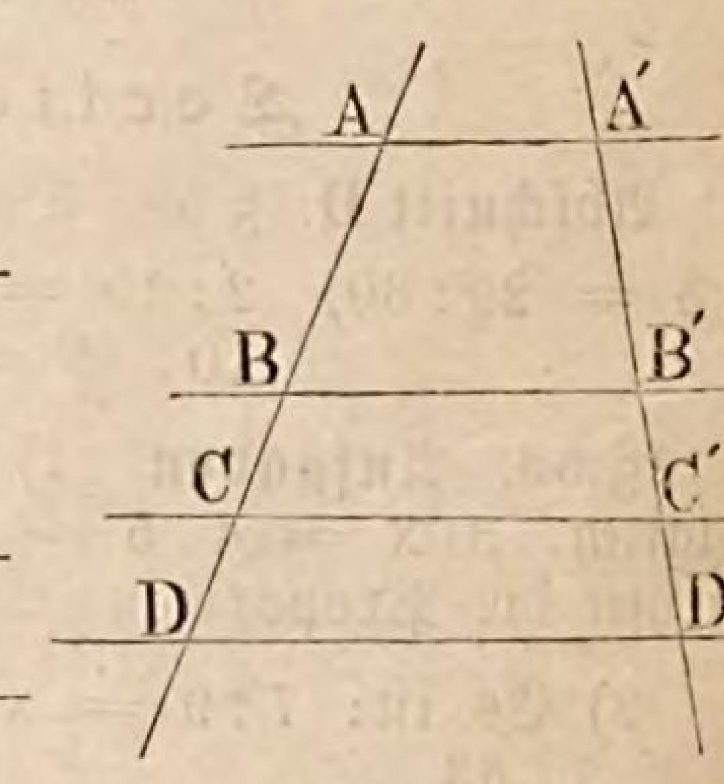


Fig. 3.

in Fig. 3 ist ferner:

AB doppelt so groß wie BC und wie BD,
AC dreimal „ „ „ BC und wie BD,

---

*) Unsere Schlüsse folgen einfach aus der **Bedeutung** der Worte: **verhält sich wie.** Weil aber diese Worte die sprachlichen Ausdrücke für gewisse Divisions- und Gleichheitszeichen (Proportionen) sind, so lassen sich unsere Schlüsse auch streng mathematisch nachweisen. Der Schüler möge dies auszusprechen versuchen; er kann die Richtigkeit seiner Versuche auf S. 452 controliren. In Bezug auf die **Uebereinstimmung** der **gewöhnlichen** und der **mathematischen Bedeutung** der Worte: **verhält sich wie,** findet der Schüler Näheres in § 79 Seite 445.

AD viermal so groß wie BC und wie BD,
BC ebenso „ „ BD.

Was dürfen wir für die proportionirten Stücke daraus schließen?

Der Satz von den proportionalen Abschnitten zwischen Parallelen gab uns noch zu mannichfachen Bemerkungen Anlaß. Einen besondern Fortschritt in unsern Betrachtungen brachte uns die Erwägung, daß wir auch den **Durchschnittspunkt** der beiden von den Parallelen geschnittenen Geraden als **unendlich kleine Parallele** ansehen und die von diesem Punkte ausgehenden Abschnitte unter die proportionalen Stücke einreihen dürfen.

Wir konnten, auf diese Erwägung gestützt, den Satz von den proportionirten Abschnitten bei Parallelen auf Dreiecke ausdehnen und zwei wichtige Lehrsätze aufstellen. Zuerst brachten wir den Satz:

Wenn man zur Grundlinie eines Dreiecks eine Parallele zieht, so verhalten sich die obern und untern Abschnitte der Seiten auf gleiche Weise.

Erläutern wir diesen Satz noch durch einige Beispiele.

Im Dreieck DEF (Fig. 4) sind DE′ und DF′ die obern, E′E und F′F die untern Abschnitte der Seiten DE und DF.

Mithin **verhält sich**

DE′ zu DF′ **wie** E′E zu F′F.

Nun ist, wie wir durch eine einfache Messung finden:

DE′ **ebenso groß wie** DF′,

folglich muß auch:

E′E **ebenso groß wie** F′F sein.

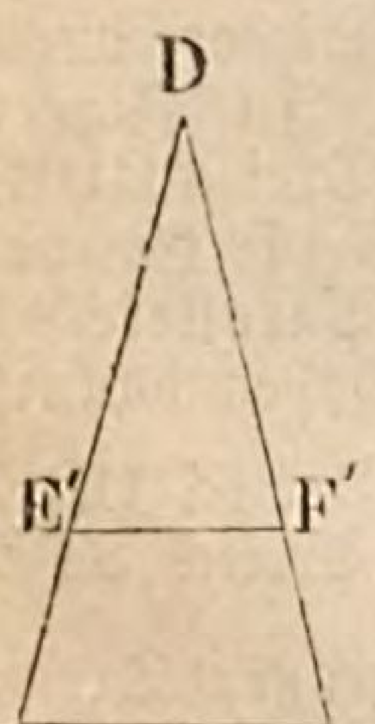


Fig. 4.

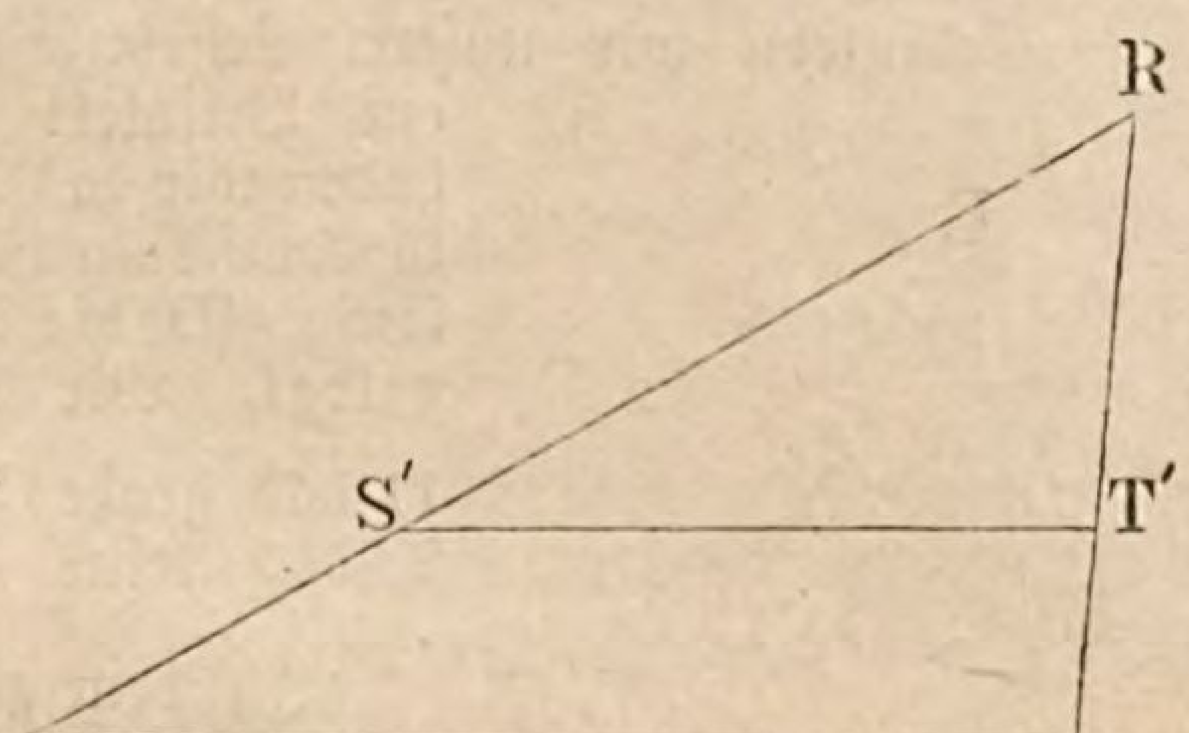


Fig. 5.

Im Dreieck RST (siehe Fig. 5) sind RS′ und RT′ die obern, S′S und T′T die untern Abschnitte, mithin **verhält sich**

RS′ zu RT′ **wie** S′S zu T′T.

Nun ist:

RS′ **doppelt so groß wie** RT′,

daher muß auch

S′S **doppelt so groß wie** T′T sein.

Wir fanden ferner den Satz:

Wenn man in einem Dreieck zur Grundlinie eine Parallele zieht, so verhalten sich die ganzen Seiten wie ihre obern und wie ihre untern Abschnitte.

Geben wir auch für diesen Satz ein Beispiel.

Im Dreieck RST (siehe Fig. 5) sind RS und RT die beiden Seiten, RS′ und RT′ die obern, S′S und T′T die untern Abschnitte.

Nach unserm Lehrsatz **verhält sich** daher

RS zu RT **wie** RS′ zu RT′
und RS zu RT **wie** S′S zu T′T.

Wissen wir nun, daß

RS **doppelt so groß** ist **wie** RT,

so können wir schließen, daß auch:

RS′ **doppelt so groß wie** RT′
und S′S **doppelt so groß wie** T′T ist.

§ 71. Die Grundlinie, die Parallele zu derselben und ihr Verhältniß zu einander. Im letzten Paragraphen haben wir Dreiecke betrachtet, in welchen zur Grundlinie eine Parallele gezogen war, und Proportionen zwischen den Seiten und den Abschnitten derselben aufgestellt. Wir wollen jetzt zeigen, daß wir auch die **Grundlinie** und die **Parallele** zu derselben in diese Proportionen hineinziehen können, und uns zu diesem Zwecke das Dreieck ABC in Fig. 6 näher ansehen. In demselben ist AB die Grundlinie, A′B′ die Parallele zur Grundlinie, AC und BC sind die Seiten, A′C und B′C die obern Abschnitte dieser Seiten.

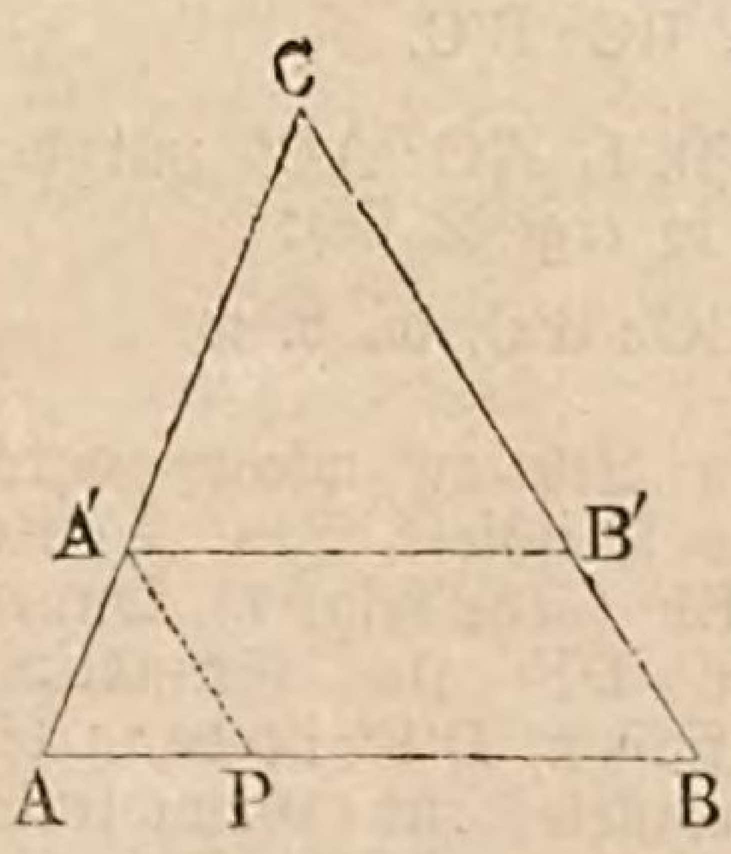


Fig. 6.

Wir behaupten nun, daß

AB : A′B′ = AC : A′C,
AB : A′B′ = BC : B′C ist,

und kleiden den Inhalt dieser Proportionen in den

Lehrsatz I. Wenn wir zur **Grundlinie** eines Dreiecks eine **Parallele** ziehen, so **verhält sich** die **Grundlinie** zur **Parallelen** wie jede der **Seiten** zu ihrem **obern Abschnitte.**

Von diesem Lehrsatze wollen wir den Beweis liefern.

Voraussetzung. Uns ist das Dreieck ABC gegeben (siehe Fig. 6) und parallel zur Grundlinie desselben die Strecke A'B'.

Behauptung. AB : A'B' = AC : A'C
und AB : A'B' = BC : B'C.

Beweis. Wir ziehen zu BC durch A' die Parallele A'P. Wenn wir nun BC als Grundlinie ansehen, so sind AB und AC die Seiten und PB und A'C die untern Abschnitte derselben. Weil sich nun nach § 69 Lehrsatz III die ganzen Seiten wie die untern Abschnitte verhalten, besteht die Proportion:

AB : AC = PB : A'C,

oder wenn die innern Glieder vertauscht werden:

AB : PB = AC : A'C.

Nun ist PBB'A' ein Parallelogramm, weil die Seiten desselben parallel zu einander gezogen sind. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich, mithin haben wir:

PB = A'B'.

Führen wir für PB in der Proportion

AB : PB = AC : A'C

die gleiche Größe A'B' ein, so ergiebt sich.

I. AB : A'B' = AC : A'C, w. b. w.

Betrachten wir nun AB als Grundlinie und A'B' als Parallele zu derselben, so ist nach § 69 Lehrsatz III

AC : A'C = BC : B'C.

Vertauschen wir in Gl. I AC : AC' mit der gleichen Größe BC : B'C, so ergiebt sich:

II. AB : A'B' = BC : B'C, w. b. w.

Erläutern wir unsern Lehrsatz wieder durch ein Beispiel! Im Dreieck DEF (siehe Fig. 7) können wir DF als Grundlinie auffassen, D'F' ist dann die Parallele zur Grundlinie, D'E ist der obere Abschnitt der Seite DE und F'E ist der obere Abschnitt der Seite FE.

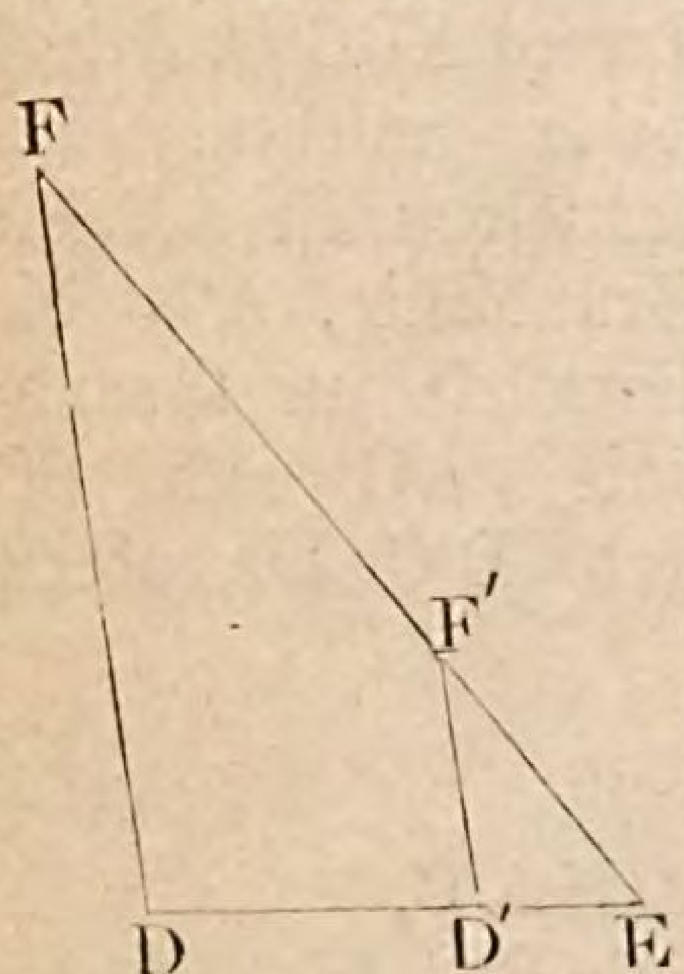


Fig. 7.

Nach unserm Lehrsatz **verhält sich** mithin

DF zu D'F' **wie** DE zu D'E
und
DF zu D'F' **wie** FE zu F'E.

Nun ist, wie sich durch Messung ergiebt,

DF **dreimal so groß wie** D'F',

mithin ist auch:

DE **dreimal so groß wie** D'E,

und ebenso:

FE **dreimal so groß wie** F'E.

Aufgaben. Nehmen wir an, DF sei a) zweimal, b) viermal so groß wie D'F', wie muß sich dann DE zu D'E und FE zu F'E verhalten?

Bemerkung. Wenn wir im Dreieck ABC (Fig. 8) zur **Grundlinie** AB eine **Parallele** A'B' ziehen, so haben wir 1) das große Dreieck ABC,
2) das kleine Dreieck A'B'C.

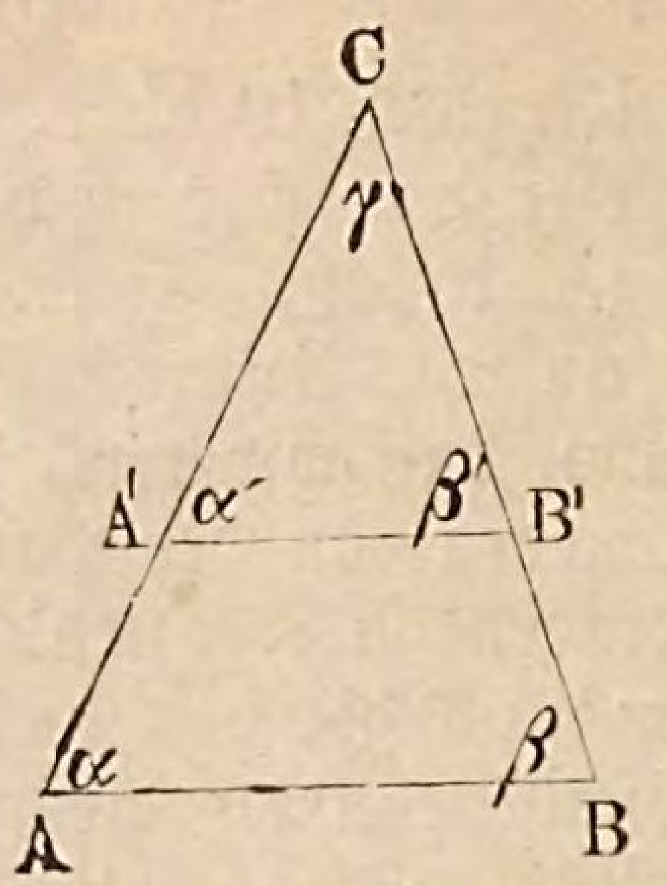


Fig. 8.

Sehen wir zu, in welcher Beziehung die Seiten und Winkel dieser Dreiecke zu einander stehen! Es ist

1) $\alpha = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und A'B', geschnitten von AB,

2) $\beta = \beta'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und A'B', geschnitten von AC,

3) $\gamma = \gamma$, weil jede Größe sich selbst gleich ist.

Die **Winkel** sind also in den beiden Dreiecken **gleich**. Betrachten wir die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Dem Winkel α liegt BC, dem Winkel α' die Seite B'C, dem Winkel β liegt AC, ein Winkel β' die Seite A'C, dem Winkel γ im großen Dreiecke die Seite AB, im kleinen Dreiecke die Seite A'B' gegenüber.

Nun haben wir:

BC : B'C = AC : A'C = AB : A'B';

denn es ist nach Lehrs. I in § 71:

AB : A'B' = AC : A'C = BC : B'C.

also auch die Seiten, **welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, verhalten sich auf gleiche Weise.**

Wir haben daher den

Lehrsatz II. Wenn in einem Dreieck zur **Grundlinie** eine **Parallele** gezogen wird, so sind in dem **ganzen Dreieck und in dem kleinen abgeschnittenen Dreiecke** die **Winkel wechselseitig gleich** und die **Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, verhalten sich auf gleiche Weise.**

Erläutern wir unsern Lehrsatz wieder durch ein Beispiel! In Fig. 9 haben wir das Dreieck CDE; in demselben ist **zur Grundlinie** CD **die Parallele** ST **gelegt**. Wir haben dann:

1) das große Dreieck CDE,
2) das kleine Dreieck STE.

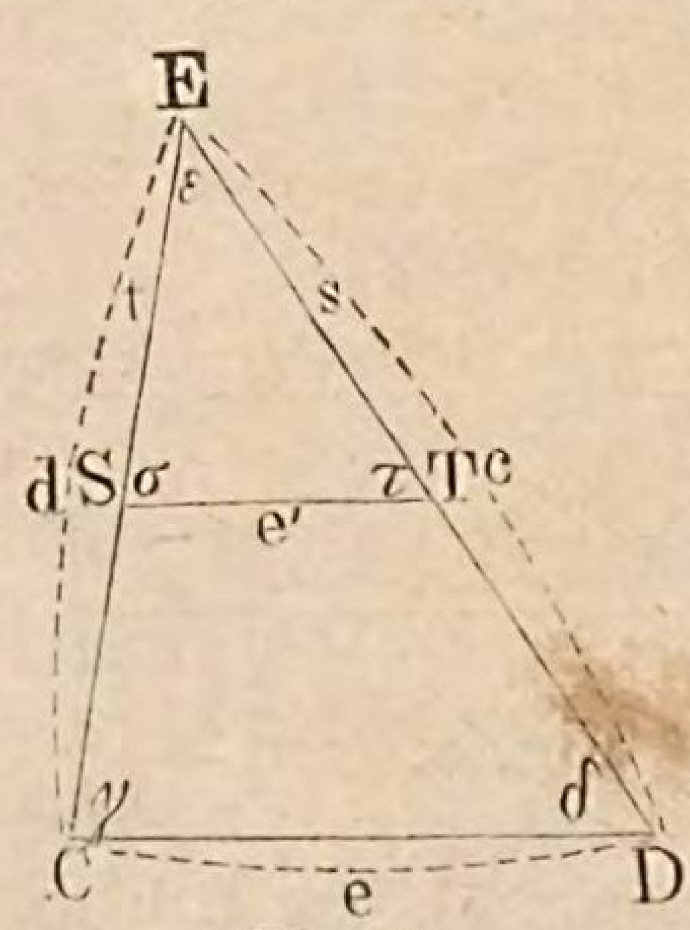


Fig. 9.

In dem großen Dreieck CDE haben wir die Winkel

γ, δ und ε,

denen der Reihe nach die Seiten

c, d und e

gegenüberliegen.

In dem kleinen Dreieck sehen wir die Winkel

σ, τ und ε,

denen die Seiten

s, t und e'

gegenüberliegen.

Unserm Lehrsatz gemäß sind nun in den Dre

i.

ecken CDE und STE die entsprechenden Winkel wechselseitig gleich, d. h. es ist

$$\gamma = \sigma,\quad \delta = \tau \text{ und } \varepsilon = \varepsilon.$$

Ferner verhalten sich in den beiden Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, auf gleiche Weise; mithin ist:

$$c:s = d:t,\quad c:e = s:e',\quad d:e = t:e'.$$

B. Die Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 72. Wenn ein Feldmesser den Riß einer Feldmark entwirft, verlangt man, daß der Riß der Feldmark **ähnlich** sei. Ebenso soll die Photographie dem Original, das Oelgemälde der dargestellten Landschaft **ähnlich** sein. Wenn wir den Sinn des Wortes **„ähnlich"** bei diesen Beispielen untersuchen, so finden wir, daß die **ähnlichen** Figuren durchaus **nicht dieselbe Größe** zu haben brauchen; der Riß ist viel kleiner als die Feldmark, ebenso ist die Photographie kleiner als das Original und das Oelgemälde kleiner als die Landschaft. Zu demselben Ergebniß kommen wir, wenn wir auf ganz einfache Verhältnisse zurückgehen. Wir werden die Dreiecke, von welchen in Fig. 10 eins im andern liegt, auf den ersten Blick hin für ähnlich erklären, und doch ist eins immer kleiner als das andere. Doch daß ähnliche Figuren nicht gleich groß zu sein brauchen,

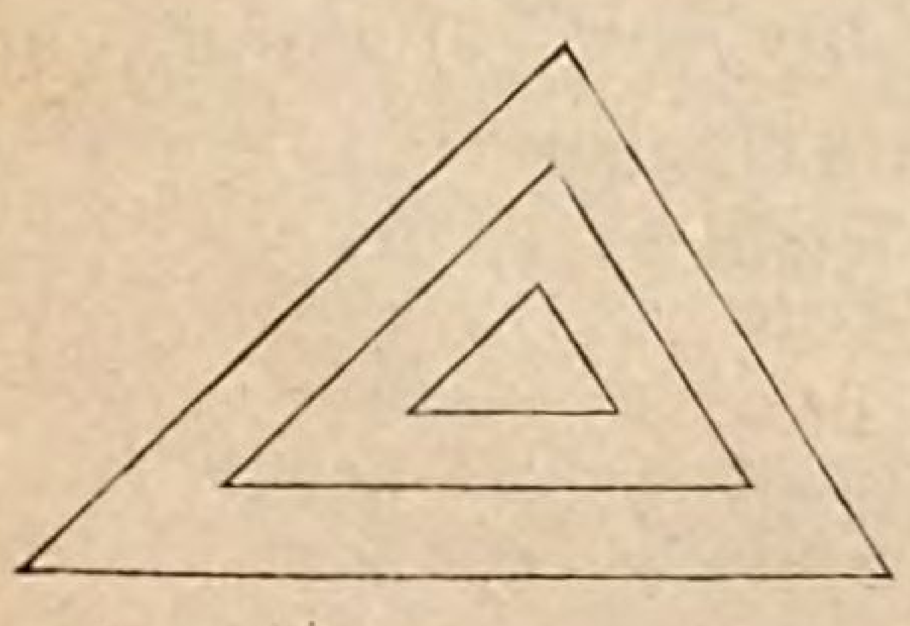


Fig. 10.

ist eine negative Bemerkung. Ueberlegen wir uns jetzt, welche positiven Erfordernisse wir an ähnliche Figuren zu stellen haben. Zunächst bemerken wir, daß die **ähnlichen Dreiecke** in Fig. 10 **gleiche Winkel** haben. Ebenso müssen bei einem Grundriß die Winkel ebenso groß sein, wie die entsprechenden Winkel auf der Feldmark, welche durch den Grundriß dargestellt wird.

Aehnliche Figuren müssen also **in ihren Winkeln übereinstimmen.**

Das ist die erste Bedingung für die Aehnlichkeit; wir wollen jetzt die zweite Bedingung ermitteln.

Bleiben wir bei unserm Beispiel vom Grundriß und der Feldmark, um die zweite Bedingung für die Aehnlichkeit aufzustellen. Wie dem Schüler bekannt sein wird, fügt man zu jedem Grundriß das Maaß der Verkleinerung hinzu. Ist die Verkleinerung eine 1000-fache, so wird von jeder Linie auf der Feldmark nur der tausendste Theil in den Grundriß eingetragen. Jede Strecke des Grundrisses verhält sich also zu der entsprechenden Strecke der Feldmark wie 1 zu 1000, d. h. die sämmtlichen Strecken des Grundrisses verhalten sich zu den entsprechenden Strecken der Feldmark auf gleiche Weise, oder anders ausgedrückt, die Strecken des Grundrisses sind den Strecken der Feldmark **proportional.**

In **ähnlichen** Figuren sind also die Strecken der **einen** Figur den entsprechenden Strecken der **andern** Figur **proportional.**

Dies ist die zweite Bedingung der Aehnlichkeit. Aehnliche Dreiecke, welche wir zuerst behandeln werden, müssen diesen Bedingungen genügen. Wir werden daher

zwei Dreiecke **ähnlich** nennen, wenn in ihnen

1) die **Winkel** wechselseitig **gleich** sind und

2) die **Seiten** des **einen** Dreiecks **sich verhalten wie** die **entsprechenden Seiten** des **andern** Dreiecks,

und umgekehrt

wenn zwei Dreiecke **ähnlich** sind, so müssen in ihnen

1) die **Winkel** wechselseitig **gleich** sein und

2) müssen sich die entsprechenden **Seiten auf gleiche Weise verhalten.**

und zwar haben wir unter **entsprechenden** Seiten **diejenigen Seiten** zu verstehen, **welche gleichen Winkeln gegenüberliegen.**

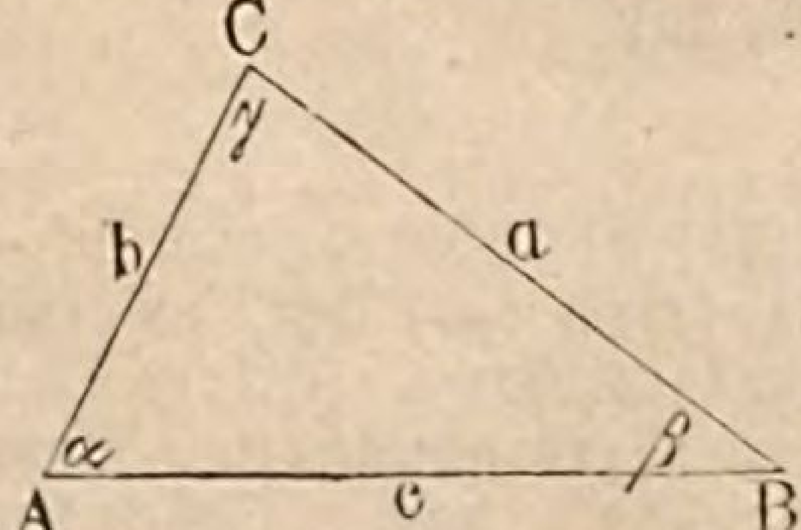


Fig. 11.

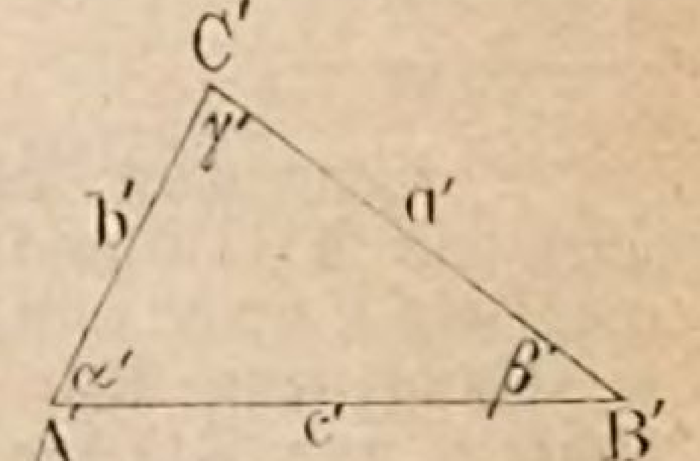


Fig. 12.

In den beiden Dreiecken ABC und A'B'C' (siehe Fig. 11 und 12) sei

$$\alpha = \alpha',\quad \beta = \beta',\quad \gamma = \gamma',$$

ferner:

$$a:a' = b:b',\quad a:a' = c:c',\quad b:b' = c:c',$$

dann ist nach unserer Definition das Dreieck ABC dem Dreieck A'B'C' ähnlich.

Für **„ähnlich"** hat man das Zeichen $\sim$ eingeführt, wir haben mithin:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

$\sim$ wird das **Aehnlichkeitszeichen***) genannt.

Wir wollen den Sinn der Aehnlichkeit noch durch zwei andere Beispiele ausführlich erläutern. Nehmen wir an, wir hätten durch Messung gefunden, daß in den beiden Dreiecken CDE und C'D'E' (siehe Fig. 13 und 14)

$$1)\ \gamma = \gamma',\quad 2)\ \delta = \delta',\quad 3)\ \varepsilon = \varepsilon'$$

sei, so wissen wir, daß

die beiden Dreiecke **in ihren Winkeln übereinstimmen.**

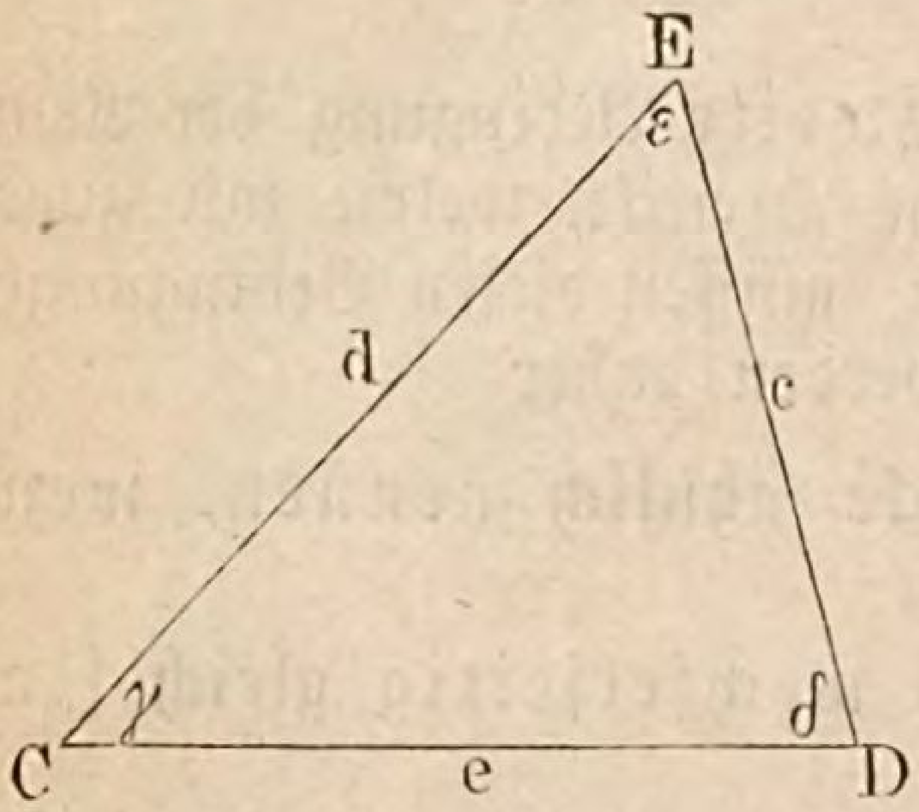


Fig. 13.

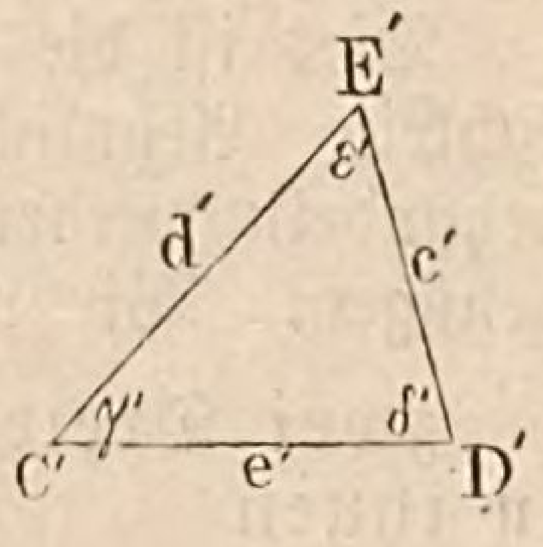


Fig. 14.

Stellen wir uns weiter vor, wir hätten ermittelt, daß

die Seite c doppelt so groß wie c'
„ „ d „ „ „ „ d'
„ „ e „ „ „ „ e'

sei, so ist uns auch bekannt, daß

jede Seite des Dreiecks CDE zur entsprechenden Seite des Dreiecks C'D'E' sich gerade **so verhält wie** jede andere Seite des Dreiecks CDE zur entsprechenden Seite des Dreiecks C'D'E',

anders ausgedrückt, daß

die Seiten der beiden Dreiecke CDE und C'D'E' sich **auf gleiche Weise verhalten****),

oder noch anders gesagt, daß

die beiden Dreiecke CDE und C'D'E' in den **Verhältnissen ihrer Seiten übereinstimmen.**

Die beiden Dreiecke CDE und C'D'E' erfüllen mithin die Bedingungen der Aehnlichkeit, in Zeichen, es ist:

$$\triangle CDE \sim \triangle C'D'E',$$

in Worten:

Dreieck CDE ist dem Dreieck C'D'E' ähnlich.

Wenden wir uns noch zu einem andern Beispiel! Nehmen wir an, es sei uns bekannt, daß Dreieck STU dem Dreieck S'T'U' (siehe Fig. 15 und 16)

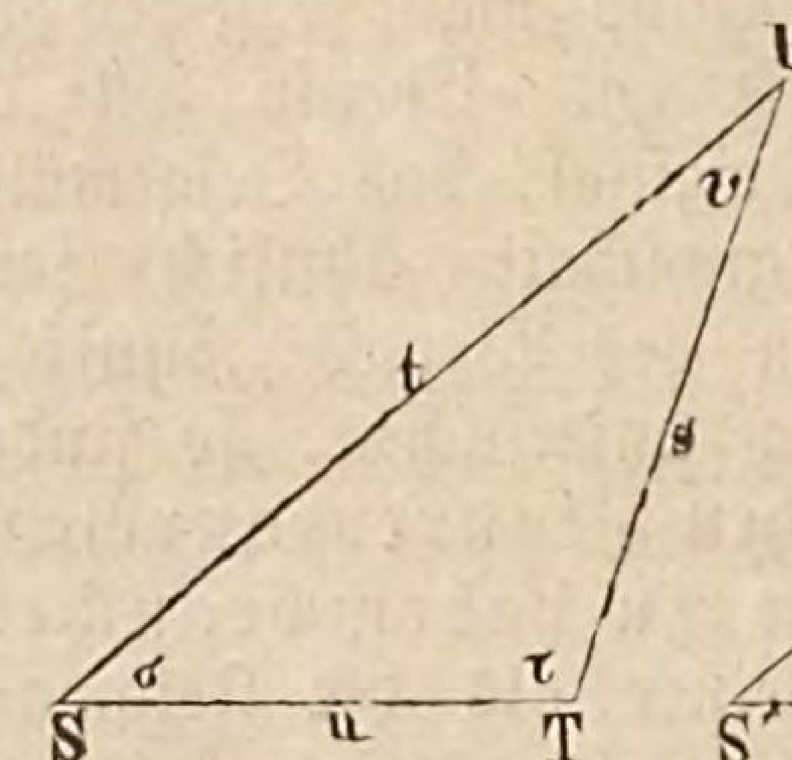


Fig. 15.

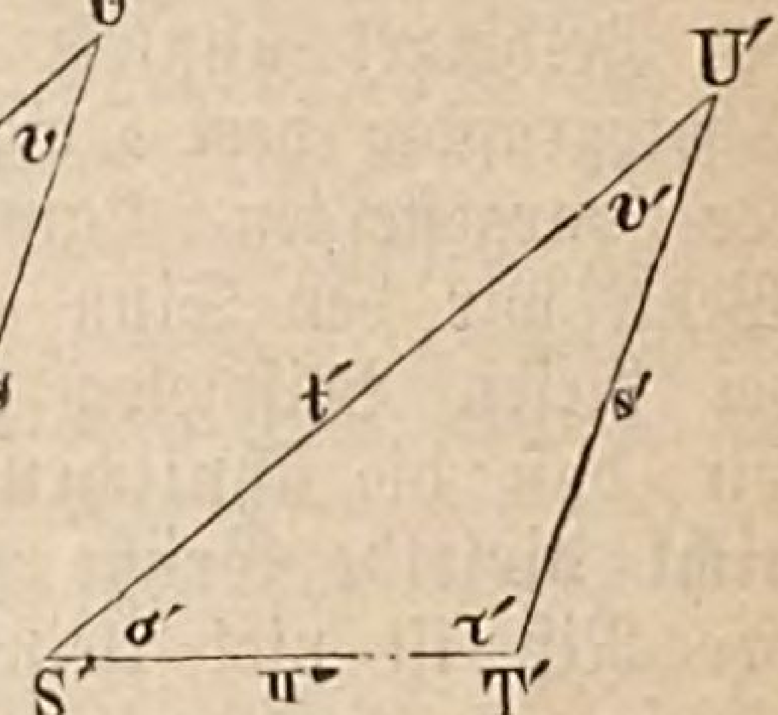


Fig. 16.

ähnlich sei, und fragen wir uns, welche Schlüsse wir daraus ziehen können. Zunächst wissen wir,

daß jedem Winkel im Dreieck STU ein gleicher Winkel in dem Dreieck S'T'U' entspricht; und zwar ist:

$$1)\ \sigma = \sigma',\quad 2)\ \tau = \tau',\quad 3)\ v = v'.$$

In dem Dreieck STU liegt

dem Winkel σ, τ, v
die Seite s, t, u,

und im Dreieck S'T'U'

dem Winkel σ' τ', v'
die Seite s' t', u'

gegenüber.

Weil die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, sich bei ähnlichen Dreiecken auf gleiche Weise verhalten, können wir die Proportionen aufstellen:

$$1)\ s : s' = t : t',$$
$$2)\ s : s' = u : u',$$
$$3)\ t : t' = u : u',$$

---

*) Wenn man das Aehnlichkeitszeichen ($\sim$) über das Gleichheitszeichen ($=$) setzt, so erhält man das Congruenzzeichen ($\cong$). In der That! die **Congruenz** stellt eine **Verbindung von Aehnlichkeit und Flächengleichheit dar.** Congruente Dreiecke z. B. haben erstens gleiche Gestalt (sind ähnlich) und zweitens gleiche Größe (sind flächengleich). **) Als mathematischer Ausdruck dafür dienen die Proportionen:

$$c : c' = d : d' = e : e'.$$

Aus der Annahme:

$$1)\ c = 2c',\quad 2)\ d = 2d',\quad 3)\ e = 2e'$$

können wir die vorstehenden Proportionen leicht entwickeln. Dividiren wir Gl. 1 durch Gl. 2, sowie Gl. 2 durch Gl. 3, so ist

$$\frac{c}{d} = \frac{2c'}{2d'},\quad \frac{d}{e} = \frac{2d'}{2e'}.$$

Heben wir die Brüche der rechten Seite durch 2, so ergiebt sich:

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \text{ und } \frac{d}{e} = \frac{d'}{e'}$$

oder anders geschrieben:

$$c : d = c' : d' \text{ und } d : e = d' : e'.$$

Vertauschen wir die innern Glieder, so wird

$$c : c' = d : d' \text{ und } d : d' = e : e',$$

also auch:

$$c : c' = d : d' = e : e'.$$

oder wenn wir die innern Glieder vertauschen:

a) s : t = s′ : t′,
b) s : u = s′ : u′,
c) t : u = t′ : u′.

Bei den Proportionen 1, 2, 3 haben wir zum
1sten Glied eine Seite des Dreiecks STU,
2ten „ die entspr.*) „ „ „ S′T′U′,
3ten „ wieder eine „ „ „ STU,
4ten „ die entspr.*) „ „ „ S′T′U′
gemacht.

Wir sind also beim Gliedwechsel *von einem ähnlichen Dreieck zum andern übergesprungen.*

Bei den Proportionen a, b, c dagegen sehen wir auf der *linken* Seite der Gleichung zwei Seiten des Dreiecks STU und auf der *rechten* Gleichungsseite die beiden entsprechenden Seiten des ähnlichen Dreiecks S′T′U′.

Es ist gleichgiltig, ob wir die Proportionen a, b, c oder 1, 2, 3 benutzen, um auszudrücken, daß in den ähnlichen Dreiecken die Seiten proportional sind.

Doch kehren wir zu den *Bedingungen der Aehnlichkeit* zurück. Wenn zwei Dreiecke in ihren Winkeln und in den Verhältnissen der Seiten übereinstimmen**), so sind sie nach unserer Definition ähnlich. Müßten wir immer zusehen, ob alle diese Bedingungen erfüllt sind, so wäre die Prüfung der Aehnlichkeit ungemein schwierig. Es wird sich daher fragen, ob wir nicht schon aus der Gleichheit einiger Winkel und aus den Verhältnissen einiger Seiten die Aehnlichkeit erschließen können. In der That! wir werden **vier** Sätze, die sogenannten **Aehnlichkeitssätze** kennen lernen, vermittelst deren wir die Aehnlichkeit von Dreiecken leicht feststellen können.

§ 73. Hilfssatz. Um uns den Beweis für Aehnlichkeitssätze zu erleichtern, wollen wir einen Hilfssatz bringen. In der Bemerkung zu § 71 haben wir den Satz gefunden:

Wenn in einem Dreieck zur Grundlinie eine Parallele gezogen wird, so sind in dem ganzen Dreieck und in dem kleinen abgeschnittenen Dreieck die Winkel wechselseitig gleich und die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten verhalten sich auf gleiche Weise.

Der Definition der Aehnlichkeit gemäß ist also das große Dreieck dem kleinen ähnlich; wir können mithin den

Hilfssatz aufstellen: *Wenn man in einem Dreieck zur* **Grundlinie** *eine* **Parallele** *zieht, so ist das* **abgeschnittene kleine Dreieck** *dem* **ganzen Dreieck ähnlich.**

Nehmen wir ein Beispiel. In Fig. 4 ist zu EF die Parallele E′F′ gezogen. Dadurch ist von

dem großen Dreieck EFD
das kleine Dreieck E′F′D′

abgeschnitten worden. Nach dem Hilfssatz ist das Dreieck EFD dem Dreieck E′F′D′ ähnlich, in Zeichen, wir haben:

△ EFD ∼ △ E′F′D′,

d. h. es ist:

1) ∠ EDF = ∠ E′DF′
2) ∠ EFD = ∠ E′F′D
3) ∠ FED = ∠ F′E′D
4) EF : E′F′ = DE : DE′ = DF : DF′,

oder in drei Proportionen geschrieben:

EF : E′F′ = DE : DE′
EF : E′F′ = DF : DF′
DE : DE′ = DF : DF′

und wenn die inneren Glieder mit einander vertauscht werden:

EF : DE = E′F′ : DE′
EF : DF = E′F′ : DF′
DE : DF = DE′ : DF′.

In Fig 5 haben wir zu ST die Parallele S′T′ gezogen; vom

großen Dreieck RST

ist dadurch das

kleine Dreieck RS′T′

abgetrennt. Wir haben daher:

△ RST ∼ △ RS′T′.

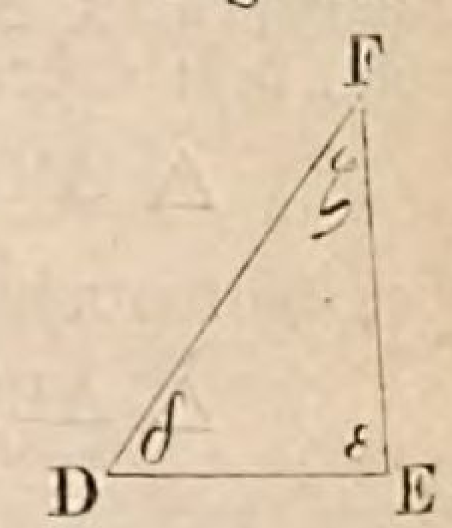
Aufgaben. 1) Zu welchen Winkelgleichungen und zu welchen Proportionen zwischen Dreiecksseiten führt uns die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke RST und RS′T′?

2) In Fig. 6 ist zu AB die Parallele A′B′ gezogen, welche Dreiecke sind daher ähnlich?

§ 74a. Aehnlichkeitssatz I. In Fig. 17 und 18 sehen wir die beiden Dreiecke ABC und DEF; in denselben sei:

1) $\gamma = \zeta$, 2) AC : DF = BC : EF.

Fig. 18.



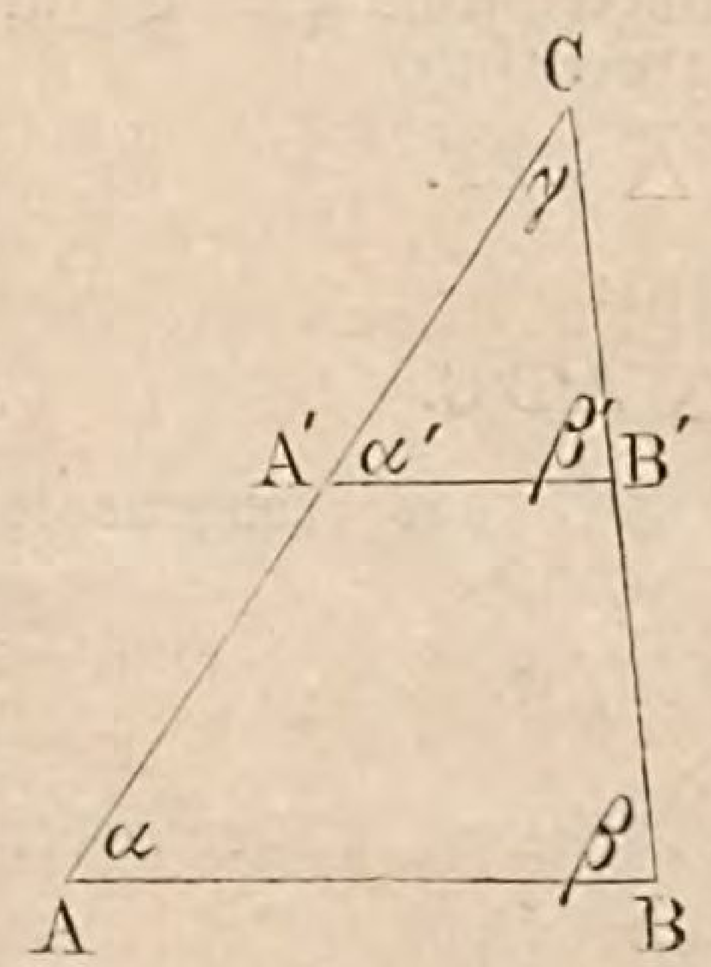


Fig. 17.

Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also in *einem Winkel* und in dem *Verhältnisse der diesen Winkel einschließenden Seiten**)* überein; wir behaupten, daß die bei-

*) entspr. bedeutet entsprechende. **) D. h. wenn die Seiten sich auf gleiche Weise verhalten.

*) Die Seiten AC und BC schließen den Winkel γ, die Seiten DF und EF den Winkel ζ ein. Nun ist $\gamma = \zeta$. Die Proportionen:

AC : DF = BC : EF

den Dreiecke ähnlich sind, in Zeichen, daß wir haben:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

und bringen als ersten Aehnlichkeitssatz den

Lehrsatz III. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen.

Voraussetzung. Wir haben zwei Dreiecke ABC und DEF (siehe Fig. 17 und 18), in denselben ist:

$$1)\ \gamma = \zeta,\quad 2)\ AC : DF = BC : EF.$$

Behauptung. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Um den Beweis zu führen, schneiden wir von C aus auf AC die Strecke $CA' = DF$ ab und ziehen durch A' zu AB die Parallele A'B'. Nach dem Hilfssatz im vorigen Paragraphen ist dann

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

Untersuchen wir, in welcher Beziehung das Dreieck A'B'C zu dem Dreieck DEF steht. Wir haben

a) $\gamma = \zeta$ nach der Voraussetzung,
b) $A'C = DF$ nach der Construction.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und A'B'C folgt ferner, daß

$$AC : A'C = BC : B'C \text{ ist.}$$

Setzen wir für A'C die gleiche Größe DF*) ein, so wird

$$1)\ AC : DF = BC : B'C.$$

Der Voraussetzung gemäß haben wir

$$2)\ AC : DF = BC : EF.$$

Die beiden Proportionen 1 und 2 haben drei gleiche Glieder; es müssen gemäß § 60 auch die vierten Glieder gleich sein, wir haben daher:

$$c)\ B'C = EF,$$

also: a) $\gamma = \zeta$, b) $A'C = DF$, c) $B'C = EF$.

Die Gl. a, b und c zeigen uns, daß die beiden Dreiecke A'B'C und DEF in einem Winkel und den einschließenden Seiten übereinstimmen. Es ist daher nach dem **ersten Congruenzsatz**:

$$\triangle A'B'C \cong \triangle DEF.$$

Oben hatten wir gefunden:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

Setzen wir für $\triangle A'B'C$ das congruente Dreieck DEF**) ein, so ergiebt sich

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ w. b. w.}$$

Bemerkung. Der Voraussetzung gemäß ist

$$1)\ \gamma = \zeta,\quad 2)\ AC : DF = BC : EF.$$

Aehnliche Dreiecke stimmen nun in allen drei Winkeln und in den Verhältnissen aller ihrer Seiten überein; wir haben mithin auch:

$$3)\ \alpha = \delta,\quad 4)\ \beta = \varepsilon,\quad 5)\ AC : DF = AB : DE,$$
$$6)\ BC : EF = AB : DE.$$

§ 74b. Aehnlichkeitssatz II. Wir werden jetzt den zweiten Aehnlichkeitssatz bringen. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (siehe Fig. 17 und 18) sei

$$1)\ \alpha = \delta,\quad 2)\ \gamma = \zeta.$$

Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also in zwei Winkeln überein; wir behaupten, daß sie einander ähnlich sind, in Zeichen, daß wir haben:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

und stellen als zweiten Aehnlichkeitssatz den

Lehrsatz VII auf. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.**

Voraussetzung. Uns sind in Fig. 17 und 18 zwei Dreiecke ABC und DEF gegeben, und zwar ist in denselben:

$$1)\ \alpha = \delta,\quad 2)\ \gamma = \zeta.$$

Behauptung. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Wir schneiden wieder auf AB von C die Strecke $CA' = DF$ ab und legen durch A' zu AB die Parallele A'B'. Nach dem Hilfssatz in § 71 ist dann:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

Untersuchen wir jetzt wie beim Beweise des ersten Aehnlichkeitssatzes, in welcher Beziehung die beiden Dreiecke A'B'C und DEF zu einander stehen! In denselben ist:

a) $A'C = DF$, nach der Construction,
b) $\gamma = \zeta$, nach der Voraussetzung.

Es ist ferner:

$\alpha = \alpha'$ als Gegenwinkel bei den Parallelen AB und A'B' geschnitten von AC, und

$\alpha = \delta$ nach der Voraussetzung.

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten gleich sind, mithin haben wir:

$$c)\ \alpha' = \delta.$$

In den beiden Dreiecken A'B'C und DEF ist mithin:

$$a)\ A'C = DF,\quad b)\ \gamma = \zeta,\quad c)\ \alpha = \delta.$$

---

oder wenn wir die innern Glieder mit einander vertauschen:

$$AC : BC = DF : EF$$

sagen uns also, daß in den beiden Dreiecken ABC und DEF **die Seiten sich auf gleiche Weise verhalten, welche die gleichen Winkel einschließen**, oder kurzer: daß die Dreiecke ABC und DEF **in den Verhältnissen der einschließenden Seiten übereinstimmen**. — *) DF ist nach der Construction gleich A'C. — **) Congruente Dreiecke stimmen, wenn man von der Lage absieht, in jeder Beziehung überein. Sie dürfen daher, soweit nicht ihre Lage in Betracht kommt, mit einander vertauscht werden.

d. h. die beiden Dreiecke A'B'C und DEF stimmen in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln überein, sie sind daher nach dem **dritten Congruenzsatz** mit einander congruent, in Zeichen, wir haben:

$$\triangle A'B'C \cong \triangle DEF.$$

Vorher hatten wir ermittelt, daß das Dreieck ABC dem Dreieck A'B'C ähnlich sei, in Zeichen, daß wir hatten:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

Vertauschen wir in diesem Ausdruck $\triangle A'B'C$ mit dem congruenten $\triangle DEF$, so ergiebt sich:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ w. z. w.}$$

Bemerkung I. Der Voraussetzung gemäß ist in den Dreiecken: ABC und DEF

$$1)\ \alpha = \delta, \quad 2)\ \gamma = \zeta.$$

Weil nun

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

ist, haben wir auch:

$$3)\ \beta = \varepsilon, \quad 4)\ AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Bemerkung II. Nach der Voraussetzung ist in den beiden Dreiecken ABC und DEF

$$1)\ \alpha = \delta,$$
$$2)\ \gamma = \zeta.$$

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, mithin haben wir auch:

$$a)\ \alpha + \gamma = \delta + \zeta.$$

Weil die Winkel in einem Dreieck zusammen zwei Rechte betragen, ist:

$$\alpha + \gamma + \beta = 2R,$$
$$\text{und } \delta + \zeta + \varepsilon = 2R,$$

mithin auch:

$$b)\ \alpha + \gamma + \beta = \delta + \zeta + \varepsilon.$$

Ziehen wir Gl. a von Gl. b ab, so wird

$$c)\ \beta = \varepsilon,$$

also wenn wir voraussetzen, daß in zwei Dreiecken **zwei Winkel wechselseitig gleich** sind, so ist leicht zu zeigen, daß auch **die dritten Winkel gleiche Größe** haben müssen.

Auch ohne große Formeln werden wir einsehen, daß $\beta = \varepsilon$ sein muß, wenn wir bedenken, daß β und ε die gleichen Winkelsummen $\alpha + \gamma$ und $\delta + \zeta$ zu zwei Rechten ergänzen.

Winkel, durch welche gleiche Winkel zu zwei Rechten ergänzt werden, pflegt man **Supplementwinkel** zu nennen. **Supplementwinkel sind einander gleich**, ebenso wie **Complementwinkel**, von denen wir auf Seite 398 gesprochen haben.

Die größten Schwierigkeiten liegen da, wo wir sie nicht suchen.

Lection 51.

A. Der dritte und vierte Aehnlichkeitssatz.

§ 75. Aehnlichkeitssatz III. In Fig. 1 und 2 bemerken wir die beiden Dreiecke ABC und DEF; in denselben möge

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF$$

sein, d. h. **die Seiten** mögen sich in den Dreiecken ABC und DEF **auf gleiche Weise verhalten;** wir behaupten, daß die beiden Dreiecke in diesem Falle ähnlich sind und stellen als dritten Aehnlichkeitssatz den

Lehrsatz I auf. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen aller drei Seiten übereinstimmen.**

Voraussetzung. In den Dreiecken ABC und DEF (siehe Fig. 1 und 2) ist

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Behauptung. $\triangle ABC \sim \triangle DEF.$

Beweis. Um den Beweis zu führen, schneiden wir uns im Dreieck ABC von C aus CA' = DF ab und legen durch A' zu AB eine Parallele. Nach dem Hilfssatz in § 73 ist dann

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

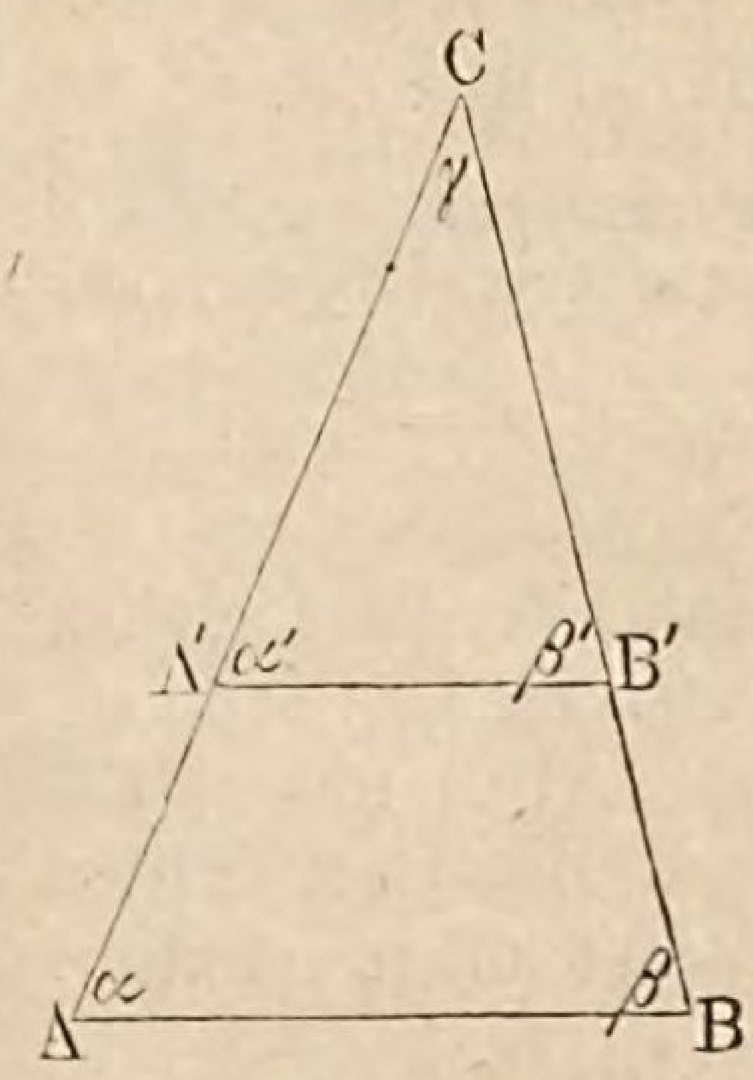


Fig. 1.

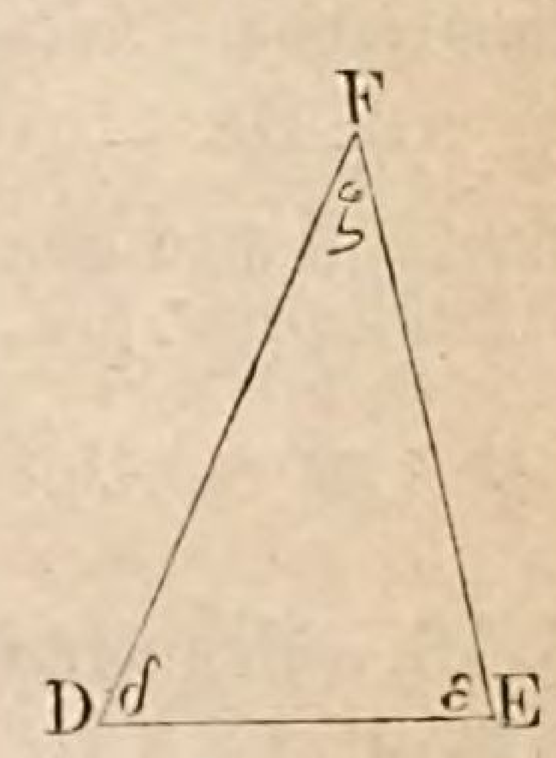


Fig. 2.

Untersuchen wir jetzt ähnlich wie bei den Beweisen für den ersten und zweiten Aehnlichkeitssatz, in welcher Beziehung das Dreieck A'B'C zum Dreieck DEF steht. Nach der Construction ist:

$$a)\ A'C = DF.$$

Nun folgt aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und A'B'C

$$AB : A'B' = AC : A'C$$

und wenn wir für $A'C$ die gleiche Größe DF einsetzen, so wird

$$AB : A'B' = AC : DF.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$AB : DE = AC : DF.$$

Wenn zwei Proportionen in drei Gliedern übereinstimmen, so müssen auch die vierten Glieder gleich sein, daher haben wir auch:

$$\text{b)}\ A'B' = DE.$$

Ferner ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C$ die Proportion:

$$AB : A'B' = BC : B'C,$$

und wenn wir für $A'B'$ die gleiche Größe DE einführen:

$$AB : DE = BC : B'C.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$AB : DE = BC : EF.$$

In zwei Proportionen, welche in drei Gliedern übereinstimmen, sind auch die vierten Glieder gleich, daher muß

$$\text{c)}\ B'C = EF \text{ sein.}$$

Wir haben mithin:

a) $A'C = DF$, b) $A'B' = DE$, c) $B'C = EF$

d. h. in den beiden Dreiecken $A'B'C$ und DEF sind die drei Seiten wechselseitig gleich; nach dem **zweiten Congruenzsatze** ist mithin:

$$\triangle A'B'C \cong \triangle DEF.$$

Nun ist, wie wir bereits bewiesen haben,

$$\triangle A'B'C \sim \triangle ABC,$$

folglich ist auch das dem $\triangle A'B'C$ congruente $\triangle DEF$ dem $\triangle ABC$ ähnlich, in Zeichen, wir haben:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ w. b. w.}$$

Bemerkung. Nach der Voraussetzung ist:

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Weil in ähnlichen Dreiecken auch die Winkel wechselseitig gleich sind, können wir folgern, daß auch:

1) $\alpha = \delta$, 2) $\beta = \varepsilon$, 3) $\gamma = \zeta$ ist.

§ 76. Aehnlichkeitssatz IV. Wir wollen jetzt den vierten Aehnlichkeitssatz bringen. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (siehe Fig. 3 und 4) mögen sich zwei Seiten auf gleiche Weise verhalten; es möge nämlich:

$$AB : DE = AC : DF \text{ sein.}$$

Aus dem Dreieck ABC sind dann die Seiten AB und AC, aus dem Dreieck DEF die Seiten DE und DF in die Proportion eingestellt worden; und zwar möge:

$$AC > AB$$
$$\text{und } DF > DE \text{ sein,}$$

d. h. in dem Dreieck ABC möge AC, in dem Dreieck DEF möge DF die größere Seite sein.

Der Seite AC liegt im Dreieck ABC der Winkel β und der Seite DF im Dreieck DEF der Winkel ε gegenüber. Ist nun noch

$$\beta = \varepsilon,$$

so stimmen die beiden Dreiecke ABC und DEF in dem Verhältnisse zweier Seiten überein, und in dem Winkel, welcher der größern der beiden Seiten gegenüberliegt.

Wir behaupten, daß die beiden Dreiecke ABC und DEF ähnlich sind, und stellen den Lehrsatz II auf. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältniß zweier Seiten übereinstimmen und in dem Winkel, welcher der größern der beiden Seiten gegenüberliegt.**

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei

1) $AB : DE = AC : DF$, 2) $\beta = \varepsilon$,
3) $AC > AB$, 4) $DF > DE$.

Behauptung. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Wir schneiden im Dreieck ABC auf CA von C aus die Strecke $CA' = DF$ ab und ziehen durch A' zu AB die Parallele $A'B'$; nach dem Hilfsatz in § 73 ist dann:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C.$$

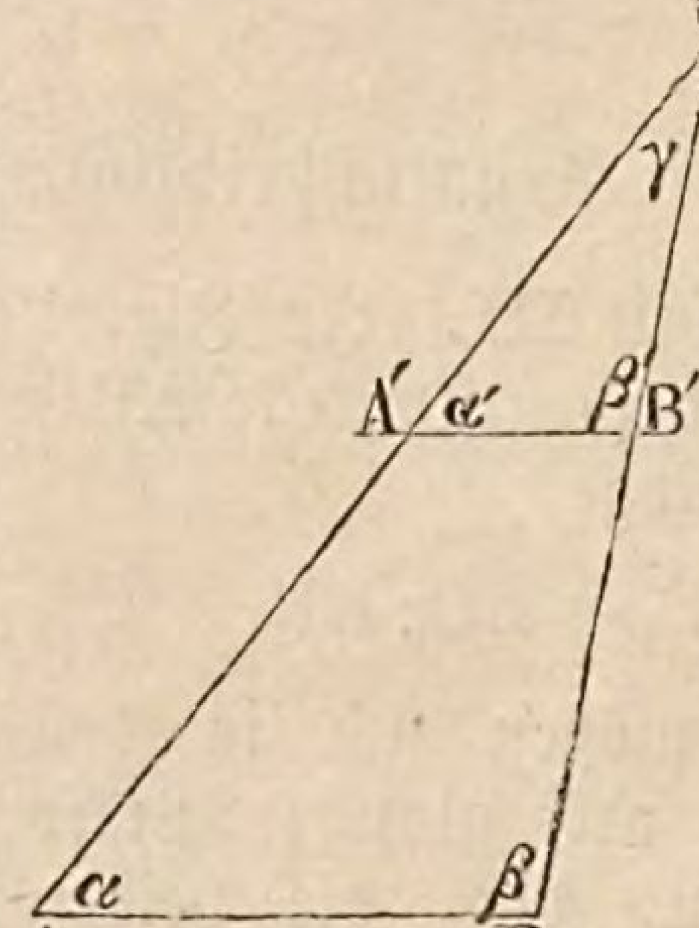


Fig. 3.

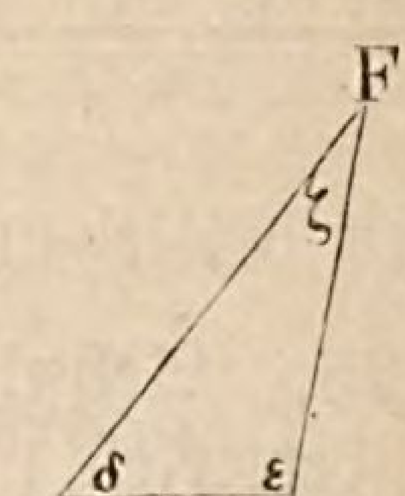


Fig. 4.

Vergleichen wir jetzt das Dreieck $A'B'C$ mit dem Dreieck DEF! Wir haben:

a) $A'C = DF$

nach der Construction.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C$ folgt ferner:

$$AB : A'B' = AC : A'C.$$

Vertauschen wir $A'C$ mit der gleichen Größe DF, so haben wir:

$$AB : A'B' = AC : DF.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$AB : DE = AC : DF.$$

Wenn zwei Proportionen in drei Gliedern

übereinstimmen, so sind auch die vierten Glieder gemäß § 60 gleich, mithin:

b) $A'B' = DE$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und A'B'C ergiebt sich weiter: $\beta = \beta'$.

Nach der Voraussetzung ist:

$\beta = \varepsilon$.

Zwei Größen sind gleich, wenn sie einer dritten Größe gleich sind, daher ist:

c) $\beta' = \varepsilon$.

In den beiden Dreiecken A'B'C und DEF ist also:

a) $A'C = DF$, b) $A'B' = DE$, c) $\beta' = \varepsilon$.

Nach der Voraussetzung ist ferner:

$DF > DE$, daher auch $A'C > A'B'$.

Die Dreiecke A'B'C und DEF stimmen also in zwei Seiten überein und in dem Winkel, welcher der größern der beiden Seiten gegenüberliegt. Nach dem **vierten Congruenzsatze** haben wir deswegen:

$\triangle A'B'C \cong \triangle DEF$.

Wir hatten vorher:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.

Vertauschen wir in der letzten Formel $\triangle A'B'C$ mit dem congruenten $\triangle DEF$, so wird:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$, w. b. w.

§ 77. Die Vergleichung der vier Aehnlichkeitssätze mit den vier Congruenzsätzen. Wenn der Schüler die Beweise, welche von uns für die Aehnlichkeitssätze gegeben wurden, mit einander vergleicht, so wird er in ihnen ein und denselben Grundzug finden. Das größere der beiden Dreiecke, deren Aehnlichkeit bewiesen werden sollte, haben wir in allen vier Fällen mit ABC, das kleinere mit DEF bezeichnet; in dem größern Dreieck haben wir sodann zur Grundlinie AB eine Parallele A'B' gelegt und dadurch ein kleines dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck A'B'C abgeschnitten, von dem wir nachwiesen, daß es dem Dreieck DEF **congruent** sei. Beim Nachweis dieser Congruenz stützten wir uns in jedem der vier Beweise auf einen andern Congruenzsatz. Beim Beweise des

ersten Aehnlichkeitssatzes

fanden wir, daß Dreieck ABC nach dem

ersten Congruenzsatze

dem Dreieck A'B'C ähnlich sei; wir brachten dagegen beim Beweise des

zweiten Aehnlichkeitss. den dritten Congruenzs.,

beim Beweise des

dritten Aehnlichkeitss. den zweiten Congruenzs.,

beim Beweise des

vierten Aehnlichkeitss. den vierten Congruenzs.

in Anwendung. Jeder Aehnlichkeitssatz gründet sich demnach auf einen Congruenzsatz, mit dem er auch dem Wortlaut nach in vieler Beziehung übereinstimmt. Um die gleichen und verschiedenen Punkte möglichst hervorzuheben, wollen wir jedem Aehnlichkeitssatz den ihm entsprechenden Congruenzsatz gegenüberstellen. Wir erhalten dann:

Aehnlichkeitssätze.	**Congruenzsätze.**
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie in **einem Winkel** und dem **Verhältniß der einschließenden Seiten** übereinstimmen.	Zwei Dreiecke sind **congruent**, wenn sie in **einem Winkel** und in **den einschließenden Seiten** übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie in **zwei Winkeln** übereinstimmen.	Zwei Dreiecke sind **congruent**, wenn sie in einer **Seite** und **zwei** gleichliegenden **Winkeln** übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie in **den Verhältnissen aller drei Seiten** übereinstimmen.	Zwei Dreiecke sind **congruent**, wenn sie in **allen drei Seiten** übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie in **dem Verhältnisse zweier Seiten** übereinstimmen und in **dem Winkel, welcher der größern der beiden Seiten gegenüberliegt.**	Zwei Dreiecke sind **congruent**, wenn sie in **zwei Seiten** übereinstimmen und in **dem Winkel, welcher der größern der beiden Seiten gegenüberliegt.**

Bemerkung. Wenn wir den dritten Aehnlichkeitssatz als zweiten, und den zweiten Aehnlichkeitssatz als dritten gebracht hätten, so würde die Analogie zwischen den Aehnlichkeits- und Congruenzsätzen noch schärfer hervortreten. Es würde dann dem

1sten, 2ten, 3ten, 4ten Aehnlichkeitssatz
der 1ste, 2te, 3te, 4te Congruenzsatz

entsprechen. Aus methodischen Gründen mußten wir aber der von uns gewählten Reihenfolge der Aehnlichkeitssätze den Vorzug geben.

Aufgaben. Bei unseren Beweisen für die Aehnlichkeitssätze haben wir von dem großen Dreieck ABC immer ein dem Dreieck DEF congruentes Dreieck A′B′C abgeschnitten, oder anders gesagt, die Seiten AC und BC des Dreiecks ABC soweit **verkürzt**, bis das Dreieck DEF daraus wurde. Wir können ebenso auch die Seiten FD und FE des kleinen Dreiecks DEF soweit **verlängern**, bis wir ein Dreieck DE′F′ erhalten, das dem Dreieck ABC congruent ist. Der Schüler möge den Beweis für den ersten Aehnlichkeitssatz in der angedeuteten Weise liefern.

§ 78. **Allgemeine Bemerkungen zu den Aehnlichkeitssätzen.** 1) Aehnliche Dreiecke stimmen in **den Verhältnissen ihrer Seiten** überein. Statt dessen können wir auch sagen:

Bei ähnlichen Dreiecken sind **die Verhältnisse der Seiten gleich**,

oder auch:

Bei ähnlichen Dreiecken **verhalten sich die Seiten auf gleiche Weise**,

oder auch:

Bei ähnlichen Dreiecken **verhalten sich die Seiten des einen Dreiecks gerade so wie die Seiten des andern Dreiecks**,

oder auch:

Bei ähnlichen Dreiecken sind die **Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern Dreiecks proportional** (proportionirt),

oder auch:

Die Seiten ähnlicher Dreieck **sind proportional** (proportionirt),

oder auch:

Die Seiten ähnlicher Dreiecke **stehen in Proportion.**

2) Wir wollen noch einmal auf die Art und Weise zurückkommen, in der wir die **Proportionen zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke aufzustellen haben**, und dabei zugleich auf eine Proportionsform eingehen, die sich in mathematischen Lehrbüchern findet, aber von uns nur kurz erwähnt werden soll. Wie wir auf S. 439 bemerkten, können wir Proportionen zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke bilden,

1) indem wir von **einem** der beiden **ähnlichen** Dreiecke bei jedem neuen Proportionsgliede zum **andern** Dreiecke **überspringen.**

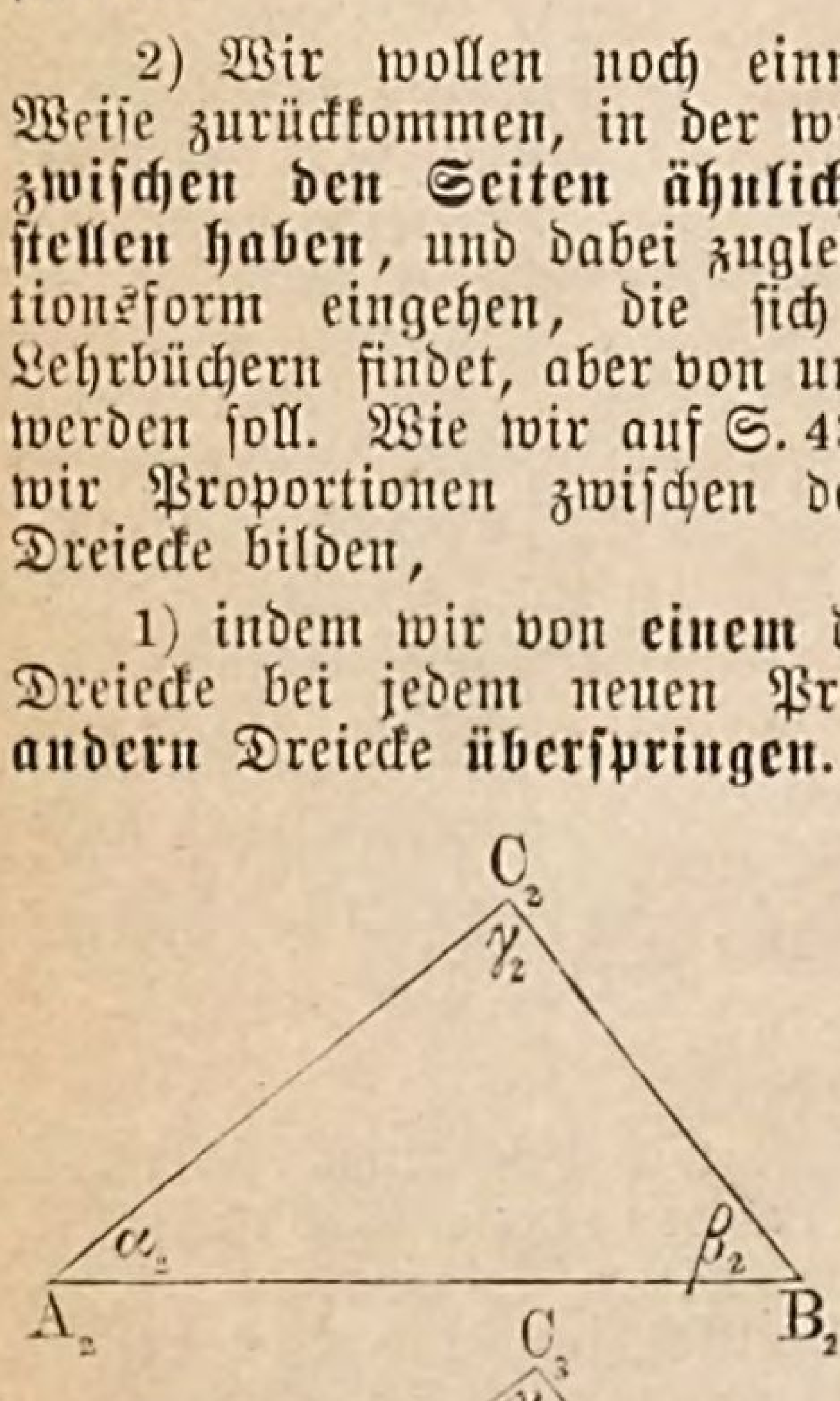


Fig. 5.

2) indem wir zu den **beiden ersten Proportionsgliedern zwei Seiten** des **einen** Dreiecks, und **zu den beiden letzten Proportionsgliedern die beiden entsprechenden Seiten** des **ähnlichen** Dreiecks machen.

Wenn wir den **ersten Weg einschlagen**, d. h. von einem der ähnlichen Dreiecke zum andern überspringen, **erhalten wir** bei den beiden ähnlichen Dreiecken $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ (siehe Fig. 5) die Proportionen:

$$\begin{aligned} 1)\ A_2B_2 : A_3B_3 &= A_2C_2 : A_3C_3, \\ 2)\ A_2C_2 : A_3C_3 &= B_2C_2 : B_3C_3, \\ 3)\ B_2C_2 : B_3C_3 &= A_2B_2 : A_3B_3. \end{aligned}$$

Diese drei Proportionen können wir in die Doppelgleichung:

$$A_2B_2 : A_3B_3 = A_2C_2 : A_3C_3 = B_2C_2 : B_3C_3$$

vereinigen, aus der sich ohne sonderliche Mühe jede der drei obigen Proportionen herauslesen läßt.

Wenn wir dagegen den **zweiten Weg wählen**, so können wir die drei Proportionen aufstellen:

$$\begin{aligned} a)\ A_2B_2 : A_2C_2 &= A_3B_3 : A_3C_3, \\ b)\ A_2C_2 : B_2C_2 &= A_3B_3 : B_3C_3, \\ c)\ A_2B_2 : B_2C_2 &= A_3B_3 : B_3C_3. \end{aligned}$$

Diese drei Proportionen **lassen sich nicht in eine Doppelproportion vereinigen**; um nun doch eine einheitliche Formel dafür zu finden, schreibt man:

$$A_2B_2 : A_2C_2 : B_2C_2 = A_3B_3 : A_3C_3 : B_3C_3,$$

in Worten:

A_2B_2 **verhält sich zu** A_2C_2 **zu** B_2C_2
wie A_3B_3 sich **zu** A_3B_3 **zu** B_3C_3
verhält.

Diese Formel hat auf den ersten Blick viel Bestechendes. Wir finden auf der linken Gleichungsseite alle Seiten des Dreiecks $A_2B_2C_2$ und auf der rechten Gleichungsseite alle Seiten des Dreiecks $A_3B_3C_3$. Wir können ferner die oben genannten Proportionen a, b und c aus unserer Formel leicht herleiten. Wir erhalten z. B. die Proportion a, wenn wir in unserer Formel auf der linken und rechten Seite das dritte Glied (B_2C_2 und B_3C_3) fortlassen; die Proportion b ergiebt sich, wenn auf der rechten und linken Seite der Formel das erste Glied gestrichen wird u. s. f. Trotzdem können wir **von der Proportion**

$$A_2B_2 : A_2C_2 : B_2C_2 = A_3B_3 : A_3C_3 : B_3C_3$$

keinen Gebrauch machen, weil sie leicht zu **falschen Schlüssen** führen kann und aus diesem Grunde **unrichtig** genannt werden muß. So ist z. B. B_2C_2, wie der erste Blick auf Fig. 5 zeigt, größer als B_3C_3, und doch kann mit Hilfe der Formel

$$A_2B_2 : A_2C_2 : B_2C_2 = A_3B_3 : A_3C_3 : B_3C_2$$

gezeigt werden, daß $B_3C_3 = B_2C_2$ ist.

Setzen wir nämlich in unserer Formel für $A_2B_2 : A_2C_2$ gemäß Proport. a die gleiche Größe $A_3B_3 : A_3C_3$ ein, so wird:

$$A_3B_3 : A_3C_3 : B_2C_2 = A_3B_3 : A_3C_3 : B_3C_3.$$

Wenn wir nun in der letzten Formel auf jeder Seite für das erste Divisionszeichen einen Bruchstrich einführen, so ergiebt sich:

$$\frac{A_3B_3}{A_3C_3} : B_2C_2 = \frac{A_3B_3}{A_3C_3} : B_3C_3.$$

Brüche kann man dividiren, indem man den Nenner multiplicirt, demnach können wir für die obige Gleichung setzen:

$$\frac{A_3B_3}{A_3C_3 \,.\, B_2C_2} = \frac{A_3B_3}{A_3C_3 \,.\, B_3C_3},$$

d. i. $$\frac{A_3B_3}{A_3C_3} \cdot \frac{1}{B_2C_2} = \frac{A_3B_3}{A_3C_3} \cdot \frac{1}{B_3C_3}.$$

Dividiren wir jede Seite der Gleichung durch $\frac{A_3B_3}{A_3C_3}$, so wird:

$$\frac{1}{B_2C_2} = \frac{1}{B_3C_3}.$$

Werden beide Seiten der Gl. mit $B_2C_2 \,.\, B_3C_3$ multiplicirt, so ergiebt sich:

$B_3C_3 = B_2C_2$, d. i. ein falsches Resultat.

§ 79. Die Wörter „verhalten sich wie". Es wird dem Schüler erwünscht sein, wenn wir die **Bedeutung der Wörter: „verhalten sich wie"**, denen wir bei der Lehre von den Proportionen so häufig begegnet sind, noch einmal eingehend besprechen.

Sagen wir:

a **verhält sich zu** a' **wie** b **zu** b',

so können wir gemäß § 50 darunter den **in der Mathematik festgestellten** sprachlichen Ausdruck für die Formel:

$$a : a' = b : b'$$

verstehen. Die Wörter „verhält sich wie" sind aber auch zweitens in der Sprache mit einem bestimmten Sinn verbunden, der **unbekümmert um die Feststellungen der Mathematik** besteht. Wenn man sagt:

a **verhält sich zu** a' **wie** b **zu** b',

so meint man gewöhnlich damit:

wenn a 5=mal, 7=mal, $\frac{1}{2}$=mal, m=mal

so groß ist wie a', so ist auch:

b 5=mal, 7=mal, $\frac{1}{2}$=mal, m=mal

so groß wie b'.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß sich die **mathematische Bedeutung mit dem gewöhnlichen Sinn der Worte: „verhält sich wie" vollkommen verträgt,** daß also wenn

a 5=mal, 7=mal, $\frac{1}{2}$=mal, m=mal

so groß ist wie a', und

b 5=mal, 7=mal, $\frac{1}{2}$=mal, m=mal

wie b', die Proportion:

$$a : a' = b : b'$$

besteht.

Beweisen wir dies an einem bestimmten Falle. Es sei a m=mal so groß wie a', b m=mal so groß wie b', dann ist:

$$a = ma', \quad b = mb',$$

mithin nach dem Grundsatze: Gleiches dividirt durch Gleiches giebt Gleiches:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma'}{mb'}.$$

Wird der Bruch auf der letzten Seite durch m gehoben, so ergiebt sich:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

oder bei Vertauschung der innern Glieder:

$$a : a' = b : b'.$$

Wissen wir demnach, daß c x=mal so groß wie d und e x=mal so groß wie f ist, so können wir nicht blos dem sprachlichen Sinne sondern auch der mathematischen Bedeutung gemäß sagen:

c **verhält sich zu** d **wie** e **zu** f

und die Proportion aufstellen:

$$c : d = e : f;$$

und umgekehrt: wenn wir die Proportion:

$$c : d = e : f$$

haben und wir wissen, daß c x=mal so groß wie d ist, so können wir auch schließen, daß auch e x=mal so groß wie f ist, indem wir ganz dem sprachlichen Sinn folgen, der in den Worten:

c **verhält sich zu** d **wie** e **zu** f

liegt.

B. Aufgaben zur Lehre von den proportionalen Abschnitten zwischen Parallelen und zur Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 80. Schon auf Seite 421 haben wir uns mit der Aufgabe beschäftigt, das **vierte Glied** einer Proportion zu finden, wenn uns **die drei andern gegeben** sind. Die Lösung, welche wir dort gebracht haben, war eine rein **arithmetische. Die drei gegebenen Proportionsglieder** waren **Zahlen**, auch das **vierte** gesuchte **Glied** mußte sich daher als **Zahl** ergeben. Wenn nun die **drei gegebenen Glieder** nicht Zahlen, sondern gerade Linien von bestimmter Länge d. i. **Strecken** sind, so müssen wir, um die auf Seite 421 gegebene Lösung zu verwenden, für die Strecken ihre Maßzahlen

einführen. Wir werden uns aber fragen müssen, ob wir nicht in diesem Falle auf dem **Wege der geometrischen Construction** zu einer Strecke gelangen können, **welche zu den drei gegebenen Strecken in Proportion steht.**

In der That! Die Sätze, welche wir in Abschnitt C der fünfzigsten Lection behandelt haben, setzen uns in den Stand, auf mehrfache Weise eine **geometrische Lösung** zu liefern von der

Aufgabe I. Es soll eine Strecke x gefunden werden, welche das **vierte Glied** einer Proportion bildet, **deren erste drei Glieder der Reihe nach die Strecken** a, b **und** c **sind.**

Voraussetzung. Uns sind drei Strecken a, b und c gegeben (siehe Fig. 6).

Forderung. Wir sollen eine Strecke x finden, derart, daß

$$a : b = c : x \text{ ist.}$$

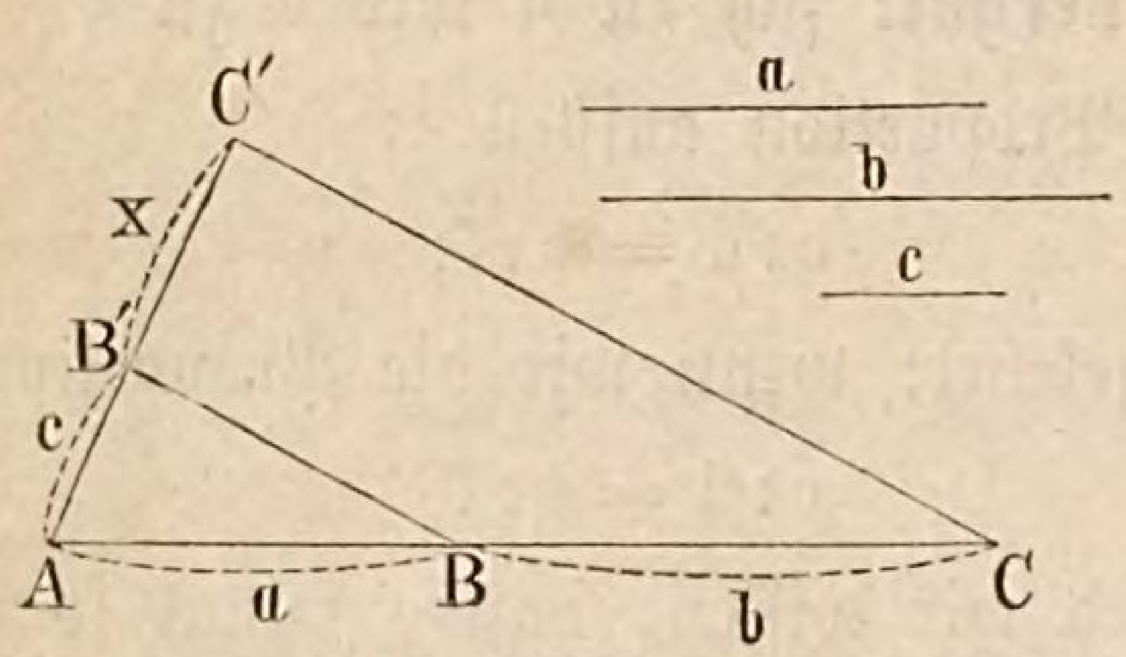


Fig. 6.

Construction I. Wir legen uns eine Strecke AB = a hin, verlängern AB über B hinaus um BC = b und tragen unter einem beliebigen Winkel im Punkte A die Strecke AB' = c an. Darauf ziehen wir die Gerade BB', legen durch C zu BB' eine Parallele, welche die Verlängerung von AB' im Punkte C' schneiden möge, und bezeichnen B'C' mit x.

Behauptung. Es ist: a : b = c : x.

Beweis. Wenn zwei gerade Linien von mehreren Parallelen geschnitten werden, so verhalten sich gemäß Lehrsatz I Seite 428 die Abschnitte auf der einen Geraden so wie die entsprechenden Abschnitte auf der andern Geraden; und zwar dürfen wir gemäß § 68 Bemerk. 2 den Durchschnittspunkt der von den Parallelen geschnittenen Geraden als unendlich kleine Parallele auffassen. Demnach ist:

$$a : b = c : x, \text{ w. b. w.}$$

Construction II. Anstatt die Gerade BC = b und AB' = c zu machen, können wir auch BC und AB' so zeichnen, daß BC = c und AB' = b wird (siehe Fig. 7). Wir dürfen dann auch

behaupten, daß die Proportion:

$$a : b = c : x$$

besteht.

Der **Beweis** ist gerade so zu führen, wie bei Construction I. Wir haben nur noch zu berücksichtigen, daß wir gemäß § 68 Bem. 1 die Proportion zwischen den von den Parallelen geschnittenen Geraden auch aufstellen können, indem wir von einer Geraden bei jedem neuen Gliede zur andern überspringen.

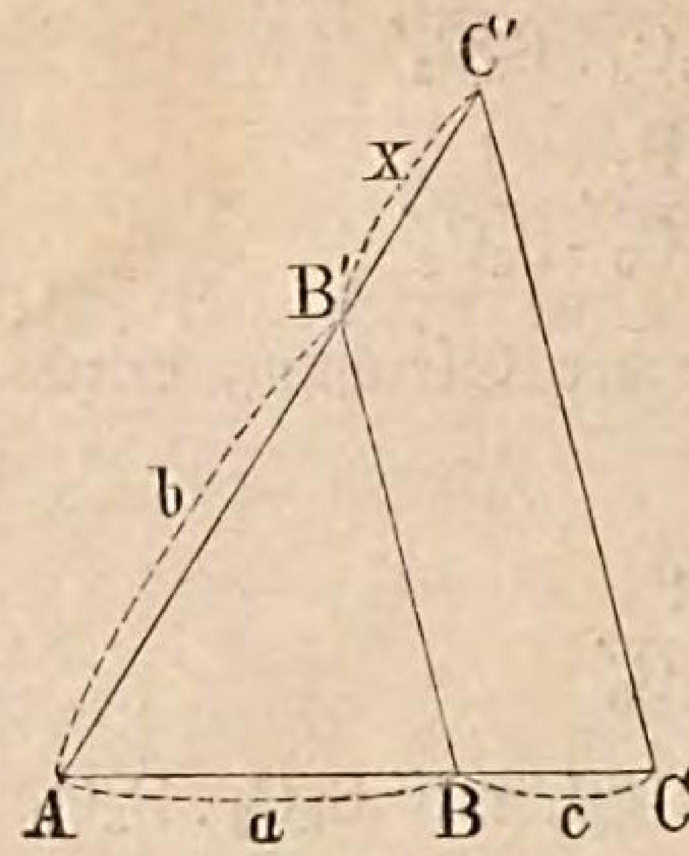


Fig. 7.

Bemerkung. Wir könnten den Beweis auch auf den Lehrs. II in § 69 gründen; und zwar ist CC' als Grundlinie des Dreiecks ACC' anzusehen, und BB' als Parallele zu derselben. AB = a und AB' = b sind dann die obern, BC = c und B'C' = x die untern Abschnitte der Seiten AC und AC'.

Construction III. Wir legen uns AC = a hin (siehe Fig.*) 8), schneiden von A aus auf AC die Strecke AB = b ab, tragen im Punkte A unter irgend einem Winkel die Strecke AC' = c an,

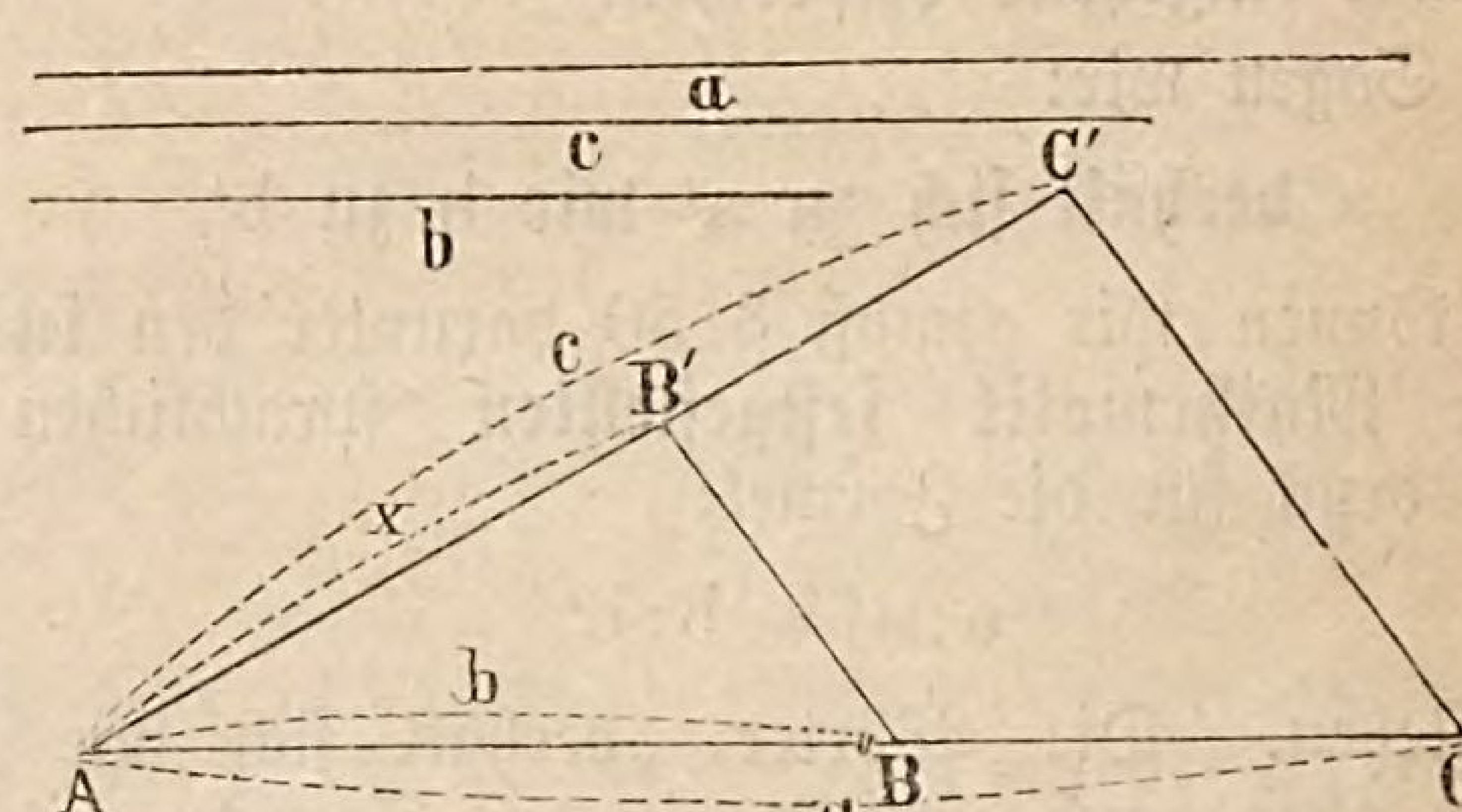


Fig. 8.

ziehen dann die Gerade CC', und legen durch B zu CC' die Parallele BB'. Wird nun die Strecke AB' mit x bezeichnet, so

behaupten wir, daß die Proportion besteht:

$$a : b = c : x.$$

Beweis. Betrachten wir in dem Dreieck ACC' die Seite CC' als Grundlinie, so ist BB' die Parallele zu derselben, AC = a, AC' = c sind die ganzen Seiten und AB = b, AB' = x sind die obern Abschnitte. Weil sich nun gemäß Lehrs. III Seite 432 die ganzen Seiten wie die obern Abschnitte verhalten, haben wir:

$$a : c = b : x \text{ oder } a : b = c : x, \text{ w. b. w.}$$

Aufgaben I. Wenn man in einem Dreieck zur Grundlinie eine Parallele zieht, so verhalten sich die ganzen Seiten auch wie die untern Abschnitte (siehe Lehrs. III, Seite 432). Der Schüler möge auf diesen Satz eine Construction gründen.

Construction IV. Wir legen uns AB = a hin (siehe Fig. 9) und schneiden auf AB von A aus die Strecke AB' = b ab. Darauf tragen wir in B unter irgend einem Winkel die Gerade BC = c

*) Der Zeichnung wegen haben wir wie auch in Fig. 9 für die gegebenen Strecken a, b, c eine andere Größe gewählt.

an, ziehen AC und legen durch B′ zu BC eine Parallele, welche AC in C′ treffen möge. Wird nun die Strecke B′C′ mit x benannt, so

behaupten wir, daß $a:b = c:x$ ist.

Beweis. Wenn wir in dem Dreieck ABC die Gerade BC als Grundlinie betrachten, so ist B′C′ die Parallele zu derselben. Ferner ist AB eine ganze Seite des Dreiecks ABC und AB′ ihr oberer Abschnitt. Nun verhält sich gemäß Lehrs. I auf Seite 435 die ganze Seite zu ihrem obern Abschnitt wie die Grundlinie zu ihrer Parallelen. Mithin besteht die Proportion:

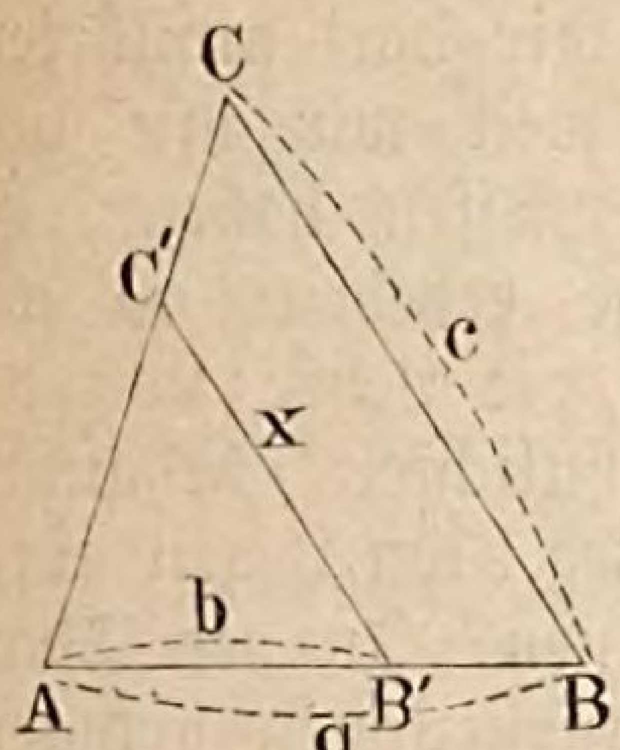


Fig. 9.

$$AB : AB' = BC : B'C',$$

oder wenn wir kleine Buchstaben setzen:

$$a : b = c : x, \text{ w. b. w.}$$

Bemerkung I. Die Aufgabe, welche wir soeben behandelt haben, stellt man gewöhnlich in der Fassung: Zu drei gegebenen Strecken soll die **vierte Proportionale** gefunden werden.

Bemerkung II. Bildet die gesuchte Strecke nicht das vierte, sondern das erste, zweite oder dritte Glied einer Proportion, so kann durch zweckmäßige Vertauschung der Proportionsglieder leicht bewirkt werden, daß die gesuchte Strecke viertes Glied wird.

Wissen wir z. B., daß zwischen der gesuchten Strecke x und den gegebenen Strecken a, b, c die Proportion

$$x : a = b : c$$

besteht, so werden wir die äußern Glieder vertauschen und erhalten

$$c : a = a : x.$$

Haben wir diese Proportion, so können wir auf einem der angegebenen Wege x durch geometrische Construction ermitteln.

Aufgaben II. Wie haben wir zu verfahren, um in den Proportionen

$$a : x = b : c, \quad a : b = x : d$$

x zum vierten Gliede zu machen?

§ 81. Theilung einer Geraden nach festgesetzten Verhältnissen. Wir kommen jetzt zu der

Aufgabe II. **Eine Strecke** soll in **zwei Theile** zerlegt werden, welche sich wie **zwei gegebene Strecken** m und n **verhalten.**

Voraussetzung. Uns sind drei Strecken: AB, m und n gegeben (Fig. 10).

Forderung. AB soll in AC und CB so getheilt werden, daß die Proportion besteht:

$$AC : CB = m : n.$$

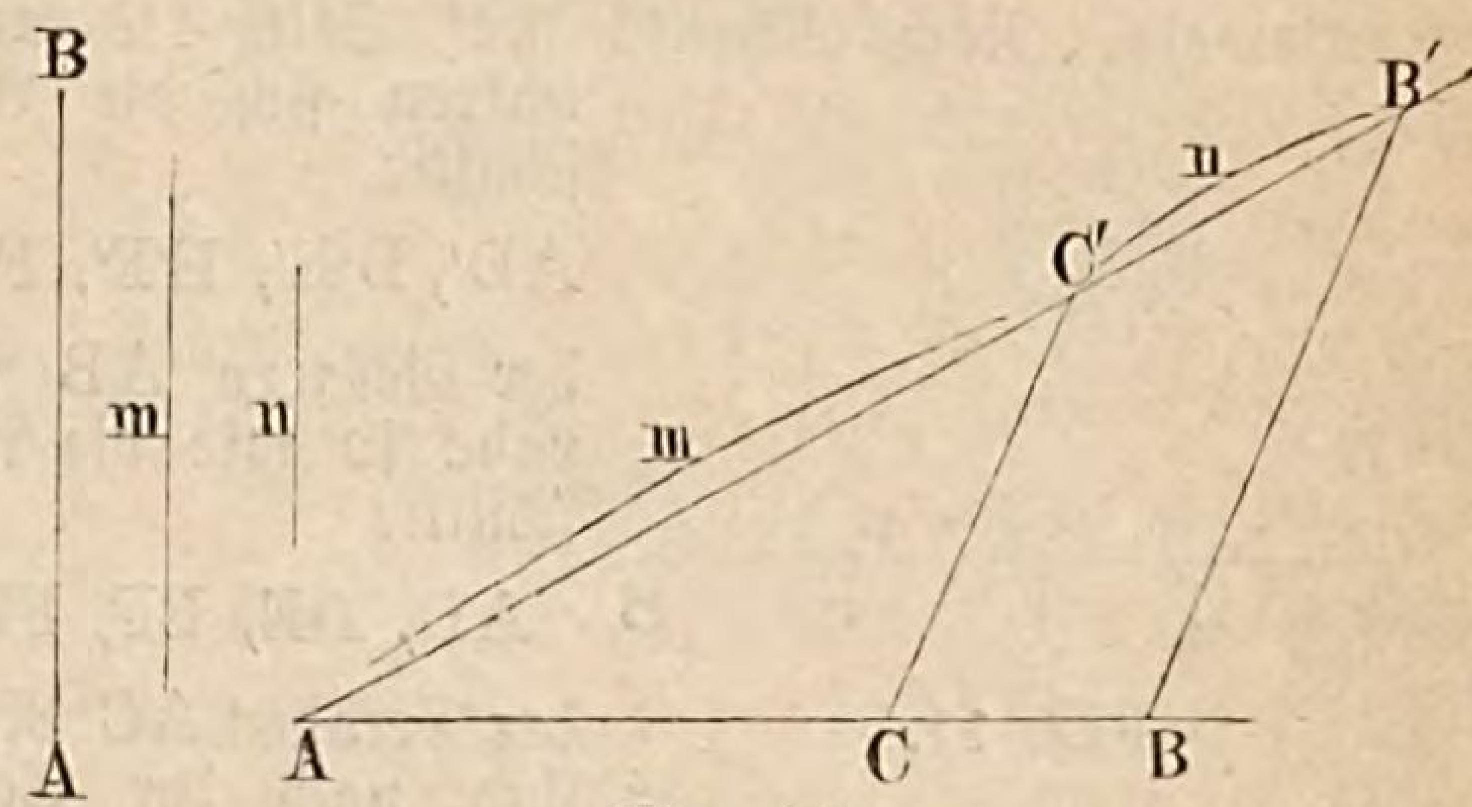


Fig. 10.

Construction. Wir legen uns die gegebene Strecke AB hin, tragen im Punkte A unter einem beliebigen Winkel die Strecke AC′ = m an und verlängern AC′ über C′ hinaus um C′B′ = n. Darauf ziehen wir die Gerade BB′ und legen durch C′ zu BB′ eine Parallele, welche AB in C treffen möge.

Behauptung. $AC : CB = m : n$.

Beweis. Gemäß Lehrs. I Seite 428 verhalten sich die zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte auf der Geraden AB wie die entsprechenden Abschnitte auf der Geraden AB′, demnach ist:

$$AC : CB = AC' : C'B',$$

oder wenn wir für AC′ und B′C′ die kleinen Buchstaben m und n einführen

$$AC : CB = m : n, \text{ w. b. w.}$$

§ 82. Ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen können wir verfahren, um eine Lösung zu geben von der

Aufgabe III. Eine gegebene Strecke soll in eine **bestimmte Anzahl gleicher Theile zerlegt** werden.

Um die Lösung faßlicher zu machen, wollen wir einen speciellen Fall behandeln, nämlich die gegebene Strecke in **vier** gleiche Theile zerlegen.

Voraussetzung. Uns ist eine Strecke AB gegeben (siehe Fig. 11).

Forderung. Die Strecke AB soll in AD′, D′E′, E′F′, F′B derart getheilt werden, daß

$$AD' = D'E' = E'F' = F'B \text{ ist.}$$

Construction. Wir legen uns die gegebene Strecke AB hin, tragen unter irgend einem Winkel im Punkte A eine beliebige Strecke AD an, und verlängern dann AD um sich selbst bis E, darauf DE um EF und EF um FC so, daß auch EF = AD und FC = AD wird. Hierauf ziehen wir die Gerade BC und legen durch D, E und F zu BC Parallelen, welche AB in den Punkten D′, E′ und F′ schneiden.

Behauptung. Wir haben:

$$AD' = D'E' = E'F' = F'B,$$

oder anders gesagt:

die Strecke AB ist in die vier gleichen Theile AD', D'E', E'F', F'B zerlegt.

Beweis. Nach Lehrs. I auf Seite 428 **verhalten sich** die Abschnitte

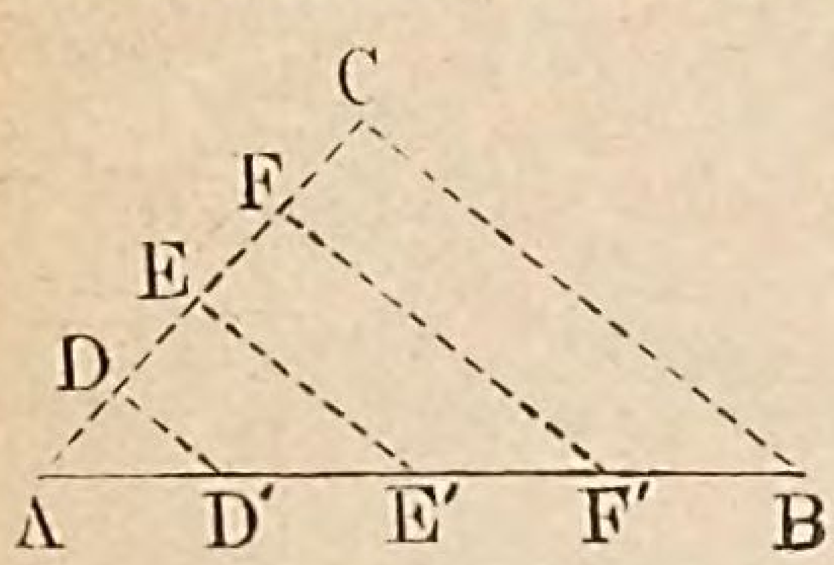


Fig. 11.

AD', D'E', E'F', F'B

der Geraden AB **gerade so wie** die Abschnitte

AD, DE, EF, FB

der Geraden AC. Nun sind nach der Construction die Abschnitte

AD, DE, EF und FC

einander **gleich**, folglich müssen auch die Abschnitte

AD', D'E', E'F' und F'B

einander **gleich** sein, in Zeichen: wir müssen haben:

$$AD' = D'E' = E'F' = F'B, \text{ w. b. w.}$$

Zu unseren Schlüssen sind wir gelangt, indem wir uns auf den gewöhnlichen Sinn der Worte **„verhält sich wie"** stützten. Gemäß § 79 sind wir dazu berechtigt; führen wir aber auch noch einen **streng mathematischen Beweis**! Weil die Abschnitte zwischen den Parallelen sich auf gleiche Weise verhalten, haben wir:

$$AD' : D'E' = AD : DE,$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{AD'}{D'E'} = \frac{AD}{DE}.$$

Nach der Construction ist AD = DE. Aus S. 289 ist uns bekannt, daß ein Bruch, in welchem der Zähler dem Nenner gleich ist, den Werth 1 hat; daher ist:

$$\frac{AD}{DE} = 1; \text{ folglich auch: } \frac{AD'}{D'E'} = 1.$$

Multipliciren wir beide Seiten der letzten Gleichung mit D'E', so wird

$$\frac{AD' . D'E'}{D'E'} = D'E',$$

d. i. $AD' = D'E'$.

Wir wissen jetzt, daß die beiden benachbarten Stücke AD' und D'E' gleiche Größe haben. Ganz ähnlich können wir auch zeigen, daß

$$D'E' = E'F' \text{ und } E'F' = F'B \text{ ist,}$$

daß wir demnach haben:

$$AD' = D'E' = E'F' = F'B, \text{ w. b. w.}$$

Aufgaben. Wie muß die Construction abgeändert werden, wenn AB nicht in 4, sondern in 3, 5, 7 gleiche Theile zerlegt werden soll?

§ 83. Die Construction einer Parallelen. Sehr häufig mußten wir, um eine Constructionsaufgabe zu lösen, oder um einen Lehrsatz zu beweisen, durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen geraden Linie ziehen. Wie wir dabei verfahren können, ist von uns schon im vierten Briefe (siehe § 61) gegeben worden. Die Construction, welche wir dort anführten, ist aber sehr langwierig, weil wir mit dem Transporteur Winkel zu messen haben. Es wird sich darum die Frage erheben, ob wir nicht jetzt, nachdem wir die Lehre von der Congruenz und der Aehnlichkeit behandelt haben, einen einfachern Weg beim Legen einer Parallelen einschlagen können? In der That! wir können jetzt zwei Constructionen bringen, welche nicht mit besonderen Schwierigkeiten verbunden sind.

Aufgabe IV. Durch einen **gegebenen Punkt** soll zu einer **gegebenen geraden Linie** eine **Parallele** gelegt werden.

Voraussetzung. Uns ist eine gerade Linie AB und außerhalb derselben ein Punkt P (siehe Fig. 12) gegeben.

Forderung. Durch den Punkt P soll zu AB eine Parallele gelegt werden.

Construction. Wir ziehen von P nach einem beliebigen Punkte C der Geraden AB die Linie PC, verlängern PC über C hinaus um sich selbst bis D, verbinden dann D mit einem beliebigen Punkte E der Geraden AB und verlängern DE über E hinaus um sich selbst bis S. Darauf ziehen wir die Gerade PS und

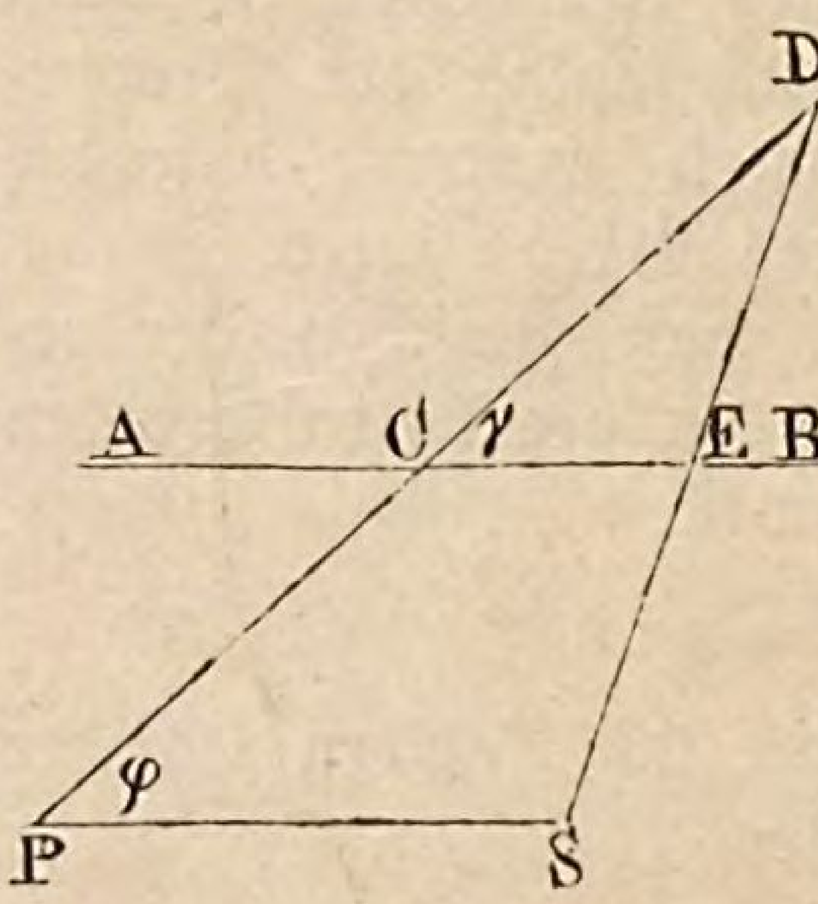


Fig. 12.

behaupten, daß PS parallel zu AB läuft, in Zeichen, daß wir haben:

$$PS \parallel AB.$$

Beweis. Der Construction gemäß haben wir:

$$PC = CD \text{ und } SE = ED,$$

mithin ist:

PD **doppelt so groß wie** CD
und SD **doppelt so groß wie** DE.

PD **verhält sich** also zu CD gerade so **wie** SD **zu** ED, in Zeichen, es besteht die Proportion:

$$PD : CD = SD : ED.$$

Bedenken wir ferner, daß

$$\angle PDS = \angle CDE$$

ist, so finden wir, daß das

große Dreieck PDS
und das kleine Dreieck CDE

in einem Winkel und dem Verhältniß der einschließen-

den Seiten übereinstimmen. Nach dem ersten Aehnlichkeitssatz ist mithin:

$$PDS \sim CDE.$$

In ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Winkel gleich groß; mithin haben wir:

$$\varphi = \gamma.$$

φ und γ sind Gegenwinkel bei den Geraden SP und CE geschnitten von PD. Wenn zwei gerade Linien so geschnitten werden, daß zwei Gegenwinkel gleich sind, müssen sie gemäß § 57 parallel sein.

Mithin ist: PD ∥ AB, w. b. w.

Construction II. Wir verbinden den Punkt P mit einem beliebigen Punkte C von AB durch eine gerade Linie (siehe Figur 13) und halbiren CP. Den Mittelpunkt von CP wollen wir mit M bezeichnen. Darauf verbinden wir M mit einem zweiten beliebig gewählten Punkt D von AB, ziehen MD und verlängern MD über M hinaus um sich selbst bis S. Wird dann die Gerade PS gezogen, so

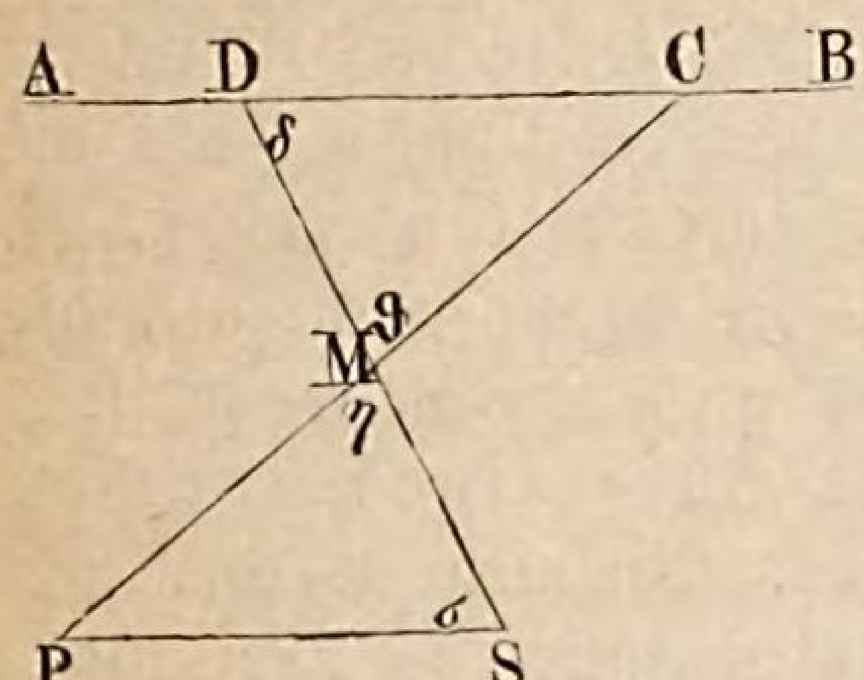


Fig. 13.

behaupten wir, daß PS ∥ AB sei.

Beweis. Der Construction gemäß ist:

a) PM = MC,
b) SM = MD.

Ferner haben wir:

$\eta = \vartheta$, als Scheitelwinkel.

Die beiden Dreiecke PSM und CDM stimmen mithin in einem Winkel und in der Länge der einschließenden Seiten überein. Wir haben daher nach dem ersten Congruenzsatze:

$$\triangle PSM \cong \triangle CDM.$$

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Wie wir wissen, ist:

PM = MC,
mithin auch: $\sigma = \delta$.

σ und δ sind zwei Wechselwinkel bei den Geraden PS und AB, geschnitten von SD. Nun ist uns aus § 57 bekannt, daß zwei gerade Linien parallel sind, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, daß zwei Wechselwinkel gleiche Größe haben, daher ist:

PS ∥ AB, w. b. w.

Bemerkung. Die zweite Construction ist scheinbar einfacher als die erste. Sie setzt aber voraus, daß wir die Strecke CP halbiren, und daß die Halbirung einer gegebenen Strecke nicht ohne eine langwierige Construction ausgeführt werden kann, ist uns aus § 97 Seite 107 bekannt.

§ 84. Wir kommen jetzt zu der

Aufgabe V. Es soll ein Dreieck construirt werden, welches einem **gegebenen Dreieck ähnlich** ist und eine **Grundlinie von gegebener Länge** hat.

Voraussetzung. Gegeben ist uns ein Dreieck STU und eine Strecke s (siehe Fig. 14).

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC derart construiren, daß

1) AB = s
2) △ ABC ~ △ STU ist.

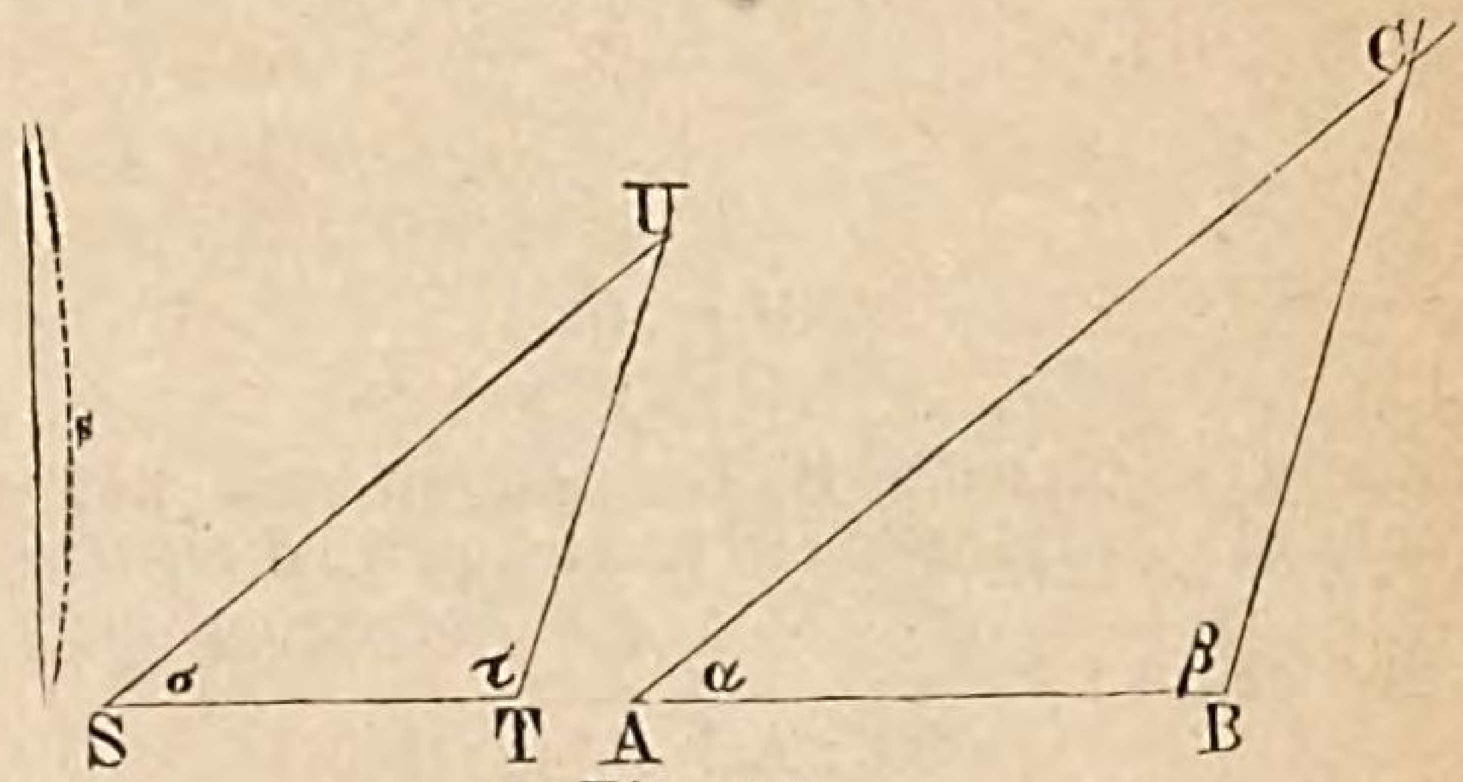


Fig. 14.

Construction. Wir legen uns eine Strecke AB = s hin, tragen an AB in A den Winkel $\alpha = \sigma$ und in B den Winkel $\beta = \tau$ an und bezeichnen den Punkt, in dem sich die freien Schenkel der Winkel α und β treffen, mit C.

Behauptung. 1) AB = s,
2) △ ABC ~ △ STU.

Beweis. Der Construction gemäß ist:

1) AB = s.

Nach der Construction haben wir ferner:

a) $\alpha = \sigma$, b) $\beta = \tau$,

d. h. die beiden Dreiecke ABC und STU stimmen in zwei Winkeln überein; sie sind daher nach dem zweiten Aehnlichkeitssatze ähnlich. In Zeichen wir haben:

2) △ ABC ~ △ STU, w. b. w.

§ 85. Ehe wir zu practischen Anwendungen der Lehre von der Aehnlichkeit übergehen, wollen wir eine Lösung geben von der

Aufgabe VI. Es soll ein Dreieck construirt werden, welches **einem gegebenen Dreieck ähnlich** ist und dessen **Seiten** sich zu den **entsprechenden Seiten** des ähnlichen Dreiecks **wie zwei gegebene Strecken verhalten.**

Voraussetzung. Wir haben ein Dreieck STU und zwei gegebene Strecken m und n (siehe Fig. 15 Seite 450).

Forderung. Wir sollen ein Dreieck ABC derart construiren, so daß

1) △ STU ~ △ ABC, 2) ST : AB = m : n,
3) SU : AC = m : n, 4) TU : BC = m : n ist.

Analysis. Wenn uns von dem gesuchten

Dreieck ABC drei von einander abhängige Bestimmungsstücke bekannt sind, so können wir es construiren. Zwei von diesen Bestimmungsstücken kennen wir unmittelbar, denn wir wissen, daß die Winkel*) des Dreiecks ABC ebenso groß sein müssen wie die Winkel des uns gegebenen

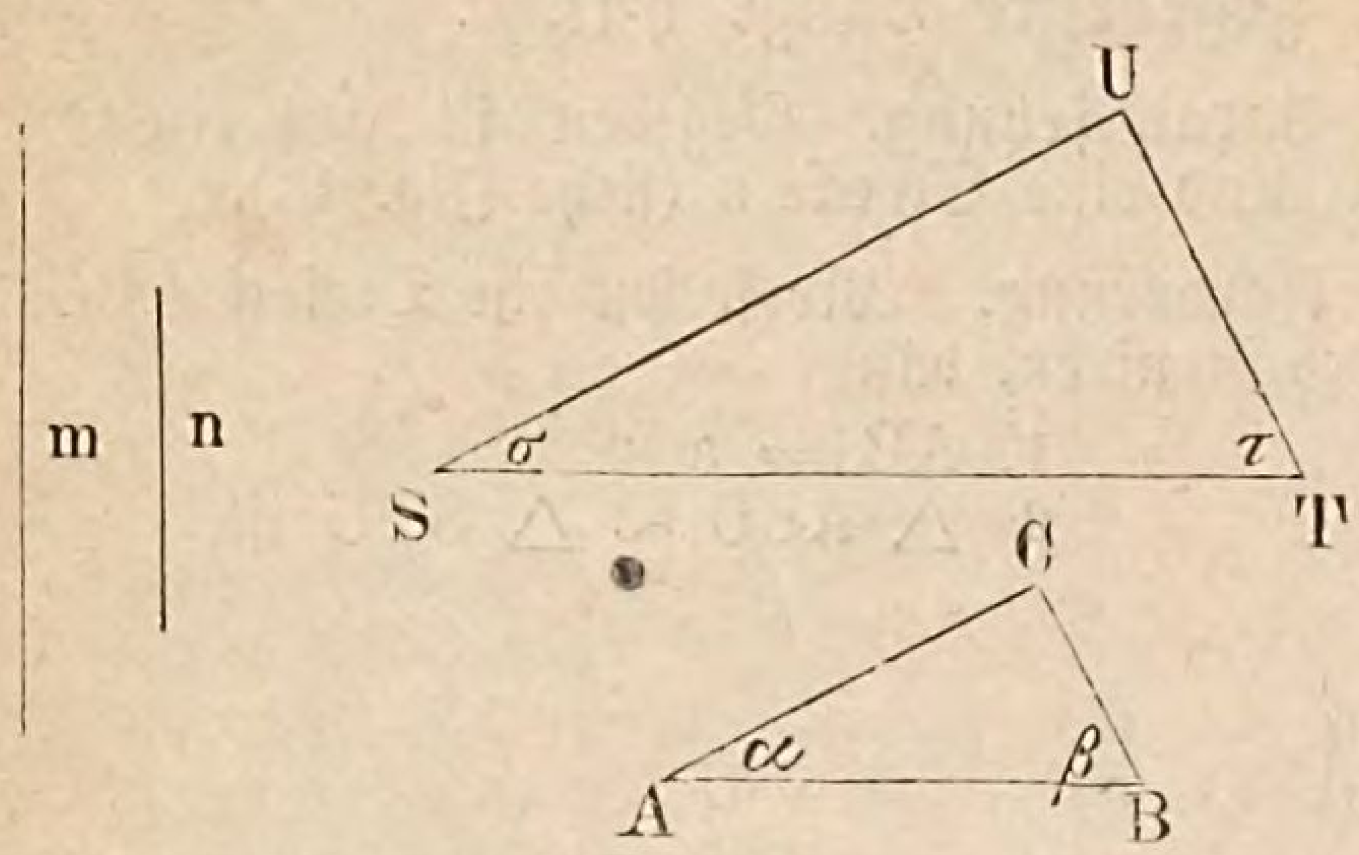


Fig. 16.

ähnlichen Dreiecks STU. Suchen wir uns nun noch als drittes Bestimmungsstück des Dreiecks ABC eine Seite. Nach der Forderung muß die Proportion:

$$ST : AB = m : n$$

bestehen. Vertauschen wir die Seiten der Gleichung, so ergiebt sich:

$$m : n = ST : AB.$$

In dieser Proportion sind uns die drei Glieder m, n und ST bekannt. Das vierte Glied AB (die vierte Proportionale) können wir daher gemäß § 80 construiren. Haben wir erst die Winkel und die Seite AB, so bietet die Construction des Dreiecks ABC keine Schwierigkeiten mehr.

Construction. Wir suchen uns zu den gegebenen Strecken m, n und ST die vierte Proportionale AB derart, daß

$$m : n = ST : AB \text{ ist.}$$

Darauf legen wir uns AB hin, tragen an AB im Punkte A den Winkel $\alpha = \sigma$ und im Punkte B den Winkel $\beta = \tau$ an. Die freien Schenkel der Winkel α und β mögen sich in C treffen.

Behauptung. 1) $\triangle ABC \sim \triangle STU$,
2) $ST : AB = m : n$,
3) $SU : AC = m : n$,
4) $TU : BC = m : n$.

Beweis. Nach der Construction ist in den beiden Dreiecken ABC und STU

$$a)\ \alpha = \sigma,\quad b)\ \beta = \tau.$$

Nach dem zweiten Aehnlichkeitssatz haben wir demnach:

1) $\triangle ABC \sim \triangle STU$, w. z. w.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und STU folgt:

$$ST : AB = SU : AC = TU : BC.$$

Nun ist der Construction gemäß:

$$2)\ ST : AB = m : n,$$

mithin auch:

3) $SU : AC = m : n$, 4) $TU : BC = m : n$,

was behauptet war.

§ 86. Die Messung eines Baumes.

Schon im **achten Briefe** haben wir uns mit **Höhenmessungen** beschäftigt. Wir zeigten dort, daß man die Höhe eines Berges mittelst einer Setzwaage und eines Lothes bestimmen könne, indem man vom Fußpunkte des Berges allmählig zum Gipfel ansteigt. Die dort angegebene Messungsmethode kann aber nur angewendet werden, wenn sich der Berg derartig erhebt, daß vom Fuße bis zum Gipfel so viel Zwischenstationen eingerichtet werden können, als die Messung erfordert. Darum läßt sich z. B. die Höhe einer steilen Felswand nicht auf die im achten Briefe angegebene Weise messen, ebenso wenig auch die Höhe eines Baumes oder eines Thurmes. Vielmehr werden wir uns für die letztgenannten Fälle eine Messungsmethode suchen müssen, welche nicht von uns erfordert, daß wir uns auf den **höchsten Punkt** begeben. Es wäre jedenfalls sehr unbequem, wenn immer Jemand auf die höchste Spitze einer Pappel bez. eines Thurmes klettern müßte, sobald man die Höhe feststellen wollte. Es giebt nun mancherlei Methoden, welche uns gestatten, ohne Besteigung des höchsten Punktes eine Höhenmessung auszuführen; ausführlich werden wir uns damit erst in den trigonometrischen Briefen beschäftigen. Hier wollen wir nur eine Methode erwähnen, die schon Thales, der Vater der Mathematik, in Anwendung brachte, um die Höhe einer Pyramide zu messen; wir wollen nämlich zeigen, wie man ohne große Schwierigkeit mit Hilfe des Schattens ermitteln könne, wie hoch ein Baum bez. ein Thurm sei und die

Aufgabe lösen: Die **Höhe** eines **Baumes** soll **mit Hilfe seines Schattens** gefunden werden.

Lösung. In Fig. 17 (Seite 451) sehen wir auf der Ebene MN einen Baum, dessen Fußpunkt mit S und dessen Spitze mit T benannt ist. Dieser Baum möge einen Schatten werfen, der durch die Strecke SU repräsentirt wird. Daneben erblicken wir eine kleine vertical in den Erdboden gesteckte Stange AB mit einem Schatten von der Länge AC. Denken wir uns nun T mit U und B mit C durch gerade Linien verbunden, so ergeben sich die beiden Dreiecke:

STU und ABC.

---

*) Die **drei Winkel** haben wir nur als **zwei Bestimmungsstücke** aufzufassen, weil aus **zwei Dreieckswinkeln** nach dem Satze, daß die Summe der Dreieckswinkel zwei Rechten gleich ist, die Größe des dritten Winkels berechnet werden kann.

Diese beiden Dreiecke wollen wir mit einander vergleichen! Beide Seiten AB und ST sind vertical und darum parallel. Die Seiten BC und TU stellen Sonnenstrahlen dar, die wir als parallel anzusehen haben. Demnach ist:

$$ST \parallel AB \text{ und } TU \parallel BC.$$

Daraus folgt:

1) $\sigma = \alpha$ als Gegenwinkel bei den Parallelen ST und AB geschnitten von MN.

2) $v = \gamma$ als Gegenwinkel bei den Parallelen TU und BC geschnitten von MN.

D. h. die beiden Dreiecke STU und ABC stimmen in zwei Winkeln überein; sie sind mithin nach dem zweiten Aehnlichkeitssatz einander ähnlich; in Zeichen, wir haben:

$$\triangle ABC \sim \triangle STU.$$

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die gleichliegenden Seiten auf gleiche Weise, daher haben wir:

$$AC : SU = AB : ST,$$

oder wenn wir

AC d. h. den Schatten des Stabes AB mit s,
SU d. h. den Schatten des Baumes ST mit s',
AB d. h. die Länge des Stabes mit h,
ST d. h. die Höhe des Baumes mit x

bezeichnen, haben wir:

$$s : s' = h : x.$$

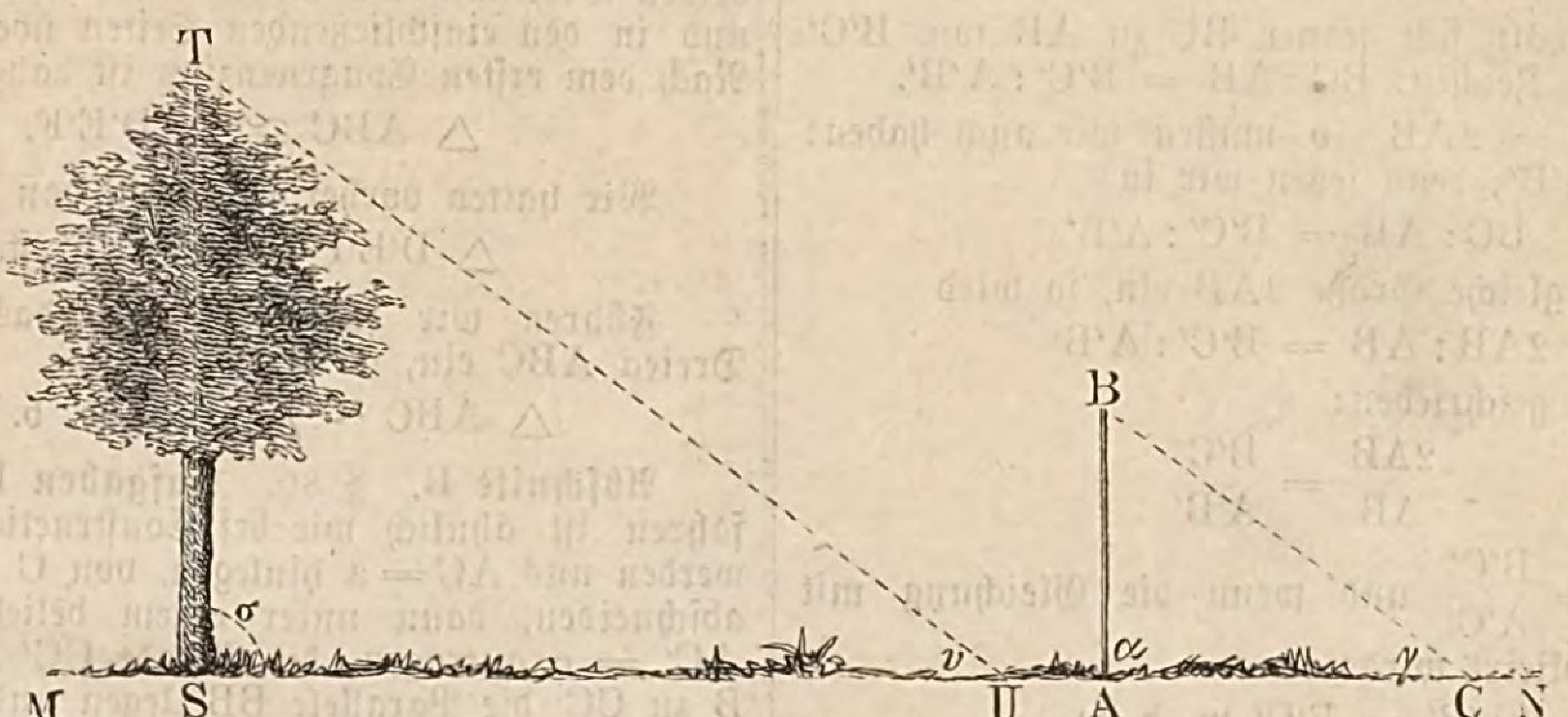


Fig. 17.

Das Product der äußern Glieder ist gleich dem Producte der innern Glieder, mithin ist:

$$sx = s'h.$$

Dividiren wir beide Seiten der Gleichung durch s, so erhalten wir:

$$x = \frac{s'h}{s},$$

d. h. die gesuchte Höhe (x) des Baumes erhalten wir, wenn wir die Länge (s') des Baumschattens mit der Höhe (h) des Stabes multipliciren, und das so entstehende Product durch die Länge (s) des Stabschattens dividiren.

Nehmen wir an, es sei

$$s' = 40 \text{ m}, \quad h = 3 \text{ m}, \quad s = 4 \text{ m},$$

$$\text{so ist } x = \frac{40 \cdot 3}{4} \text{ m} = 30 \text{ m},$$

d. h. die Höhe des Baumes beträgt 30 Meter.

Es sei:

$$s' = 33 \text{ m}, \quad h = 2\tfrac{1}{4} \text{ m}, \quad s = 2\tfrac{3}{4} \text{ m},$$

$$\text{so ist: } x = \frac{33 \cdot 2\frac{1}{4}}{2\frac{3}{4}} = \frac{33 \cdot \frac{9}{4}}{\frac{11}{4}} = 27 \text{ m}.$$

Aufgaben. Es sei:

1) s' = 27 Fuß, h = 2 Fuß, s = 3 Fuß,
2) s' = 24 Fuß, h = 3 Fuß, s = 4 Fuß,
4) s' = 125 Fuß, h = 2 Fuß, s = $2\frac{1}{2}$ Fuß,
5) s' = 91 Fuß, h = 12 Fuß, s = 13 Fuß,

wie groß ist x?

Aehnlich wie die Höhe eines Baumes kann man auch die Höhe eines Thurmes, einer Mauer, einer schroffen Felswand vermittelst eines vertical in den Erdboden eingesteckten Stabes bestimmt werden. Immer wird sich

die Schattenlänge des Stabes zu seiner Höhe wie die Schattenlänge des zu messenden Gegenstandes zur Höhe des Gegenstandes selbst verhalten.

Die Methode, die Höhe eines Gegenstandes mit Hilfe des Schattens zu bestimmen, bietet uns zwar nicht ganz genaue, aber für die Praxis doch genügend zuverlässige Angaben. Ungenauigkeiten lassen sich freilich kaum vermeiden, weil es nicht immer möglich ist, die Grenze des Kernschattens und des Halbschattens festzustellen, und weil das Terrain, auf dem die Messung vorgenommen wird, nicht immer gleichmäßig zur verticalen Richtung geneigt ist.

B. Auflösungen der Aufgaben der Lectionen 50 und 51.

Lection 50.

Abschnitt C. § 70. **Aufgaben.** In Fig. 2 ist a' so groß wie c' und b' doppelt so groß wie a' und c'.

In Fig. 3 ist:

A'B' doppelt so groß wie B'C' und C'D'
A'C' dreimal so groß wie B'C' und C'D'
A'D' viermal so groß wie B'C' und C'D'

und B'C' ebenso groß wie C'D'.

Auf Seite 434 haben wir aus der Bedeutung der Worte: **verhält sich wie** einige Schlüsse gezogen und den Schüler aufgefordert, diese Schlüsse zu begründen.

Wenn sich AB zu CD wie A'B' zu C'D' verhält, so besteht die Proportion:

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Ist nun AB = CD, so muß auch A'B' = C'D' sein, denn nach Seite 289 ist

$$\frac{AB}{CD} = 1; \text{ folglich auch: } \frac{A'B'}{C'D'} = 1.$$

Multipliciren wir beide Seiten der letzten Gl. mit C'D', so wird: C'D' = A'B' w. b. w.

Es verhält sich ferner BC zu AB wie B'C' zu A'B', in Zeichen: BC : AB = B'C' : A'B'.

Ist BC = 2AB, so müssen wir auch haben: B'C' = 2A'B', denn setzen wir in

$$BC : AB = B'C' : A'B'$$

für BC die gleiche Größe 2AB ein, so wird

$$2AB : AB = B'C' : A'B'$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{2AB}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

also $2 = \frac{B'C'}{A'C'}$ und wenn die Gleichung mit A'B' multiplicirt wird:

$$2A'B' = B'C' \text{ w. b. w.}$$

§ 71. **Aufgaben.** a) DE muß zweimal so groß wie D'E und FE zweimal so groß wie F'E sein.

b) DE muß viermal so groß wie D'E, und FE viermal so groß wie F'E sein.

§ 73. **Aufgaben.** 1) Bei den beiden ähnlichen Dreiecken RST und RS'T' ist

a) ∠ RST = ∠ RS'T' b) ∠ RTS = ∠ RT'S'
c) ∠ SRT = ∠ S'RT' d) ST : S'T' = SR : S'R'
e) SR : S'R = RT : RT'
f) RT : RT' = TS : TS'
2) △ ABC ∼ △ A'B'C.

Section 51.

Abschnitt A. § 77. **Aufgaben.** Die Voraussetzung und die Behauptung bleiben wie auf Seite 440.

Beweis. Wir verlängern im Dreieck DEF die Seite FD über D hinaus bis D', so daß FD' = CA wird und legen durch D' zu DE eine Parallele, welche die Verlängerung der Seite FE in E' schneiden möge. Nach dem auf Seite 439 bewiesenen Hilfssatz ist dann:

$$\triangle D'E'F \sim \triangle DEF.$$

Vergleichen wir jetzt das Dreieck ABC mit dem Dreieck D'E'F. Wir haben:

a) $\gamma = \zeta$, nach der Voraussetzung,
b) AC = D'F, nach der Construction.

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke D'E'F und DEF folgt:

$$D'F : DF = E'F : EF.$$

Vertauschen wir in dieser Proportion D'F mit der gleichen Seite AC, so wird

$$AC : DF = E'F : EF.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$AC : DF = BC : EF.$$

Wenn zwei Proportionen in drei Gliedern übereinstimmen, so sind auch die vierten Glieder gleich, mithin:

c) BC = E'F.

Wir haben also:

a) $\gamma = \zeta$, b) AC = D'F, c) BC = E'F.

Die Gleichungen a, b, c sagen uns, daß die beiden Dreiecke ABC und D'E'F in einem Winkel und in den einschließenden Seiten übereinstimmen. Nach dem ersten Congruenzsatz ist daher:

$$\triangle ABC \cong \triangle D'E'F.$$

Wir hatten vorher gefunden, daß

$$\triangle D'E'F \sim \triangle DEF \text{ ist.}$$

Führen wir für △ D'E'F das congruente Dreieck ABC ein, so ist:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ w. b. w.}$$

Abschnitt B. § 80. **Aufgaben** I. Das Verfahren ist ähnlich wie bei Construction III. Wir werden uns AC = a hinlegen, von C aus CB = b abschneiden, dann unter einem beliebigen Winkel AC' = c antragen, die Gerade CC' ziehen, durch B zu CC' die Parallele BB' legen und C'B' mit x bezeichnen. Es ist dann C'B' die gesuchte **vierte Proportionale.**

Aufgaben II. Wenn wir die Gleichungsseiten vertauschen, wird aus:

$$a : x = b : c$$

die Proportion: b : c = a : x.

Machen wir in: a : b = x : d die äußern Glieder zu innern und die innern Glieder zu äußern, so wird aus

$$a : b = x : d$$

die Proportion:

$$b : a = d : x.$$

§ 82. **Aufgaben.** Wenn AB in drei gleiche Theile zerlegt werden soll, so werden wir schon F mit B geradlinig verbinden (siehe Fig. 11) und dann durch D und E zu BF ziehen.

Sollen wie AB in fünf bez. sieben gleiche Theile zerlegen, so werden wir AC noch einmal bez. dreimal um AD verlängern, vom Endpunkte nach B eine gerade Linie ziehen, zu dieser Geraden durch D, E, F Parallelen legen u. s. f.

§ 86. **Aufgaben.**

1) $x = \frac{27 . 2}{3}$ Fuß = 18 Fuß.

2) $x = \frac{24 . 3}{4}$ Fuß = 18 Fuß.

3) $x = \frac{125 . 2}{2\frac{1}{2}}$ Fuß $= \frac{125 . 2}{\frac{5}{2}}$ = 100 Fuß

4) $x = \frac{91 . 12}{13}$ Fuß = 84 Fuß.

Druck und Verlag von Greßner & Schramm in Leipzig.

Burckhardt, W.

Mathematische Unterrichts-Briefe für das Selbststudium Erwachsener Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik und unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner und Gelehrten bearbeitet von W. Burckhardt. Brief 1 - 26 (I. kursus, Lection 1 - 51)

Leipzig [ca. 1896]